

М. И. ЕВСТИФЕЕВ

ДИНАМИКА БОРТОВЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ГРАДИЕНТОМЕТРОВ

Рассмотрены вопросы динамики бортовых гравитационных градиентометров для измерения вторых производных геопотенциала. Построены математические модели акселерометрических и гантельных вариантов приборов, проведен анализ их инструментальных погрешностей. Получены численные оценки требований к конструкции и отмечено, что для обеспечения точности измерения необходимо проведение работ по регулировке и калибровке.

Ключевые слова: тензорный гравитационный градиентометр, уравнения динамики, инструментальные погрешности

Введение

Изучение фигуры Земли с помощью космических миссий, расширение работ по поиску полезных ископаемых вызывает повышенный интерес к разработке современной аппаратуры для измерения параметров гравитационного поля как в отечественном, так и зарубежном приборостроении [1–9]. Одними из перспективных направлений является разработка приборов для измерения вторых производных геопотенциала (ВПГП) – гравитационных градиентометров (ГГ). Несмотря на то что базовые принципы построения таких приборов известны с XIX века, создание ГГ, работоспособных на подвижном основании, представляет собой сложную научно-техническую проблему, которая интенсивно исследовалась с 1970-х годов [10–12]. Создание бортовых ГГ и их практическое использование в прикладных геофизических исследованиях можно отнести к стратегическим технологиям XXI века [13].

Известные конструкции ГГ весьма разнообразны – начиная с классических вариантов на основе применения нескольких акселерометров или гантелей (гантель в рассматриваемом случае представляет собой диполь или коромысло с двумя равными грузами – пробными телами на разных концах стержня) и заканчивая на сегодняшний день экзотическими устройствами на основе холодных атомов и атомной интерферометрии [14, 15]. Для размещения ГГ на борту подвижных объектов используются различные носители в зависимости от области применения: на море это корабли и подводные лодки [16]; в воздухе – самолеты, вертолеты, дирижабли [17]; в космосе – спутники и специальные аппараты [18]. Динамика каждого из носителей характеризуется своим уровнем инерционных скоростей и ускорений, что, соответственно, выдвигает различные требования к разработке конкретного бортового ГГ. Вместе с тем принципы построения ГГ позволяют рассмотреть его динамику с общих позиций и выявить наиболее значимые факторы, влияющие на его погрешности, что, по мнению автора, представляет определенный интерес для проектировщиков.

Евстифеев Михаил Илларионович. Доктор технических наук, начальник отдела, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (С.-Петербург). Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

Математические модели бортовых гравитационных градиентометров

Принцип работы ГГ основан на измерении параметров движения как минимум двух пробных тел (ПТ) равной массы, разнесенных в пространстве. В акселерометрическом ГГ разность перемещений двух тел под действием инерционных и гравитационных сил, отнесенная к расстоянию между телами, пропорциональна компонентам тензора ВППП. В гантельном ГГ вследствие абсолютной жесткости коромысла и неизменности расстояния между ПТ разность кажущихся ускорений непосредственно проявляется в виде приложенного к гантели вращающего момента, угол поворота которой пропорционален компонентам ВППП. Для определения всех компонентов тензора ВППП блок ГГ должен быть реализован в виде тензорного ГГ (ТГГ), который содержит как минимум четыре трехосных акселерометра или шесть ортогональных гантелей [12]. Геометрическое представление ТГГ может быть выполнено в виде правильного тетраэдра, в вершинах которого расположены четыре ПТ.

Гантельные и акселерометрические ГГ могут быть построены либо по статической схеме измерения, когда оси ПТ ориентируют неизменно в инерциальной или земной системе координат, либо по ротационной (модуляционной) схеме, когда ПТ принудительно вращаются в пространстве с постоянной угловой скоростью. Равномерное вращение позволяет модулировать квазистатические гравитационные силовые воздействия двойной частотой вращения и использовать резонансные свойства (механическая добротность, синхронное детектирование и т.д.) для выделения полезного сигнала. При этом поступательные ускорения, перпендикулярные оси вращения, модулируются одинарной частотой вращения, что снижает их влияние на полезный сигнал [9–11].

В общем случае система ПТ ГГ, состоящая из двух или нескольких тел, участвует в переносном поступательном и вращательном движениях основания. Относительные поступательные движения центра масс ПТ и вращательные движения вокруг центра масс совершаются в упругом (контактном или бесконтактном) подвесе. В ротационных схемах система ПТ дополнительно вращается с постоянной угловой скоростью относительно основания. Взаимосвязь между ПТ в системе осуществляется упругими или электрическими силами.

Рассмотрим следующие правые ортогональные системы координат (рис. 1): систему координат основания $[X_k^0]$ ($k = 1, 2, 3$), вращающуюся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и перемещающуюся с ускорением \vec{W} относительно инерциальной системы координат; систему координат $[X_k^b]$, связанную с системой нескольких ПТ и имеющую собственное принудительное вращение относительно системы координат $[X_k^0]$ с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Относительное положение начал систем координат $[X_k^0]$ и $[X_k^b]$ задается вектором \vec{R} . Положения i -го ПТ в системе координат $[X_k^b]$ задаются векторами $\vec{r}^{0(i)}$ и $\vec{r}^{b(i)}$, характеризующими номинальное (невозмущенное) положение i -го ПТ и смещенное положение того же ПТ при возмущениях (возмущенное положение), и вектором $\vec{p}^{(i)}$, характеризующим смещение i -го ПТ при возмущениях, так что $\vec{r}^{b(i)} = \vec{r}^{0(i)} + \vec{p}^{(i)}$. Вращательные движения i -го ПТ вокруг центра масс задаются вектором углового поворота $\vec{\theta}^{(i)}$. Исходя из принятых обозначений, положение i -го ПТ относительно начала системы координат $[X_k^0]$ характеризуется вектором $\vec{r}^{(i)} = \vec{r}^{b(i)} + \vec{R}$.

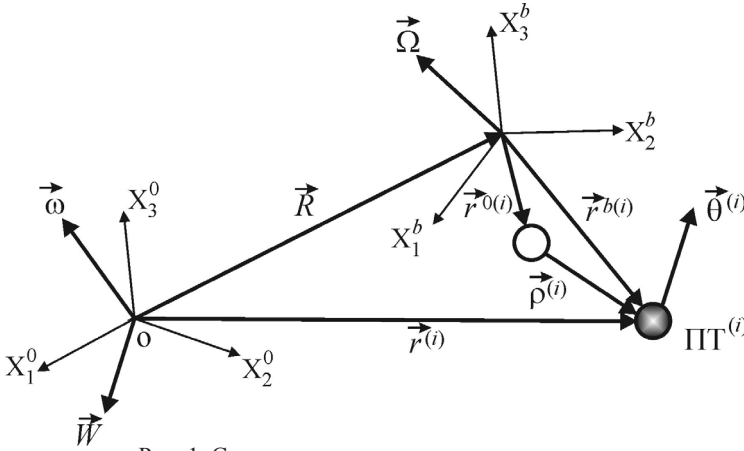


Рис. 1. Схема расположения систем координат

Вектор угловой скорости вращения i -го ПТ относительно инерциальной системы координат будет $\vec{\omega}^{a(i)} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} + \vec{\theta}^{(i)}$.

Абсолютное ускорение i -го ПТ можно записать в виде

$$\vec{W}^{a(i)} = \ddot{\vec{r}}^{(i)} + 2\vec{\omega}^{a(i)} \times \dot{\vec{r}}^{(i)} + \dot{\vec{\omega}}^{a(i)} \times \vec{r}^{(i)} + \vec{\omega}^{a(i)} \times (\vec{\omega}^{a(i)} \times \vec{r}^{(i)}) + \vec{W}. \quad (1)$$

В развернутой форме из (1) имеем

$$\vec{W}^{a(i)} = \vec{W}_0^a + \ddot{\vec{r}}^{0(i)} + 2\vec{\omega}^{a(i)} \times \dot{\vec{r}}^{0(i)} + \mathbf{P}\vec{r}^{0(i)} + \ddot{\vec{\rho}}^{(i)} + 2\vec{\omega}^{a(i)} \times \dot{\vec{\rho}}^{(i)} + \mathbf{P}\vec{\rho}^{(i)}, \quad (2)$$

где $\vec{W}_0^a = \ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) + \vec{W}$ – абсолютное ускорение начала системы координат $[X_k^b]$; $\mathbf{P}_{ij} = \dot{\omega}_{ij} + \omega_{ik}\omega_{kj} + \dot{\Omega}_{ij} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + \dot{\theta}_{ij} + \theta_{ik}\dot{\theta}_{kj} + 2\omega_{ik}\Omega_{kj} + 2\omega_{ik}\dot{\theta}_{kj} + 2\Omega_{ik}\dot{\theta}_{kj}$ – тензор градиентов ускорения сил инерции; $\omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k$; $\Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\Omega_k$; $\dot{\theta}_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\dot{\theta}_k$; ε_{ijk} – символ Леви-Чивита.

