♦ В ПОМОЩЬ ИССЛЕДОВАТЕЛЮ И РАЗРАБОТЧИКУ ♦

УДК 621.317.346
DOI 10.17285/0869-7035.2018.26.2.059-076

Б.О. КАЧАНОВ, С.А. АХМЕДОВА, Н.А. ТУКТАРЕВ, В.А. НОВИКОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФЛИККЕР-ШУМА МЕТОДОМ СУПЕРПОЗИЦИИ НОРМАЛЬНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Детально рассматривается известный метод представления 1/f-шума суммой стационарных процессов. Применяются две серии формирующих фильтров в полосе частот, заданной пользователем. Определены соотношения для параметров фильтров. Рассмотрена ошибка аппроксимации спектра. Предложен алгоритм моделирования флуктуаций в виде системы стохастических разностных уравнений первого порядка. Алгоритм предназначен для использования в имитационных моделях, применяемых при исследовании погрешностей навигационных систем.

Ключевые слова: фликкер-шум, имитационное моделирование, метод суперпозиции, инерциальный датчик.

Введение

При проектировании инерциальных систем формируется задача имитационного моделирования, в процессе которого исследуется влияние погрешностей инерциальных датчиков на достигаемую точность. Эта задача особенно актуальна для бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) и бесплатформенных систем ориентации (БСО), в которых используются микромеханические датчики. При этом важно учитывать влияние случайных погрешностей, обусловленных влиянием смеси шумов. Так, случайная погрешность гироскопа содержит шум квантования, случайное блуждание по углу, случайное блуждание скорости, нестабильность нуля и синусоидальные шумы [1, 2]. Наибольшую трудность вызывает имитационное моделирование нестабильности нуля, представляемое фликкер-шумом, что обусловлено специфической формой его спектральной плотности.

Качанов Борис Олегович. Д.т.н., профессор главный специалист АО «Московский научно-производственный комплекс «Авионика» им. О. В. Успенского» (АО МНПК «Авионика»).
Ахмедова Сабина Курбановна. Инженер-конструктор АО МНПК «Авионика».
Туктарев Николай Алексеевич. К.т.н., начальник сектора АО МНПК «Авионика».
Новиков Владислав Анатольевич. Аспирант Национального исследовательского университета «Московский авиационный институт» (НИУ МАИ).

Фликкер-шум относится к классу случайных процессов со степенной формой зависимости спектральной плотности мощности (СПМ) от частоты: $S(f) = B / f^{\alpha}$, где B – параметр, численно равный значению СПМ на частоте 1 Гц. Коэффициент α конкретизирует форму СПМ. Для случая классического фликкер-шума ($1/f$ -шума) $\alpha = 1$. В двойном логарифмическом масштабе СПМ фликкер-шума убывает по линейному закону при возрастании частоты и неограниченно возрастает при уменьшении частоты до нуля. Такая СПМ является неинтегрируемой как в верхнем, так и в нижнем пределах.

Верхнюю границу полосы частот обычно ограничивают, полагая, что выше нее действует белый шум [7]. Нижняя граница полосы частот соотносится со временем наблюдения. Ее устремление к нулю соответствует бесконечному времени наблюдения и бесконечной мощности шума. Поэтому в более реалистичных моделях фликкер-шума его СПМ рассматривается в ограниченной полосе частот, что соответствует гипотезе о стационарности [3]. В связи с этим различаются стационарные и нестационарные модели фликкер-шума. Те и другие имеют право на жизнь и развиваются и сегодня. Подробные обзоры стационарных моделей можно найти в [3–5].

В пользу стационарных моделей фликкер-шума говорит тот факт, что мощность низкочастотных составляющих зависит от времени наблюдения T по закону $Ln(T)$, то есть значительно медленнее роста T. Поэтому вполне оправданно говорить если не о стационарности, то о квазистационарности фликкер-шума [3, 5, 6]. По мнению ряда авторов, неинтегрируемость и бесконечная мощность фликкер-шума в низкочастотной области являются скорее виртуальными свойствами [4, 6]. Ограничение полосы частот рассмотрения фликкер-шума представляется правомерным для реальных систем и приводится, например, в документации акустических электронных приборов [7].

При изучении фликкер-шума применяется целый набор математических методов. Изучены модели на основе суперпозиции телеграфных процессов, процессов обслуживания очередей, стационарных процессов. Иной подход к моделированию фликкер-шума заключается в использовании интегралов дробного порядка. Если белый шум пропустить через фильтр с передаточной функцией $H(j\omega) = (j\omega)^{-1/2}$, то флуктуации на выходе фильтра будут иметь СПМ вида 1/f [8–12]. Однако и в этом случае при компьютерной реализации таких генераторов имеется ограничение СПМ фликкер-шума в нижней части спектра [13].

Появление теории фракталов Б. Мандельброта и ее развитие [14] послужили толчком для создания фрактальных моделей степенных случайных процессов, в том числе и фликкер-шума. При этом моделирование флуктуаций выполняется с помощью специальных алгоритмов, построенных по методам смещения средней точки, Фурье и обобщенного броуновского движения [15–17].

Сложность моделей фликкер-шума и специфичность используемых математических методов затрудняют их применение в имитационных моделях навигационных систем. Так, в имитационной модели выставки БИНС [18] шумы гироскопов принимаются белыми шумами. В имитационной модели функционирования БИНС [19] шумы инерциальных датчиков представлены суммой белого шума и низкочастотной составляющей, формируемой с помощью фильтра с фиксированной постоянной времени. Имитационная модель БСО [20] представлена в среде *Matlab*, но механизм распределения шумов по частотным диапазонам не раскрыт.

В связи с этим представляется полезным применение модели фликкер-шума, позволяющей представить алгоритм моделирования в наиболее простом виде стохастических разностных уравнений, легко поддающихся контролю и программированию без использования специального математического аппарата. С этой точки зрения наиболее привлекательной является модель суперпозиции релаксационных процессов Дю Пре–Ван дер Зила [3, 4].

В настоящей работе детально рассмотрены необходимая совокупность формирующих фильтров и их параметров с учетом заданной полосы частот и построение алгоритма моделирования реализаций фликкер-шума с помощью системы стохастических разностных уравнений первого порядка.

Аппроксимация

Аппроксимация спектральной плотности фликкер-шума принимается в виде среднего значения спектральных плотностей взаимно независимых стационарных процессов, формируемых фильтрами первого порядка:

$$S_a(\omega_j) \approx \hat{S}_a(\omega_j),\ \omega_j = 2\pi f_j,\ \omega_j \in \Omega,\ j = 1,2,...J,$$

$$S_a(\omega_j) = \frac{B^2}{\omega_j},\ \hat{S}_a(\omega_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i(\omega_j),\ e(\omega_j) = \frac{\hat{S}_a(\omega_j) - S_a(\omega_j)}{S_a(\omega_j)}, \tag{1}$$

$$S_i(\omega_j) = kB^2 s_i(\omega_j),\ s_i(\omega_j) = \frac{2T_i}{T_i^2\omega_j^2 + 1},\ K_i(\tau) = \sigma_i^2 \exp[-\frac{|\tau|}{T_i}],\ \sigma_i^2 = 1,$$

где $S_a(\omega_j)$ – спектральная плотность фликкер-шума. Она имеет размерность [сигнал/частота] и зависит от типа датчика и представления частоты – в герцах или в круговом виде. Для датчиков угловой скорости (ДУС) и круговой частоты размерность имеет вид [(град/с)/(рад/с)]; $\hat{S}_a(\omega_j)$ – аппроксимация спектральной плотности $S_a(\omega_j)$, [(град/с)/(рад/с)]; $\{f_j\}$ – частота, [Гц]; N – число элементарных процессов; $e(\omega_j)$ – относительная погрешность; ω_j – круговая частота, [рад/с]; Ω – полоса частоты, содержащая J расчетных значений; B – параметр фликкер-шума, имеющий размерность сигнала, для ДУС это [град/с]; $s_i(\omega_j)$ – спектральные плотности элементарных процессов с корреляционными функциями $K_i(\tau)$ [с] и постоянными времени T_i [с] формирующих фильтров; k – безразмерный масштабный коэффициент.

