

На правах рукописи

КУДРЯВЦЕВ Михаил Дмитриевич

**МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И ОБРАБОТКИ
РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПЛОСКОГО УГЛА
ДЛЯ ГРАДУИРОВКИ ПРЕЦИЗИОННЫХ НАВИГАЦИОННЫХ ДАТЧИКОВ**

Специальности:

05.13.01 – системный анализ, управление и обработка информации

05.11.15 – метрология и метрологическое обеспечение



**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук**

**С.-Петербург
2009**

Работа выполнена в Открытом акционерном обществе «Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор».

Научный руководитель – доктор технических наук, профессор,
заслуженный метролог РФ
Грановский Валерий Анатольевич.

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ
Челпанов Игорь Борисович;
кандидат технических наук,
Лопарев Алексей Валерьевич.

Ведущее предприятие – Федеральное государственное унитарное предприятие
«Всероссийский научно-исследовательский институт
метрологии им. Д. И. Менделеева» (С.-Петербург).

Защита диссертации состоится в 14 часов 29 декабря 2009 г. на заседании диссертационного совета Д 411.007.01 в ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» по адресу: 197046, С.-Петербург, ул. М. Посадская, 30.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в библиотеке ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» и на его сайте <http://www.elektroribor.spb.ru/ru/diss/kudryavtsev.pdf> (автореферат).

Автореферат разослан 28.11.2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук,
профессор



Н. В. Колесов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. При создании аппаратуры точной навигации и управления движением актуальна задача планирования и выполнения высокоточных угловых измерений, включая калибровку углоизмерительных устройств и градуировку их шкал, имеющих самые разнообразные конструкции. Результаты работ в указанной области до последнего времени большей частью удовлетворяли потребности практики. Однако требуемый уровень точности контроля изготавливаемых прецизионных навигационных приборов и систем неуклонно возрастает, и в настоящее время соответствует погрешности 1" и менее. Как правило, известные методы проведения таких измерений либо имеют высокую трудоемкость, либо носят характер косвенных измерений, базирующихся на нечетких исходных данных, либо требуют использования весьма дорогостоящих средств измерений (СИ). В этих условиях актуальна задача рационального планирования измерений с использованием таких резервов как избыточность измерительной процедуры и доступная априорная информация о структуре погрешностей реализованных методов и имеющихся в наличии СИ.

Существует категория измерений, позволяющих реализовать перечисленные резервы. Это – *совокупные измерения* (СоИ), обладающие избыточностью и повышенной степенью подконтрольности получаемых при измерениях первичных данных. Как известно, суть СоИ состоит в том, что измерениям подвергают сразу несколько одноименных *физических величин* (ФВ) x_j ($j = 1, 2, \dots, m$) из некоторого фиксированного набора $\mathbf{X} = \{x_j\}$. Причем вместо поочередных *прямых измерений* (ПрИ) каждой из искомых ФВ (независимо друг от друга) непосредственным измерениям подвергают достаточное количество некоторых разумно выбранных различных их комбинаций вида $y_i = x_{j_1} \pm x_{j_2} \pm x_{j_3} \pm \dots$ ($i = 1, 2, \dots, M$), или в векторной форме $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, сформированных согласно задаваемому матрицей \mathbf{A} плану СоИ (плану комбинирования). Найденные значения всех запланированных комбинаций подвергают обработке (как правило, методом наименьших квадратов – МНК), находя оценки самих искомых ФВ $\{x_j\}$ и апостериорные оценки их точности (с избыточностью $p = M - m$).

В геодезии, топографии, астро-гравиметрическом нивелировании, астрономии и ряде других областей подобные процедуры, известные уже почти 300 лет, принято называть *измерениями с уравниванием* (В. Снеллиус, К. Ф. Гаусс, У. Леверье, И. Г. Галле и др.). В области линейно-угловых измерений предложено несколько специальных вариантов СоИ, основанных на высокоизбыточном комбинировании углов при калибровке правильных многогранных призм (А. Perard, С. О. Taylerson, С. Е. Haven, А. Н. Cook, Е. Е. Шарова, Ф. М. Гречко, М. Г. Богуславский и др.), в том числе по так называемой «схеме всех комбинаций» известной также в англоязычной литературе как «кросс-калибровка».

Следует отметить, что большие объемы требуемых вычислений над первичными данными СоИ породили целый ряд «облегченных» методов обработки без строгой оптимальности, сводящихся в основном к разбиению множества оцениваемых параметров на малые группы, которые вынужденно считали независимыми между собой. При этом, начиная со 2-й половины XX века и вплоть до настоящего времени, СоИ имеют узкоспециализированную направленность, поскольку традиционно считаются специфическим *метрологическим* инструментарием, применяемым исключительно для проведения эталонных работ.

Причины малого распространения СоИ, по-видимому, кроются как в освещаемых ниже пробелах в их теоретических положениях, так и в более сложной организации, включая отмеченные выше существенные вычислительные трудности. В то же время, современные достижения в области программного и аппаратного обеспечения, цифровой обработки сигналов, средств автоматизации, а также доступность микропроцессоров позволяют значительно шире использовать СоИ, которые предоставляют ряд обсуждаемых в диссертации дополнительных возможностей. Поэтому **актуальной** является разработка методов СоИ для градуировки прецизионных навигационных датчиков угла в составе высокоточных навигационных приборов и систем, включая разработку математических измерительных моделей, которые учитывали бы особенности поведения сопутствующих методических и инструментальных погрешностей, на основе правильного планирования и организации СоИ, а также разработки соответствующего аппарата обработки данных с улучшенными точностными характеристиками и подконтрольностью по сравнению с достигнутым уровнем.

Объектом исследования являются полные и неполные (секторные) круговые шкалы, носители которых либо непосредственно входят в состав навигационных устройств различного типа с измерительными (по углу) или управляющими функциями – основные шкалы, либо являются неотъемлемой частью измерительной процедуры, используемой в процессе калибровки/градуировки указанных устройств – вспомогательные (в том числе, неявно заданные) шкалы.

Предметом исследования являются особенности планирования СоИ, включая выбор измерительных моделей и способов комбинирования непосредственно измеряемых величин, а также способы реализации используемого при обработке данных МНК с учетом выделения целевых и мешающих измеряемых величин (параметров), включая способы апостериорного оценивания точности конечных результатов СоИ.

Цель работы – обеспечение требуемой точности угловых измерений при создании прецизионной навигационной аппаратуры на основе СоИ с регулируемой избыточностью и

контролем правильности хода измерительной процедуры, а также обработкой данных по МНК, реализованным в соответствии с выбранным планом СоИ.

В соответствии с поставленной целью решены следующие **основные задачи**:

1. На основе анализа известных примеров успешного применения СоИ в ряде областей измерений (включая угловые) с различной избыточностью оценить существующее состояние теоретических положений СоИ и составить перечень нерешенных вопросов, требующих первоочередного исследования.
2. Построить обобщенное описание СоИ с избыточностью, ориентированное на эффективное использование доступной априорной информации о структуре методических и инструментальных погрешностей.
3. Адаптировать общие задачи планирования эксперимента применительно к СоИ с учетом их избыточности и возможности регулирования плана их выполнения.
4. Разработать методы контроля хода измерительной процедуры СоИ путем проверки групповой согласованности первичных данных в процессе их получения.
5. Разработать методы обнаружения и исключения выбросов первичных данных СоИ, учитывающие возможную критическую зависимость достижимой точности результатов от усечения первичных данных.
6. На основе построения классификации круговых шкал и анализа существующих методов их градуировки в случае полного диапазона разработать методы градуировки круговых шкал неполного диапазона, включая случай сокращенного числа серий.
7. Разработать адаптивный вариант процедуры СоИ, включающий выбор/уточнение/переопределение модели и соответствующее правило останова и позволяющий достичь требуемого уровня точности конечных результатов более экономно, с использованием сокращенного плана измерений.