Для общности введем вектор ускорения сил тяготения в виде

$$\vec{\gamma}^{(i)} = \vec{\gamma}_0 + \mathbf{\Gamma}\vec{r}^{b(i)}, \quad (3)$$

где $\vec{\gamma}_0$ – вектор ускорения силы тяготения в начале системы координат $[X_i^b]$; $\mathbf{\Gamma}$ – тензор градиентов ускорения сил тяготения.

Кажущееся ускорение, действующее на i -е ПТ, согласно формулам (2) и (3) будет

$$\vec{W}^{c(i)} = \vec{W}^{a(i)} - \vec{\gamma}^{(i)} = \vec{W}_0 + \ddot{\vec{r}}^{0(i)} + 2\vec{\omega}^{a(i)} \times \dot{\vec{r}}^{0(i)} + \mathbf{T}\vec{r}^{0(i)} + \ddot{\vec{\rho}}^{(i)} + 2\vec{\omega}^{a(i)} \times \dot{\vec{\rho}}^{(i)} + \mathbf{T}\vec{\rho}^{(i)}, \quad (4)$$

где $\vec{W}_0 = \vec{W}_0^a - \vec{\gamma}_0$ – кажущееся ускорение начала системы координат $[X_i^b]$; $\mathbf{T} = \mathbf{P} - \mathbf{\Gamma}$ – тензор градиентов кажущегося ускорения.

Величина $\vec{W}^{c(i)}$ в уравнении (4) равна удельной силе инерции, т.е. силе инерции отнесенной к единице массы, но с обратным знаком.

Тензор ВППГ \mathbf{G} записывается в виде

$$\mathbf{G}_{ij} = \Gamma_{ij} + \omega_{ik}^c \omega_{kj}^c, \quad (5)$$

где $\omega_{ij}^c = -\varepsilon_{ijk} \omega_k^c$ – абсолютная угловая скорость вращения Земли.

Будем считать, что в соответствии с принципом Даламбера удельная сила инерции $\vec{W}^{c(i)}$ уравновешивается в подвесе ПТ удельной силой диссипации $\vec{F}^{M(i)} = 2\mathbf{M}^{(i)} \dot{\vec{\rho}}^{(i)}$ и удельной силой упругости $\vec{F}^{N(i)} = \mathbf{N}^{(i)2} \vec{\rho}^{(i)}$, где $\mathbf{M}^{(i)}$ и $\mathbf{N}^{(i)}$ – симметричные матрицы (в общем случае недиагональные), характеризующие соответственно демпфирование и собственные частоты колебаний i -го ПТ в подвесе по различным направлениям. Кроме того, на ПТ действуют удельные силы коррекции $\vec{F}^{cor(i)} = f_1 \vec{\rho}^{(i)} + f_2 \dot{\vec{\rho}}^{(i)} + \dots$, являющиеся заданной функцией или функцией, зависящей от параметров движения других тел, либо от внешней информации.

На основании этого и при учете (4) запишем уравнение движения ПТ под воздействием сил поля тяготения и сил инерции

$$\ddot{\vec{\rho}}^{(i)} + 2\mathbf{M}^{(i)} \dot{\vec{\rho}}^{(i)} + \mathbf{N}^{(i)2} \vec{\rho}^{(i)} = -(\vec{W}_0 + \ddot{\vec{r}}^{0(i)} + 2\vec{\omega}^{a(i)} \times \dot{\vec{r}}^{0(i)} + \mathbf{T}\vec{r}^{0(i)} + 2\vec{\omega}^{a(i)} \times \vec{\rho}^{(i)} + \mathbf{T}\vec{\rho}^{(i)} + \vec{F}^{cor(i)}) \quad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что вследствие зависимости $\vec{\omega}^{a(i)}$ от относительного вращения $\vec{\theta}$ существует взаимосвязь между поступательными и вращательными движениями ПТ.

Преимущество ротационной схемы ПГ обуславливается различием способов преобразования векторов и тензоров во вращающейся системе координат. Эти преобразования имеют вид $\vec{W}' = \mathbf{C}_\Omega \vec{W}$; $\mathbf{T}' = \mathbf{C}_\Omega \mathbf{T} \mathbf{C}_\Omega^T$, где \mathbf{C}_Ω – матрица перехода от неподвижной к вращающейся системам координат, индекс «Т» означает транспонирование.

На основании уравнения (6) при принудительном вращении ПТ с угловой скоростью Ω_3 вокруг оси OX_3 на расстоянии r_1^0 , отложенном по оси OX_1 от оси OX_3 , смещение ПТ по оси OX_2 в установившемся режиме без учета сил коррекции и при отсутствии угловой скорости основания будет иметь вид

$$N_{22}^2 \rho_2 = - (W_1 \sin \Omega_3 t + W_2 \cos \Omega_3 t) + r_1^0 [\frac{1}{2}(\Gamma_{11} - \Gamma_{22}) \sin 2\Omega_3 t + \Gamma_{12} \cos 2\Omega_3 t].$$

Это показывает наличие модулированного сигнала и возможность использования процедуры демодуляции для выделения компонентов тензора градиентов на удвоенной частоте вращения на фоне поступательных ускорений, действующих на одинарной частоте вращения.

Для исключения кажущегося ускорения начала системы координат $[X_i^b]$ составим разность уравнений (6) для двух ПТ:

$$\ddot{\vec{\rho}}_{\Delta}^{(j)} + 2\mathbf{M} \dot{\vec{\rho}}_{\Delta}^{(j)} + \mathbf{N}^2 \vec{\rho}_{\Delta}^{(j)} = -(\mathbf{T}\vec{r}_{\Delta}^{(j)} + 2\vec{\omega}^a \times \dot{\vec{\rho}}_{\Delta}^{(j)} + \ddot{\vec{r}}_{\Delta}^{(j)} + 2\vec{\omega}^a \times \vec{r}_{\Delta}^{(j)} + \mathbf{T}\vec{\rho}_{\Delta}^{(j)} + \vec{F}_{\Delta}^{cor}), \quad (7)$$

где $\vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)} = \vec{\rho}^{(i)} - \vec{\rho}^{(j)}$ – вектор разности отклонений i -го и j -го ПТ от их невозмущенных положений; $\vec{r}_{\Delta}^{(ij)} = \vec{r}^{0(i)} - \vec{r}^{0(j)}$ – вектор, характеризующий расстояние между невозмущенными положениями i -го и j -го ПТ; $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{M}^{(j)}$; $\mathbf{N} = \mathbf{N}^{(i)} = \mathbf{N}^{(j)}$.

Пренебрегая деформациями корпуса и считая, что невозмущенные положения i -го и j -го ПТ в системе координат $[X_i^b]$ неизменны и $\ddot{\vec{r}}^{0(i,j)} = \ddot{\vec{r}}^{0(j,i)} = 0$, можно упростить уравнение динамики акселерометрического ГГ:

$$\ddot{\vec{\rho}}_{\Delta}^{(ij)} + 2\mathbf{M}\dot{\vec{\rho}}_{\Delta}^{(ij)} + \mathbf{N}^2\vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)} = -(\mathbf{T}\vec{r}_{\Delta}^{(ij)} + 2\vec{\omega}^a \times \dot{\vec{\rho}}_{\Delta}^{(ij)} + \mathbf{T}\vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)} + \vec{F}_{\Delta}^{cor}). \quad (8)$$

В случае расположения ПТ в вершинах тетраэдра уравнение (8) описывает динамику ТГГ в общем случае его движения. Для четырех ПТ можно получить шесть уравнений вида (8), из которых независимыми являются любые три, соответствующие ребрам тетраэдра, не лежащим в одной плоскости. Компоненты тензора \mathbf{T} определяются как решение системы девяти алгебраических уравнений.

Для измерения компонентов тензора \mathbf{T} необходимо определять текущие значения разностей перемещений ПТ, их первые и вторые производные, а также угловую скорость и угловое ускорение основания. Требования к точности этих измерений определяются характером движения основания, конкретными свойствами подвеса и взаимным расположением ПТ.

Основная принципиальная особенность построения акселерометрического бортового ГГ заключается в том, что он представляет собой *дифференциальный акселерометр*, а не два отдельных акселерометра, показания которых вычитаются. Действительно, при эксплуатации ГГ на борту подвижных объектов величина ускорений сил инерции достигает 1g и выше. Для обеспечения точности измерения ВППТ на уровне 1 ЭТВ и при расстоянии между ПТ порядка $\vec{r}_{\Delta}^{(ij)} = 0,2$ м погрешность акселерометров не должна превышать 10^{-11} – 10^{-12} g. Если реализовывать ГГ на основе двух отдельных акселерометров, то необходимо создать прибор с динамическим диапазоном измерения 10-12 порядков, что практически невозможно. Дифференциальный акселерометр на базе двух ПТ с сильной связанностью между подвесами [12] позволяет измерять с минимальной погрешностью противофазные движения ПТ $\vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)}$, пропорциональные компонентам тензора градиентов кажущегося ускорения. При этом погрешность измерения синфазных движений ПТ, пропорциональных поступательному ускорению центра масс и угловым ускорениям основания, может быть существенно выше. Это дает возможность снизить максимальное значение измеряемого сигнала для противофазных колебаний до величины вертикального градиента ускорения сил тяготения $\Gamma_{\max} = 3000$ ЭТВ. В пересчете на расстояние $\vec{r}_{\Delta}^{(ij)} = 0,2$ м величина измеряемого ускорения не превышает 10^{-7} g, что облегчает техническую реализацию такого прибора. Отметим, что по своим свойствам дифференциальный акселерометр, имеющий большую жесткость подвеса по всем направлениям, кроме измерительной оси, во многом подобен гантельным ГГ.