Точность аппроксимации зависит от выбора расчетных значений частот и постоянных времени фильтров, формирующих элементарные процессы.

Обозначим f_0 – нижнюю границу частот и M – число декад полосы, в которой выполняется аппроксимация. Тогда верхняя граница частот определяется соотношением $f_F = f_0 10^M$.

Пусть исследуемая полоса Ω содержит значения частот $\{f_j\}$, j=1,2,3,…(9M+1), которые назначаются в каждой декаде с постоянным шагом 0,1 от ее размера. Применение логарифмического масштаба частот внутри декад не приводит к увеличению точности аппроксимации.

Число формирующих фильтров определяется числом декад полосы. Собственные частоты формирующих фильтров должны покрывать всю полосу

$\Omega = [f_0, f_F]$. Рационально ограничиться количеством фильтров, достаточным для достижения приемлемой точности аппроксимации.

Предлагается использовать серию из M+1 фильтров, собственные частоты которых равны границам декад, и вторую серию из M фильтров, собственные частоты которых находятся внутри декад; вдобавок еще два фильтра, частоты которых выходят за пределы полосы. Тогда множество постоянных времени $\{T_i\}$, i=1,2,…(2M+3) всех формирующих фильтров содержит два подмножества $\{T_{1i}\}$, $\{T_{2i}\}$, которые определяются соотношениями:

$$\begin{gathered} T_{1i} = 1/(2\pi f_i),\ f_i = f_0(10^{i-1}),\ i = 1,2,...(M+1), \\ T_{2i} = 1/(m2\pi f_i),\ f_i = f_0(10^{j-2}),\ i = 1,2,...(M+2),\ 0 < m < 1, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\{T_{1i}\}$ – подмножество постоянных времени фильтров, собственные частоты которых равны границам декад; $\{T_{2i}\}$ – подмножество постоянных времени фильтров, собственные частоты которых находятся в промежутках между границами декад и выходят за пределы полосы; m – безразмерный коэффициент, определяющий расположение собственных частот фильтров с постоянными времени $\{T_{2i}\}$ относительно собственных частот фильтров с постоянными времени $\{T_{1i}\}$. Тогда для двух, трех, четырех и пяти декад полосы $[f_0, f_F]$ вводятся соответственно 7, 9, 11 и 13 формирующих фильтров. При дальнейшем расширении полосы добавляется по два фильтра на декаду.

Масштабный коэффициент k определяется методом наименьших квадратов при минимизации среднеквадратичной погрешности аппроксимации на сетке из десяти частот в каждой декаде:

$$\begin{gathered} k = (A^T A)^{-1} A^T D\ , \\ A^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_J \end{bmatrix},\ D^T = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & ... & d_J \end{bmatrix}, \\ a_j = \frac{B^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2T_i}{T_i^2\omega_j^2+1},\ d_j = \frac{B^2}{\omega_j},\ \omega_j = 2\pi f_j,\ j = 1,2,...J\ ,\ f_j \in [f_0, f_F], \end{gathered} \tag{3}$$

где d_j – значения спектральной плотности идеального фликкер-шума; a_j – значения аппроксимированной спектральной плотности; f_j – значения частот в декадах; J – общее число частот. Соотношения (3) решались многократно при варьировании коэффициента m в (2). Минимум среднеквадратичной погрешности достигается при m=0,16.

На рис. 1 изображены в двойном логарифмическом масштабе спектральная плотность идеального фликкер-шума (линия 1) и его три аппроксимации (кривые 2, 3, 4) при значении безразмерного параметра B=1. По оси ординат отложены логарифмы спектральных плотностей, а по оси абсцисс – логарифм частоты. Прямая линия 1 соответствует зависимости $\log[S_a(\omega)]$ от $\log[f]$, $f = \frac{\omega}{2\pi}$ – для полосы частот $f \in [10^{-6} - 10^4]$ Гц. Кривые 2, 3, 4 соответствуют логарифмам аппроксимаций $\log[\hat{S}_a(\omega)]$, рассчитанных для полос частот в три, четыре и пять декад при одинаковой нижней границе f_0=10^{-3} Гц.

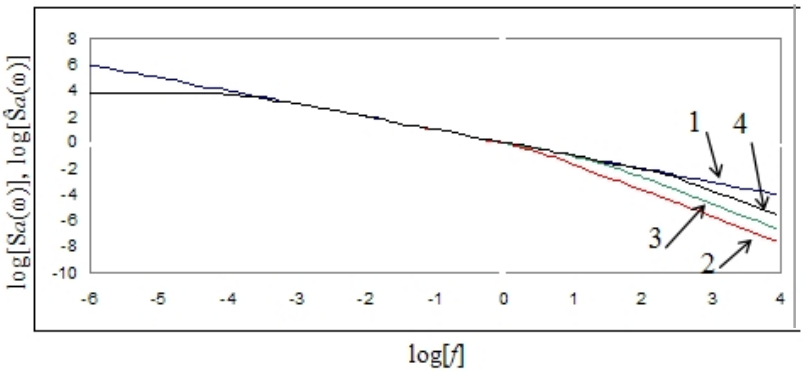

Рис. 1. Аппроксимации $\hat{S}_a(\omega)$; *1* – $S_a(\omega)$; *2, 3, 4* – $\hat{S}_a(\omega)$ для трех, четырех и пяти декад соответственно

Из рис. 1 следует, что $\log[\hat{S}_a(\omega)]$ достаточно хорошо приближены к $\log[S_a(\omega)]$ в заданных для них полосах частот.

Более детально достигаемая точность аппроксимации иллюстрируется на рис. 2. На нем представлены зависимости относительной погрешности аппроксимации $e(\omega) = [\hat{S}_a(\omega) - S_a(\omega)] / S_a(\omega)$ от логарифма частоты. Кривые 1, 2, 3 соответствуют относительным погрешностям аппроксимации для трех, четырех и пяти декад.

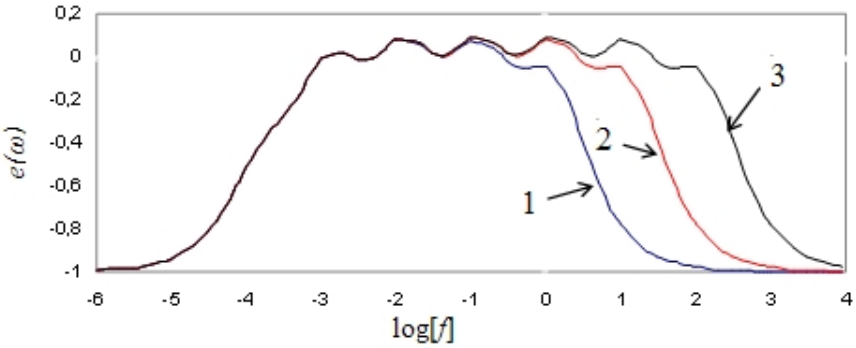

Рис. 2. Относительные погрешности аппроксимации; *1, 2, 3* – погрешность при аппроксимации в полосе частот из трех, четырех и пяти декад соответственно

Из рис. 2 следует, что при выборе постоянных времени формирующих фильтров в виде (2) максимальные относительные погрешности аппроксимации не превышают 10% в заданных полосах частот.

