

Н. Н. ВАСИЛЮК

КАЛИБРОВКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МАГНИТОМЕТРА ЗА СЧЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ ТРЕХОСНОГО ГИРОСКОПА

В статье рассматривается задача калибровки трехосного магнитометра, встроенного в сложное электронное устройство. Известные методы калибровки, основанные на эллипсоидной аппроксимации геометрического места измерений магнитометра, обеспечивают лишь частичную калибровку и определяют только симметричную часть матрицы магнитной проницаемости. Ортогональная часть матрицы остается неопределенной. Предлагаемый алгоритм позволяет найти полную матрицу магнитной проницаемости за счет вращения устройства и дополнительных измерений при помощи трехосного гироскопа.

Ключевые слова: калибровка магнитометра, интегральный магнитометр, погрешности магнитометра.

Введение

В состав современных микроэлектронных интегральных навигационных датчиков (ИНД) входят отдельные векторные датчики, измеряющие компоненты векторов индукции магнитного поля (магнитометры), кажущегося ускорения (акселерометры) и угловой скорости (гироскопы) [1, 2]. Каждый векторный датчик одновременно измеряет три проекции соответствующего вектора на три взаимно перпендикулярные измерительные оси, называемые осями чувствительности. При объединении векторных датчиков в один ИНД их одноименные оси чувствительности должны быть сонаправлены, а моменты измерения – синхронизированы. Таким образом, с каждым ИНД можно связать правую ортогональную систему координат (СК), относительно которой выполняются синхронные измерения векторных величин. Эта СК называется измерительной (ИСК). ИНД широко применяются в переносных электронных устройствах, таких как смартфоны, планшетные компьютеры и т.д., в качестве датчиков пространственной ориентации корпуса устройства. Для этого ИНД устанавливается на печатной плате, закрепленной внутри устройства, в результате чего ИСК получает жесткую механическую связь с корпусом. По этой причине из пространственной ориентации ИСК, измеренной ИНД в некоторый момент времени, можно получить ориентацию корпуса устройства на этот же момент времени.

Векторный магнитометр включается в состав ИНД для измерения компонент вектора индукции \mathbf{h}^E магнитного поля Земли, по которым определяется ориентация корпуса относительно направления на магнитный полюс. Однако вектор магнитной индукции, измеряемый магнитометром ИНД, отличается от \mathbf{h}^E , так как слабое магнитное поле Земли искажается влиянием корпусных элементов

Василюк Николай Николаевич. Руководитель группы, ООО «Топкон Позиционинг Системз» (Москва).

устройства. Искажения магнитного поля Земли, порождаемые элементами конструкции, называются девиациями [3] и разделяются на два основных типа. Искажением первого типа является дополнительное магнитное поле, порождаемое цепями постоянного тока и намагниченными элементами конструкции. Этот тип искажений называется искажениями магнитно-жесткого типа. Магнитно-жесткие искажения проявляются в виде вектора индукции \mathbf{h}^H , который связан с корпусом устройства. При вращении корпуса этот вектор вращается вместе с ним, и проекции \mathbf{h}^H на оси ИСК не изменяются.

Второй тип искажений связан с магниточувствительными элементами конструкции, намагниченность которых появляется только при наличии внешнего магнитного поля. Материалы с такими свойствами называются магнитно-мягкими. Под действием магнитного поля с суммарной индукцией $\mathbf{h}^H + \mathbf{h}^E$ эти элементы намагничиваются и порождают дополнительное магнитное поле с индукцией \mathbf{h}^S . Такие искажения называются искажениями магнитно-мягкого типа.

Использование измерений магнитометра возможно только после коррекции всех девиаций и выделения компонент, соответствующих вектору \mathbf{h}^E . Классические модели компасных девиаций, а также способы их определения и коррекции, известные из морской навигации [3], мало подходят для применения со встраиваемыми магнитометрами. В первую очередь это связано с особенностями конструкции магнитных компасов, спроектированных для объектов, имеющих достаточно жесткие ограничения на допустимые пространственные ориентации ИСК. Во-вторых, классические методы определения коэффициентов моделей компасных девиаций требуют наличия у пользователя специальных инструментов для измерений угловых координат объектов береговой инфраструктуры или небесных светил. Для практического применения этих инструментов необходимы специальные навыки, которыми большинство пользователей не обладают.

Очевидно, что для устранения девиаций встроенного магнитометра следует выполнить его лабораторную калибровку в составе полностью собранного устройства [4]. При всем том параметры недорогих магнитометров и внутреннее магнитное поле устройства изменяются с течением времени, поэтому их однократная заводская калибровка нецелесообразна, эффективнее осуществлять ее силами конечного пользователя. Это позволит сделать калибровку регулярной процедурой, учитывающей естественный дрейф калибруемых параметров.

В известных основанных на эллипсоидной аппроксимации подходах [5, 6] к калибровке магнитометра силами пользователя используются только собственные измерения магнитометра, причем модель этих измерений считается линейной. В такой модели искажения магнитно-жесткого типа учитываются в виде постоянного вектора смещения, а искажения магнитно-мягкого типа – в виде матрицы магнитной проницаемости с постоянными коэффициентами. Этот подход достаточно точно определяет компоненты вектора смещения, но матрица магнитной проницаемости определяется с точностью до произвольного постоянного множителя в виде ортогональной матрицы. Поскольку умножение измеряемого вектора на ортогональную матрицу эквивалентно повороту ИСК, эта неопределенность приводит к погрешности определения ориентации вектора \mathbf{h}^E относительно корпуса устройства.

В данной работе предлагается способ устранения указанной неопределенности в калибровке матрицы магнитной проницаемости за счет использования дополнительных измерений вектора угловой скорости корпуса устройства.

Постановка задачи

В слабых магнитных полях проекции векторов \mathbf{h}^S и $\mathbf{h}^H + \mathbf{h}^E$ на ИСК связаны линейным соотношением $\mathbf{h}_{\text{ИСК}}^S = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{h}_{\text{ИСК}}^E + \mathbf{h}_{\text{ИСК}}^H)$, в котором $\tilde{\mathbf{M}}$ аналогична матрице магнитной восприимчивости устройства. Магнитометр размещается внутри устройства и измеряет компоненты вектора $\mathbf{h}_{\text{ИСК}}^\Sigma$ суммарной магнитной индукции:

$$\mathbf{h}_{\text{ИСК}}^\Sigma = \mathbf{h}_{\text{ИСК}}^H + \mathbf{h}_{\text{ИСК}}^E + \mathbf{h}_{\text{ИСК}}^S = \mathbf{M}(\mathbf{h}_{\text{ИСК}}^H + \mathbf{h}_{\text{ИСК}}^E),$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{M}}$ – матрица с постоянными коэффициентами, аналогичная матрице магнитной проницаемости устройства; \mathbf{I}_n – единичная матрица $n \times n$.

Предполагается, что в процессе работы электронного устройства со встроенным магнитометром можно пренебречь изменениями собственной намагниченности устройства и распределения постоянных токов на отрезках времени порядка десятков минут. Это означает, что на указанном временном отрезке компоненты матрицы \mathbf{M} и магнитно-жесткой индукции $\mathbf{h}_{\text{ИСК}}^H$ остаются практически постоянными. Если электронное устройство со встроенным магнитометром выполняет измерения при отсутствии внешних источников магнитного поля и массивных металлических тел (трансформаторы, электродвигатели, опоры линий электропередач и т.д.), то в момент времени i вектор измерений $\boldsymbol{\mu}_i = [\mu_{1i} \ \mu_{2i} \ \mu_{3i}]^T$ магнитометра записывается в виде

$$\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{M}(\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E + \mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^H) + \tilde{\mathbf{b}}^M + \boldsymbol{\varepsilon}_i^M = \mathbf{M}\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E + \mathbf{b}^M + \boldsymbol{\varepsilon}_i^M, \quad (1)$$

где $\tilde{\mathbf{b}}^M$ – вектор квазипостоянных смещений нулей отдельных датчиков трехосного магнитометра; $\mathbf{b}^M = \mathbf{M}\mathbf{h}_{\text{ИСК}}^H + \tilde{\mathbf{b}}^M$ – эквивалентный вектор смещений нулей магнитометра; $\boldsymbol{\varepsilon}_i^M$ – вектор централизованного стационарного белого гауссовского шума; $M[\boldsymbol{\varepsilon}_i^M] = \mathbf{o}_3$ – математическое ожидание; $\text{cov}[\boldsymbol{\varepsilon}_i^M] = \mathbf{R}^M = \{r_{kj}^M\}_{k,j=1}^3$ – ковариационная матрица; \mathbf{o}_n – нулевой вектор-столбец $n \times 1$; $\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E$ – проекции вектора \mathbf{h}^E на ИСК.