Методологические основы исследования

Основополагающими в разработке методов высокоточных совокупных угловых измерений являются работы следующих специалистов: М. Г. Богуславского, Ф. М. Гречко, Е. Е. Шаровой, Ю. Н. Шестопалова, R. Angus, H. Bosse, I. Bresina, A. H. Cook, D. Flack, C. E. Haven, A. Perard, R. Probst, C. O. Taylerson, а также организаций ФГУП «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», National Physical Laboratory (NPL, Великобритания), Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB, Германия).

Анализ указанных работ показал, что необходимым при поиске рациональных методов высокоточных совокупных угловых измерений является этап поиска, изучения свойств и обоснования развитых измерительных моделей, адаптированных к задаче

калибровки полных и неполных (секторных) круговых шкал. При этом разрабатываемые модели должны иметь высокую степень регулирования избыточности и возможность проверки их адекватности (с последующим уточнением). Для этого используются методы математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, линейной алгебры, статистического имитационного моделирования на ЭВМ, теории планирования эксперимента и обработки данных, численные математические методы, символического исчисления. Соответствующие теоретические исследования проводились, в том числе, с использованием сред программирования MS Excel и MathCAD.

Научные результаты, полученные в диссертационной работе

1. Введены показатели, необходимые для описания плана СоИ общего вида и позволяющие определить реализуемость плана, установить возможность исключения дефектных первичных данных, регулировать количество возможных оцениваемых параметров, повысить достижимую точность получаемых оценок (достаточность, индекс устойчивости, ширина, глубина плана).
2. Разработан метод разбиения измерительной процедуры СоИ на серии, каждая из которых обусловлена факторизацией плана по одному из мешающих параметров, что позволяет осуществлять внутри- и межсерийный контроль хода процедуры.
3. Обобщены методы апостериорного оценивания точности результатов СоИ на основе двухкомпонентной регрессионной модели с переменной матрицей плана, в которой разделение на целевые и мешающие параметры основано на доступной априорной информации о структуре методических и инструментальных погрешностей.
4. Разработан метод реализации МНК-алгоритма обработки первичных данных СоИ, допускающий исключение части дефектных данных с сохранением возможности получения искомых оценок.
5. Предложен метод уточнения модели СоИ путем включения в число искомых параметров неизвестных постоянных погрешностей с известными структурными связями и установлены соотношения между точностными свойствами МНК-алгоритмов обработки для исходной и уточненной моделей.
6. Предложена адаптивная процедура СоИ с правилом останова, основанном на оценивании точности промежуточных результатов, которая позволяет ускорить достижение требуемого уровня точности результатов за счет сокращения плана СоИ.

Новизна и практическая значимость работы заключается в том, что создан ряд неизвестных ранее математических измерительных моделей, способов планирования и алгоритмов обработки данных СоИ, в том числе, для различных вариантов задачи градуировки круговой шкалы.

Полученные результаты легли в основу разработанных методов измерений углов в интересах прецизионного навигационного приборостроения. Они доведены до уровня практических инструкций по подготовке и проведению измерений, оформленных в виде нормативных документов ЦНИИ «Электроприбор», в том числе в части калибровки прецизионных исходных углозадающих устройств. Их применение позволило выполнить калибровку ряда прецизионных углозадающих и углоизмерительных приборов в фиксированных точках шкалы с апостериорной оценкой погрешности $0,2''-1''$.

Разработаны программные реализации в вычислительных средах MS Excel и MathCAD полученных методов планирования и оптимальных алгоритмов обработки первичных данных угловых измерений на основе СоИ, что позволило удовлетворить требования, сформулированные к уровню точности угловых измерений применительно к проектированию и изготовлению прецизионной навигационной аппаратуры.

Предложенная концепция уточнения измерительной модели СоИ была также успешно применена при анализе наборов данных, полученных при калибровочных работах на государственном эталоне плоского угла в ходе подготовки к международным сличениям. В итоге были обнаружены и исключены из результатов измерений неизвестные ранее систематические погрешности на уровне $0,15''$.

Завершается создание исходной образцовой углоизмерительной установки (локального эталона плоского угла) ЦНИИ «Электроприбор». Разработан проект рекомендуемой локальной поверочной схемы, или *локальной схемы прослеживаемости* (ЛСП) предприятия, возглавляемой создаваемым локальным эталоном. Ожидаемый уровень точности передачи размера единицы плоского угла на верхних ступенях указанной ЛСП составляет $0,1''-0,2''$.

Таким образом, в работе эффективно решены сформулированные задачи, получены и внедрены достоверные научные результаты.

На защиту выносятся:

- 1) метод сопоставления вариантов плана СоИ по следующим, впервые введенным в рассмотрение, показателям: достаточность, индекс устойчивости, ширина, глубина плана, включая конструктивные способы их вычисления;
- 2) метод повышения апостериорной точности основных результатов СоИ (МНК-оценок целевых параметров) путем включения в план СоИ в качестве мешающих параметров систематических погрешностей с известными структурными связями;
- 3) метод индексирования порядка перебора комбинаций плана СоИ с целью его разбиения на серии, состоящий в поочередной фиксации неизвестных уровней каждого мешающего

параметра и установления, для зафиксированного уровня, перебора комбинаций всех остальных параметров;

- 4) метод преобразования матрицы плана СоИ посредством двойного окаймления, позволяющий исключить часть первичных данных при их МНК-обработке без потери достаточности плана.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих национальных и международных научно-технических конференциях: «II Всесоюзное совещание по теоретической метрологии "Физические проблемы точных измерений"» (Л., 1983); «X–XII Всеакадемические международные школы по проблемам метрологического обеспечения и стандартизации. (Минск, 1992; СПб., 1994–1995); «Диагностика, информатика и метрология» (СПб., 1994); XXII–XXV научно-технические конференции памяти Н. Н. Острякова, (СПб., 2000–2006); «Теория и техника передачи, приёма и обработки информации», (Туапсе, 2004); «VII–X конференции молодых ученых "Навигация и управление движением"» (СПб, 2005–2008); «IMEKO XVIII WORLD CONGRESS "Metrology for a Sustainable Development"» (Rio de Janeiro, Brazil, 2006); «Всероссийская научно-техническая конференция "Измерения и испытания в судостроении и смежных отраслях" (СПб., 2006, 2008).

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 27 печатных работ, в том числе 9 статей (из них 5 в изданиях, рекомендованных ВАК), 18 тезисов доклада.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, пяти приложений и списка литературы, включающего в себя 85 источников. Общий объем работы – 172 машинописных страниц, включая 24 рис., 9 табл.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, кратко охарактеризовано состояние проблемы, сформулированы научная новизна, цели и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту.

Идейной основой диссертационной работы является наличие двух основных путей удовлетворения возросших требований к точности измерений. Первый из них предполагает осуществление больших капиталовложений в полное обновление парка СИ. Второй путь (развиваемый в данной работе), при существенно меньших капиталовложениях на приобретение (изготовление) новых СИ, делает акцент на разработку недостающего методического инструментария (включая планирование эксперимента при СоИ, алгоритмы обработки данных и их программные реализации, внедрение этих методов непосредственно

в создаваемую аппаратуру и др.) и основан на поиске резервов точности имеющихся СИ за счет более глубокой проработки методической составляющей.