Из уравнений (8) возможно получение модели динамики гантельного ГГ, содержащего абсолютно жесткую гантель из двух ПТ, что создает требуемую анизотропию инерционных свойств. В этом случае следует выбрать удельные корректирующие силы $\vec{F}_{\Delta}^{cor(i)}$ таким образом, чтобы для коллинеарных векторов $\vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)}$ и $\vec{r}_{\Delta}^{(ij)}$ выполнялось условие

$\vec{\rho}^{(i)} = \vec{\rho}^{(j)}$ и, следовательно, $\vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)} = 0$, что равносильно пренебрежению эффектом растяжения–сжатия коромысла гантельного ГГ, а для ортогональных векторов $\vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)}$ и $\vec{r}_{\Delta}^{(ij)}$ выполнялось условие $\vec{\rho}^{(i)} = -\vec{\rho}^{(j)}$, так что $\vec{\rho}^{(ij)} = 2\vec{\rho}^{(i)}$. Если эти условия соблюдены и точка подвеса i -ой гантели из двух ПТ находится в ее центре масс, то можно записать

$$\vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)} = 2\vec{\theta}^{(i)} \times \vec{L}^{(i)}, \quad (9)$$

где $\vec{\theta}^{(i)}$ – вектор малого угла поворота i -ой гантели вокруг оси чувствительности, $\vec{L}^{(i)} = 0,5\vec{r}_{\Delta}^{(ij)}$ – вектор, характеризующий невозмущенное положение i -ой гантели относительно точки подвеса (при интегральной оценке величина представляет собой радиус инерции тела).

Для получения уравнений моментов, действующих на ПТ, умножим векторно слева обе части уравнения (8) на вектор $(\vec{L}^{(i)} + \vec{L}^{(i)} \times \vec{\theta}^{(i)})$ возмущенного положения ПТ и подставим уравнение (9) в уравнение (8):

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{\theta}}^{(i)} + 2\mathbf{M}^{(i)}\dot{\vec{\theta}}^{(i)} + \mathbf{N}^{(i)}\vec{\theta}^{(i)} = & -[\vec{e}^{(i)} \times \mathbf{T}\vec{e}^{(i)} + 2\vec{e}^{(i)} \times [\vec{\omega}^a \times (\dot{\vec{\theta}}^{(i)} \times \vec{e}^{(i)})]] + \\ & + \vec{e}^{(i)} \times \mathbf{T}(\vec{\theta}^{(i)} \times \vec{e}^{(i)}) + (\vec{\theta}^{(i)} \times \vec{e}^{(i)}) \times \mathbf{T}\vec{e}^{(i)} + \vec{M}^{cor}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\vec{e}^{(i)}$ – орт вектора $\vec{L}^{(i)}$; \vec{M}^{cor} – удельный момент внешних сил коррекции, равный моменту, действующему на ПТ, отнесенному к моменту инерции гантели.

Интегрируя уравнения (10) по всему объему гантели (коромысла с двумя ПТ на концах) и пренебрегая малыми, начиная с третьего порядка, получим уравнения динамики гантельного ГГ

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{J}}\vec{\omega} + \mathbf{D}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (2\mathbf{J} - \mathbf{E})\vec{\omega} + \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{J}\vec{\omega} + \mathbf{K}\vec{\omega} + \mathbf{J} \left((\vec{\omega} + \dot{\vec{\theta}}) \times \vec{\theta} \right) + \left((\vec{\omega} + \dot{\vec{\theta}}) \times \vec{\theta} \right) \times \\ \times \mathbf{J}(\vec{\omega} + \dot{\vec{\theta}}) + (\vec{\omega} + \dot{\vec{\theta}}) \times \mathbf{J} \left((\vec{\omega} + \dot{\vec{\theta}}) \times \vec{\theta} \right) = \vec{M} + \vec{M}^g + \vec{M}^{cor} - \mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} - \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega}, \end{aligned} \quad (11)$$

где \mathbf{J} – тензор инерции гантели; \mathbf{D} и \mathbf{K} – матрицы коэффициентов демпфирования и жесткости (в общем случае недиагональные) по осям относительного вращательного движения соответственно; \vec{M} – момент внешних сил; \vec{M}^{cor} – момент сил коррекции; $\vec{M}^g = \frac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{J}\mathbf{J} - \mathbf{J}\mathbf{J})$ – момент гравитационных сил; \mathbf{E} – единичный тензор; $\mathbf{I} = J_{11} + J_{22} + J_{33}$ – первый инвариант тензора \mathbf{J} . Для ротационных схем ГГ следует учитывать, что к угловой скорости $\vec{\omega}$ должна быть добавлена скорость вращения $\vec{\Omega}$.

Система нелинейных дифференциальных уравнений (11) описывает общий случай вращательного движения системы ПТ, точное аналитическое решение которой получить невозможно. В зависимости от конкретной конструкции жесткость подвеса ПТ по тому или иному направлению может быть значительной, что позволяет упростить уравнения. Уравнения конкретных аппаратурных реализаций ГГ могут быть получены из уравнений (8) и (10) путем соответствующей подстановки параметров входящих в них величин.

Анализ динамики гравитационных градиентометров

Полученные уравнения (8) и (10) показывают, что установка ГГ на подвижном основании приводит к изменению параметров вынужденных движений ПТ по сравнению с параметрами собственных невозмущенных движений. Это влияние определяется наличием в правой части уравнений (8) и (10) для акселерометрических ГГ слагаемых вида $-(2\vec{\omega}^a \times \dot{\vec{\rho}}_{\Delta}^{(ij)} + \mathbf{T} \vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)})$, для гантельных ГГ $-\{2\vec{e}^{(i)} \times [\vec{\omega}^a \times (\vec{\theta}^{(i)} \times \vec{e}^{(i)})] + \vec{e}^{(i)} \times \mathbf{T}(\vec{\theta}^{(i)} \times \vec{e}^{(i)}) + (\vec{\theta}^{(i)} \times \vec{e}^{(i)}) \times \mathbf{T}\vec{e}^{(i)}\}$.

Влияние кориолисовых ускорений $2\vec{\omega}^a \times \vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)}$ и $2\vec{e}^{(i)} \times [\vec{\omega}^a \times (\vec{\theta}^{(i)} \times \vec{e}^{(i)})]$, связанных с перемещением ПТ в подвесе, сказывается в том случае, если вектор $\vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)}$ ($\vec{\theta}^{(i)}$) содержит как минимум две ненулевые компоненты, т.е. если акселерометрический или гантельный ГГ, реализующий измерение, имеет две или более измерительных оси (например, трехосный акселерометр) либо если вследствие конечной жесткости подвеса одноосного акселерометра происходит смещение ПТ при воздействии ускорений по направлению оси, не являющейся измерительной. Это воздействие значимо в основном для бесконтактных (электростатических или магнитных) подвесов ПТ. Механические подвесы имеют значительную упругую анизотропию, при которой жесткость в направлениях, перпендикулярных оси чувствительности, значительно выше жесткости по оси чувствительности. Для ГГ с такими подвесами воздействие кориолисовых ускорений крайне мало и им можно пренебречь.

Эффект изменения частоты вынужденных колебаний ПТ под воздействием компонент тензора \mathbf{T} , обусловленный наличием в правой части уравнений (10) слагаемых вида $[\vec{e}^{(i)} \times \mathbf{T}(\vec{\theta}^{(i)} \times \vec{e}^{(i)}) + (\vec{\theta}^{(i)} \times \vec{e}^{(i)}) \times \mathbf{T}\vec{e}^{(i)}]$, достаточно известен для гантельных ГГ. Он используется в конструкциях частотно-динамических ГГ с частотным съемом сигнала [19]. При амплитудных измерениях данное влияние накладывает определенные ограничения на выбор минимально допустимой частоты свободных колебаний \mathbf{N} по оси чувствительности.

Считая, что $\dot{\vec{\rho}}_{\Delta}^{(ij)} = \ddot{\vec{\rho}}_{\Delta}^{(ij)} = 0$, и пренебрегая влиянием компонент тензора \mathbf{T} на частоту вынужденных колебаний, можем переписать уравнение ТГГ (8) в установленном режиме в виде ($F^{cor} = 0$):

$$\mathbf{N}^2 \vec{\rho}_{\Delta}^{(ij)} = -\mathbf{T} \vec{r}_{\Delta}^{(ij)}. \quad (12)$$

Если члены уравнения (12) имеют следующий вид: $\vec{\rho}_{\Delta} = [\rho_1, 0, 0]^T$; $\vec{r}_{\Delta} = [0, 0, r_3]^T$; $\mathbf{N}^2 = N_{11}^2 \mathbf{E}$, то статическое отклонение ПТ будет $\rho_1 = -T_{13} r_3 N_{11}^{-2}$. При учете влияния компонент тензора \mathbf{T} на частоту \mathbf{N} статическое отклонение ПТ составляет

$$\rho_1 = -T_{13} r_3 N_{11}^{-2} (1 + \rho_1 \delta_{\Gamma} r_3^{-1}),$$

где $\delta_{\Gamma} = T_{11}/T_{13}$ – динамический диапазон изменения сигнала ГГ.