Целью калибровки магнитометра является получение оценок $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$, $\hat{\mathbf{b}}^M$ матрицы \mathbf{M}^{-1} и вектора \mathbf{b}^M . Если эти оценки получены, то по измеренному вектору $\boldsymbol{\mu}_i$ может быть найдена оценка $\hat{\mathbf{h}}_{\text{ИСК}i}^E = \hat{\mathbf{M}}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_i - \hat{\mathbf{b}}^M)$ проекций вектора \mathbf{h}^E на ИСК, которую можно использовать в алгоритмах определения ориентации электронного устройства.

Калибровка магнитометра, как и любого другого измерительного прибора, выполняется путем сравнения значений измеренных величин с заранее заданными калибровочными воздействиями и последующего вычисления коэффициентов модели измерений. При отсутствии у пользователя специального оборудования и инструментов таким калибровочным воздействием является постоянный вектор

\mathbf{h}^E . Точное значение $|\mathbf{h}^E|$ в месте выполнения калибровки может быть неизвестно пользователю. В связи с этим если откалиброванный магнитометр предназначен только для указания направления на магнитный полюс, то алгоритм калибровки должен допускать использование в качестве $|\mathbf{h}^E|$ произвольного положительного значения. Вместе с тем представляется целесообразным использовать в качестве $|\mathbf{h}^E|$ обоснованное значение магнитной индукции, полученное из какой-либо доступной модели магнитного поля Земли, например World Magnetic Model (WMM) [7]. WMM представляет собой набор коэффициентов разложения скалярного потенциала магнитного поля Земли по сферическим функциям, зависящим от географических координат измерителя и момента времени измерения. Коэффициенты разложения обновляются раз в пять лет, и на момент написания статьи в [7] приводится таблица коэффициентов для модели WMM2015, действующей в период 2015–2020 гг. Там же приводятся исходные коды программы на языке С для расчета проекций вектора \mathbf{h}^E на северное, восточное и вертикальное направления в заданной точке околоземного пространства относительно эллипсоида WGS 84. В случае использования модельного значения $|\mathbf{h}^E|$ откалиброванный магнитометр сможет не только указывать направление на магнитный полюс, но и измерять величину и отдельные компоненты вектора индукции внешнего магнитного поля.

В рамках ограничений, при которых сформулирована модель измерений (1), единственной причиной изменений в показаниях магнитометра, расположенного в фиксированной точке, является изменение ориентации ИСК относительно вектора \mathbf{h}^E , при котором изменяются проекции $\mathbf{h}_{ИСКi}^E$. Поскольку встроенный магнитометр должен выполнять измерения при любой ориентации корпуса устройства, в процессе калибровки желательно получить измерения компонент вектора \mathbf{h}^E при наибольшем количестве вариантов ориентации корпуса. На практике это означает, что корпус в процессе калибровки нужно поворачивать вокруг различных пространственных направлений так, чтобы точки пересечения постоянного вектора \mathbf{h}^E с корпусом покрыли его как можно более плотно и равномерно. Неравномерное или неплотное распределение пересечений вектора \mathbf{h}^E с корпусом приводит к неадекватным оценкам калибруемых параметров [8, 9].

В условиях, когда о векторе \mathbf{h}^E известно только то, что это постоянный вектор, информация для калибровки может быть извлечена из формы геометрического места векторных измерений магнитометра, полученных в процессе накопления калибровочной информации. Для построения этой геометрической формы выберем земную систему координат (ЗСК) – произвольную правую ортонормированную СК, связанную с Землей. Постоянные компоненты вектора \mathbf{h}^E в ЗСК обозначим $\mathbf{h}_{ЗСК}^E$. Ориентация поворачивающейся ИСК относительно неподвижной ЗСК в момент времени i описывается ортогональной матрицей $\mathbf{S}_{ИСКi}^{ЗСК}$, причем $\mathbf{h}_{ИСКi}^E = \mathbf{S}_{ИСКi}^{ЗСК} \mathbf{h}_{ЗСК}^E$. Теперь из (1) можно исключить неизвестные переменные компоненты $\mathbf{h}_{ИСКi}^E$ и переписать это выражение так, чтобы оно содержало только постоянные, измеряемые и калибруемые величины:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E &= \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_i - \mathbf{b}^M - \boldsymbol{\varepsilon}_i^M) = \mathbf{U}\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i - \mathbf{b}^M - \boldsymbol{\varepsilon}_i^M), \\ \mathbf{h}_{3\text{СК}}^E &= (\mathbf{S}_{\text{ИСК}i}^{3\text{СК}})^T \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_i - \mathbf{b}^M - \boldsymbol{\varepsilon}_i^M) = \tilde{\mathbf{U}}_i \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i - \mathbf{b}^M - \boldsymbol{\varepsilon}_i^M). \end{aligned} \quad (2)$$

При получении выражений (2) использовано разложение квадратной матрицы $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{D}$ в виде произведения двух матриц размером 3×3 – симметричной \mathbf{D} и ортогональной \mathbf{U} , причем $\det \mathbf{U} = 1$. Такое разложение существует для любой квадратной матрицы и называется полярным [10]. Кроме того, в (2) дополнительно введена ортогональная матрица $\tilde{\mathbf{U}}_i = (\mathbf{S}_{\text{ИСК}i}^{3\text{СК}})^T \mathbf{U}$, так что $(\mathbf{S}_{\text{ИСК}i}^{3\text{СК}})^T \mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{S}_{\text{ИСК}i}^{3\text{СК}})^T \mathbf{U}\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{U}}_i \mathbf{D}$.

Поскольку модуль $|\mathbf{h}^E|$ предполагается постоянным, то с учетом (2) для каждого измерения магнитометра $\boldsymbol{\mu}_i, i=1 \dots N$, можно записать уравнение

$$|\mathbf{h}^E|^2 = (\mathbf{h}_{3\text{СК}}^E)^T \mathbf{h}_{3\text{СК}}^E = (\boldsymbol{\mu}_i - \mathbf{b}^M - \boldsymbol{\varepsilon}_i^M)^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_i - \mathbf{b}^M - \boldsymbol{\varepsilon}_i^M), \quad (3)$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{U}}_i^T \tilde{\mathbf{U}}_i \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{D} = \{q_{kj}\}_{k,j=1}^3$ – симметричная матрица ($q_{kj} = q_{jk}$), причем все диагональные элементы $q_{kk} > 0, k = 1, 2, 3$. Уравнение (3) содержит девять подлежащих оцениванию параметров: шесть коэффициентов матрицы \mathbf{Q} и три компоненты вектора \mathbf{b}^M – и представляет собой уравнение поверхности второго порядка. Установлено [5, 6], что поверхностью, описывающей измерения магнитометра, полученные в процессе поворотов корпуса, является трехмерный эллипсоид. Калибровка магнитометра заключается в получении численных значений неизвестных коэффициентов в (3), определяющих форму эллипсоида в ИСК.

Отметим, что при получении выражения для матрицы \mathbf{Q} была утрачена ортогональная матрица \mathbf{U} . Методы калибровки, основанные на уравнении (3), не позволяют восстановить утраченную ортогональную матрицу, так как в это уравнение входят только коэффициенты симметричной матрицы \mathbf{Q} , полученные из коэффициентов симметричной матрицы \mathbf{D} . Таким образом, алгоритмы калибровки, основанные на эллипсоидной аппроксимации, оценивают матрицу магнитной проницаемости с точностью до произвольной ортогональной матрицы, поскольку оценивается только симметричная часть матрицы магнитной проницаемости [6].

Для восстановления утраченной матрицы \mathbf{U} в процессе накопления калибровочных измерений, кроме измерений магнитометра $\boldsymbol{\mu}_i$, необходимо регистрировать какую-либо дополнительную векторную информацию, функционально связанную с измерениями магнитометра и ориентацией корпуса. В частности, роль такой информации могут выполнять компоненты вектора $\boldsymbol{\zeta}$ угловой скорости корпуса, функционально связанного с \mathbf{h}^E через векторное равенство

$$d\mathbf{h}^E / dt \equiv \mathbf{o} = \tilde{d}\mathbf{h}^E / dt + \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{h}^E,$$

где $d\mathbf{h}^E / dt$ – полная производная постоянного вектора \mathbf{h}^E ; $\tilde{d}\mathbf{h}^E / dt$ – локальная производная вектора \mathbf{h}^E относительно корпуса, вращающегося с угловой

скоростью ζ ; \mathbf{o} – нулевой вектор. Локальная производная вектора относительно какой-либо вращающейся СК вычисляется дифференцированием проекций вектора на оси этой СК.