Прослежена история применения выбранной идеологии СоИ в смежных областях (астрономия, геодезия, маркшейдерское дело и др.). Более подробно описаны и изучены специальные высокоточные метрологические процедуры, основанные на СоИ, включая задачу калибровки эталонных многогранных призм в составе государственного эталона плоского угла.

В работе развиты теоретические положения СоИ и предложены схемы построения высокоточных круговых шкал, допускающих выполнение их самоконтроля. Перечислены основные ресурсы, за счет привлечения которых повышается точность результатов измерительного эксперимента и степень подконтрольности его хода.

Несмотря на известные решения целого ряда частных вопросов и наличие примеров конкретных реализаций, в литературе нет указаний на построение полной теории СоИ. В диссертационной работе восполнен этот пробел путем рассмотрения системы вложенных измерительных моделей. За основу принята двухкомпонентная регрессионная модель общего вида с переменной матрицей плана и введением ряда новых понятий и показателей, учитывающих метрологическую специфику задачи. Предложены также конструктивные алгоритмы вычисления указанных показателей. В конце введения перечислены основные научные результаты работы.

В главе 1 выполнен обзор известных методов и средств точных угловых измерений, включая способы оценивания показателей точности их результатов. Основной упор сделан на градуировку *круговых шкал* (КШ). Предложена их развернутая классификация, на основе которой выполнена общая постановка решаемой в работе задачи как взаимной (одновременной) градуировки двух КШ одинаковой дискретности, решение которой позволяет получить детальное описание точностных характеристик градуируемых шкал. Показано, что с метрологической точки зрения задача взаимной градуировки шкал представляет собой СоИ, т.е. комбинационные измерения, известные также как измерения с уравниванием.

Выявлено два основных случая взаимной градуировки, принцип формирования геометрических моделей которых в простейшем случае представлен на рис. 1.

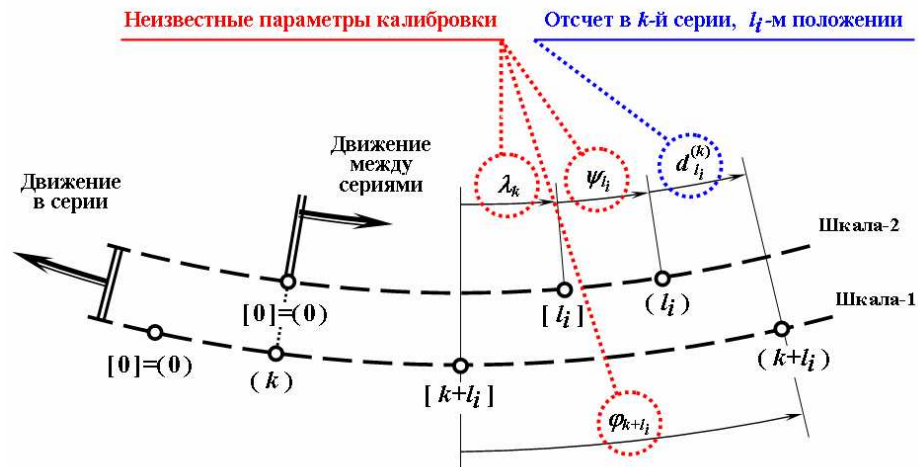


Рис. 1. Два основных движения и соотношение между параметрами при одновременной градуировке двух круговых шкал с равноправным участием

Указанная классификация КШ выполнена по ряду предложенных классификационных признаков. Приведены примеры реализации КШ с акцентированием на введенные признаки. Предложены способы описания погрешности КШ, отличающиеся различной степенью детализации. Соответственно, предложено относить устройства-носители КШ к двум частично пересекающимся группам, в каждой из которых сформулированы свои правила выполнения их градуировки. Показано, что специальным вариантом взаимной градуировки является возможная в ряде случаев самоградуировка КШ, которая опирается на встроенную (явным или неявным образом) в углозадающее устройство дополнительную шкалу и может быть реализована двумя основными способами.

Выполнено предварительное рассмотрение особенностей обработки данных при градуировке шкал, включая построение, аттестацию и верификацию ее программной реализации.

В завершении первой главы дана характеристика методов исследования и намечены пути получения основных результатов работы. Выполнено структурирование обозначенной общей задачи, позволяющее разбить ее на ряд частных задач. Перечень частных задач получен как за счет проработки теоретических положений СоИ, так и за счет переформулирования задач регрессии, оптимизации и планирования эксперимента применительно к СоИ, среди которых важнейшими являются следующие:

1. Разработка обобщенного формального описания СоИ и способов параметризации их плана (на основе двухкомпонентной регрессионной модели с переменной матрицей плана и учета разбиения на серии при различных типах избыточности).
2. Разработка модифицированных процедур проверки внутренней согласованности и «регулярности» данных (внутри и между сериями, включая обнаружение и исключение выбросов).

3. Разработка оптимальной адаптивной процедуры СоИ.
4. Разработка модифицированных методов МНК-обработки данных, включая методы апостериорного анализа структурной точности результатов.
5. Привязка алгоритмов обработки данных к конкретным программно-вычислительным средам.
6. Разработка принципов построения локального исходного эталона плоского угла предприятия и возглавляемой им схемы прослеживаемости.

При этом задача №3 интегрирует полученные в работе теоретические результаты в области методов высокоточных угловых измерений, а решение задач №4–6 позволяет перейти к их реализации на практике.

В настоящей работе перечисленные задачи адаптированы к области высокоточных угловых измерений с ориентацией на достижение уровня погрешностей в доли угловых секунд и менее, что является актуальным при создании аппаратуры точной навигации и управления движением на современном этапе технологического развития, включая ближайшую перспективу.

В главе 2 выполнено формальное описание процедуры СоИ. Предложена двухкомпонентная регрессионная модель общего вида с переменной матрицей плана и введением ряда новых понятий и показателей, учитывающих метрологическую специфику задачи. Предложена классификация планов СоИ, являющихся главным элементом описания измерительной процедуры. Введено понятие достаточности избыточного плана (разрешимости соответствующей системы уравнений, что соответствует понятию наблюдаемости в теории управления), а также ряд дополнительных характеристик (реализуемость, несингулярность, индекс устойчивости, дисперсионная полнота, полная / частичная / блочная ортогональность, полная / частичная / блочная неповторяемость, полная / блочная симметричность, эквивалентность). Вводятся также понятия «ширины» и «глубины» плана. Модифицирована задача построения оптимального плана (по сравнению с общей теорией планирования эксперимента) с учетом указанных характеристик.

Разработаны методы проверки сохранения / потери / восстановления указанных свойств. Приведены характерные примеры СоИ с различной избыточностью. Основной упор при развертывании примеров сделан на оценки точности результатов, включая влияние на результат характерных систематических погрешностей.

Обсуждаются два типа избыточности при выполнении СоИ (повторение и комбинирование) и их соотношение с другими параметрами процедуры. Рассмотрены особенности выбора плана СоИ с учетом требований к точности результатов.

Рассмотрены особенности применения МНК как стандартного метода обработки первичных данных с учетом модификации регрессионной модели погрешностей СоИ. Рассмотрены влияние постановки задачи оптимизации на выбор алгоритма обработки данных СоИ. Рассмотрены условия применения конкурирующих алгоритмов обработки при наличии неформализованной априорной информации о погрешностях (упрощенные и эмпирические алгоритмы). Предложен способ уточнения математических моделей погрешностей с целью повышения точности результатов СоИ, возможный в ряде случаев.