При необходимости точность аппроксимации может быть повышена за счет увеличения числа серий формирующих фильтров и, соответственно, промежуточных частот в декадах. Исследовалось влияние числа серий формирующих фильтров (по числу фильтров на одну декаду) на точность аппроксимации. На рис. 3 представлены зависимости относительной погрешности аппроксимации спектральной плотности фликкер-шума от логарифма частоты при аппроксимации в области из четырех декад для одной, двух и трех серий фильтров.

Предлагается остановиться на случае двух серий, который мало проигрывает трем сериям, но содержит меньшее число фильтров.

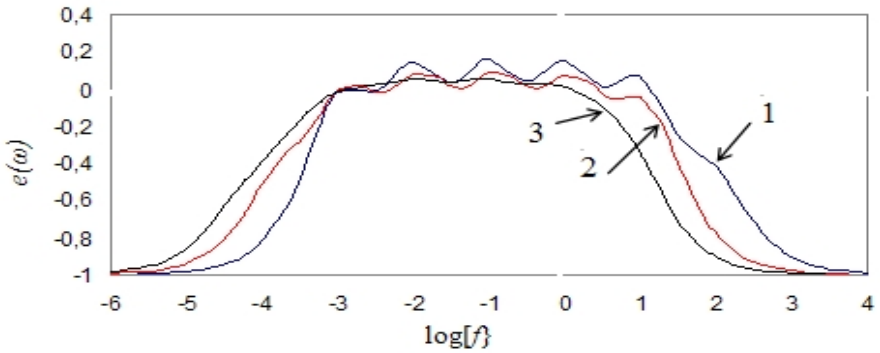

Рис. 3. Зависимости относительной погрешности аппроксимации спектральной плотности фликкер-шума от логарифма частот: *1* – при использовании одной серии формирующих фильтров; *2* – двух серий; *3* – трех серий

Алгоритм моделирования флуктуаций

Стационарные случайные процессы формирующих фильтров (1) могут быть представлены гауссовскими марковскими процессами первого порядка. Для программной реализации стохастические дифференциальные уравнения процессов формирующих фильтров преобразуются в дискретный вид [21, 22]. При этом на входы фильтров поступают независимые псевдослучайные числа, распределенные по нормальному закону. Затем выходные процессы фильтров усредняются с учетом коэффициентов B, k и m.

Учитывая приближенность всей задачи в целом, при малом шаге дискретизации Δt достаточно ограничиться упрощенными дискретными моделями, методическая погрешность которых уменьшается при $\Delta t \to 0$. Соотношения для формирования выходного процесса $W_r = W(t_r)$, $r = 1,2,3,...$ со спектральной плотностью $\hat{S}_a(\omega)$ имеют вид:

$$W_r = \frac{B\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} w_{r,i} ,$$
$$w_{r,i} = \left(1 - \frac{\Delta t}{T_i}\right) w_{r-1,i} + u_{r-1,i} \sqrt{\frac{2\Delta t}{T_i}} , \ \{u_{r-1,i}\} \in N\{0,1\} , \tag{4}$$

где $\{w_{r,i}\}$ – процессы формирующих фильтров, $\{u_r\}$ – дискретный гауссовский белый шум с единичной дисперсией, формируемый датчиком случайных чисел. Шаг дискретизации Δt назначается исходя из меньшей постоянной времени $\Delta t \le (\min\{T_i\}) / (5...10)$.

Начальные условия $\{w_{0,i}\}$ для решения (4) могут быть определены исходя из свойств стационарного характера процессов [21]. Более простым является задание нулевых начальных условий при выдерживании предварительного времени t_{00}, необходимого для достижения стационарности процессов $\{w_{r,i}\}$. Величина t_{00} больше максимальной постоянной времени $t_{00} > (3...5)(\max\{T_i\})$, при этом выдача значений результирующего процесса фликкер-шума W_r начинается по истечении t_{00}.

Алгоритм моделирования представляется в следующем виде.

Шаг 1. Определение исходных данных. Пользователь задает три величины: f_0 [Гц] – нижнюю границу полосы частот, M – целое число декад полосы, B – параметр фликкер-шума.

Шаг 2. Формирование множества расчетных частот f_j, $j = 1,2,...J$ и множества постоянных времени формирующих фильтров $\{T_i\}$, $i = 1,2,...(2M+3)$ в соответствии с (2).

Шаг 3. Вычисление масштабного коэффициента k в соответствии с (3).

Шаг 4. Вычисление псевдослучайной последовательности в соответствии с (4).

Пример 1

Рассмотрим процессы, сформированные при аппроксимации фликкер-шума в полосе частот из четырех декад $[10^{-3} - 10]$ Гц при $f_0 = 0,001$ [Гц], B=10/3600 [град/с] = 10[град/ч], $m = 0,16$. В соответствии с (2) используется 11 формирующих фильтров с собственными частотами: 0,00016; 0,001; 0,0016; 0,001; 0,016; 0,1; 0,16; 1,0; 1,6; 10; 16 [Гц]. При этом масштабный коэффициент $k = 26,71$, шаг моделирования $\Delta t = 0,002$ [с].

На рис. 4 представлен выходной сигнал формирующего фильтра с наибольшей постоянной времени $T_1 = 1/(2\pi \cdot 0,0016) = 994,7191$ [с]. Он содержит самую низкочастотную составляющую из первой серии формирующих фильтров.

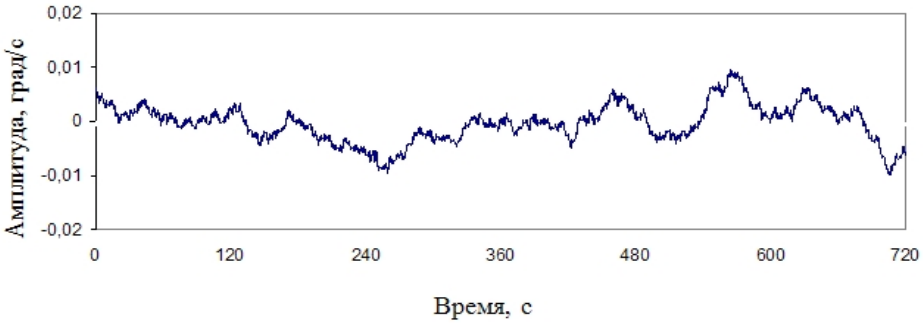

Рис. 4. Модельный процесс выходного сигнала формирующего фильтра с наибольшей постоянной времени из первой серии формирующих фильтров

На рис. 5 представлен выходной сигнал формирующего фильтра с наибольшей постоянной времени $T_2 = 1/(2\pi \cdot 0,001) = 159,155$ [с] из второй серии формирующих фильтров.

Рис. 4, 5 иллюстрируют наиболее низкочастотные составляющие аппроксимированного фликкер-шума.

На рис. 6 представлен выходной сигнал формирующего фильтра с наименьшей постоянной времени $T_{11} = 1/(2\pi \cdot 16) = 0,00995$ [с]. Рисунок иллюстрирует наиболее высокочастотную составляющую.

На рис. 7 представлен результирующий процесс, в котором содержится суперпозиция всех 11 составляющих в соответствии с (4).

Рис. 7 иллюстрирует содержание в сформированном процессе как низкочастотных, так и высокочастотных составляющих. Его спектральная плотность за-

висит от частоты по закону $1/f$ в полосе частот $[10^{-3} - 10]$ Гц с погрешностью аппроксимации, соответствующей кривой 2 на рис. 2.