Для получения функциональной связи между векторами \mathbf{h}^E и ζ в терминах измеряемых величин введем специальную правую ортонормированную промежуточную СК (ПСК), связанную с корпусом устройства. Поворот между ПСК и ИСК задается постоянной ортогональной матрицей \mathbf{U} , утраченной в процессе построения эллипсоида (3). Это означает, что проекции вектора \mathbf{h}^E на ПСК $\mathbf{h}_{\text{ПСК}i}^E$ и на ИСК $\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E$ связаны соотношениями $\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E = \mathbf{U}\mathbf{h}_{\text{ПСК}i}^E$, $\mathbf{h}_{\text{ПСК}i}^E = \mathbf{U}^T\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E$. Таким образом, из векторного равенства $\dot{\mathbf{h}}^E / dt = -\zeta \times \mathbf{h}^E$ следует $\dot{\mathbf{h}}_{\text{ПСК}i}^E = -\zeta_{\text{ПСК}i} \times \mathbf{h}_{\text{ПСК}i}^E = -[(\mathbf{U}^T\zeta_{\text{ИСК}i}) \times] \mathbf{h}_{\text{ПСК}i}^E$, где $\zeta_{\text{ПСК}i}$, $\zeta_{\text{ИСК}i}$ – проекции вектора ζ на ПСК и на ИСК в момент времени i . Для упрощения записи здесь была использована матрица векторного умножения на вектор-столбец $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ слева $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a} \times] \mathbf{b}$:

$$[\mathbf{a} \times] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим оценки матрицы \mathbf{D} и вектора \mathbf{b}^M , полученные в результате эллипсоидной аппроксимации, как $\hat{\mathbf{D}}$ и $\hat{\mathbf{b}}^M$. Истинные значения проекций $\mathbf{h}_{\text{ПСК}i}^E$ и их экспериментальная оценка $\hat{\mathbf{h}}_{\text{ПСК}i}^E$ рассчитываются из измерений магнитометра согласно (2):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{ПСК}i}^E &= \mathbf{U}^T \mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E = \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i - \mathbf{b}^M - \boldsymbol{\varepsilon}_i^M), \\ \hat{\mathbf{h}}_{\text{ПСК}i}^E &\triangleq \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i = \hat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\mu}_i - \hat{\mathbf{b}}^M). \end{aligned}$$

Компоненты $\zeta_{\text{ИСК}i}$ измеряются трехосным гироскопом синхронно с измерениями магнитометра $\boldsymbol{\mu}_i$:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \zeta_{\text{ИСК}i} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^G,$$

где $\boldsymbol{\omega}_i = [\omega_{1i} \ \omega_{2i} \ \omega_{3i}]^T$ – вектор измеренных значений угловой скорости в проекциях на оси ИСК; $\boldsymbol{\varepsilon}_i^G$ – вектор центрированного стационарного гауссовского белого шума; $M[\boldsymbol{\varepsilon}_i^G] = \mathbf{o}_3$; $\text{cov}[\boldsymbol{\varepsilon}_i^G] = \mathbf{R}^G = \{r_{kj}^G\}_{k,j=1}^3$. Современные магнитометры позволяют считывать измерения с достаточно высокой частотой – 50-100 Гц [2]. Если угловая скорость калибровочных поворотов корпуса много меньше 10 об/с, то покомпонентная производная $\dot{\mathbf{h}}_{\text{ПСК}i}^E$ достаточно хорошо описывается разностной аппроксимацией $\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_i \approx (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{i-1})/T_{\text{ИЗМ}}$, где $T_{\text{ИЗМ}}$ – период измерений.

Таким образом, для каждого момента измерения i можно записать векторное уравнение, содержащее искомую матрицу \mathbf{U} и величины, доступные для измерения:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_i = -[(\mathbf{U}^T \boldsymbol{\omega}_i) \times] \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i = \mathbf{l}_i \mathbf{u}, \quad (4)$$

где $\mathbf{u} = [u_{11} \ u_{12} \ u_{13} \ u_{21} \ u_{22} \ u_{23} \ u_{31} \ u_{32} \ u_{33}]^T$ – столбец 9×1 , составленный из элементов матрицы \mathbf{U} ; $\mathbf{l}_i = [\omega_{1i}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i \times] \ | \ \omega_{2i}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i \times] \ | \ \omega_{3i}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i \times]]$ – матрица 3×9 , получаемая перераспределением коэффициентов произведения $[(\mathbf{U}^T \boldsymbol{\omega}_i) \times] \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$. Матрица \mathbf{U} – ортогональная с единичным определителем, поэтому ее девять коэффициентов являются функциями трех независимых параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, которые для удобства обозначения объединены в один вектор-столбец $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$, то есть $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$ и $\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})$. Выбор этих параметров обусловлен удобством решения конкретной задачи. В рассматриваемом случае в качестве параметров $\boldsymbol{\alpha}$ используются значения углов трех последовательных поворотов вокруг трех некопланарных осей.

В процессе калибровочных поворотов устройства накапливаются данные синхронных измерений $\{\boldsymbol{\mu}_i\}_{i=1}^N$ магнитометра и $\{\boldsymbol{\omega}_i\}_{i=1}^N$ гироскопа, где N – количество измерений. Используя элементы этих массивов, можно записать систему из $N-1$ векторных уравнений (4) (или $3N-3$ скалярных уравнений) для нахождения вектора параметров $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}} = \mathbf{L} \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}), \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}} = \frac{1}{T_{\text{ИЗМ}}} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_2 - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_N - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_N \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где \mathbf{L} – матрица размера $3(N-1) \times 9$; $\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}$ – столбец размера $3(N-1) \times 1$.

Точного решения системы уравнений (5) относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ заведомо не существует, так как эта система составлена из компонентов, содержащих случайные слагаемые. Одним из возможных способов решения системы (5) является метод наименьших квадратов (МНК), в котором в качестве решения принимается значение $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [\hat{\alpha}_1 \ \hat{\alpha}_2 \ \hat{\alpha}_3]^T$, минимизирующее квадратичную функцию второго этапа калибровки:

$$J^{(2)}(\boldsymbol{\alpha}) = \|\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}} - \mathbf{L} \mathbf{u}\|_2^2 = (\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}} - \mathbf{L} \mathbf{u})^T (\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}} - \mathbf{L} \mathbf{u}) = \sum_{i=2}^N (\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_i - \mathbf{l}_i \mathbf{u})^T (\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_i - \mathbf{l}_i \mathbf{u}). \quad (6)$$

Целью настоящей статьи является построение алгоритма калибровки магнитометра, позволяющего получить оценки всех множителей полярного разложения матрицы \mathbf{M}^{-1} из массивов измерений $\{\boldsymbol{\mu}_i\}_{i=1}^N$ и $\{\boldsymbol{\omega}_i\}_{i=1}^N$. Такой алгоритм будем называть алгоритмом полной калибровки магнитометра, чтобы отличать его от алгоритмов [5, 6], определяющих только симметричную часть этой матрицы. Алгоритм будет состоять из двух последовательных вычислительных

этапов. Первый – калибровка симметричной части матрицы магнитной проницаемости с использованием эллипсоидной аппроксимации геометрического места измерений магнитометра. На этом этапе вырабатываются оценки $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{b}}^M$ матрицы \mathbf{D} и вектора \mathbf{b}^M , при которых минимизируется среднеквадратичная погрешность эллипсоидного приближения для геометрического места, занимаемого массивом измерений $\{\boldsymbol{\mu}_i\}_{i=1}^N$. Второй этап – калибровка ортогональной части с использованием дополнительных измерений трехосного гироскопа. Здесь определяется вектор параметров $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg \min J^{(2)}(\boldsymbol{\alpha})$, минимизирующий значение квадратичной функции (6), и рассчитывается оценка $\hat{\mathbf{U}} \equiv \hat{\mathbf{U}}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ матрицы \mathbf{U} .

Калибровка симметричной части матрицы магнитной проницаемости

К настоящему моменту известно несколько вариантов алгоритма калибровки симметричной части матрицы магнитной проницаемости [4–6]. Эти варианты отличаются между собой способом параметризации и расчета калибруемых величин. Для первого этапа калибровки будем использовать алгоритм [5, 9], основанный на расчете собственных значений некоторой симметричной неотрицательно определенной матрицы. В отличие от алгоритмов оценивания параметров эллипсоида, основанных на нелинейном МНК и чувствительных к погрешностям начального приближения [4, 6], этот метод не использует никакой априорной информации об искомом эллипсоиде.