Выделены важнейшие аспекты СоИ, которые необходимо учитывать при их классификации с целью обоснованного выбора плана совокупных измерений и последующего *алгоритма обработки* (АО), состоящие в следующем.

Комбинирование при выполнении СоИ выполняют по их *плану*, который задается матрицей $A = \{a_{ij}\}$ коэффициентов вхождения искомым величин $\mathbf{X} = \{x_j\}$, $\dim(\mathbf{X}) = m$, в непосредственно измеряемую i -ю комбинацию $y_i = \sum a_{ij} x_j$. Для записи таких зависимостей наиболее подходит аппарат линейной алгебры и матричного исчисления. Следует также отметить, что такое представление данных СоИ, по сути, является стандартной линейной регрессионной моделью их погрешностей, что изображено на рис. 2.

Представим уравнения СоИ с учетом погрешностей в матричном виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{E}, \quad (1)$$

где $\dim(\mathbf{Y}) = M$; $\mathbf{E} = \{\varepsilon_i\}$ – погрешности *результатов наблюдений* (РН) \mathbf{Y} , которых касаются главные предположения, основанные на доступной априорной информации (подробнее см. рис. 2).

Как известно, МНК-оценки искомым параметров на основе системы уравнений (1) с избыточностью $p = M - m$, которые принято называть условными, записываются в виде

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Y}, \quad (2)$$

являясь решениями соответствующих нормальных уравнений с матрицей $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Требование обратимости этой матрицы, необходимое для нахождения оценок всех компонентов вектора \mathbf{X} , названо *достаточностью* плана СоИ и эквивалентно условию $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$. Известно также, что в случае $\mathbf{E} \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ указанные оценки (2) несмещены и имеют наименьшие в классе всех линейных оценок дисперсии/ковариации:

$$D(\hat{\mathbf{X}}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \sigma^2. \quad (3)$$

При этом обычно апостериорную оценку неизвестной (в общем случае) дисперсии РН σ^2 , соответствующей общему уровню шумов, выполняют по невязкам условных уравнений:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{p} (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}). \quad (4)$$

Малость указанной дисперсии характеризует такое важное свойство СоИ как их *сходимость*.

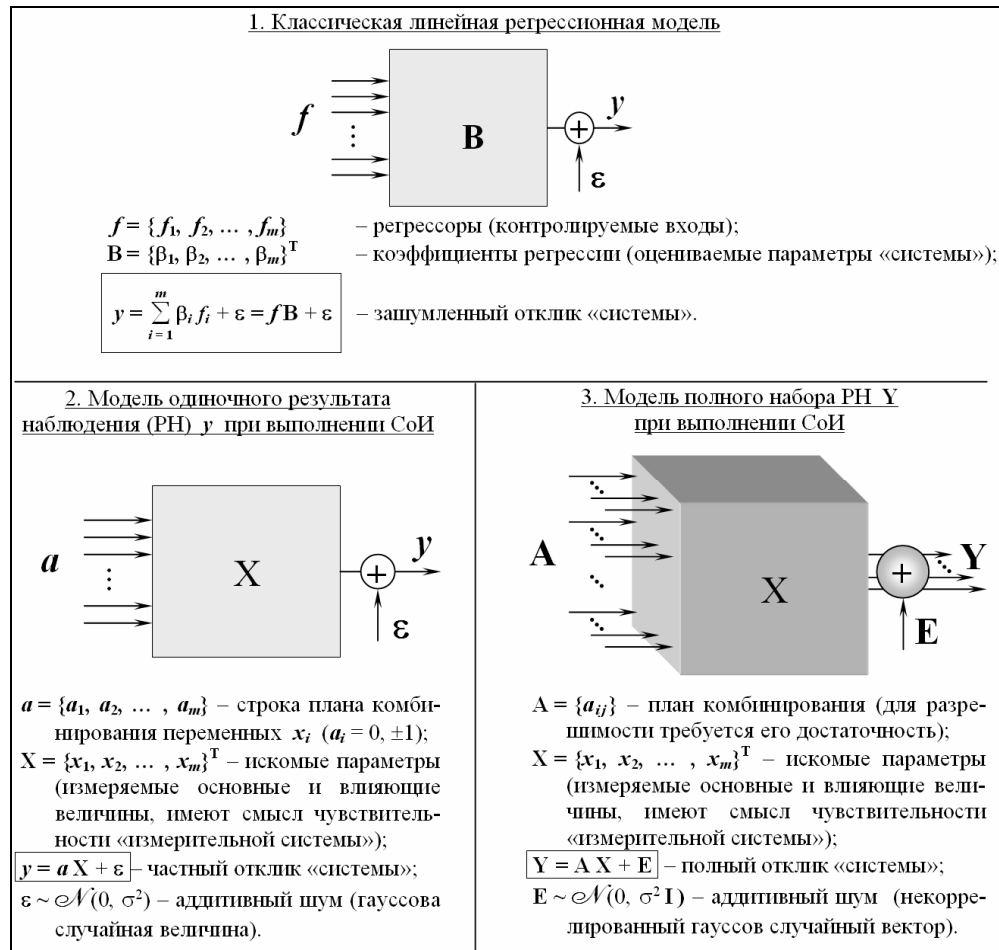


Рис. 2. Особенности процедуры СоИ, влияющие на их математическую модель: стандартное представление

В дополнение к традиционно применяемым при МНК-обработке данных известным формулам (1)–(4) в работе введена в рассмотрение двухкомпонентная регрессионная модель. Она основана на том, что входящие в уравнения (1) искомые величины $X = \{x_j\}$ могут включать в себя не только основные (целевые) ФВ, но и по нашему усмотрению ряд дополнительных величин, имеющих смысл мешающих параметров. Это в первую очередь различного рода систематические погрешности, значения которых остаются постоянными на протяжении всей измерительной процедуры СоИ в силу жесткого контроля условий измерений. Причем их наличие предполагается структурно, т.е. на уровне вхождения в модельные уравнения с априорно неизвестными значениями. Такой взгляд, по сути, означает, что в случае появления оснований подозревать возможность нарушения условия несмещенности $M(E) = \mathbf{0}$ вектора погрешностей E мы пытаемся структурировать обнаруженные сдвиги путем введения дополнительных *мешающих параметров* X_1 , оцениваемых попутно с целевыми параметрами X . Это проиллюстрировано на рис. 3.

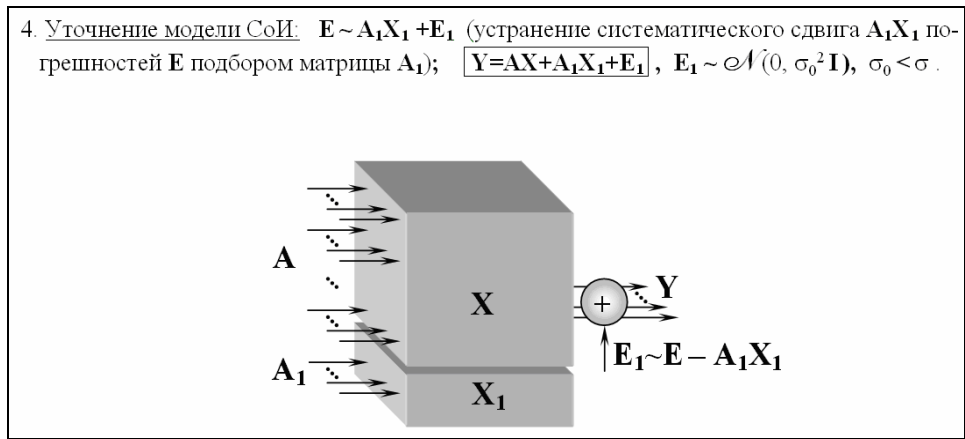


Рис. 3. Особенности процедуры СоИ, влияющие на их математическую модель: расширенное представление

На основе введенной двухкомпонентной модели, после очевидных симметризирующих переобозначений $m \rightarrow m_1$, $m_1 + m_2 \rightarrow m$, $A \rightarrow A_1$, $X \rightarrow X_1$, $A_1 \rightarrow A_2$, $X_1 \rightarrow X_2$, $E_1 \rightarrow E_0$, имеем следующее расширенное представление первичных данных:

$$Y = AX + E = A_1 X_1 + A_2 X_2 + E_0, \quad (5)$$

При этом соответствующий алгоритм обработки (на основе МНК) в случае двух блоков параметров имеет ряд особенностей. А именно, к классическим формулам (2)–(4) следует добавить следующие, лежащие в основе предлагаемой процедуры перехода к уточненной модели (5), факты, на которые реже обращают внимание.