В последнем выражении измеряемая величина ρ_1 связана с входным сигналом T_{13} нелинейным соотношением. Для получения линейного соотношения между входным сигналом и измеряемой величиной требуется выполнение неравенства $\rho_1 \delta_{\Gamma} r_3^{-1} < 1$. Отсюда получим оценку для минимальной частоты собственных колебаний ПТ в подвесе, обеспечивающую линейное соотношение между входной и измеряемой величинами в статическом режиме измерения, в виде

$$N_{\min}^{stat} > \sqrt{T_{\max}} \delta_{\Gamma}, \quad (13)$$

где T_{\max} – максимальное значение компонент тензора \mathbf{T} . Если T_{\max} определяется максимальным значением компонент тензора Γ_{\max} и составляет величину 3000 Этв, то при $\delta_{\Gamma} = 10^4$ оценка по формуле (13) составит $N_{\min}^{stat} > 0,173 \text{ с}^{-1}$ (0,03 Гц).

Для ротационных ГГ при резонансной настройке допустимое относительное изменение частоты определяется условием

$$\delta_N = \frac{1}{Q\sqrt{2\delta_{\Gamma}}}, \quad (14)$$

где Q – добротность колебательного контура ротационного ГГ на частоте настройки. Из выражения (14) можно определить минимальную частоту вращения ротационного ГГ, обеспечивающую работу по линейному соотношению, следующим образом:

$$N_{\min}^{rot} = \sqrt{QT_{\max}} \sqrt{\frac{\delta_{\Gamma}}{2}}. \quad (15)$$

При $T_{\max} = 3000$ Этв, $Q = 1000$, $\delta_{\Gamma} = 10^4$ можем получить из выражения (15) значение собственной частоты $N_{\min}^{rot} > 0,6 \text{ с}^{-1}$ (0,1 Гц).

При выполнении условия $N_{11} > N_{\min}^{stat}$ (N_{\min}^{rot}) в зависимости от варианта исполнения ГГ уравнения (8) и (10) могут быть переписаны в виде:

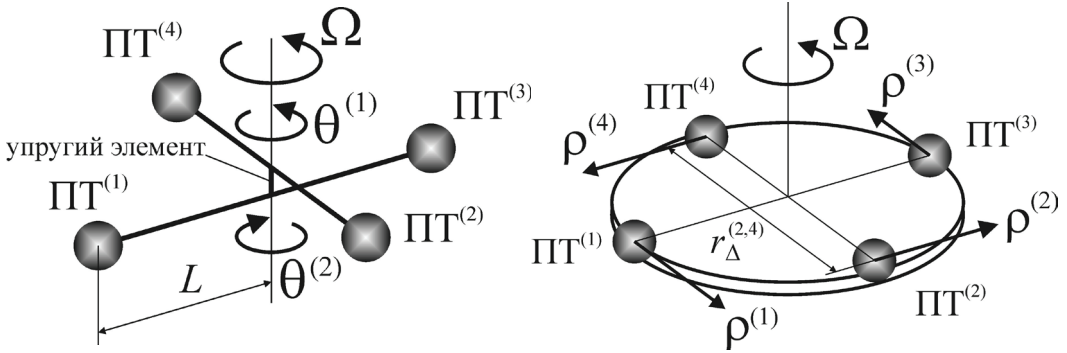
$$\ddot{\bar{\rho}}_{\Delta}^{(ij)} + 2\mathbf{M}\dot{\bar{\rho}}_{\Delta}^{(ij)} + \mathbf{N}^2\bar{\rho}_{\Delta}^{(ij)} = -\mathbf{T}\bar{\tau}_{\Delta}^{(ij)}, \quad (16)$$

$$\ddot{\bar{\theta}}^{(i)} + 2\mathbf{M}^{(i)}\dot{\bar{\theta}}^{(i)} + \mathbf{N}^{(i)2}\bar{\theta}^{(i)} = -(\bar{\mathbf{e}}^{(i)} \times \mathbf{T}\bar{\mathbf{e}}^{(i)}). \quad (17)$$

Уравнения (16) и (17) описывают динамику акселерометрического и гантельного ГГ, построенных на основе двух ПТ. Недостатком таких приборов является их чувствительность к угловому ускорению основания. Для исключения этого недостатка необходимо разместить вторую пару ПТ, расположив ее ортогонально первой. Эта идея основана на том, что тензор \mathbf{T} содержит антисимметричную часть в виде углового ускорения $\dot{\Omega}_{ij}$ и симметричную часть вида $\Gamma_{ij} + \Omega_{ik}\Omega_{kj}$, откуда следует, что $T_{ij} \neq T_{ji}$, но $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$. В этом случае противофазные колебания одной пары ПТ относительно другой пропорциональны компонентам симметричной части тензора, синфазные колебания ПТ пропорциональны компонентам антисимметричной части тензора. Использование таких схем позволяет выполнять альтернирование и симметрирование тензора \mathbf{T} на приборном уровне, что снижает величину инерционных возмущений при измерении ВППП.

В 1970-х годах Роберт Форвард (Robert Forward) из компании «Hughes Aircraft» изобрел схему первого прототипа бортового ротационного ГГ на основе четырех ПТ (детектор масс Форварда – *Forward Mass Detector*) [20]. В схеме был использован вращающийся квадруполь – вариант с двумя ортогональными гантелями, которые

имеют упругую связь между собой и оси подвесов которых совпадают с осью вращения (рис. 2, а). Позднее, в начале 1980-х годов Эрнест Метцгер (Ernest Metzger) из компании «Bell Aerospace» предложил разместить в одной плоскости равномерно по окружности четыре одноосных акселерометра на одинаковом расстоянии от оси вращения с осями чувствительности, направленными по касательной к окружности (рис. 2, б) [10].



а) Рис. 2. Схемы бортовых ротационных градиентометров:

а – градиентометр Роберта Форварда; б – градиентометр Эрнеста Метцгера

Схема ротационного акселерометрического ГГ была выбрана компанией Lockheed Martin (США) в качестве основы для разработки различных вариантов бортовых приборов, таких как 3D FTG, Air-FTG, Falcon AGG, eFTG, dFTG, FTGeX [4, 21]. Интересно отметить, что каждый из приборов Falcon™ получал собственное название по мере ввода в эксплуатацию – Einstein (1999), Newton (2000), Galileo (2002), Feynman (2005), Cavendish (2011), Kepler (2016) [13]. Это свидетельствует об уникальности созданной аппаратуры.

Уравнения динамики акселерометрического и гантельного ГГ, описывающие противофазные колебания четырех ПТ, выглядят следующим образом:

$$\ddot{\bar{\rho}}_{\Delta} + 2\mathbf{M}\dot{\bar{\rho}}_{\Delta} + \mathbf{N}^2\bar{\rho}_{\Delta} = -(\mathbf{T}\bar{r}_{\Delta}^{(1,3)} + \mathbf{T}\bar{r}_{\Delta}^{(2,4)}), \quad (18)$$

$$\ddot{\bar{\theta}}_{\Delta} + 2\mathbf{M}\dot{\bar{\theta}}_{\Delta} + \mathbf{N}^2\bar{\theta}_{\Delta} = -(\bar{e}^{(1)} \times \mathbf{T}\bar{e}^{(1)}) + (\bar{e}^{(2)} \times \mathbf{T}\bar{e}^{(2)}), \quad (19)$$

где $\bar{\rho}_{\Delta} = \bar{\rho}_{\Delta}^{(1,3)} + \bar{\rho}_{\Delta}^{(2,4)}$; $\bar{\theta}_{\Delta} = \bar{\theta}^{(1)} - \bar{\theta}^{(2)}$; $\bar{e}^{(1)}$, $\bar{e}^{(2)}$ – орты коромысел гантелей 1 и 2; $\bar{r}_{\Delta}^{(1,3)}$, $\bar{r}_{\Delta}^{(2,4)}$ – расстояния между центрами масс ПТ пар акселерометров 1 и 3, 2 и 4 соответственно.

Отметим, что в акселерометрическом ГГ компании «Bell Aerospace» направления осей чувствительности двух противоположных акселерометров разнонаправлены. В настоящей работе для общности описания все направления осей чувствительности – положительные и сигналы акселерометров в паре сначала вычитаются, затем попарно складываются, при разнонаправленных осях чувствительности следует

сначала сложить сигналы в паре, затем попарно вычесть. Отсюда отличия в знаках формулы (18) по сравнению с традиционным представлением [22].

По существу, схема акселерометрического ГГ представляет собой «электрический аналог» системы из двух гантелей. Действительно, противофазное движение двух противоположно расположенных ПТ акселерометров аналогично повороту гантели вокруг оси, а противофазное движение двух пар аналогично повороту гантелей друг относительно друга.