Обозначим $\boldsymbol{\mu}_i^0 = \boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^M$ «идеализированные» измерения магнитометра, не содержащие случайной погрешности, и перепишем (3) в виде:

$$(\boldsymbol{\mu}_i^0)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu}_i^0 - 2(\boldsymbol{\mu}_i^0)^T \mathbf{Q} \mathbf{b}^M + (\mathbf{b}^M)^T \mathbf{Q} \mathbf{b}^M - |\mathbf{h}^E|^2 = \mathbf{m}_i^0 \boldsymbol{\theta} = 0, \quad (7)$$

где $\mathbf{m}_i^0 = [(\boldsymbol{\mu}_{1i}^0)^2 \quad (\boldsymbol{\mu}_{2i}^0)^2 \quad (\boldsymbol{\mu}_{3i}^0)^2 \quad \boldsymbol{\mu}_{1i}^0 \boldsymbol{\mu}_{2i}^0 \quad \boldsymbol{\mu}_{1i}^0 \boldsymbol{\mu}_{3i}^0 \quad \boldsymbol{\mu}_{2i}^0 \boldsymbol{\mu}_{3i}^0 \quad \boldsymbol{\mu}_{1i}^0 \quad \boldsymbol{\mu}_{2i}^0 \quad \boldsymbol{\mu}_{3i}^0 \quad 1]$ – строка размера 1×10 , составленная из компонент вектор-столбца $\boldsymbol{\mu}_i^0$. Обозначим также $\boldsymbol{\theta} = [q_{11} \quad q_{22} \quad q_{33} \quad 2q_{12} \quad 2q_{13} \quad 2q_{23} \quad | \quad (-2\mathbf{Q}\mathbf{b})^T \quad | \quad \mathbf{b}^T \mathbf{Q} \mathbf{b} - |\mathbf{h}^E|^2]^T$ – столбец размера 10×1 , составленный из девяти независимых параметров, которые требуется определить в результате калибровки. Легко проверить, что если $\hat{\boldsymbol{\theta}}^0 \neq \mathbf{o}_{10}$ удовлетворяет (7), то и $c\hat{\boldsymbol{\theta}}^0$, где $c \neq 0$ – произвольная постоянная, тоже удовлетворяет (7). Чтобы исключить неоднозначность по константе $c \neq 0$, для множества векторов $\boldsymbol{\theta}$, среди которых ищется нетривиальное решение $\hat{\boldsymbol{\theta}}^0$, вводится дополнительное условие нормировки:

$$\|\boldsymbol{\theta}\|^2 = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} = \sum_{k=1}^{10} \theta_k^2 = 1. \quad (8)$$

Нормировка (8) выделяет из всех возможных комбинаций $c\hat{\boldsymbol{\theta}}^0$, удовлетворяющих (7), единственную, при которой $\|\boldsymbol{\theta}\|^2 = 1$. Нормировочная константа в (8) может быть выбрана произвольно. Нормировка к единице далее позволит

свести задачу 10-мерной МНК-оптимизации к задаче вычисления десяти собственных значений и собственных векторов.

На практике значения $\boldsymbol{\mu}_i^0$ неизвестны, и уравнения типа (7) приходится строить на основе реальных измерений магнитометра $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\mu}_i^0 + \boldsymbol{\varepsilon}_i^M$:

$$(\boldsymbol{\mu}_i)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu}_i - 2(\boldsymbol{\mu}_i)^T \mathbf{Q} \mathbf{b}^M + (\mathbf{b}^M)^T \mathbf{Q} \mathbf{b}^M - |\mathbf{h}^E|^2 = \mathbf{m}_i \boldsymbol{\theta} = \varepsilon'_i \approx 0, \quad (9)$$

где $\varepsilon'_i = 2(\boldsymbol{\mu}_i - \mathbf{b}^M)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_i^M - (\boldsymbol{\varepsilon}_i^M)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_i^M$ – функция случайной погрешности измерения; $\mathbf{m}_i = [(\mu_{1i})^2 \quad (\mu_{2i})^2 \quad (\mu_{3i})^2 \quad \mu_{1i}\mu_{2i} \quad \mu_{1i}\mu_{3i} \quad \mu_{2i}\mu_{3i} \quad \mu_{1i} \quad \mu_{2i} \quad \mu_{3i} \quad 1]$.

Сумма квадратов погрешностей аппроксимации массива $\{\boldsymbol{\mu}_i\}_{i=1}^N$ при помощи (9) записывается в виде квадратичной функции первого этапа калибровки:

$$J^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N (\varepsilon'_i)^2 = \boldsymbol{\theta}^T \left[\sum_{i=1}^N (\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i) \right] \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{T}_i \right) \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{T} \boldsymbol{\theta}, \quad (10)$$

где \mathbf{T}_i – матрица 10×10 , построенная из компонент измерения i , в данном случае $\mathbf{T}_i = \mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i$; $\mathbf{T} = \sum_{i=1}^N \mathbf{T}_i$ – матрица 10×10 , неотрицательно определенная по построению. Значения калибруемых параметров определяются в виде вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min J^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$, при котором квадратичная функция (10) достигает минимума с учетом дополнительного условия (8).

Левая часть (9) представляет собой уравнение поверхности второго порядка, которое описывает 17 различных типов поверхностей [10]. В общем случае, для того чтобы найденные параметры $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ гарантированно соответствовали параметрам эллипсоида, условие нормировки (8) необходимо дополнить специальной формой [5, 6, 9]. Вместе с тем при большом количестве измерений, равномерном их распределении по корпусу, отсутствии выбросов и низком уровне собственных шумов магнитометра такие ограничения можно не накладывать и ограничиться только условием (8).

В правой части (9) стоит случайная функция ε'_i , математическое ожидание которой отлично от нуля, так как она содержит квадрат погрешности измерения $M[\varepsilon'_i] = \sum_{k,j=1}^3 q_{kj} r_{kj}^M$. По этой причине оценка $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, полученная решением задачи на условный минимум, будет смещена относительно истинного значения вектора оцениваемых параметров. Для того чтобы сделать оценку $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ несмещенной, нужно специальным образом откорректировать коэффициенты матрицы \mathbf{T} , сохранив ее симметричность и неотрицательную определенность [11, 12]. В описываемом варианте алгоритма эта коррекция не производится.

Задача нахождения минимума (10) при условии (8) эквивалентна нахождению безусловного минимума функции Лагранжа $F(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{T} \boldsymbol{\theta} - \lambda(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} - 1)$, где λ – множитель Лагранжа. В этом случае $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\left[\frac{\partial F(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial F(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{10}} \right]^T = 2\mathbf{T}\boldsymbol{\theta} - 2\lambda\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}_{10})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{o}_{10}.$$

Отсюда видно, что множители Лагранжа, при которых эта система уравнений имеет нетривиальные решения, являются собственными числами матрицы \mathbf{T} . Матрица \mathbf{T} – действительная, симметричная и неотрицательно определенная, поэтому ее можно рассматривать как матричное представление самосопряженного оператора. В этом случае точная нижняя граница (10) на множестве $\|\boldsymbol{\theta}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}} = 1$ равна наименьшему собственному числу $\lambda_{\min} = \min_{i=1 \dots 10} \lambda_i \geq 0$ матрицы \mathbf{T} [13]. Эта граница достигается на нормированном собственном векторе \mathbf{v}_{\min} , соответствующем собственному числу λ_{\min} : $J(\mathbf{v}_{\min}) = \mathbf{v}_{\min}^T \mathbf{T} \mathbf{v}_{\min} = \lambda_{\min}$. Вектор \mathbf{v}_{\min} сообщает минимум функции (10) при условии (8), но определен с точностью до знака: если \mathbf{v}_{\min} – собственный вектор для числа λ_{\min} , то и $-\mathbf{v}_{\min}$ – собственный вектор для того же собственного числа. Так как компоненты $\theta_1 = q_{11} > 0$, $\theta_2 = q_{22} > 0$, $\theta_3 = q_{33} > 0$, то после нахождения вектора \mathbf{v}_{\min} необходимо проверить знаки этих компонент и сделать их положительными:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{cases} \mathbf{v}_{\min}, & v_{\min 1} v_{\min 2} v_{\min 3} > 0 \\ -\mathbf{v}_{\min}, & v_{\min 1} v_{\min 2} v_{\min 3} < 0 \end{cases} \quad (11)$$

Если требуется, чтобы модуль вектора откорректированных измерений магнитометра в месте выполнения калибровки соответствовал заданному положительному значению $|\mathbf{h}^E|$ (например, модельному значению из [7]), следует изменить нормировку вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Для этого восстановим $\hat{\mathbf{Q}}$ и $\hat{\mathbf{b}}^M$ из оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_4/2 & \hat{\theta}_5/2 \\ \hat{\theta}_4/2 & \hat{\theta}_2 & \hat{\theta}_6/2 \\ \hat{\theta}_5/2 & \hat{\theta}_6/2 & \hat{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}^M = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_7 \\ \hat{\theta}_8 \\ \hat{\theta}_9 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Значение нормирующего множителя c_E будем искать из условия $c_E (\hat{\mathbf{b}}^M)^T \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{b}}^M - |\mathbf{h}^E|^2 = c_E \hat{\theta}_{10}$:

$$c_E = |\mathbf{h}^E|^2 / [(\hat{\mathbf{b}}^M)^T \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{b}}^M - \hat{\theta}_{10}]. \quad (13)$$

Отметим, что после перенормировки $c_E \hat{\boldsymbol{\theta}}$ изменяются значения компонент матрицы $\hat{\mathbf{Q}}$, а значение вектора $\hat{\mathbf{b}}^M$ сохраняется.