<A> Если РН Y все-таки содержали неизвестные *неисключенные систематические погрешности* (НСП): $M(E) \neq 0$, то их "усредненные" (примененной МНК-обработкой) значения войдут в \hat{X}_1 как смещения, а вариации увеличат оценки (4) и, тем самым, (3).

 Алгебра клеточных матриц (формулы Фробениуса и т.п.) позволяет понизить размерность обрабатываемых матриц. При этом если нас интересуют лишь оценки \hat{X}_1 , а m_2 велико (либо является нефиксированным параметром), то можно ограничиться одной из четырех клеток матрицы нормальных уравнений $A^T A$.

<C> Применяя параллельно другие возможные АО (например, эмпирические), можно получить альтернативные оценки σ^2 , в частности, внутрисерийные и межсерийные, что позволяет косвенно контролировать условие $M(E) = 0$, т.е. сходимость СоИ.

<D> МНК-оценки (2) инвариантны к перестановке строк матрицы A , т.е. к порядку получения РН. Однако при наличии МП ($m_2 > 0$) может быть продиктовано конкретное разбиение на серии с целью стабилизации очередной компоненты МП внутри отдельной серии. При этом как порядок серий, так и порядок РН внутри каждой серии по-

прежнему не важен и определяется удобством перебора комбинаций (1) или (5), в том числе с возможной автоматизацией.

<E> Как правило, при выполнении СоИ имеется две на первый взгляд симметричных возможности использования участвующего в измерениях компаратора: сравнивать очередную комбинацию измеряемых величин с образцовой мерой в «обычном» порядке, а затем в «обратном» порядке, (меняя местами две чаши весов, два автоколлиматора, полярность тока и т.п.). Включая в (1) оба эти случая, т.е. удваивая число РН, получаем весьма точный способ проверки симметричности компаратора. При этом полные МНК-оценки распадаются в полусуммы "правых" и "левых" оценок (аналогично [6]), позволяя реализовать п. <С>.

<F> Если мы убедились в наличии неизвестных ранее НСП, то можно пытаться скорректировать структуру МП: увеличить m_2 и найти уточненные МНК-оценки для расширенной матрицы A (по тем же первичным данным Y). О качестве уточненной модели судят по отношению новых и старых оценок σ^2 (4), либо вторых начальных моментов, поскольку в рамках уточненной модели прежние оценки (2) могут оказаться смещенными.

Критерием соответствия структуры РН Y вновь добавляемым параметрам X_2 предложено считать значимое уменьшение оценки уровня шумов $\hat{\sigma}_0^2$ по сравнению с оценкой (4). Здесь оценка $\hat{\sigma}_0^2$ получается аналогично (4) на основе тех же самых первичных данных Y , но при замене матрицы плана A_1 на расширенную матрицу $\tilde{A} = (A_1 | A_2)$. В качестве критериальной функции выбрано дисперсионное отношение Фишера:

$$F_{m_2, M-m_1-m_2-1} = \frac{\frac{1}{m_2}(\Delta - \Delta_0)}{\frac{1}{M-m_1-m_2-1} \Delta_0} = \frac{M-m_1-m_2-1}{m_2} \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} - 1 \right), \quad (6)$$

где $\Delta = (Y - A_1 \hat{X}_1)^T (Y - A_1 \hat{X}_1)$, $\Delta_0 = (Y - A_1 \hat{X}_1 - A_2 \hat{X}_2)^T (Y - A_1 \hat{X}_1 - A_2 \hat{X}_2)$, $\begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix} = (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T Y$.

Вместо сумм квадратов невязок Δ , Δ_0 в (6) удобнее подставлять оценки дисперсий (4): $\hat{\sigma}^2 = \frac{\Delta}{M-m_1}$; $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Delta_0}{M-m_1-m_2}$ и проверять значимость их отношения. Например, в [6] для девяти независимых наборов первичных данных оказалось $4 < \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_0^2} < 11$ ($M = 132$, $m_1 = 22$, $m_2 = 11$, $M - m_1 - m_2 - 1 = 98$). Для уровня значимости $P = 0,99$ имеем $F_{11, 98} = 2,43$, что соответствует $\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_0^2} < 1,15$ и с большим запасом подтверждает уточненную в [6] структуру погрешности.

Следует также отметить, что первичные данные Y , помимо погрешностей E , описываемых принятой моделью, могут содержать несколько резко выделяющихся РН – *выбросов*, процедуры исключения которых хорошо развиты в основном для прямых измерений с многократными наблюдениями. Напрямую указанные методы неприменимы к

СоИ из-за существенно более сложных АО, а также сложной зависимости АО от усечения данных. В работе предложена формализация задачи исключения выбросов в случае избыточных СоИ, основанная на введении понятия *индекса устойчивости* плана, и предложен допускающий исключение части дефектных первичных данных способ реализации АО посредством двойного окаймления матрицы плана.

Рассмотрены также особенности контроля хода измерительной процедуры при выполнении СоИ (внутри- и межсерийный промежуточный контроль точности, связь равноточности результатов и степени симметричности плана СоИ).

В главе 3 на основе выполненных в предыдущей главе теоретических построений и полученных соответствующих принятым моделям алгоритмов обработки данных обоснована, разработана и реализована более совершенная измерительная процедура, позволившая повысить точность государственного первичного эталона плоского угла.

Данная измерительная процедура касается задачи калибровки правильной многогранной призмы, входящей в состав указанного эталона в качестве рабочего эталона. Показано, что используемые при этом два *автоколлиматора* (АК), один из которых неподвижен, а второй может перемещаться по круговой направляющей, порождают вторую, неявно заданную, опорную круговую шкалу, наличие которой и позволяет выполнить калибровку призмы. Были получены стандартные строгие МНК-оценки, причем для этого потребовалось провести дополнительный анализ точности на основе групповой (двухкомпонентной) структуры и повышенной степени симметрии плана измерений. Как следствие, было показано, что традиционно используемый ранее в данной задаче эмпирический алгоритм обработки, известный как «метод разностей», значительно уступает по точности оптимальному МНК (используя только около половины содержащейся в первичных данных измерительной информации).

Более того, примененный МНК-алгоритм обработки позволил обнаружить наличие неизвестных ранее систематических погрешностей на уровне $0,15''$. Предложена интерпретация физического смысла выявленных погрешностей как погрешностей из-за ориентации (наклона) неподвижного автоколлиматора относительно граней призмы (индивидуальная пирамидальность граней).