В соответствии с принципом А. Эйнштейна воздействие на ПТ сил гравитации и сил инерции эквивалентно. Из этого следует, что определение ВППГ на основе информации бортовых ГГ может быть выполнено только путем косвенных измерений, при которых определение искомого значения величины осуществляется математическим преобразованием результатов прямых измерений величин, функционально связанных с искомой величиной.

Для определения значений ВППГ на подвижном основании необходимо из измеренных с использованием ГГ компонентов тензора градиентов кажущегося ускорения \mathbf{T} выделить компоненты тензора градиентов ускорения сил тяготения $\mathbf{\Gamma}$ путем вычитания компонентов тензора градиентов ускорения сил инерции \mathbf{P} . Для определения компонентов тензора \mathbf{P} требуется измерять угловую скорость и угловое ускорение основания в месте установки блока ГГ. Особенности динамики заключаются в том, что компоненты тензора \mathbf{P} , обусловленные центростремительными ускорениями вида $\Omega_{ik}\Omega_{kj}$, имеют частотный спектр, близкий или совпадающий со спектром компонентов тензора $\mathbf{\Gamma}$, а компоненты тензора \mathbf{P} , пропорциональные угловому ускорению $\dot{\Omega}$, имеют отличный спектральный состав и могут быть отфильтрованы.

Существуют два основных способа измерения угловой скорости [23]:

- с использованием информации от блока ГГ. Такой способ применяется в случае построения ТГГ и реализован в проекте GOCE [24];
- с использованием гироскопических датчиков угловой скорости, устанавливаемых на блоке ГГ. Такой способ применяется в случае использования ГГ с одной или двумя осями чувствительности.

Для снижения динамического диапазона измерений целесообразно потребовать, чтобы угловая скорость основания в месте установки ГГ была ограничена. В космических применениях снижение угловой скорости основания обеспечивается динамикой самого спутника, на котором установлен ГГ. В морских и авиационных применениях этого можно добиться, размещая блок ГГ на гиросtabilизированной платформе. Особенностью последнего технического решения является необходимость учета изменения воздействий гравитационного поля вследствие поворотов самого подвижного объекта относительно стабилизированного блока ГГ.

Оценим требования к допустимой погрешности измерения угловой скорости. Значение максимальной угловой скорости основания платформы может быть ограничено исходя из неравенства

$$\Omega_{\max} \Omega_{\max} < \Gamma_{\max}. \quad (20)$$

На основании неравенства (20) имеем $\Omega_{\max} < \sqrt{\Gamma_{\max}} = 0,0017 \text{ с}^{-1} = 0,1 \text{ град/с}$. Такое значение угловой скорости создается колебаниями платформы с амплитудой 1 угл.

мин. и частотой собственных колебаний 1 Гц и считается обоснованным ограничением при построении гиросtabilизатора для бортового ГГ [25].

Допустимая погрешность измерения угловой скорости $\delta\Omega$ определяется путем варьирования неравенства (20) $\delta\Omega\Omega_{\max} + \Omega_{\max}\delta\Omega < \delta\Gamma_{\Omega}$, где $\delta\Gamma_{\Omega}$ – составляющая погрешности ГГ, обусловленная центростремительными ускорениями. Отсюда $\delta\Omega < \delta\Gamma_{\Omega}/2\Omega_{\max}$. При $\delta\Gamma_{\Omega} = 1$ ЭТВ имеем $\delta\Omega < 3 \times 10^{-7} \text{с}^{-1} = 0,06^\circ/\text{ч}$, что совпадает с оценками, полученными в работе [23]. Для спутниковых ГГ с уровнем погрешности 0,01 ЭТВ и менее необходимо существенно снижать значение угловой скорости основания Ω_{\max} и погрешность ее определения $\delta\Omega$.

На основе уравнений (18) и (19) методика определения ВПП и угловой скорости вращения основания с помощью ТГГ может быть построена следующим образом.

Применяя операцию альтернирования и симметрирования к тензору **T**, которая может быть выполнена путем обработки результатов измерений компонентов тензора **T** с помощью отдельных ГГ из состава блока ТГГ или выполнена на приборном уровне в ГГ с четырьмя ПТ, получим

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T), \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T), \quad (21)$$

где **S** и **A** – симметричный и антисимметричный тензоры соответственно.

Учитывая выражения для тензора **T**, перепишем выражения (21) в виде (при постоянной угловой скорости вращения ротационных ГГ $\dot{\Omega} = 0$):

$$S_{ij} = -\Gamma_{ij} + \omega_{ik}^a \omega_{kj}^a, A_{ij} = \dot{\omega}_{ij}^a, \quad (22)$$

где $\dot{\omega}_{ij}^a = -\varepsilon_{ijk} \dot{\omega}_k^a$.

Из выражений (22) можно получить формулы для определения угловой скорости вращения основания и тензора градиентов ускорений сил тяготения в объеме блока ТГГ

$$\omega_{ij}^a = \int_0^t A_{ij} dt + \omega_{ij}^a(0); \Gamma_{ij} = -S_{ij} + \omega_{ik}^a \omega_{kj}^a. \quad (23)$$

Для определения компонент тензора ВПП **G** в системе координат $[X_i^b]$ требуется получение информации о компонентах вектора угловой скорости вращения Земли $\bar{\omega}^e$ в той же системе координат.

Если считать, что компоненты вектора $\bar{\omega}^e$ известны в инерциальной системе отсчета, то для получения текущей информации о компонентах вектора $\bar{\omega}^e$ в системе координат $[X_i^b]$ следует дополнительно использовать кинематические соотношения, связывающие угловую скорость вращения какой-либо оси и ее направляющие косинусы [26]:

$$\dot{C}_{ij} = C_{ik} \omega_{kj}^a, \quad (24)$$

где C_{ij} – компоненты матрицы направляющих косинусов.

Определив из уравнений (24) матрицу направляющих косинусов C_{ij} перехода от одной системы координат к другой, можно найти

$$\omega_i^{e,b} = C_{ij} \omega_j^{e,in}. \quad (25)$$

Здесь $\omega_i^{e,b}$, $\omega_j^{e,in}$ – проекции вектора $\vec{\omega}^e$ в системе координат $[X_i^b]$ и инерциальной системе координат соответственно. Выражение (25) позволяет построить тензор $\omega_{ij}^e = -\varepsilon_{ijk} \omega_k^e$ и определить компоненты тензора \mathbf{G} .

Схема, поясняющая методику определения компонент тензора ВППГ и угловой скорости вращения основания с помощью тензорного ТГГ, представлена на рис. 3.

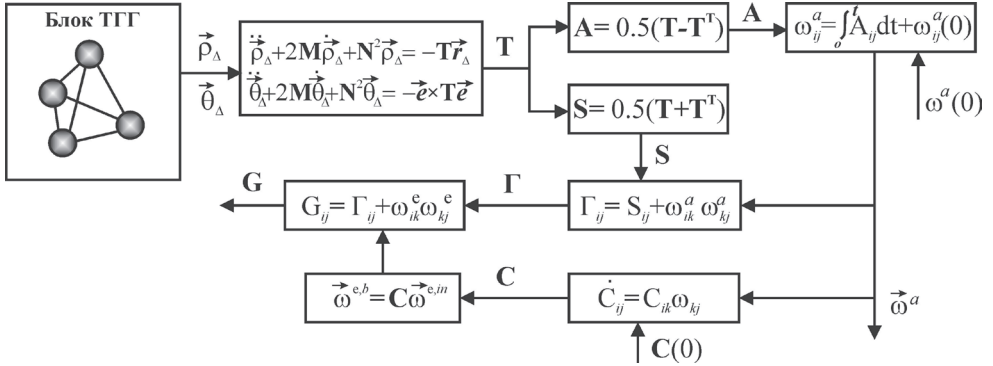


Рис. 3. Схема функционирования тензорного ГГ

На схеме показаны:

- система, состоящая из четырех некопланарных ПТ, расположенных в вершинах тетраэдра и имеющих возможность перемещения по трем измерительным осям;
- измерительное устройство, измеряющее перемещение ПТ в подвесе относительно фиксированной системы координат;
- вычислительное устройство, обеспечивающее преобразования сигналов блока ТГГ и решение системы уравнений (18), (19), (21)–(25).

Недостаток представленной схемы состоит в том, что вследствие интегрирования углового ускорения и наличия погрешностей измерения компонентов тензора \mathbf{T} происходит нарастание погрешности определения угловой скорости и, соответственно, погрешности ВППГ. Для устранения этого недостатка целесообразно в составе ТГГ использовать гироскопические датчики для измерения низкочастотных составляющих угловой скорости гиростабилизированной платформы, а высокочастотные составляющие угловой скорости определять на основе выходных данных ТГГ [12].