Для симметричной матрицы $\hat{\mathbf{Q}}$ существует спектральное разложение $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{V} \text{diag}(\lambda_{q1}, \lambda_{q2}, \lambda_{q3}) \mathbf{V}^T$, где $\lambda_{q1}, \lambda_{q2}, \lambda_{q3}$ – собственные числа матрицы $\hat{\mathbf{Q}}$; \mathbf{V} – ортогональная матрица, составленная из нормированных собственных векторов матрицы $\hat{\mathbf{Q}}$ [13]. Симметричная часть матрицы магнитной проницаемости электронного устройства получается из равенства $\hat{\mathbf{D}}^T \hat{\mathbf{D}} = c_E \hat{\mathbf{Q}} = c_E \mathbf{V} \text{diag}(\lambda_{q1}, \lambda_{q2}, \lambda_{q3}) \mathbf{V}^T$. Результатом описанного этапа калибровки магнитометра являются оценки $\hat{\mathbf{b}}^M$ и $\hat{\mathbf{D}}$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{D}} &= \sqrt{c_E} \mathbf{V} \text{diag}(\sqrt{\lambda_{q1}}, \sqrt{\lambda_{q2}}, \sqrt{\lambda_{q3}}) \mathbf{V}^T, \\ \hat{\mathbf{b}}^M &= -0,5 \hat{\mathbf{Q}}^{-1} [\hat{\theta}_7 \quad \hat{\theta}_8 \quad \hat{\theta}_9]^T.\end{aligned}\tag{14}$$

Выше было отмечено, что перенормировка вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ не изменяет оценку вектора $\hat{\mathbf{b}}^M$ смещений нулей датчиков. Из (14) видно, что нормировочный множитель $\sqrt{c_E}$ изменяет только масштаб элементов матрицы $\hat{\mathbf{D}}$, а отношения между этими элементами остаются без изменений. Для того чтобы показать, что направление откорректированного вектора $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$ не зависит от нормировочного множителя, рассмотрим симметричную матрицу $\hat{\mathbf{D}}_A = \sqrt{c_A} \mathbf{V} \text{diag}(\sqrt{\lambda_{q1}}, \sqrt{\lambda_{q2}}, \sqrt{\lambda_{q3}}) \mathbf{V}^T$, где $c_A = |\mathbf{h}^A|^2 / [(\hat{\mathbf{b}}^M)^T \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{b}}^M - \hat{\theta}_{10}]$, $|\mathbf{h}^A| > 0$ – произвольная положительная константа. Вектор измерений магнитометра, откорректированный с матрицей $\hat{\mathbf{D}}_A$, обозначим $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{Ai}$ и выпишем для него цепочку равенств:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{Ai} = \hat{\mathbf{D}}_A (\boldsymbol{\mu}_i - \hat{\mathbf{b}}^M) = \sqrt{\frac{c_A}{c_E}} \hat{\mathbf{D}} (\boldsymbol{\mu}_i - \hat{\mathbf{b}}^M) = \sqrt{\frac{c_A}{c_E}} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i.$$

Это равенство показывает, что векторы $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{Ai}$ и $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$, откорректированные по результатам первого этапа калибровки, выполненной с использованием различных значений $|\mathbf{h}^A|$ и $|\mathbf{h}^E|$, сонаправлены. Равенства (4) и (5) для неизвестной матрицы \mathbf{U} сохраняются при умножении векторов $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$ на произвольную положительную постоянную

$$\sqrt{\frac{c_A}{c_E}} \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_i = -[(\mathbf{U}^T \boldsymbol{\omega}_i) \times] \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i \sqrt{\frac{c_A}{c_E}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_{Ai} = -[(\mathbf{U}^T \boldsymbol{\omega}_i) \times] \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{Ai},$$

а координаты минимума квадратичной функции (6), записанной для нового массива векторов $\{\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{Ai}\}_{i=1}^N$, не изменяются, так как из необходимого и достаточного условий существования экстремума непосредственно следует, что умножение квадратичной функции на положительную постоянную не изменяет координат и типа её экстремумов:

$$J_A^{(2)}(\boldsymbol{\alpha}) = \|\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_A - \mathbf{L}_A \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 = \frac{c_A}{c_E} \|\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}} - \mathbf{L} \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 = \frac{c_A}{c_E} J^{(2)}(\boldsymbol{\alpha}),$$

где $\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_A$, \mathbf{L}_A – вектор в левой части и матрица в правой части (5), записанные для векторов $\{\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{Ai}\}_{i=1}^N$. Таким образом, значение $|\mathbf{h}^E|$, задаваемое на первом этапе калибровки, не влияет на направление откорректированного вектора $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$ и оценку вектора параметров, получаемых на втором этапе калибровки $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg \min J^{(2)}(\boldsymbol{\alpha}) = \arg \min J_A^{(2)}(\boldsymbol{\alpha})$. Иными словами, если откалиброванный

магнитометр предназначен только для указания направления на магнитный полюс (измерение компонент вектора \mathbf{h}^E не требуется), то в качестве $|\mathbf{h}^E|$ может быть задано произвольное положительное значение.

Калибровка ортогональной части матрицы магнитной проницаемости

Матрица \mathbf{U} была введена в разделе 1 как ортогональная матрица с единичным определителем, девять коэффициентов которой являются функциями трех независимых параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Поскольку \mathbf{U} задает преобразование координат между двумя правыми ортонормированными базисами ИСК и ПСК, ее можно представить в виде произведения трех матриц последовательных поворотов вокруг трех некопланарных осей, а в качестве параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выбрать углы этих поворотов:

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & c_2 s_3 & s_2 \\ -c_1 s_3 - c_3 s_1 s_2 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & c_2 s_1 \\ s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 & -c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 & c_1 c_2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где $\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ –

матрицы отдельных поворотов; $c_i = \cos \alpha_i$, $s_i = \sin \alpha_i$, $i=1,2,3$.

Между коэффициентами матрицы \mathbf{U} и углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ существует взаимно однозначное соответствие, за исключением случая $\alpha_2 = \pm\pi/2$ или $u_{13} = \pm 1$. В указанном случае углы α_1 и α_3 могут принимать произвольные значения, удовлетворяющие условию

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \begin{cases} \arccos u_{22}, & u_{21} \leq 0, \\ -\arccos u_{22}, & u_{21} > 0. \end{cases}$$

Решение $\hat{\mathbf{a}}$ для нелинейной переопределенной системы уравнений (5), минимизирующее квадратичную функцию (6), может быть найдено каким-либо нелинейным МНК, например итерационным методом Ньютона–Гаусса. Перед запуском итерационной процедуры (на итерации с номером $j=0$) устанавливаются начальные значения искомых углов $\hat{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{0}_3$. Пусть после итерации $j=0,1,\dots$ получены оценки углов $\hat{\mathbf{a}}_j = [\hat{a}_{1j} \quad \hat{a}_{2j} \quad \hat{a}_{3j}]^T$. Запишем (5) в виде линейного приближения в окрестности $\hat{\mathbf{a}}_j$:

$$\dot{\hat{\mathbf{u}}} = \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}_j + \mathbf{L} \mathbf{J}_j \delta \mathbf{a},$$

где $\hat{\mathbf{u}}_j = \mathbf{u}(\hat{\mathbf{a}}_j)$; $\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_3} \end{bmatrix}_{\hat{\mathbf{a}}_j}$ – матрица Якоби размера 9×3 для вектора

$\mathbf{u}(\mathbf{a})$ в точке $\hat{\mathbf{a}}_j$; $\delta \mathbf{a} = [\delta \alpha_1 \quad \delta \alpha_2 \quad \delta \alpha_3]^T$ – вектор вариаций.

МНК-оценка вариации $\delta\mathbf{a}_{j+1}$ на итерации $j+1$ получается решением линейной системы уравнений

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{H}_j \delta\mathbf{a}_{j+1}, \quad (16)$$

где $\mathbf{f}_j = \mathbf{J}_j^T \mathbf{L}^T (\dot{\hat{\boldsymbol{\mu}}} - \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}_j)$ – вектор размера 3×1 ; $\mathbf{H}_j = \mathbf{J}_j^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{J}_j^T$ – матрица размера 3×3 . Отсюда $\delta\mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{H}_j^{-1} \mathbf{f}_j$. Оценки углов $\hat{\mathbf{a}}_{j+1}$ после итерации $j+1$ $\hat{\mathbf{a}}_{j+1} = \hat{\mathbf{a}}_j + \delta\mathbf{a}_{j+1}$ используются для расчета ортогональной матрицы $\hat{\mathbf{U}}_{j+1} = \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{a}_{j+1})$ (15), коэффициенты которой расставляются в виде вектора $\hat{\mathbf{u}}_{j+1}$ для следующей итерации.