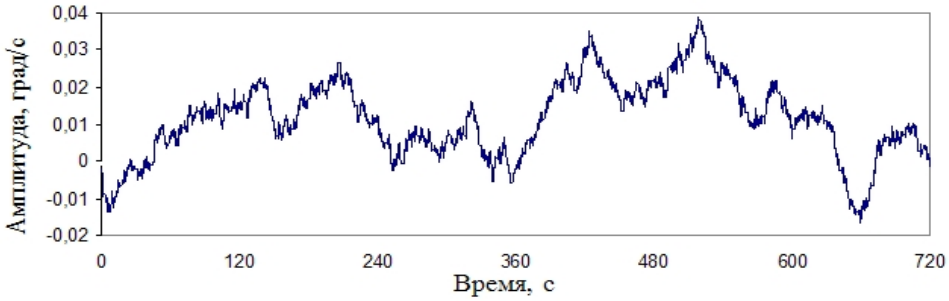

Рис. 5. Модельный процесс выходного сигнала формирующего фильтра с наибольшей постоянной времени из второй серии формирующих фильтров

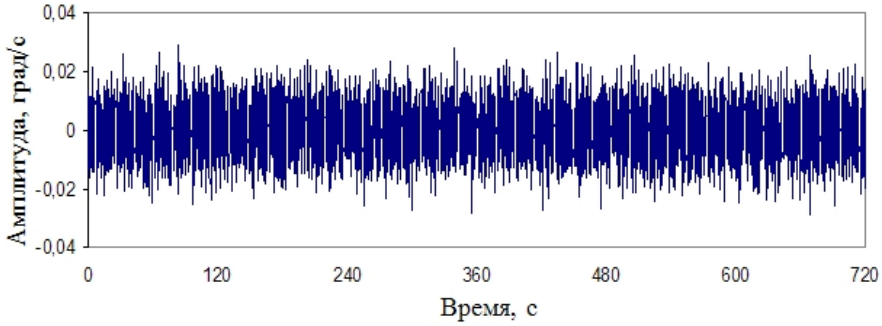

Рис. 6. Модельный процесс выходного сигнала формирующего фильтра с наименьшей постоянной времени

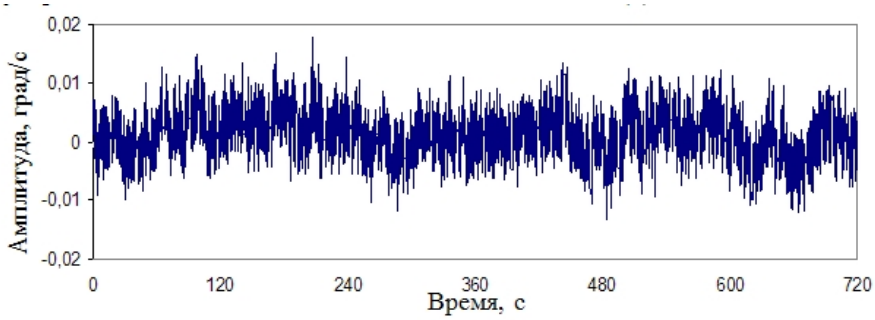

Рис. 7. Результирующий модельный процесс флуктуаций

Пример 2

Важно то, насколько значительно влияние фликкер-шумов на погрешности БИНС и БСО и в каких случаях его следует учитывать. Ответ на этот вопрос зависит от многих факторов: дисперсии фликкер-шумов инерциальных датчиков, времени наблюдения, алгоритмов БИНС и БСО и предъявляемых к ним требований. Приведем некоторые результаты моделирования, полученные с использованием разработанного алгоритма.

Исследовалась погрешность простейшей одномерной БСО, состоящей из одного одноосного ДУС для случая, когда измерения угловой скорости не

содержат полезного сигнала. При этом погрешность оценивания угла обусловлена только шумом и может быть вычислена путем его интегрирования.

Анализировалось влияние фликкер-шума и альтернативных, эквивалентных по дисперсии коррелированных цветных шумов, сформированных фильтрами первого порядка, на погрешность определения угла. Фликкер-шум моделировался в полосе частот $[f_1, f_2]$ при $f_1 = 0,001$ [Гц], $f_2 = 10$ [Гц] с параметром нестабильности нуля , B=10/3600 [град/с] = 10[град/час], при $\Delta t = 0,002$ [с].

Спектральная плотность аппроксимированного фликкер-шума представлена кривой 1 на рис. 8, из которой следует, что она соответствует виду $1/f$ в полосе частот $[0,001-10]$ Гц. Заметим, что СКО фликкер-шума, действующего в ограниченной полосе частот, определяется интегралом его спектральной плотности вида $\sigma_a = \{2B^2 \int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{f}\}^{0/5} = \{2B^2[\ln f_2 - \ln f_1]\}^{0.5} = 0,012$ [град/с].

Ниже приведены результаты расчета СКО погрешности определения углов в предположении различного характера шумов: фликкер-шума, соответствующего $\sigma_a = 0,012$ [град/с]; цветных шумов, обозначаемых далее как № 1, 2, 3, 4, постоянные времени их формирующих фильтров соответствовали собственным частотам в нижней части спектра: 0,0001; 0,001; 0,01; 0,1 Гц, при этом их СКО принимались одинаковыми и равными σ_a .

На рис. 8 кривыми 2, 3, 4, 5 представлены в двойном логарифмическом масштабе спектральные плотности цветных шумов № 1, 2, 3, 4.

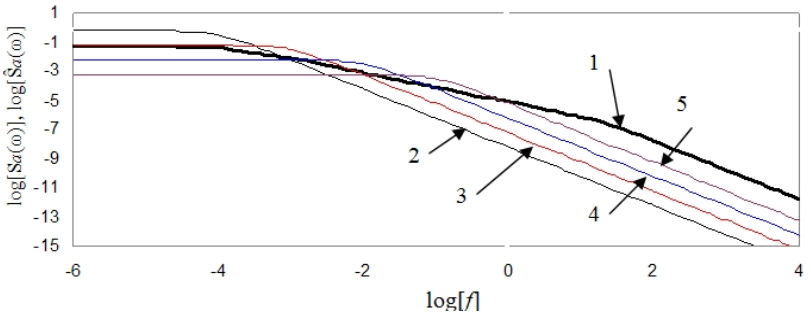

Рис. 8. Спектральные плотности: *1* – аппроксимированного фликкер-шума; *2, 3, 4, 5* – цветных шумов № 1, 2, 3, 4

На рис. 9 представлены зависимости СКО погрешностей БСО, порожденные шумами с перечисленными выше характеристиками.

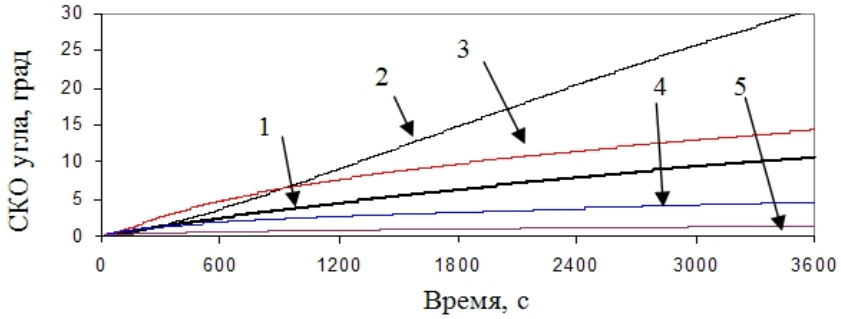

Рис. 9. СКО погрешностей БСО [град]: *1* – за счет аппроксимированного фликкер-шума; *2, 3, 4, 5* – за счет цветных шумов № 1, 2, 3, 4

Вычисления проводились путем решения ковариационных уравнений, соответствующих формирующим фильтрам для этих шумов [21, 22].

На рис. 10 в качестве иллюстрации представлен один из вариантов модельных реализаций погрешностей БСО [град].