На основе предложенной уточненной модели, описывающей первичные данные с учетом обнаруженных систематических погрешностей, получены уточненные МНК-оценки углов призмы (по тем же самым экспериментальным данным). Вследствие этого уровень погрешностей первичных данных (отчетов по автоколлиматорам) был уменьшен в 2–3,5 раза, а уровень погрешностей окончательных результатов (поправок углов калибруемой призмы) был уменьшен в 1,5–2,3 раза.

Получен также ряд новых теоретических результатов, непосредственно связанных с задачей калибровки правильной многогранной призмы. Среди основных – неизвестные ранее аналитические соотношения между тремя вложенными моделями, поэтапно уточняющих результаты – оценки отклонений нарастающих углов призмы между нулевой и последующими гранями от их номинальных значений, включая соотношения точности указанных моделей. Указанные соотношения приведены в табл. 1.

В этой таблице первичные данные (РН d_{kl}) получены за $n-1$ серий (индекс k) по n в каждой серии (индекс l). При этом приведенный выше рис. 1 служит геометрически наглядной моделью получения указанных РН. Следует заметить, что индекс $l+k$ берется по модулю n , т.е. редуцируются к нужному диапазону номеров граней призмы от 0 до $n-1$, а тождественно нулевые величины $\beta_0 \equiv 0$, $d_{0l} \equiv 0$ добавлены для упрощения формул. Подчеркнем, что в данной процедуре выполнено специфическое условие «удвоения» – каждый угол призмы измеряется дважды (с условной перестановкой местами двух АК). Кроме того, имеется несколько эмпирических разностных оценок искомых углов (включая оценки, названные в работе «правыми»/«левыми») и парных им оценок σ^2 , что облегчает поиск уточненной модели.

Табл. 1

Семейство вложенных моделей СоИ при калибровке n -гранной призмы:
(I) – без поправок; (II) – с поправками $\{\lambda_k\}$ на опорные углы между осями АК;
(III) – с дополнительными поправками $\{\mu_j\}$ на ориентацию неподвижного АК

Аспект	I. Упрощенная модель	II. Стандартная модель	III. Уточненная модель
1. Структурные уравнения модели; $k = 1, \dots, n-1$, $l = 0, \dots, n-1$	$d_{kl} = \beta_{l+k} - \beta_l$	$d_{kl} = \beta_{l+k} - \beta_l - \lambda_k$	$d_{kl} = \beta_{l+k} - \beta_l - \mu_l - \lambda_k$ ($\sum \mu = 0$)
Размерностные параметры моделей			
Всего данных, M	$n(n-1)$	$n(n-1)$	$n(n-1)$
Число ЦП/МП, n_1/n_2	$n-1/0$	$n-1/n-1$	$n-1/2n-2$
Избыточность, p	$(n-1)^2$	$(n-1)(n-2)$	$(n-1)(n-3)$
2. Наличие частных оценок ЦП (возможны за счет «удвоения» данных)	$\tilde{\beta}_j, \tilde{\beta}'_j$ – «правые»/«левые» оценки (не смещены), где $\begin{cases} \tilde{\beta}_j = \frac{1}{n} (\tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_j) \\ \tilde{\Delta}_j = \sum_k d_{kj} \end{cases}; \begin{cases} \tilde{\beta}'_j = \frac{1}{n} (\tilde{\Delta}'_j - \tilde{\Delta}_0) \\ \tilde{\Delta}'_j = \sum_k d_{k,j-k} \end{cases}$	Появляются сдвиги: $M(\tilde{\beta}) = \beta_j + \frac{n-1}{n} (\mu_j - \mu_0)$; $M(\tilde{\beta}') = \beta_j + \frac{1}{n} (\mu_j - \mu_0)$	
3. МНК-оценки	$\hat{\beta}_j^I = \hat{\beta}_j^{II} = \frac{1}{2} \tilde{\beta}_j + \frac{1}{2} \tilde{\beta}'_j$ (инвариантны по λ)	$\hat{\beta}_j^{III} = -\frac{1}{n-2} \tilde{\beta}_j + \frac{n-1}{n-2} \tilde{\beta}'_j$	
	–	$\hat{\lambda}_k = -\frac{\delta_k}{n}$, где $\delta_k = \sum_l d_{kl}$ (инвариантны по μ)	
	–	$\hat{\mu}_l - \hat{\mu}_0 = \frac{n}{n-2} (\tilde{\beta}_l - \tilde{\beta}'_l)$	
Дисперсии МНК-оценок	$D(\hat{\beta}_j^I) = D(\hat{\beta}_j^{II}) = \frac{\sigma^2}{n}$		$D(\hat{\beta}_j^{III}) = \frac{2(n-1)}{n(n-2)} \sigma_0^2$
4. Оценка единичной дисперсии согласно (4)	$\hat{\sigma}_I^2$ (грубая оценка σ^2)	$\hat{\sigma}_{II}^2$ (оценка σ^2)	$\hat{\sigma}_{III}^2$ *) (оценка σ_0^2)
5. Сдвиги МНК-оценок (при уточнении модели) и соотношение их точности	$\begin{cases} \hat{\beta}_j^I = \hat{\beta}_j^{II} \text{ (сдвиги не появляются)} \\ \hat{\sigma}_I^2 = \frac{n-2}{n-1} \hat{\sigma}_{II}^2 + \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n-1} \sum \hat{\lambda}_k^2 \right) \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\beta}_j^{II} = \hat{\beta}_j^{III} + \frac{1}{2} (\hat{\mu}_j - \hat{\mu}_0) \\ \hat{\sigma}_{II}^2 = \frac{n-3}{n-2} \hat{\sigma}_{III}^2 + \frac{n}{n-2} \left(\frac{1}{n} \sum \hat{\mu}_j^2 \right) \end{cases}$	

*) Значения оценок $\hat{\sigma}_{III}^2$ оказались меньше в 4–11 раз по сравнению с $\hat{\sigma}_{II}^2$.

При анализе данных этой таблицы обращают на себя внимание среди прочих следующие факты. Добавление в структуру погрешностей МП λ не изменило МНК-оценки основных параметров β , а добавление МП μ не изменило МНК-оценки МП λ . Однако оценка единичной дисперсии σ^2 , как показывает последняя строка таблицы, весьма чувствительна к обоим уточнениям модели, уменьшаясь соответственно на средний квадрат λ и μ .

Разработаны также методы планирования и обработки данных СоИ специального вида при попарных сличениях дискретных круговых шкал, одна из которых или обе имеют неполный диапазон, в том числе, с выполнением сокращенного числа серий.

В главе 4 сформулированы предложения по созданию локального эталона плоского угла предприятия на основе составной угловой меры повышенной дискретности (на основе двух правильных кварцевых призм с $n_1=36$ и $n_2=37$ гранями) и разработан проект возглавляемой им рекомендуемой ЛСП. Соответственно, число точек деления окружности составляет $n_1 \cdot n_2 = 1332$ (с номинальным угловым шагом около $16,2'$).

Разработан и описан принцип действия локального эталона. Его главным элементом предложен и реализован блок из двух призм, число граней которых отличается на единицу. Для работы с гранями призм используется подвижное компенсационное зеркало (установленное на поворотной в пределах $0^\circ-5^\circ$ штанге) и неподвижный автоколлиматор (АК). Вертикальный размер зеркала позволяет наблюдать в поле зрения АК вдвоенную марку, отраженную от граней каждой из призм (при соответствующем угловом положении блока). Использование блочной конструкции обусловлено известным разложением из теории вычетов: для любого целого k возможно подобрать такие целые m_1 и m_2 , что $\frac{k}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}$ (при наличии взаимной простоты чисел n_1 и n_2). Принцип действия и схема расположения основных составных частей локального эталона представлена на рис. 4.