Для определения момента нормального прекращения итераций используется модуль текущей оценки вариаций $|\delta\mathbf{a}_j|$ и номер итерации j : если $|\delta\mathbf{a}_j| < \delta_{\text{ПОР}}$ и $j \leq N_{\text{ПОР}}$, где $\delta_{\text{ПОР}}$, $N_{\text{ПОР}}$ – пороговое значение модуля вариации и максимальное число итераций соответственно, итерационный процесс завершается. Если количество итераций превысило пороговое значение $j > N_{\text{ПОР}}$, а условие $|\delta\mathbf{a}_j| < \delta_{\text{ПОР}}$ так и не было выполнено, второй этап калибровки аварийно завершается. Решение об аварийном завершении алгоритма принимается с учетом логики работы калибруемого электронного устройства в целом.

После нормального выхода из итерационной процедуры последняя рассчитанная матрица $\hat{\mathbf{U}}_{j+1}$ используется для получения окончательного значения обратной матрицы магнитной проницаемости устройства: $\hat{\mathbf{M}}^{-1} = \hat{\mathbf{U}}_{j+1} \hat{\mathbf{D}}$. При помощи значений $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$ и $\hat{\mathbf{b}}^M$ корректируются первичные измерения магнитометра и отыскиваются оценки проекций вектора \mathbf{h}^E на ИСК: $\hat{\mathbf{h}}_{\text{ИСК}i}^E = \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_i - \hat{\mathbf{b}}^M)$. Значения $\hat{\mathbf{h}}_{\text{ИСК}i}^E$ используются для определения ориентации корпуса устройства относительно направления на магнитный полюс.

Формулировка алгоритма полной калибровки магнитометра

Приведем пошаговое описание алгоритма полной калибровки магнитометра. Номера и названия блоков на блок-схеме этого алгоритма, показанной на рис. 1, соответствуют номерам и названиям отдельных пунктов в пошаговом описании. Пункты 2–6 описания соответствуют первому этапу калибровки, пункты 7–11 – второму этапу калибровки. В обозначениях переменных в пунктах 9–11, выполняемых внутри итерационного цикла, опущен нижний индекс, указывающий на номер итерации. Здесь предполагается, что каждое новое значение переменной, полученное в очередном итерационном цикле, записывается поверх ее предыдущего значения.

1. Вход. Запуск процедуры калибровки магнитометра. В момент запуска предполагается, что заданы значение $|\mathbf{h}^E|$, количество N накапливаемых измерений и период $T_{\text{ИЗМ}}$ измерений.

2. Выполнение калибровочных вращений. Оператор выполняет калибровочное вращение корпуса вокруг различных пространственных осей, а вычис-

лительное устройство накапливает массивы измерений $\{\mu_i\}_{i=1}^N$, $\{\omega_i\}_{i=1}^N$ в своей оперативной памяти. В момент накопления N измерений выполнение блока №2 прекращается. Выходом блока №2 являются массивы $\{\mu_i\}_{i=1}^N$, $\{\omega_i\}_{i=1}^N$.

3. Расчет матрицы T . Входные данные блока – массив измерений магнитометра $\{\mu_i\}_{i=1}^N$. Для каждого столбца μ_i рассчитывается строка m_i (9), из этих строк рассчитывается матрица T согласно (10). Матрица T является выходными данными блока №3.

4. Вычисление собственных чисел и векторов матрицы T . Входные данные блока – матрица T . Вычисляются ее собственные числа и собственные векторы. Из набора собственных чисел выбирается минимальное λ_{\min} . Для собственного вектора v_{\min} , соответствующего λ_{\min} , выполняется проверка и коррекция знака в соответствии с (11). Полученный в результате вектор $\hat{\theta}$ является выходными данными блока №4.

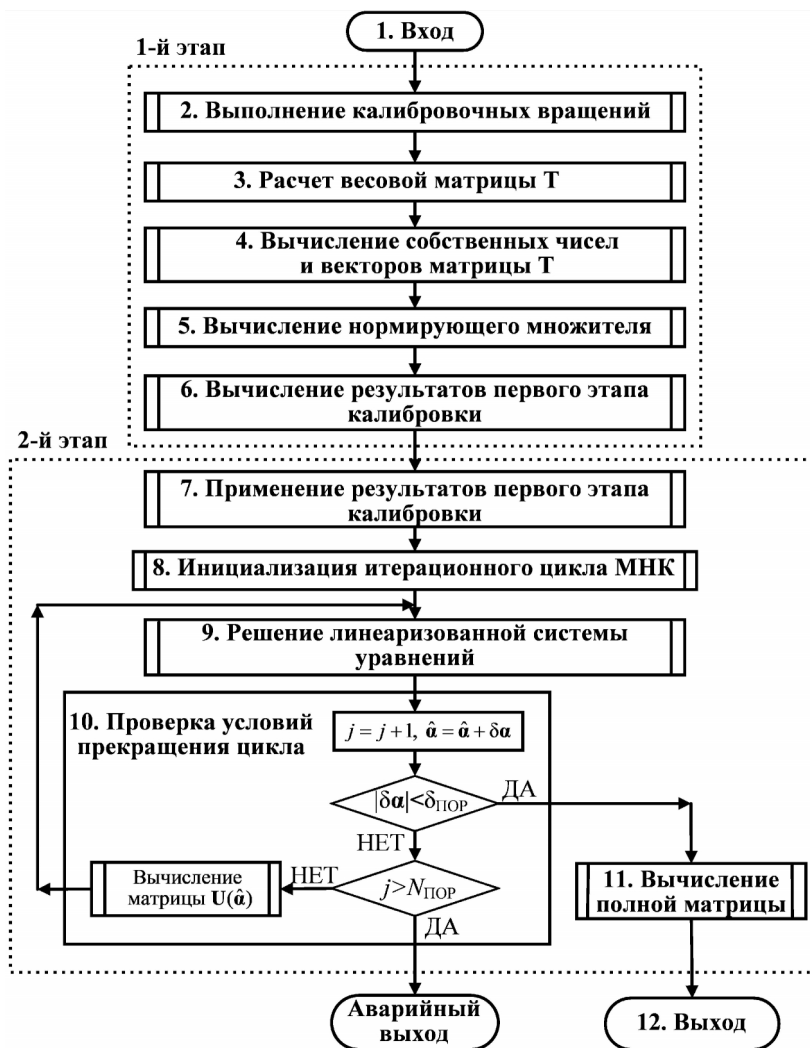


Рис. 1. Блок-схема алгоритма полной калибровки магнитометра

5. Вычисление нормирующего множителя. Входные данные блока – вектор $\hat{\theta}$, из компонент которого составляются оценки \hat{Q} и \hat{b}^M согласно (12). Из этих оценок вычисляется нормирующий множитель c_E в соответствии с (13). Коэффициент c_E , матрица \hat{Q} и вектор \hat{b}^M являются выходными данными блока №5.

6. Вычисление результатов первого этапа калибровки. Входные данные блока – c_E , \hat{Q} и \hat{b}^M . Для матрицы \hat{Q} вычисляется спектральное разложение $\hat{Q} = V \text{diag}(\lambda_{q1}, \lambda_{q2}, \lambda_{q3}) V^T$, которое используется для получения оценки \hat{D} в соответствии с (14). Оценка \hat{b}^M вектора смещения нулей в блоке №6 не изменяется. Значение \hat{D} , получаемое на выходе блока №6, и значение \hat{b}^M , получаемое на выходе блока №5, являются результатами первого этапа калибровки магнитометра.

7. Применение результатов первого этапа калибровки магнитометра. Второй этап калибровки магнитометра выполняется начиная с блока №7. Входные данные блока – значения \hat{D} , \hat{b}^M и массив $\{\mu_i\}_{i=1}^N$. Из массива $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ вычисляется новый массив $\{\tilde{\mu}_i\}_{i=1}^N$, $\tilde{\mu}_i = \hat{D}(\mu_i - \hat{b}^M)$, $i=1 \dots N$. Откорректированный массив $\{\tilde{\mu}_i\}_{i=1}^N$ является выходными данными блока №7.

8. Инициализация итерационного МНК. Входные данные блока – массивы $\{\tilde{\mu}_i\}_{i=1}^N$ (выходные данные блока №7), $\{\omega_i\}_{i=1}^N$ (выходные данные блока №2) и значение $T_{\text{ИЗМ}}$. Из элементов этих массивов вычисляются постоянные параметры вектора $\dot{\mu}$ и матрицы L итерационного МНК в соответствии с (4), (5). Устанавливаются начальные значения для счетчика итераций $j=0$ и для оцениваемого вектора параметров ортогональной матрицы $\hat{\alpha} = \mathbf{o}_3$. Вектор \hat{u} заполняется элементами единичной матрицы I_3 . Выходом блока №8 являются $\dot{\mu}$, L , $\hat{\alpha}$, j , которые передаются в итерационный цикл нелинейного МНК.

9. Решение линеаризованной системы уравнений. Блок выполняется один раз внутри каждого итерационного цикла нелинейного МНК. Входные данные блока – постоянные параметры $\dot{\mu}$, L и переменные параметры $\hat{\alpha}$, \hat{u} .