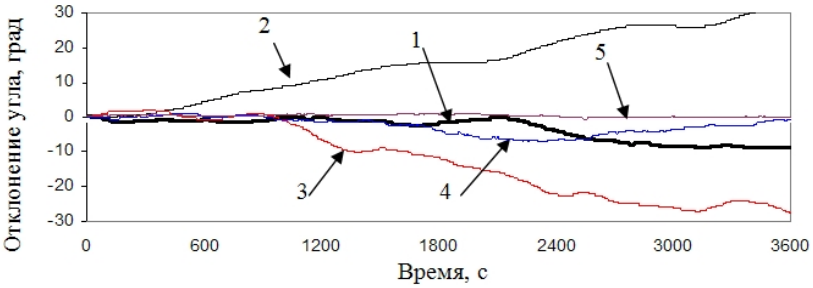

Рис. 10. Модельные реализации погрешностей БСО [град]: *1* – за счет аппроксимированного фликкер-шума; *2, 3, 4, 5* – за счет цветных шумов № 1, 2, 3, 4

Из рис. 8, 9, 10 следует, что при одинаковой дисперсии влияние шумов на погрешность БСО зависит от формы их спектральной плотности.

Из примера 2 следует, что разница между погрешностью БСО, обусловленной фликкер-шумом, и погрешностью за счет эквивалентного по дисперсии цветного шума зависит от постоянной времени формирующего фильтра цветного шума и времени наблюдения и может достигать значительных величин. Поэтому при попытках заменить фликкер-шум цветным шумом с более простым спектром требуется предварительное согласование влияния цветного шума на погрешность исследуемой системы с влиянием фликкер-шума, что можно выполнить с помощью предлагаемого алгоритма.

С другой стороны, рассмотренный алгоритм моделирования фликкер-шума может применяться непосредственно в имитационных моделях БИНС и БСО. Из примера 1 следует, что для описания составляющей фликкер-шума для каждого инерциального датчика требуется вектор состояния размерностью более десяти, при этом имитационная модель усложняется. Однако эта трудность легко обходится с помощью банка реализаций фликкер-шумов, которые рассчитываются предварительно по предложенному алгоритму и считываются в процессе имитационного моделирования.

Выборочные и теоретические статистики

Распределение множества формирующих фильтров на серии использовано для обоснования выбора их собственных частот. При моделировании принадлежность фильтров к той или иной серии не имеет значения и никакой связи между сериями нет. Все формирующие фильтры обеих серий равноправны в том смысле, что на их входы поступают независимые дискретные белые шумы, в результате чего на их выходах формируются независимые марковские процессы.

На рис. 11, 12 представлена выборочная автокорреляционная функция аппроксимированного фликкер-шума, а также автокорреляционные функции и коэффициенты корреляции некоторых его составляющих, вычисленные по реализации длительностью 24 часа модельного времени.

Затухание автокорреляционных функций говорит о стационарности процессов, а его темп соответствует постоянным времени формирующих фильтров. Малое значение выборочных коэффициентов взаимной корреляции (менее 2%)

свидетельствует об отсутствии связи между составляющими аппроксимированного фликкер-шума, что соответствует соотношениям (4).

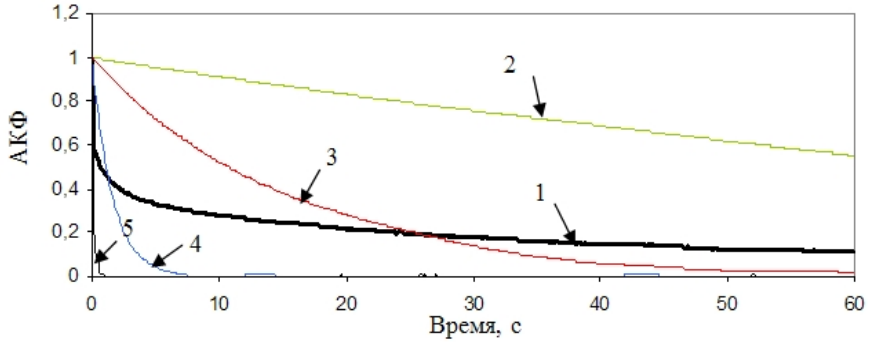

Рис. 11. Выборочные автокорреляционные функции фликкер-шума, аппроксимированного в полосе частот [0,001–10] Гц при B=10 [град/ч]: *1* – автокорреляционная функция аппроксимированного фликкер-шума; *2, 3, 4, 5* – автокорреляционные функции составляющих аппроксимированного фликкер-шума, сформированных фильтрами с собственными частотами {0,001; 0,01; 0,1; 1,0} Гц

Изучались выборочная и теоретическая автоковариационные функции аппроксимированного процесса фликкер-шума. С учетом зависимости спектральной плотности идеального фликкер-шума от круговой частоты $S(\omega) = 2\pi B^2 / \omega$ и при ее ограничении полосой частот $[f_1, f_2]$ теоретическая автоковариационная функция аппроксимированного фликкер-шума определяется соотношениями: $K(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi\omega_1}^{2\pi\omega_2} S(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega = 2B^2[Ci(2\pi f_2\tau) - Ci(2\pi f_1\tau)]$, где $Ci(x)$ – интегральный косинус.

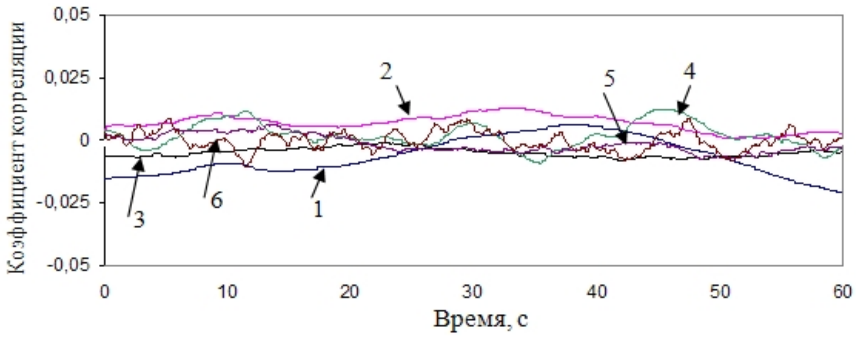

Рис. 12. Выборочные коэффициенты взаимной корреляции составляющих аппроксимированного фликкер-шума: *1* – коэффициенты корреляции шумов, сформированных фильтрами с собственными частотами {0,001; 0,01} Гц; *2* – коэффициенты корреляции шумов, сформированных фильтрами с собственными частотами {0,001; 0,1} Гц; *3* – коэффициенты корреляции шумов, сформированных фильтрами с собственными частотами {0,001; 1,0} Гц; *4* – коэффициенты корреляции шумов, сформированных фильтрами с собственными частотами {0,01; 0,1} Гц; *5* – коэффициенты корреляции шумов, сформированных фильтрами с собственными частотами {0,01; 1,0} Гц; *6* – коэффициенты корреляции шумов, сформированных фильтрами с собственными частотами {0,1; 1,0} Гц

На рис. 13 кривыми 1 и 3 представлены выборочная автоковариационная функция аппроксимированного фликкер-шума и ее теоретическая зависимость. При этом выборочное СКО равно 0,014 град/с и превышает теоретическое значение 0,012 град/с.