Ротационные ГГ, имеющие собственное вращение, будут создавать погрешности в определении компонент тензора $A_{ij} = \dot{\omega}_{ij}^a$ вследствие нестабильности скорости вращения роторной части ГГ. Очевидно, что компоненты $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ различны для независимо вращающихся роторных частей разных ГГ, входящих в состав блока ТГГ, и не являются компонентами одного тензора Ω_{ij} , входящего в выражение тензора \mathbf{P} . Следовательно, измеренные компоненты угловых ускорений, действующих на ГГ, не являются компонентами вектора абсолютного углового ускорения $\vec{\omega}^a$ вращения блока ТГГ и не позволяют построить тензор ω_{ij}^a .

Для подавления погрешностей, связанных с нестабильностью скорости вращения роторной части ротационного ГГ, необходимо выполнение условия

$$\delta \dot{\Omega}_i < \delta \dot{\omega}_i, \quad (26)$$

где $\delta \dot{\omega}_i$ – требуемая точность измерения углового ускорения.

Интегрируя обе части неравенства (26) при нулевых начальных условиях и в одинаковых пределах и разделив полученное неравенство на величину номинальной скорости вращения, получим оценку для допустимой относительной нестабильности скорости вращения роторной части ГГ

$$\delta_{\text{скор}} < \frac{\delta \omega_i}{\Omega_i}. \quad (27)$$

Величина допустимой погрешности измерения угловой скорости определена выше и составляет $\delta \Omega < 3 \times 10^{-7} \text{c}^{-1}$. Подставляя данную оценку в выражение (27) и считая, что номинальная скорость вращения элементов ГГ $\Omega_3 = 1,6 \text{c}^{-1}$ (0,25 Гц) имеем $\delta_{\text{скор}} < 2 \times 10^{-7}$. Это требование должно обеспечиваться во всем диапазоне измерения компонент вектора $\dot{\omega}^a$.

Из приведенных выше соображений вытекает целесообразность размещения всех элементов ТГГ на единой стабилизированной платформе, так как в противном случае будут возникать погрешности в определении $\dot{\omega}^a$ и построении тензора ω_{ij}^a вследствие различия измеренных компонент векторов угловых ускорений для различных платформ.

Инструментальные погрешности гравитационных градиентометров

Погрешности измерения ВПП существенно зависят от инструментальных погрешностей ГГ. К инструментальным погрешностям относятся погрешности, обусловленные несовершенством прибора из-за неточности изготовления его деталей, сборки и регулировки, отклонений характеристик материалов от их номинальных значений и т.д. Непосредственное влияние погрешностей изготовления на динамику ГГ проявляется в виде дополнительных возмущающих сил и моментов относительно оси чувствительности [23, 27, 28].

К основным инструментальным погрешностям акселерометрического ГГ можно отнести [23, 29]:

- неравенство масштабных коэффициентов в паре акселерометров, образующих дифференциальный акселерометр, которое будем определять относительным параметром δ^{SF} ;
- угловую погрешность ориентации пар ПТ относительно номинального положения, которую можно характеризовать углом $\vec{\alpha}$, что приводит к смещению возмущенного положения ПТ на величину $\vec{\alpha} \times \vec{r}_\Delta$;
- неравенство расстояний центров ПТ акселерометров от центра вращения, выражаемое смещением $\Delta \vec{r}_i$ и относительным параметром $\delta^{r(i)} = \Delta r_i / r_\Delta$;

- угловое рассогласование $\vec{\gamma}$ осей чувствительности в паре акселерометров друг относительно друга, приводящее к воздействию вида $\vec{\gamma} \times \vec{W}$;
 - непараллельность нормали к плоскости вращения, в которой расположены оси чувствительности акселерометров, и оси вращения, которая задается вектором $\vec{\beta}$.
- Уравнение погрешностей акселерометрического ГГ имеет вид:

$$\delta \ddot{\vec{p}}_{\Delta} + 2\mathbf{M}_{\Delta} \delta \dot{\vec{p}}_{\Delta} + \mathbf{N}_{\Delta}^2 \vec{p}_{\Delta} = -\delta^{SF} \vec{W} - \vec{\gamma} \times \vec{W} - \mathbf{T}(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{\Delta} + \Delta \vec{r}) - 2[\vec{\omega} \times ((\vec{\beta} \times \vec{\Omega}) \times \vec{r})]. \quad (28)$$

Погрешности гантельного ГГ обусловлены следующими факторами, связанными с технологическими погрешностями изготовления конструкции:

- смещением центра масс гантели относительно точки ее подвеса, характеризуемым вектором относительного статического дисбаланса $\vec{\delta}^L$ (величина дисбаланса, отнесенная к длине плеча гантели);
- изменением положения центра масс гантели относительно точки ее подвеса $\Delta \vec{L}$ (смещение центра подвеса) и изменением положения вектора радиуса инерции гантели относительно центра масс $\Delta \vec{L}^{(st)}$ (смещение плеч гантели) под воздействием ускорений движения основания \vec{W} вследствие упругости элементов конструкции;
- наличием динамического дисбаланса гантели, обусловленного поворотом главных осей инерции гантели относительно их номинального расположения на малые углы, характеризуемые вектором поворота $\vec{\alpha}$ и приводящие к изменению вектора \vec{L} на малую величину $\delta \vec{L} = \vec{\xi} \times \vec{L}$;
- непараллельностью оси чувствительности $\vec{\theta}$ и оси вращения $\vec{\Omega}$ гантелей, угловое рассогласование которых задается вектором $\vec{\varphi}$;
- неравенством параметров (собственных частот и коэффициентов затухания) подвесов двух гантелей при противофазных колебаниях, что задается параметром ψ^N .

Уравнение погрешностей гантельного ГГ имеет вид:

$$\ddot{\vec{\theta}}_{\Delta} + 2\mathbf{M}_{\Delta} \dot{\vec{\theta}}_{\Delta} + \mathbf{N}_{\Delta}^2 \vec{\theta}_{\Delta} = L^{-1} (\vec{\delta}^L \times \vec{W}) + L^{-1} (\Lambda^{-2} \vec{W}) \times \vec{W} + L^{-2} (\Lambda^{(s1)-2} \vec{W} + \Lambda^{(s2)-2} \vec{W}) \times \vec{W} + \vec{e} \times \mathbf{T}(\vec{\xi} \times \vec{e}) + (\vec{\xi} \times \vec{e}) \times \mathbf{T}\vec{e} + \{2\vec{e} \times [\vec{\omega} \times ((\vec{\varphi} \times \vec{\Omega}) \times \vec{e})]\} + L^{-1} [(\Lambda^{(s1)-2} \vec{W} - \Lambda^{(s2)-2} \vec{W}) \times \mathbf{T}\vec{e} + \vec{e} \times \mathbf{T}(\Lambda^{(s1)-2} \vec{W} - \Lambda^{(s2)-2} \vec{W})] + \psi^N \vec{\Omega}, \quad (29)$$

где $\vec{\delta}^L$ – вектор относительного статического дисбаланса; $\Lambda^{-2} \vec{W} = \Delta \vec{L}$; $\Lambda^{(s1)-2} \vec{W} = \Delta \vec{L}^{(s1)}$; $\Lambda^{(s2)-2} \vec{W} = \Delta \vec{L}^{(s2)}$; L – модуль вектора \vec{L} ; $\delta \vec{M}$ – сумма удельных моментов, вызывающих погрешности гантельного ГГ, обусловленные внешними тепловыми и электромагнитными полями, а также погрешностями измерительного устройства, шумом прибора, нулевым дрейфом и другими факторами.

В уравнении (29) параметры Λ^{-2} , $\Lambda^{(s1)-2}$, $\Lambda^{(s2)-2}$ представляют собой коэффициенты поступательной податливости подвеса и плеч гантели (Λ , $\Lambda^{(s1)}$, $\Lambda^{(s2)}$ – матрицы частот собственных поступательных колебаний подвеса и плеч гантели). Погрешности от неравножесткости связаны со смещением центра масс, направление смещения не совпадает с направлением действия ускорения. Это приводит к возмущающим моментам относительно оси чувствительности.

Отметим, что механические подвесы коромысел с ПТ в гантельном ГГ обладают существенной упругой анизотропией – частота противофазных угловых колебаний

составляет единицы Гц, а частоты поступательных колебаний коромысел в подвесе в плоскости, перпендикулярной оси чувствительности, могут составлять единицы кГц.

Основные инструментальные погрешности ротационных ГГ на основе уравнений (28) и (29) приведены в табл. 1 (вращение осуществляется вокруг оси OX_3). Выражения для статических ГГ могут быть получены из этих выражений при нулевой скорости вращения $\Omega_3 = 0$. Выражения погрешностей для ГГ, оси вращения которых совпадают с осями OX_1 и OX_2 , могут быть получены из представленных выражений путем циклической перестановки индексов 1, 2, 3.