В блоке рассчитываются матрица Якоби $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_3} \end{bmatrix}_{\hat{\alpha}}$, матрица

$H = J^T L^T L J$ и вектор $\mathbf{f} = J^T L^T (\dot{\mu} - L \hat{u})$ системы нормальных уравнений (16),

вычисляется вектор вариаций $\delta \alpha = H^{-1} \mathbf{f}$. Выходными данными блока является вектор вариаций $\delta \alpha$.

10. Проверка условий прекращения цикла. Блок содержит процедуру принятия решения о продолжении или завершении (нормальном или аварийном) итерационного цикла. Входные данные блока – значения $\hat{\alpha}$, $\delta \alpha$, j . Выполняются обновления вектора $\hat{\alpha} = \hat{\alpha} + \delta \alpha$ и счетчика итераций $j = j + 1$. Если принято решение о продолжении цикла, блок вычисляет матрицу $\hat{U} = U(\hat{\alpha})$ согласно (15), переставляет ее коэффициенты для получения вектора \hat{u} и выполняет переход к блоку №9. В этом случае выходами блока являются векторы $\hat{\alpha}$ и \hat{u} .

Если принято решение об аварийном завершении итераций, работа алгоритма калибровки останавливается с оповещением о возникновении исключительной ситуации. Если принято решение о нормальном завершении итераций, то выходом блока является вектор $\hat{\mathbf{a}}$.

11. Вычисление полной матрицы магнитной проницаемости. Входные данные блока – вектор $\hat{\mathbf{a}}$ (выходные данные блока №10) и матрица $\hat{\mathbf{D}}$ (выходные данные блока №6). Из вектора $\hat{\mathbf{a}}$ вычисляется матрица $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\hat{\mathbf{a}})$ согласно (15), а затем – полная матрица магнитной проницаемости $\hat{\mathbf{M}}^{-1} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{D}}$. На этом второй этап калибровки магнитометра завершается. Выходными данными блока №9 является матрица $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$.

12. Выход. Нормальное завершение алгоритма двухэтапной калибровки магнитометра, результатами которой являются матрица $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$, получаемая на выходе блока №11, и вектор $\hat{\mathbf{b}}^M$, получаемый на выходе блока №5.

Экспериментальные результаты

Описанная процедура применялась для калибровки интегрального магнитометра LSM303AGR [2], установленного внутри устройства с чрезвычайно плотной пространственной компоновкой электронных блоков. Измерения магнитометра синхронизировались с измерениями гироскопа MPU-9150 [1]. В состав устройства объемом порядка 10 см^3 входили встроенные аккумуляторы, система преобразования питающих напряжений и множество мощных потребителей электрической энергии. Значения токов питания, протекающих внутри компактного корпуса устройства, достигали 2А. Модуль вектора $|\mathbf{h}^E| = 52 \text{ мкТл}$ в месте калибровки был рассчитан согласно [7]. Калибровка магнитометра проводилась в соответствии с описанным выше двухэтапным алгоритмом при $F_{\text{изм}} = 100 \text{ Гц}$.

Для полной калибровки магнитометра оператор держал включенное электронное устройство в руках и произвольным способом выполнял калибровочные повороты корпуса вокруг различных случайных пространственных осей в течение 30 с (крутил его в руках так, чтобы устройство совершило не менее одного оборота вокруг каждой случайно выбранной оси). За это время было накоплено $100 \times 30 = 3000$ пар векторных измерений магнитометра и гироскопа. На первом вычислительном этапе процедуры полной калибровки использовались только накопленные измерения магнитометра. Геометрическим местом этих измерений является эллипсоид *A*, показанный на рис. 2. Результаты первого этапа калибровки в виде матрицы $\hat{\mathbf{D}}$ и вектора $\hat{\mathbf{b}}^M$ использовались для получения промежуточного массива $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}_{i=1}^N$. В промежуточных векторах исправлена эллипсо-

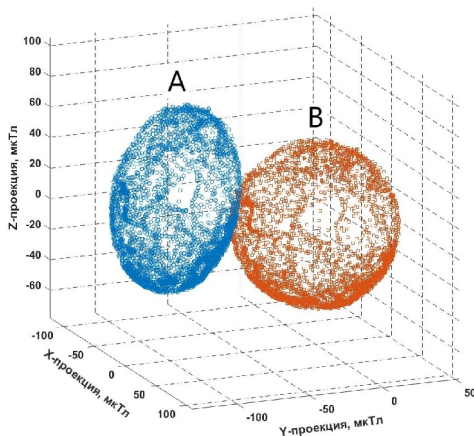


Рис. 2. Геометрическое место первичных измерений магнитометра (*A*) и измерений магнитометра, откорректированных после первого этапа калибровки (*B*)

идность их геометрического места и устранены смещения нулей, а модули этих векторов приведены к заданному значению $|\mathbf{h}^E| = 52$ мкТл. Сами промежуточные векторы являются проекциями постоянного вектора \mathbf{h}^E на ПСК. Геометрическим местом концов векторов $\{\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i\}_{i=1}^N$ является сфера B с центром в начале координат и радиусом $|\mathbf{h}^E|$, показанная на рис. 2.

Для приведения проекций промежуточных векторов из ПСК в ИСК выполняется второй вычислительный этап калибровки, в результате которого определяется ортогональная часть $\hat{\mathbf{U}}$ обратной матрицы магнитной проницаемости. Для определения $\hat{\mathbf{U}}$ привлекаются дополнительные измерения гироскопа $\{\boldsymbol{\omega}_i\}_{i=1}^N$, полученные синхронно с измерениями магнитометра. $\{\boldsymbol{\mu}_i\}_{i=1}^N$. На рис. 3 показан участок графиков производной $\dot{\boldsymbol{\mu}}_i$ промежуточного вектора, рассчитанной как численным дифференцированием вектора $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$, так и с привлечением измерений гироскопа (согласно (4)) после завершения второго калибровочного этапа. В данном эксперименте значения углов составили: $\hat{\alpha}_1 = 6,4^\circ$, $\hat{\alpha}_2 = -1,6^\circ$, $\hat{\alpha}_3 = -0,2^\circ$, что эквивалентно девиации в -6° при измерении направления на магнитный полюс.

Правильность выполнения калибровки проверялась непосредственным сравнением истинного и измеренного направления на Северный географический полюс. Для этого в измерения направления на Северный магнитный полюс, полученные от откалиброванного магнитометра, вносилась поправка на магнитное склонение, абсолютная величина которого была рассчитана в [7] и в месте проведения экспериментов составляла примерно 11° . Множество испытаний, проведенных с различными устройствами данного типа, различными комбинациями включенных/выключенных внутренних электронных модулей и в различных условиях, показывают, что СКО погрешности измерения ориентации корпуса устройства относительно направления на Северный магнитный полюс составляет $2,2^\circ$.

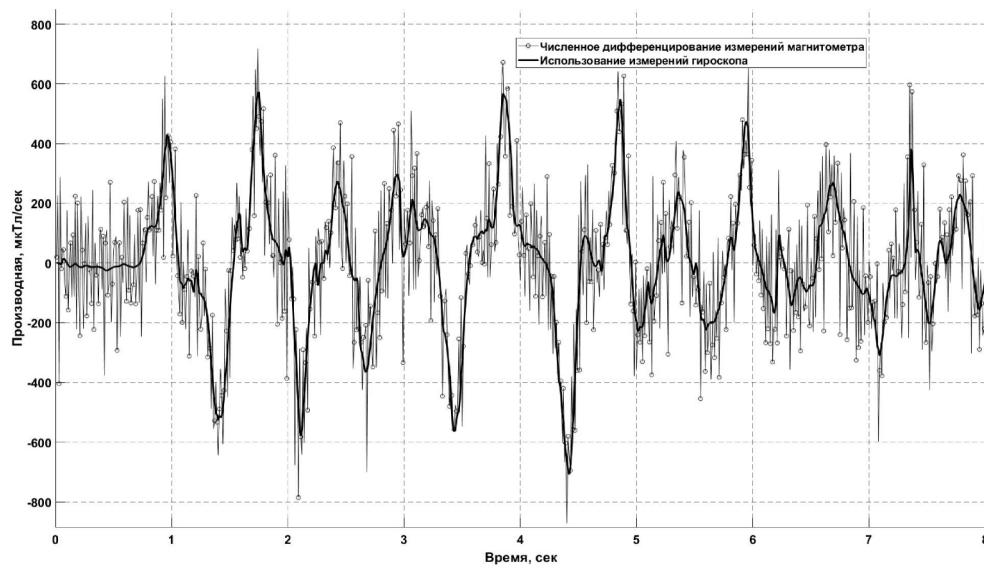


Рис. 3. График изменений компоненты X векторной производной, рассчитанной численным дифференцированием измерений магнитометра и с использованием измерений гироскопа

Заключение

Предложенный алгоритм двухэтапной калибровки интегрального магнитометра, встроенного в электронное устройство, позволяет устранить систематические погрешности в измерении компонент вектора индукции внешнего магнитного поля, вносимые элементами конструкции и электронными блоками этого устройства. При выполнении калибровки предполагается, что внешнее магнитное поле постоянно и однородно, а характеристики магнитных искажений внутри устройства остаются неизменными в течение всего времени накопления калибровочных данных.