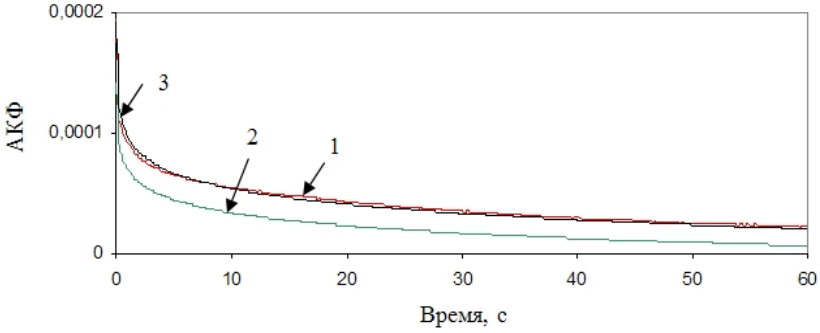

Рис. 13. Выборочная и теоретическая автоковариационные функции аппроксимированного фликкер-шума: 1 – выборочная автоковариационная функция фликкер-шума, аппроксимированного в полосе частот из четырех декад (0,001–10) Гц при B=10 [град/ч]; 2 – теоретическая автоковариационная функция фликкер-шума при ограничении его спектральной плотности в полосе частот из четырех декад (0,001–10) Гц при B=10 [град/ч]; 3 – теоретическая автоковариационная функция фликкер-шума при ограничении его спектральной плотности в полосе частот (0,0005–15) Гц при B=11 [град/ч]

Расхождение между кривыми 1 и 3 на рис. 13 объясняется приближенностью учета ограничений спектральной плотности фликкер-шума по частоте при ее аппроксимации. Аппроксимированная спектральная плотность захватывает более широкую область частот, чем область ограничения. При этом аппроксимированный фликкер-шум имеет несколько более высокую мощность. Если принять B=11 [град/час] и при этом расширить полосу частот с (0,001–10)Гц до (0,0005–15) Гц, то теоретическая автоковариационная функция (кривая 2 на рис. 13) практически совпадает с выборочной автоковариационной функцией (кривая 1 на рис. 13). Это означает, что расчет теоретической дисперсии сформированного процесса рекомендуется выполнять при увеличении параметра B относительно модельного значения на 10% и при расширении модельной полосы частот на 0,5 декады в обе стороны.

Исследовались выборочная и теоретическая девиация (отклонение) Д. Аллана, которую обозначим $\bar{\sigma}(\tau)$, где τ – время осреднения изучаемого процесса. Выборочная девиация вычислялась по модельной реализации шума длительностью 1 час с частотой регистрации 100 Гц. Для расчета парциальных теоретических девиаций составляющих элементарных процессов аппроксимированного фликкер-шума применялась формула девиации для экспоненциально коррелированного марковского процесса [23], скорректированная с учетом вида спектральных плотностей, принятого в (1). При этом теоретическая девиация процесса формирующего фильтра с постоянной времени T и с учетом параметра B и коэффициентов аппроксимации k, n в (4) представляется в виде:

$$\bar{\sigma}(\tau) = \frac{2\sigma^2 T}{\tau}\left\{1 - \frac{T}{2\tau}\left[3 - 4\exp(-\frac{\tau}{T})\right] + \exp(\frac{-2\tau}{T})\right\}, \ \sigma = B\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

На рис. 14 иллюстрируется достаточно хорошее совпадение выборочной и теоретической девиации одной из составляющих процесса фликкер-шума, аппроксимированного в полосе частот из четырех декад (0.001-10) Гц при B=10 [град/ч]. По оси абсцисс отложен десятичный логарифм времени усреднения $\log(\tau)$, по оси ординат отложен десятичный логарифм девиации $\log(\bar{\sigma})$, где $\bar{\sigma}$ имеет размерность [град/ч].

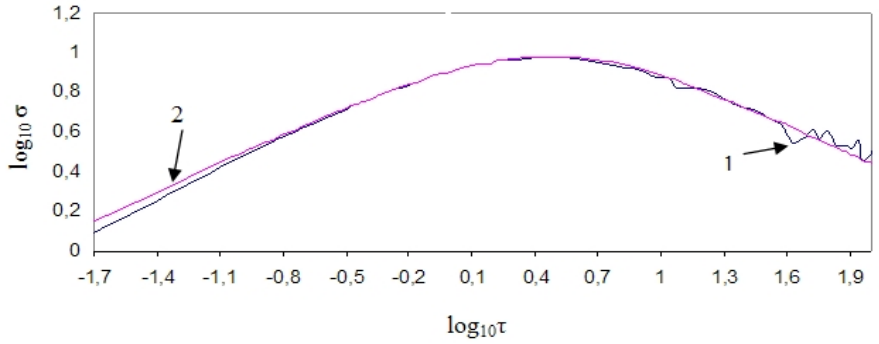

Рис. 14. Выборочная и теоретическая девиация $\log\overline{\sigma}(\tau)$ процесса шестого формирующего фильтра: *1* – выборочная девиация 6-й составляющей процесса аппроксимированного фликкер-шума в полосе 0,001–10 Гц с постоянной времени 1,6 [с] и собственной частотой 0, 1 Гц; *2* – теоретическая девиация

Девиация аппроксимированного фликкер-шума вычисляется с учетом независимости элементарных процессов формирующих фильтров: $\sigma_\Sigma(\tau)=\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}\overline{\sigma}_i^2}$.

Изучалось влияние полосы частот аппроксимации спектральной плотности фликкер-шума на топологию графика $\log\sigma_\Sigma(\tau)$. На рис. 15 представлены выборочные девиации для четырех разных полос частот аппроксимации спектральной плотности фликкер-шума. Линии 1 и 2 изображают графики выборочных девиаций для фликкер-шумов, аппроксимированных в полосах частот из четырех декад [0.001–10] Гц и из пяти декад [0.0001–10] Гц соответственно при модельном значении параметра *B*=10 [град/ч].

Аппроксимированный фликкер-шум отличается от идеального, поэтому было бы необоснованным ожидать, что оценка его девиации совпала бы с модельным значением, задаваемым при аппроксимации. Заметим, что обе линии 1 и 2 на рис. 15 обеспечивают примерно постоянное значение $\sigma_\Sigma(\tau)$ в широком диапазоне времени усреднения, но при завышенной оценке параметра *B*=17 [град/ч].

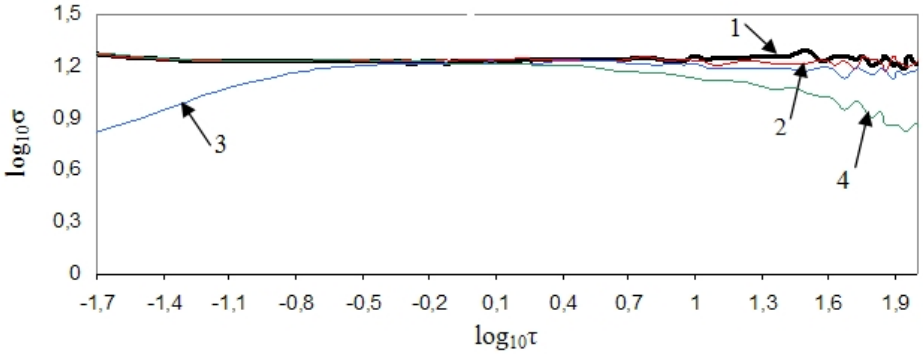

Рис. 15. Выборочная девиация $\log\sigma_\Sigma(\tau)$ для четырех полос аппроксимации спектральной плотности фликкер-шума. *1* – для аппроксимированного фликкер-шума в полосе частот из четырех декад [0,001–10] Гц; *2* – для аппроксимированного фликкер-шума в полосе частот из пяти декад [0,0001–10] Гц; *3* – для аппроксимированного фликкер-шума в полосе частот из трех декад [0,0001–1] Гц; *4* – для аппроксимированного фликкер-шума в полосе частот из двух декад [1–10] Гц

Линии 3 и 4 на рис. 15 изображают графики выборочной девиации $\log\sigma_\Sigma(\tau)$ для фликкер-шумов при аппроксимации спектральной плотности в полосе частот из трех декад в нижней части спектра [0,001–1] Гц и в полосе частот из двух декад в верхней части спектра [1–10] Гц. При уменьшении полосы за счет отбрасывания верхних частот наблюдается уменьшение девиации в области малых значений времени осреднения. И напротив, при уменьшении полосы за счет отбрасывания нижних частот наблюдается уменьшение девиации в области больших значений времени осреднения. При этом участок с примерно постоянным значением девиации сокращается, но сохраняет значение, соответствующее завышенной оценке параметра B=17 [град/ч].