Разработаны предложения по созданию системы юстировки и точного движения компенсационного зеркала. Показано, что траектория мгновенных центров вращения (один из которых соответствует точке В на рис. 5) плоскости зеркала представляет собой полупараболу $y = \frac{x^2 - a^2}{2a}$, $x > 0$, где a – расстояние от оси АК до центра вращения блока призм, которая является огибающей следов зеркала на плоскости ХУ при различных его положениях.

На основе полученного теоретического описания предложена и реализована аппроксимация движения компенсационного зеркала (при условии его достаточной протяженности по горизонтали $L=120$ мм) вращением на штанге вокруг фиксированной оси в пределах $0^\circ-5^\circ$. Кроме того, поставлены и решены ряд вариационных задач по выбору геометрических параметров, включая параметры взаимного расположения составных частей локального эталона.

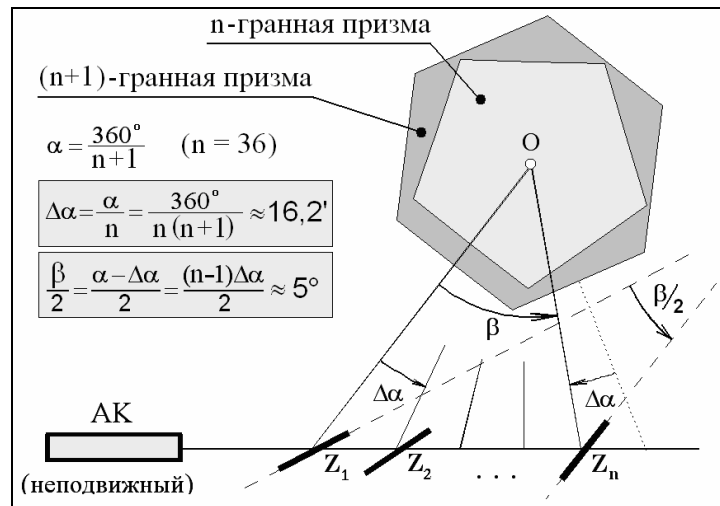


Рис. 4. Принцип использования блока из двух призм и подвижного зеркала для увеличения числа делений окружности до $n_1 n_2$ (вид сверху; обозначено $n = n_1$)

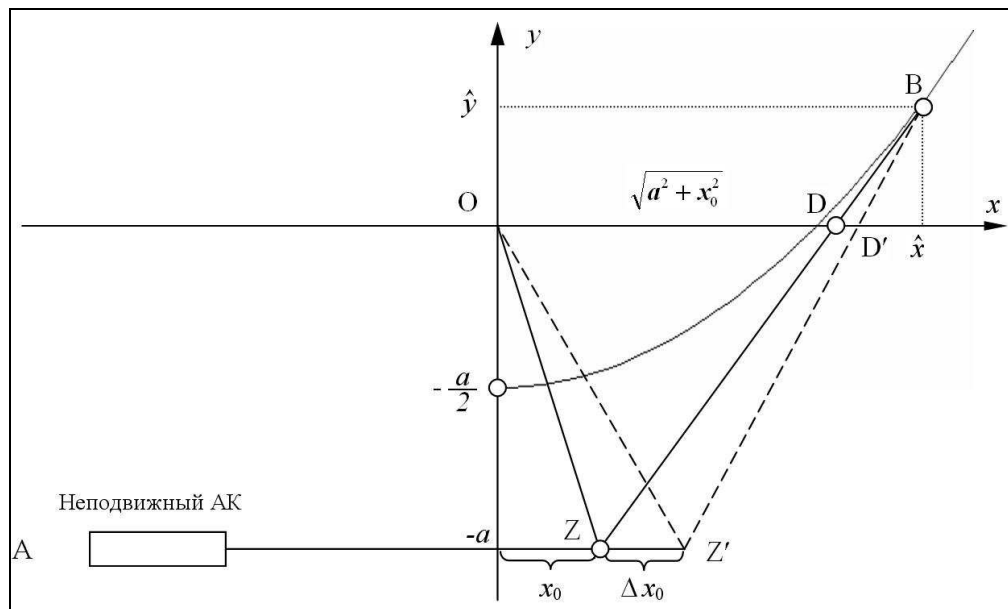


Рис. 5. К задаче построения траектории мгновенных центров вращения плоскости зеркала при его перемещении и выбор постоянного центра вращения штанги

O – центр вращения блока призм; ZD – след плоскости зеркала (в первом положении); ZO – отражение луча AZ от прямой ZD ($ZO = OD$); Z, Z' – точки отражения от подвижного зеркала (в двух положениях); B – точка пересечения двух положений следа плоскости зеркала.

В настоящее время составные части локального эталона изготовлены, эталон находится на стадии их сборки и взаимной юстировки, после которой будет выполнена его первичная аттестация. Разработан проект рекомендуемой ЛСП, которую возглавит разрабатываемый локальный эталон. Ожидаемый уровень точности передачи размера единицы плоского угла указанной ЛСП составляет $0,1''-0,2''$.

Разработана универсальная инструкция по калибровке поворотного углозадающего устройства в фиксированных точках шкалы, содержащая параметрическую методику выполнения измерений (МВИ), в основе которой лежат полученные в диссертационной работе результаты. Указанная МВИ подготовлена к метрологической аттестации в соответствии действующими нормативными документами.

В приложениях содержатся определения используемых метрологических понятий, общая характеристика количества возможных планов СоИ, примеры программных реализаций обработки данных при взаимной градуировке КШ в средах программирования Mathcad и MS Excel, проект рекомендуемой ЛСП предприятия, возглавляемой разработанной исходной образцовой установкой ЦНИИ (локальным эталоном) для воспроизведения единицы плоского угла.

В заключении кратко описаны перечисленные во введении и конкретизированные в главах 1–4 задачи, а также использованные в диссертационной работе методы их решения. Дана оценка математической и метрологической значимости полученных научных результатов, включая их внедрение. Приведен перечень положений, выносимых на защиту.

ВЫВОДЫ

На основе рационального моделирования и планирования процедуры СоИ, с использованием двухкомпонентной регрессионной модели с переменной матрицей плана, МНК-обработки данных, параметрических методов матричной алгебры и символического программирования в среде MathCAD, решены основные задачи исследования.

Полученные научные результаты имеют прикладную математическую и общеметрологическую значимость. В области угловых измерений в интересах прецизионного навигационного приборостроения они востребованы и доведены до уровня практических инструкций по калибровке высокоточных углозадающих устройств и программных реализаций предложенных алгоритмов обработки данных, а также легли в основу создаваемого локального исходного эталона плоского угла ЦНИИ «Электроприбор».

Таким образом, в работе эффективно решены сформулированные задачи, получены и внедрены достоверные научные результаты.

В ближайшей перспективе предполагается ввести в эксплуатацию разработанный локальный исходный эталон угла, исследовать его точностные свойства и ввести в действие методику выполнения измерений при передаче размера единицы от эталона другим средствам угловых измерений.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

- [1]. М. Д. Кудрявцев. Точечные и интервальные оценки среднего квадратического отклонения результатов наблюдений при измерениях. – Метрология, №3, 1980 – 6 с.
- [2]. М. Д. Кудрявцев. Применение метода наименьших квадратов для обработки результатов наблюдений при аттестации правильных многогранных призм методом калибровки. – Метрология, №4, 1982 – 6 с.
- [3]. В. А. Грановский, А. Я. Казаков, М. Д. Кудрявцев, Т. Н. Сирая. Основные направления исследований системы обеспечения единства измерений. – Измерительная техника, №10, 1992 – 5 с.
- [4]. М. Д. Кудрявцев. Новый способ учета выбросов как основа реализации алгоритма обработки избыточных данных совокупных измерений – Метрология, №10, 2002 – 17 с.
- [5]. В. А. Грановский, М. Д. Кудрявцев. Концепция измерений плоского угла в связи с проблемой прослеживаемости – Датчики и системы, № 7, 2008 г. – 12 с.