Измерения параметров внешнего магнитного поля интегральным магнитометром можно проводить только после успешного завершения калибровочной процедуры. В процессе измерения первичные данные, полученные от магнитометра, корректируются с использованием откалиброванных параметров. Для корректного применения этих параметров необходимо, чтобы характеристики внутренних магнитных полей устройства оставались неизменными, такими же, как в процессе калибровки. Если характеристики внутреннего поля изменяются, например после включения/выключения электронных блоков, переключения источников питания, разряда аккумулятора и т.д., процедуру калибровки необходимо повторить.

Экспериментальное исследование качества калибровки интегрального магнитометра проводилось на различных экземплярах компактного, плотно скомпонованного электронного устройства, содержащего несколько мощных потребителей электроэнергии от встроенных аккумуляторов. Откалиброванный магнитометр использовался для измерения компонент вектора индукции магнитного поля Земли величиной около 50 мкТл. Добавление в алгоритм калибровки магнитометра второго вычислительного этапа, на котором определяется оценка ортогональной части матрицы магнитной проницаемости, позволило устранить систематическую погрешность определения направления вектора индукции магнитного поля Земли относительно корпуса устройства. В приведенных экспериментальных результатах было получено значение этой погрешности в 6° . В результате множества экспериментов и непосредственного сравнения измеренного (после коррекции магнитного склонения) и истинного направления на Северный географический полюс получена среднеквадратическая погрешность измерений, которая составляет $2,2^\circ$.

Непосредственная реализация алгоритма калибровки предполагает первоначальное накопление полного набора измерений, считываемых с векторных датчиков в процессе калибровочных вращений. Например, при частоте опроса датчиков 100 Гц и времени калибровочных вращений 30 с потребуется накопить $2 \times 3 \times 30 \times 100 = 18000$ скалярных значений. Увеличение продолжительности калибровочных вращений приведет к пропорциональному увеличению объема оперативной памяти, зарезервированного под накопление первичных измерений.

Тем не менее вычислительная структура алгоритма калибровки позволяет заменить простое накопление измерений рекуррентным накоплением нескольких промежуточных матриц. Обновление промежуточных матриц выполняется сразу после получения очередной пары измерений $\{\mu_i, \omega_i\}$, а все вычислительные этапы калибровки выполняются только с использованием уже подготовленных промежуточных матриц. В следующей работе будет показано, что простое накопление нарастающего количества первичных измерений в течение

сколь угодно длительного процесса калибровочных вращений может быть заменено накоплением 154 скалярных элементов, сгруппированных в шесть промежуточных матриц фиксированного размера. Рекуррентная реализация алгоритма позволяет не только эффективно использовать заранее известный объем оперативной памяти, но и сократить время расчета калибровочных значений за счет предварительной обработки измерений во время калибровочных вращений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **MPU-9150** Nine-Axis (Gyro + Accelerometer + Compass) MEMS MotionTracking (NV) Device. URL: <https://www.invensense.com/products/motion-tracking/9-axis/mpu-9150/> (дата обращения: 09.11.2018).
2. **LSM303AGR** e-Compass with 3D digital linear acceleration sensor, 3D digital magnetic sensor. URL: <https://www.st.com/en/mems-and-sensors/lsm303agr.html> (дата обращения: 11.11.2018).
3. **Кожухов В.П., Воронов В.В., Григорьев В.В.** Девиация магнитного компаса. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Транспорт, 1971. 240 с.
4. **Иванов Д.С., Ткачев С.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю.** Калибровка датчиков для определения ориентации малого космического аппарата // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 28. 30 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-28> (дата обращения: 09.11.2018).
5. **Renaudin, V., Afzal, M.H., Lachapelle, G.,** New Method for Magnetometers Based Orientation Estimation, *Proceedings of IEEE/ION PLANS 2010*, Indian Wells, CA, 2010, pp. 348–356.
6. **Alonso, R., Shuster, M.D.,** Complete linear attitude-independent magnetometer calibration, *The Journal of Astronautical Science*, 2002, vol. 50, no. 4, pp. 477–490.
7. **The World Magnetic Model.** URL: <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/> (дата обращения 02.12.2018).
8. **Fitzgibbon, A., Pilu, M., Fisher, R.B.,** Direct Least Square Fitting of Ellipses, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, vol.21, no. 5, pp. 476–480.
9. **Li, Q., Griffiths, J.G.,** Least Squares Ellipsoid Specific Fitting, *Proceedings of the Geometric Modeling and Processing*, Beijing, 2004, p. 335.
10. **Беклемишев Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. Для вузов. 9-е изд., испр. М.: Физико-математическая литература, 2001. 376 с.
11. **Markovsky, I., Kukush, A., Van Huffel, S.,** Consistent least squares fitting of ellipsoids, *Numerische Mathematik*, 2004, vol. 98, no. 1, pp. 177–194.
12. **Kukush, A., Markovsky, I., Van Huffel, S.,** Consistent estimation in an implicit quadratic measurement error model, *Computational Statistics and Data Analysis*, 2004, vol. 47, no. 1, pp.123–147.
13. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Линейная алгебра: Учеб. для вузов. 4-е изд. М.: Наука. Физматлит, 1999. 296 с.

Vasilyuk, N.N. (Topcon Positioning Systems LLC, Moscow, Russia)
Calibration of Integral Magnetometer Linear Model Coefficients Using Simultaneous Measurements of a Three-Axis Gyro, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2019, vol. 27, no. 1 (104), pp. 107–126.

Abstract. The paper considers a problem of calibration of a three-axis magnetometer integrated in a complex electronic device. Known methods of calibration based on the ellipsoid approximation of the geometric locus of magnetometer measurements provide only partial calibration and determine only the symmetrical part of the magnetic inductive capacity matrix. The orthogonal part of the matrix remains undetermined. The proposed algorithm makes it possible to find the full matrix of magnetic inductive capacity with the use of device rotation and additional measurements made by a three-axis gyro.

Key words: magnetometer calibration, integrated magnetometer, magnetometer errors.

REFERENC FES

1. **MPU-9150** Nine-Axis (Gyro + Accelerometer + Compass) MEMS MotionTracking (NV) Device. <https://www.invensense.com/products/motion-tracking/9-axis/mpu-9150/>. Accessed November 9, 2018.
2. **LSM303AGR** e-Compass with 3D digital linear acceleration sensor, 3D digital magnetic sensor. <https://www.st.com/en/mems-and-sensors/lsm303agr.html>. Accessed November 11, 2018.
3. **Kozhukhov, V.P., Voronov, V.V., and Grigoryev, V.V.**, *Deviatsiya magnitnogo kompasa* (Magnetic Compass Deviation), Moscow: Transport, 1971.
4. **Ivanov, D.S., Tkachev, S.S., Karpenko, S.O., and Ovchinnikov, M.Yu.**, Calibration of Satellite Attitude Determination Sensors, *Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics*, Moscow, 2010, no. 28, 30 p. <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-28>. Accessed November 9, 2018.
5. **Renaudin, V., Afzal, M.H., and Lachapelle, G.**, New method for magnetometers based orientation estimation, *Proceedings of IEEE/ION PLANS 2010*, Indian Wells, CA, 2010, pp. 348–356.
6. **Alonso, R., and Shuster, M.D.**, Complete linear attitude-independent magnetometer calibration, *The Journal of Astronautical Science*, 2002, vol. 50, no. 4, pp. 477–490.
7. **The World Magnetic Model**. <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/>. Accessed December 2, 2018.
8. **Fitzgibbon, A., Pilu, M., and Fisher, R.B.**, Direct least square fitting of ellipses, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, vol.21, no. 5, pp. 476–480.
9. **Li, Q., and Griffiths, J.G.**, Least squares ellipsoid specific fitting, *Proceedings of the Geometric Modeling and Processing*, Beijing, 2004, p. 335.
10. **Beklemishev, D.V.**, *Kurs analiticheskoi geometrii i lineinoi agebry* (Course of Analytical Geometry and Linear Algebra), textbook for higher educational institutions, Moscow: Fiziko-matematicheskaya literatura, 2001.
11. **Markovsky, I., Kukush, A., and Van Huffel, S.**, Consistent least squares fitting of ellipsoids, *Numerische Mathematik*, 2004, vol.98, no. 1, pp. 177–194.
12. **Kukush, A., Markovsky, I., and Van Huffel, S.**, Consistent estimation in an implicit quadratic measurement error model, *Computational Statistics and Data Analysis*, 2004, vol. 47, no. 1, pp. 123–147.
13. **Ilyin, V.A., and Poznyak, E.G.**, *Lineinaya algebra* (Linear Algebra), textbook for higher educational institutions, Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1999.

Материал поступил 15.08.2018