Аналогичные зависимости $\log\sigma_\Sigma(\tau)$ теоретической девиации, также вычисленные для четырех указанных полос частот аппроксимации спектральной плотности фликкер-шума, представлены на рис. 16 и иллюстрируют достаточно близкое совпадение с зависимостями выборочной девиации рис. 15.

Более детальное представление $\sigma_\Sigma(\tau)$ теоретической девиации аппроксимированного фликкер-шума дано на рис. 17.

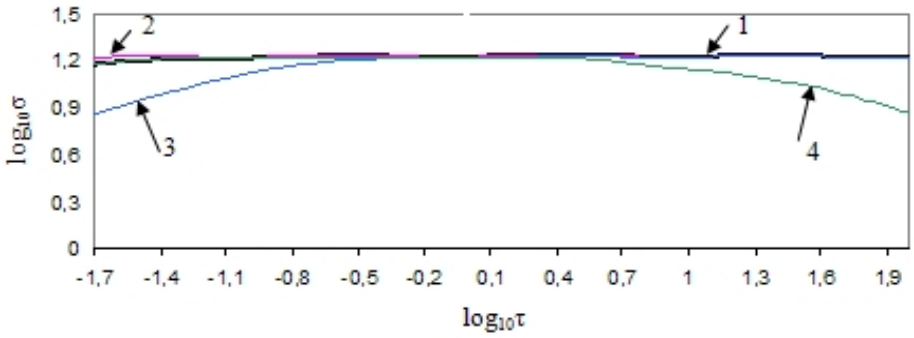

Рис. 16. Теоретическая девиация $\log\sigma_\Sigma(\tau)$ для четырех полос аппроксимации спектральной плотности фликкер-шума

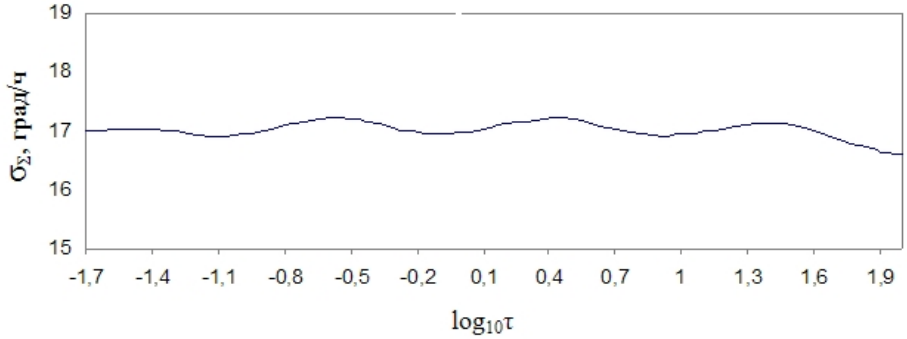

Рис. 17. Теоретическая девиация $\sigma_\Sigma(\tau)$ [град/ч] при аппроксимации спектральной плотности в полосе частот из пяти декад 0,0001–10 Гц

Из рис. 17 следует, что девиация аппроксимированного фликкер-шума не является, строго говоря, постоянной, но изменяется в малых пределах относительно постоянного значения 17 [град/ч].

Поскольку оценки параметра *B* по выборочным и теоретическим зависимостям девиации $\sigma_\Sigma(\tau)$, представленным на рис.15 и 16, практически совпадают,

указанное завышение параметра *B* представляется свойством изложенного алгоритма формирования аппроксимированного фликкер-шума.

Иначе говоря, метод идентификации шумов с помощью девиации Д. Аллана воспринимает сформированный по предложенному алгоритму аппроксимированный фликкер-шум с завышенной оценкой параметра *B* в 1,7 раза относительно модельного значения, задаваемого в (4), и в 1,5 раза относительно значения *B*, скорректированного по автоковариационной функции.

Завышение оценки параметра *B* по Аллану можно рассматривать как неизбежный недостаток аппроксимации, поскольку сформированный процесс имеет конечную дисперсию и не является идеальным фликкер-шумом. С другой стороны, конечность дисперсии шума и одновременно обеспечение желаемого вида $1/f$ его спектральной плотности в заданной полосе частот являются достоинствами, обеспечивающими определенность влияния на точность БИНС и БСО при имитационном моделировании.

Заметим, что эффект завышения оценки параметра фликкер-шума шума по девиации Аллана отмечается как характерный для случаев присутствия в исследуемой смеси шумов экспоненциально коррелированных процессов [24].

Для примера 2 исследовалась девиация альтернативных шумов. На рис. 18 представлены результаты вычисления выборочной девиации $\log\sigma_{\Sigma}(\tau)$ эквивалентных по дисперсии коррелированных цветных шумов.

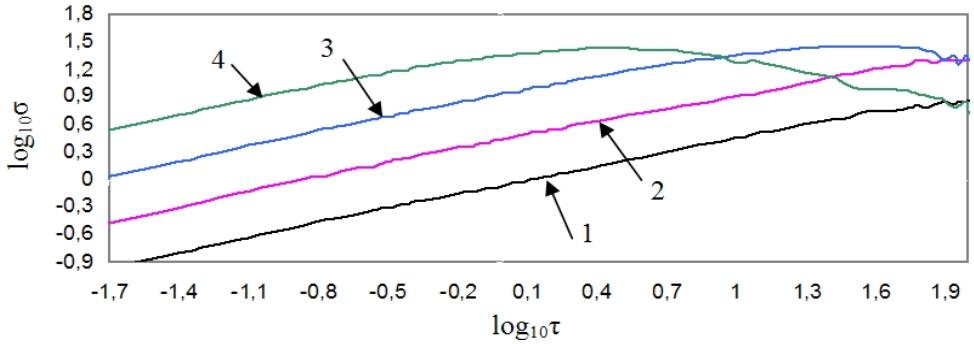

Рис. 18. Выборочная девиация $\log\sigma_{\Sigma}(\tau)$ эквивалентных по дисперсии цветных шумов примера 2. *1, 2, 3, 4* – девиации цветных шумов примера 2, сформированных фильтрами с собственными частотами [0,001–10]; [0,01]; [0,1–10]; [1,0] Гц

Топология девиаций эквивалентных по дисперсии цветных шумов на рис. 18 не имеет участков, характерных для фликкер-шума, как это имеет место для аппроксимированного фликкер-шума на рис. 15, и применение данных процессов для имитации фликкер-шума инерциальных датчиков представляется менее предпочтительным.