Численные оценки требований к конструкции, приведенные в табл. 1, получены для следующих условий:

- допустимая величина каждой составляющей инструментальной погрешности не превышает 1 ЭТВ;
- максимальное угловое ускорение в месте установки датчиков ТГГ не превосходит величины 10^{-2} с^{-2} , что соответствует амплитуде автоколебаний гиросtabilизированной платформы, на которой установлен ТГГ, около 1 угл. мин. на частоте порядка 1 Гц;
- максимальное линейное ускорение от вибрации составляет величину 0,05g, что обеспечивается применением виброизолирующего устройства;
- для оценки влияния неравножесткости введен безразмерный коэффициент неравножесткости вида $\chi_{12} = (\Lambda_{11} - \Lambda_{22})/(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})$, где Λ_{11} , Λ_{22} – частоты поступательных колебаний подвеса или плеч гантели по соответствующим направлениям; Λ_{12} – среднее значение частоты $(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})/2$, принятое равным 1 кГц;
- расстояние между ПТ приняты равными $\vec{r}_\Delta^{(ij)} = 0,2 \text{ м}$, величина плеча гантели $L^{(i)} = 0,1 \text{ м}$.

Требования, предъявляемые к приборам, очень высоки. Например, неравенство расстояний центров ПТ от центра вращения не должно превышать $\delta' < 10^{-7}$, что при $r_\Delta = 0,2 \text{ м}$ составляет абсолютную величину 0,02 мкм, а непараллельность осей на уровне $\beta_1^{(1)} (\varphi_1^{(1)}) < 10^{-7}$ рад означает 0,02 угл. с. Очевидно, что удовлетворить таким требованиям непосредственно при изготовлении невозможно, необходимо проведение работ по регулировке и калибровке уровня погрешностей.

При анализе погрешностей следует принять во внимание, что для ротационных ГГ решающее значение имеют погрешности, проявляющиеся на частоте резонансной настройки, равной удвоенной частоте вращения ротора 2Ω и не поддающиеся последующей фильтрации в выходном сигнале. Для статических ГГ определяющими являются погрешности от квазистатических воздействий вида $\Omega_i \Omega_j$. Отметим, что для погрешностей, модулированных на одинарной частоте вращения, критическими являются внешние воздействия на частотах Ω и 3Ω . Такие воздействия приводят к возмущениям на удвоенной частоте вращения и не поддаются фильтрации. Снижение угловой и поступательной вибрации на указанных частотах влечет за собой особые требования к созданию виброизоляционной аппаратуры.

Следует обратить внимание на подобие аналитических выражений погрешностей для акселерометрических и гантельных ГГ, что свидетельствует об общности динамики рассматриваемых приборов. Для более подробного анализа инструментальных погрешностей бортовых ГГ требуется конкретизация разрабатываемой конструкции.

Основные инструментальные погрешности ГГ

Аналитические выражения погрешностей	Требования к прибору
Акселерометрический ГГ	
Неравенство масштабных коэффициентов	
$\delta_1^{SF(1,3)} r^{-1} (W_1 \sin \Omega_3 t + W_2 \cos \Omega_3 t) - \delta_2^{SF(2,4)} r^{-1} (W_1 \cos \Omega_3 t - W_2 \sin \Omega_3 t)$	$\delta_1^{SF(1,3)} < 2 \cdot 10^{-10}$
Угловая погрешность ориентации пар ПТ	
$-\alpha_1^{(2)} [(-\dot{\omega}_1 + \omega_3 \omega_2 - \Gamma_{32}) \sin \Omega_3 t + (\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 - \Gamma_{31}) \cos \Omega_3 t] +$ $+\alpha_2^{(1)} [(-\dot{\omega}_1 + \omega_3 \omega_2 - \Gamma_{32}) \cos \Omega_3 t + (\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 - \Gamma_{31}) \sin \Omega_3 t] +$ $+(\alpha_3^{(1)} + \alpha_3^{(2)}) [(\Gamma_{11} - \Gamma_{22} + \omega_2^2 - \omega_1^2) \cos 2\Omega_3 t + 2(\Gamma_{12} - \omega_1 \omega_2) \sin 2\Omega_3 t]$	$\alpha_1^{(2)} < 5 \cdot 10^{-8}$ рад $\alpha_3^{(1)} < 10^{-4}$ рад
Неравенство расстояний центров ПТ акселерометров от центра вращения	
$[(\delta_1^{r(1)} - \delta_1^{r(3)}) + (\delta_1^{r(2)} - \delta_1^{r(4)})] [-\dot{\Omega}_3 + (\Gamma_{11} - \Gamma_{22} + \omega_1^2 - \omega_2^2) \sin 2\Omega_3 t +$ $+ 2(\Gamma_{12} - \omega_1 \omega_2) \cos 2\Omega_3 t]$	$\delta r < 10^{-7}$
Рассогласование осей чувствительности в паре акселерометров	
$r^{-1} [W_1 (\gamma_3^{(2)} - \gamma_3^{(4)}) - W_2 (\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(3)}) + W_3 (\gamma_2^{(1)} - \gamma_2^{(3)} + \gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(4)})] \sin \Omega_3 t +$ $+ r^{-1} [W_1 (\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(3)}) - W_2 (\gamma_3^{(2)} - \gamma_3^{(4)}) + W_3 (\gamma_1^{(1)} - \gamma_1^{(3)} + \gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(4)})] \cos \Omega_3 t$	$\gamma_3^{(3)} < 2 \cdot 10^{-10}$ рад
Непараллельность осей	
$2\beta_1^{(1)} \Omega_3 (\omega_1 \cos \Omega_3 t + \omega_2 \sin \Omega_3 t) - 2\beta_2^{(2)} \Omega_3 (-\omega_1 \sin \Omega_3 t + \omega_2 \cos \Omega_3 t)$	$\beta_1^{(1)} < 10^{-7}$ рад
Гантельный ГГ	
Статический дисбаланс	
$\delta_1^{L(1)} L^{-1} (W_1 \sin \Omega_3 t + W_2 \cos \Omega_3 t) - \delta_2^{L(2)} L^{-1} (W_1 \cos \Omega_3 t - W_2 \sin \Omega_3 t)$	$\delta_1^{L(1,2)} < 2 \cdot 10^{-10}$
Динамический дисбаланс	
$-\xi_1^{(2)} [(-\dot{\omega}_1 + \omega_3 \omega_2 - \Gamma_{32}) \sin \Omega_3 t + (\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 - \Gamma_{31}) \cos \Omega_3 t] +$ $+\xi_2^{(1)} [(-\dot{\omega}_1 + \omega_3 \omega_2 - \Gamma_{32}) \cos \Omega_3 t + (\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 - \Gamma_{31}) \sin \Omega_3 t] +$ $+(\xi_3^{(1)} + \xi_3^{(2)}) [(\Gamma_{11} - \Gamma_{22} + \omega_2^2 - \omega_1^2) \cos 2\Omega_3 t + 2(\Gamma_{12} - \omega_1 \omega_2) \sin 2\Omega_3 t]$	$\xi_1^{(2)} < 5 \cdot 10^{-8}$ рад $\xi_3^{(1)} < 10^{-4}$ рад
Неравножесткость подвесов и плеч гантелей	
$(\chi_{12}^{(1)} L^{(1)-2} \Lambda_{12}^{(1)-2} - \chi_{12}^{(2)} L^{(2)-2} \Lambda_{12}^{(2)-2}) [1/2 (W_2^2 - W_1^2) \sin 2\Omega_3 t + W_1 W_2 \cos 2\Omega_3 t]$	$\chi_{12}^{(1)} < 1,6 \cdot 10^{-3}$
Непараллельность осей	
$2\varphi_1^{(1)} \Omega_3 (\omega_1 \cos \Omega_3 t + \omega_2 \sin \Omega_3 t) - 2\varphi_2^{(2)} \Omega_3 (-\omega_1 \sin \Omega_3 t + \omega_2 \cos \Omega_3 t)$	$\varphi_1^{(1)} < 10^{-7}$ рад
Неравенство параметров подвесов	
$\Psi_3^N \dot{\Omega}_3$	$\Psi_3^N < 10^{-6}$

Очевидно, что инструментальные погрешности существенно влияют на динамику бортовых ГГ и приводят к искажению измеряемых сигналов. Для достижения высоких требований к конструкции, указанных в таблице, понадобится проведение большого объема технологических работ по балансировке, настройке и калибровке

параметров бортовых ГГ с созданием специализированной стендовой аппаратуры [30–33]. Несмотря на значительную трудоемкость таких работ, зарубежный опыт разработки и успешной эксплуатации образцов приборов показывает, что создание отечественных бортовых ГГ для различных подвижных объектов является технически выполнимой задачей.

Выводы

Проведено исследование особенностей динамики бортовых ГГ в общем случае их движения. Построены математические модели и показана общность подходов к рассмотрению динамики как акселерометрических, так и гантельных ГГ. Предложена методика и схема определения компонент тензора вторых производных геопотенциала и угловой скорости вращения основания с помощью тензорного ГГ. Рассмотрены инструментальные погрешности и получены численные оценки требований к конструкции бортовых ГГ.