Публикации в других изданиях

- [6]. М. Д. Кудрявцев. Анализ и уточнение математической модели эксперимента при аттестации правильных многогранных призм методом калибровки. – Физич. проблемы точных измерений. Материалы II Всесоюзного совещания по теор. метрологии. - Л., 1983 – 6 с.
- [7]. М. Д. Кудрявцев. Проблемы моделирования системы обеспечения единства измерений. – Тезисы докл. X Всеакад. между народной школы по проблемам метрол. обеспечения и стандартизации. - Минск, 1992 – 5 с.
- [8]. М. Д. Кудрявцев. Совокупные измерения: классификация и планирование. – Сб. тез. докл. конф. "Диагностика, информатика и метрология-94". СПб., 1994 – 2 с.
- [9]. М. Д. Кудрявцев. Совокупные измерения: особенности применения МНК. – Сб. тез. докл. конф. "Диагностика, информатика и метрология-94". СПб., 1994 – 2 с.
- [10]. М. Д. Кудрявцев. Уточнение МНК-модели высоко избыточных и симметричных совокупных измерений. – Тезисы докл. XII Всеакад. междунар. школы по проблемам метрол. обеспечения и стандартизации. - СПб., 1995 – 5 с.
- [11]. М. Д. Кудрявцев. Исследование эффективности МНК-оценок при совокупных измерениях в схеме всех комбинаций. – Тезисы докл. XII Всеакад. междунар. школы по проблемам метрол. обеспечения и стандартизации. - СПб., 1995 – 5 с.
- [12]. М. Д. Кудрявцев. Методика аттестации двухотсчетного преобразователя угол – код на основе использования зубчатого делительного столика УДП-0,25 в качестве исходного углозадающего средства. – Сб. тез. докл. XXII науч.-техн. конф. памяти Н. Н. Острякова, СПб., 2000 (Гироскопия и навигация, №4 (31), 2000) – 1 с.
- [13]. М. Д. Кудрявцев. Классификация и принципы калибровки дискретных круговых шкал – Сб. тез. докл. XXIII науч.-техн. конф. памяти Н. Н. Острякова, СПб., 2002 (Гироскопия и навигация, №4 (39), 2002) – 1 с.
- [14]. М. Д. Кудрявцев. Принципы создания локального эталона и формирования поверочной схемы предприятия в области измерений плоского угла – Сб. тез. докл. XXIII науч.-техн. конф. памяти Н. Н. Острякова, СПб., 2002 (Гироскопия и навигация, №4 (39), 2002) – 1 с.
- [15]. О. Б. Басун, М. Д. Кудрявцев, Л. И. Черницкий, Н. Л. Яворовская. Точная угловая привязка оси автоколлиматора к горизонтальной базовой плоскости, соприкасающейся

- с двумя цилиндрическими опорами – Сб. тез. докл. XXIV науч.-техн. конф. памяти Н. Н. Острякова, СПб., 2004 (Гироскопия и навигация, №4 (47), 2004) – 1 с.
- [16]. О. Б. Басун, А. К. Исаев, М. Д. Кудрявцев, Н. Л. Яворовская. Опыт разработки и аттестации методик выполнения измерений геометрических параметров, используемых при изготовлении и испытаниях навигационной аппаратуры – Сб. тез. докл. XXIV науч.-техн. конф. памяти Н. Н. Острякова, СПб., 2004 (Гироскопия и навигация, №4 (47), 2004) – 1 с.
- [17]. О. Б. Басун, А. К. Исаев, М. Д. Кудрявцев, Д. Ш. Черницкая, Ю. Б. Чирков. Особенности использования координатных измерительных машин при создании навигационной аппаратуры: разработка методик выполнения измерений, включая методы оценивания погрешностей их результатов – Сб. тез. докл. XXIV науч.-техн. конф. памяти Н. Н. Острякова, СПб., 2004 (Гироскопия и навигация, №4 (47), 2004) – 1 с.
- [18]. М. Д. Кудрявцев, Н. Л. Яворовская. Новая параметризация плоскостной модели объекта и алгоритм обработки данных при измерении диаметров с учетом некруглости – Сб. тез. докл. конф. «Теория и техника передачи, приёма и обработки информации», г. Туапсе, 2004 – 2 с.
- [19]. М. Д. Кудрявцев, Н. Л. Яворовская. Восстановление амплитуды гармонического сигнала по результатам измерений его мгновенных значений двухотсчетной системой – Сб. тез. докл. VII конф. молодых ученых «Навигация и управление движением», СПб, 2005 (Гироскопия и навигация, №2 (49), 2005) – 1 с.
- [20]. М. Д. Кудрявцев, Н. Л. Яворовская. Восстановление амплитуды гармонического сигнала по результатам измерений его мгновенных значений двухотсчетной системой – Мат. докл. VII конф. молодых ученых «Навигация и управление движением», СПб, 2006 – 6 с.
- [21]. М. Д. Кудрявцев, Н. Л. Яворовская. Оценивание погрешностей координатных измерений геометрических параметров в условиях плохо обусловленной измерительной задачи – Сб. тез. докл. VIII конф. молодых ученых «Навигация и управление движением», СПб, 2006 (Гироскопия и навигация, №2 (53), 2006) – 1 с.
- [22]. О. Б. Басун, М. Д. Кудрявцев, Н. Л. Яворовская. Проблемы моделирования объекта для обеспечения контроля высокоточных деталей навигационной аппаратуры в процессе их изготовления – Сб. тез. докл. XXV науч.-техн. конф. памяти Н. Н. Острякова, СПб., 2006 (Гироскопия и навигация, №4 (55), 2006) – 1 с.
- [23]. М. Д. Кудрявцев. Проблемы моделирования объекта для обеспечения контроля высокоточных деталей навигационной аппаратуры в процессе их изготовления – Сб. тез. докл. всеросс. науч.-техн. конф. «Измерения и испытания в судостроении и смежных отраслях», СПб., 2006 – 2 с.
- [24]. М. Д. Кудрявцев, В. О. Евсеев. Устойчивый метод оценивания параметра положения медленно меняющегося импульса с симметричными фронтами – Сб. тез. докл. X конф. молодых ученых «Навигация и управление движением», СПб, 2008 (Гироскопия и навигация, №2 (61), 2008) – 1 с.
- [25]. М. Д. Кудрявцев. Способ юстировки планшайбы поворотной системы на трех симметричных опорах – Сб. тез. докл. 2-й всеросс. науч.-техн. конф. «Измерения и испытания в судостроении и смежных отраслях», СПб., 2008 – 4 с.
- [26]. Valery A. Granovsky, Mikhail D. Kudryavtsev. The plane angle concept and its unit in the context of traceability problem – IMEKO XVIII WORLD CONGRESS «Metrology for a Sustainable Development», Rio de Janeiro, Brazil, 2006 – 6 с.
- [27]. Olga B. Basun, Valery A. Granovsky, Mikhail D. Kudryavtsev. Precision scales of plane angle: principles and methods of calibration – IMEKO XVIII WORLD CONGRESS «Metrology for a Sustainable Development», Rio de Janeiro, Brazil, 2006 – 6 с.