Отмечено, что для обеспечения требуемой точности измерения на подвижном основании необходимо проведение большого объема технологических работ по балансировке, настройке и калибровке параметров бортовых ГГ с созданием специализированной стендовой аппаратуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. DiFrancesco, D., Balmino, G., Johannessen, J., Visser, P., Woodworth, P., Gravity Gradiometry – Today and Tomorrow, 11th SAGA Biennial Technical Meeting and Exhibition Swaziland, September 2009, pp. 80–83.
2. Rummel, R., Balmino, G., Johannessen, J., Visser P., Woodworth, P., Dedicated gravity field missions – principles and aims, *Journal of Geodynamics*, 2002, no. 33, pp.3–20.
3. Dransfield, M., Airborne Gravity Gradiometry in the Search for Mineral Deposits, *Proceedings of Exploration 07: Fifth Decennial International Conference on Mineral Exploration*, 2007, pp. 341–354.
4. Евстифеев М.И. Состояние разработок бортовых гравитационных градиентометров // Гироскопия и навигация. 2016. № 3 (94). С. 96–114. (Evstifeev, M.I., The State of the Art in the Development of Onboard Gravity Gradiometers, *Gyroscopy and Navigation*, 2017, vol. 8, no. 1, pp. 68–79.)
5. Джилавдари И.З., Ризноокая Н.Н. Этапы развития и состояние разработок гравитационных градиентометров для подвижных объектов (Обзор) // Приборы и методы измерений. 2016. Т. 7. № 3. С. 235–246. (Gilavdari, I.Z., Riznookaya, N.N., Stages of development and state of engineering of gravity gradiometers for moving objects (review), *Pribory i metody izmerenii*, 2016, vol. 7, no. 3, pp. 235–246.)
6. Джанджгава Г.И., Августов Л.И. Навигация по геополям. Научно-методические материалы. М.: ООО «Научтехлитиздат», 2018. 296 с. (Dzhandzhagava, G.I., Avgustov, L.I., *Navigatsiya po geopolyam. Nauchno-metodicheskie materialy* (Navigation by Geophysical Fields. Research and Methodological Materials), Moscow: ООО Nauchtekhlitizdat, 2018.)
7. Малеев П.И. Место гравиметрической аппаратуры среди корабельных средств навигации и перспективы ее развития // Навигация и гидрография. 2016. №44. С. 16–21. (Maleev, P.I., Place of gravimetric equipment among the ship navigation aids and prospects of its development, *Navigatsiya i gidrografiya*, 2016, no. 44, pp. 16–21.)
8. Сорока А.И. О разработках бортовых измерителей вторых производных гравитационного потенциала // Гравиметрия и геодезия. М.: Научный мир, 2010. С. 300–310. (Soroka, A.I., On the development of onboard meters of geopotential second derivatives, *Gravimetriya i geodeziya* (Gravimetry and Geodesy), Brovar, V.V., Ed., Moscow: Nauchnyi Mir, 2010, pp. 300–310.)
9. Вольфсон, Г.Б. Состояние и перспективы развития гравитационной градиентометрии // Применение гравитационных технологий в геофизике. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электронприбор», 2002. С. 90–105. (Vol'fson, G.B., State and perspectives of gravity gradiometry, *Primenenie gravitatsionnykh tekhnologii v geofizike* (Gravity-Inertial Technologies in Geophysics), Collected articles and papers, St. Petersburg: Elektropribor, 2002. С. 90–105.)

10. Gerber, M.A., Gravity Gradiometry: Something New in Inertial Navigation, *Astronautics and Aeronautics*, 1978, vol. 16, pp. 18–26.
11. Jekeli, C., 100 Years of Gravity Gradiometry, Lecture presented in Geological Science 781, Gravimetry, 27 November 2007.
12. Пешехонов В.Г., Несенюк Л.П., Старосельцев Л.П., Элинсон Л.С. Судовые средства измерения параметров гравитационного поля Земли. Л.: ЦНИИ «Румб», 1989. 90 с. (Peshekhonov, V.G., Nesenjuk, L.P., Starosel'tsev, L.P. and Elinson, L.S., Sudovye sredstva izmereniya parametrov gravitatsionnogo polya Zemli (Shipborne Aids Measuring the Parameters of the Earth Gravity Field), Leningrad: Rumb, 1989.)
13. Veryaskin, A., *Gravity, Magnetic and Electromagnetic Gradiometry. Strategic technologies in the 21st century*, Morgan & Claypool Publishers, 2018. URL: <https://doi.org/10.1088/978-1-6817-4700-2>.
14. Brown, D., Mauser, L., Young, B., Kasevich, M., Rice, H.F., Benischek, V., Atom Interferometric Gravity Gradiometer System, *Proceedings of 2012 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, PLANS-2012, pp. 30–37.
15. Carraz, O., Siemes, C., Massotti, L., Haagmans, R., Silvestrin, P., A Spaceborne Gravity Gradiometer Concept Based on Cold Atom Interferometers for Measuring Earth's Gravity Field, *Microgravity Sci. Technol.*, 2014, pp.139–145.
16. Mumaw, G., Marine 3D Full Tensor Gravity Gradiometry. The first five years, *Hydro International*, September 2004, pp. 38–41.
17. DiFrancesco, D., Advances and Challenges in the Development and Deployment of Gravity Gradiometer Systems, *EGM 2007 International Workshop Innovation in EM, Grav and Mag Methods: a new Perspective for Exploration*, Capri, Italy, April 15–18, 2007.
18. Albertella, A., Migliaccio, F., Sansó, F., GOCE: The Earth Gravity Field by Space Gradiometry, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, May 2002, vol. 83, issue 1–4, pp. 1–15.
19. Гетманская В.В., Калинин И.И., Нюнина Н.А. О погрешностях частотно-динамического градиентометра // Гравиинерциальные приборы и измерения. М.: Наука, 1985. С. 62–65. (Getmanskaya, V.V., Kalinnikov, I.I. and Nyunina, N.A., On frequency-dynamical gradiometer errors in Graviinertsial'nye pribory i izmereniya (Gravity and Inertial Devices and Measurements), Moscow: Nauka, 1985, pp. 62–65.)
20. Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A., *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, 1973, 1279 p.
21. DiFrancesco, D., Gravity gradiometry developments at Lockheed Martin, *EGS – AGU – EUG Joint Assembly*, Abstracts from the meeting held in Nice, France, April 2003, abstract #1069.
22. Jekeli, C., Theoretical Fundamentals of Airborne Gradiometry, *Airborne Gravity for Geodesy Summer School*, 23–27 May 2016.
23. Jekeli, C., Airborne Gradiometry Error Analysis, *Surveys in Geophysics*, 2006, pp. 257–275.
24. Sünkel, H. (ed.), From Eötvös to Milligal, ESA Final Report, ESA/ESTEC, contract no. 13392/98/NL/GD, Graz, Austria, 2000, 418 p.
25. Старосельцев Л.П. Анализ требований к системе гироскопической стабилизации гравитационного градиентометра // Гироскопия и навигация. 1995. №3. С. 30–33.
26. Броксмейер Ч.Ф. Системы инерциальной навигации. Судостроение. 1967. (Broksmeier, Ch.F., Sistemy inertsiial'noi navigatsii (Inertial Navigation Systems), Leningrad: Sudostroenie, 1967.)
27. Jekeli, C., Accuracy Requirements in Position and Attitude for Airborne Vector Gravimetry and Gradiometry, *Gyroscopy and Navigation*, 2011, vol. 2, no. 3, pp. 164–169.
28. Mingbiao, Y., Tijing, C., Mathematical Model and Error Analysis of Moving-base Rotating Accelerometer Gravity Gradiometer, arXiv:1905.05009v2 [physics.ins-det] 14 May 2019.
29. Golovan, A.A., Gorushkina, E.V., Papusha, I.A., About Identification of Instrument Error Parameters for a Gravity Gradiometer, *Proceedings of 5th IAG Symposium on Terrestrial Gravimetry: Static and Mobile Measurements* (TG-SMM 2019, 2019, pp. 27–28.
30. Matthews, R., *Mobile Gravity Gradiometry*, PhD Dissertation, University of Western Australia, 2002, 429 p.
31. Visser, P.N.A.M., Using the GOCE star trackers for validating the calibration of its accelerometers, *Journal of Geodesy*, 2018, vol. 92, issue 8, pp. 833–836.
32. Hongwei Wei, Meiping Wu, Juliang Cao, New Matching Method for Accelerometers in Gravity Gradiometer, *Sensors*, 2017, 17, 1710; 16 p. DOI: 10.3390/s17081710.
33. Douch, K., Panet, I., Pajot-Métivier, G., Christophe, B., Foulon, B., Lequentrec-Lalancette, M.-F., Diament, M., Error analysis of a new planar electrostatic gravity gradiometer for airborne surveys, *Journal of Geodesy*, December 2015, vol. 89, issue 12, pp. 1217–1231.

Evstifeev, M.I. (Concern CSRI Elektropribor, JSC, St. Petersburg, Russia)

Dynamics of Onboard Gravity Gradiometers, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2019, vol. 27, no. 4 (107), pp. 69–87.

Abstract. The dynamics of onboard gravity gradiometers for measuring the second derivatives of geopotential is discussed in the paper. The mathematical models of accelerometer-type and dumbbell-type devices are constructed, and their instrumental errors are analyzed. Numerical estimates of design specifications are obtained, and it is noted that adjustment and calibration should be performed to ensure measurement accuracy.

Key words: tensor gravity gradiometer, dynamic equations, instrumental errors.

Материал поступил 24.10.2019