Заключение

Детализирован метод представления фликкер-шума суммой стационарных нормальных процессов. Для аппроксимации его спектральной плотности применяются две серии формирующих фильтров в полосе частот, задаваемой пользователем. Определен сдвиг между геометрическими прогрессиями постоянных времени фильтров, масштабный коэффициент и параметры фильтров. Предложен алгоритм моделирования флуктуаций, основанный на

решении системы стохастических разностных уравнений первого порядка. Алгоритм позволяет изучать влияние фликкер-шума на погрешности БИНС и БСО в зависимости от его дисперсии и учитываемой полосы частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Матвеев В.В., Погорелов М.Г.** Анализ погрешностей микромеханических гироскопов методом вариаций Аллана. // Известия ТулГУ. Технические науки. 2015. Вып. 3. Приборостроение, метрология и информационно-измерительные приборы и системы. С. 123–135.
2. **Литвин М.А., Малюгина А.А, Миллер А.Б, Степанов А.Н, Чикрин Д.Е.** Типы ошибок в инерциальных навигационных системах и методы их аппроксимации. // Информационные процессы. ISBN/ISSN 1819-5822. Т. 14, №4, 2014. С 326–339.
3. **Букингем М.** Шумы в электронных приборах и системах. М.: Мир, 1986. 399 с.
4. **Якимов А.В.** Физика шумов и флуктуаций параметров: Электронное учебное пособие. Нижний Новгород: Нижегородский гос. университет, 2013. 85 с.
5. **Борисов Б.Д.** Модели спектральной плотности мощности фликкер-шумов. // Автоматика и программная инженерия. 2015. №2 (12). С. 78-81.
6. **Потемкин В.В., Степанов А.В.** О стационарном характере шума 1/f в низкочастотном диапазоне. // Радиотехника и электроника 1980. Т 25. №6. С. 1269.
7. **Эдвардс. С.** Оптимизация шумовых параметров сигнальных цепей. Ч. 1: Раздражающий шум в полупроводниках – предотвратим или неизбежен? // Электронные компоненты. 2013. №10. С. 9-15.
8. **Barnes J.A., Allan D.W.** A statistical model of flicker noise. // *Proc. IEEE*, 1966, 54, 176-178.
9. **Mandelbrot B.** Some noises with 1/f spectrum, a bridge between direct current and white noise. // *IEEE Trans. Inf. Theory*. 1967. IT-13. P.289-298.
10. **Mandelbrot B., Ness J.W.** Fractional Brownian motions, fractional noises and application. 1968. SIAM Rev., 10. P. 422-437.
11. **Radeka V.** 1/f noise in physical measurements. // *IEEE Trans. Nucl. Scl.* 1969. NS-16. P. 17-35.
12. **Kasdin N.J.** Discrete Simulation of Colored Noise and stochastic Processes and 1/f Power Low Noise Generation // *Proc. of the IEEE.* V. 83. N. 5. P. 802. 1995.
13. **Рахвиашвили С.Ш.** Моделирование фликкер-шума с помощью дробного интегро-дифференцирования. // Журнал технической физики, 2006.Т. 76. Вып 6. С. 123-126.
14. **Федер. Е.** Фракталы. *Пер. с англ.* М.: Мир. 1991. 254 с.
15. **Шишкин Е.И.** Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. Екатеринбург. Урал. Гос. У-нт. 2004. 88 с.
16. **Барабаш Т.К., Масловская А.Г.** Компьютерное моделирование фрактальных временных рядов. Вестник АмГУ. 2010. Вып. 49. С. 31-38.
17. **Останин С.А.** Генератор фрактального шума произвольной размерности. Журнал радиоэлектроники. Электронный журнал. ISSN 1684-1719. Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. 2012. № 8.
18. **Савельев В.М., Антонов Д.А.** Выставка бесплатформенной инерциальной навигационной системы беспилотного летательного аппарата на подвижном основании / Электронный журнал «Труды МАИ», выпуск №45. 2011.
19. **Соловьев А.Н., Саблин А.В., Лялинский А.А.** Разработка среды моделирования инерциальных навигационных систем. МЭС-2014. // Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы разработки перспективных микро-и наноэлектронных систем». ИППМ РАН. Россия, Москва, октябрь 2014.
20. **Жидкова Н.В., Волков В.Л.** Моделирование бесплатформенной системы ориентации. Современные проблемы науки и образования. Электронный научный журнал. ISNN 2070-7428. 2015. №1. (часть 1). https://science-education.ru/ru/article/view?id=17099.
21. **Степанов. О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Часть 2. Введение в теорию фильтрации. СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ Электроприбор», 2012. 417 с.
22. **Острем К.Ю.** Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 324 с.
23. IEEE Std 952-1997(R2008). IEEE Standart Specification Format Guide and Test Procedure for Single Axis Interferometric Fibre Optic Giros.

24. **Кробка Н.И.** О топологии графиков вариации Аллана и типовых заблуждениях в интерпретации структуры шумов гироскопов // XXII Санкт-Петербургская конференция по интегрированным навигационным системам. Круглый стол. Методы определения характеристик погрешностей навигационных датчиков. Сборник материалов. «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 27 мая 2015. С. 477-505.

Kachanov B.O., Akhmedova S.A., Tuktarev N.A. (Moscow Research and Production Complex "Avionika", JSC, Moscow)**, Novikov V.A.** (National Research University Moscow Aviation Institute)
Flicker Noise Simulation by Superposition of Normal Stationary Processes. *Giroskopiya I Navigatsiya.* 2018. Vol. 26. № 2. P. 59–76.

Abstract. A well-known method of 1/f-noise representation as a sum of steady processes is considered. Two series of forming filters are used within the frequency band specified by the user. Ratios of filter parameters are determined. Spectrum approximation error is studied. An algorithm of fluctuations modeling is proposed as a system of stochastic differential equations of the first order. The algorithm can be applied to the simulated models used in studying the errors of navigation systems.

Key words: flicker noise, modeling simulation, superposition method, inertial sensor.

REFERENCES

1. **Matveev, V.V. and Pogorelov, M.G.**, Analyzing the errors of micromechanical gyroscopes by Allan variance. Izvestiya TulGU, *Tekhnicheskie nauki,* 2015, vol. 3. *Priborostroenie, metrologiya i informatsionno-izmeritel'nye pribory i sistemy*, pp. 123–135.
2. **Litvin, M.A., Malyugina, A.A, Miller A.B, Stepanov, A.N, and Chikrin D.E.**, Types of errors in inertial navigation systems and methods for their approximation, *Informatsionnye protsessy*. ISBN/ISSN 1819-5822. vol. 14, no. 4, 2014, pp. 326–339.
3. **Buckingham, M.J.**, *Noise in Electronic Devices and Syst*ems, Chischester [West Sussex, England]: E. Horwood, 1983.
4. **Yakimov, A.V.**, *Fizika shumov i fluktuatsii parametrov: Elektronnoe uchebnoe posobie*. (Physics of Noise and Parameter Fluctuations: Electronic textbook). Nizhnii Novgorod: Nizhegorodskii Gosuniversitet, 2013.
5. **Borisov, B.D.**, Models of flicker noise spectral power density, *Avtomatika i programmnaya inzheneriya,* 2015, no. 2 (12), pp. 78–81.
6. **Potemkin, V.V. and Stepanov, A.V.**, On the stationary nature of noise 1/f in low-frequency band, *Radiotekhnika i elektronika*, 1980, vol. 25, no. 6, p. 1269.
7. **Edwards, S.**, Optimization of noise parameters of signal circuits. Part 1: Annoying noise in semiconductors - preventable or unavoidable? *Elektronnye komponenty*, 2013, no.10, pp. 9–15.
8. **Barnes, J.A. and Allan, D.W.**, A statistical model of flicker noise, 1966, *Proc. IEEE*, 54, pp. 176–178.
9. **Mandelbrot, B.**, Some noises with 1/f spectrum, a bridge between direct current and white noise, 1967, *IEEE Trans. Inf. Theory*, IT-13, pp. 289–298.
10. **Mandelbrot, B. and Ness, J.W.**, Fractional Brownian motions, fractional noises and application, 1968, *SIAM Rev*., 10, pp. 422–437.
11. **Radeka, V.** 1/f noise in physical measurements, 1969, *IEEE Trans. Nucl. Scl*. NS-16, pp. 17–35.
12. **Kasdin, N.J.**, Discrete simulation of colored noise and stochastic processes and 1/f power low noise generation, *Proc. of the IEEE*, vol. 83, no. 5, pp. 802, 1995.
13. **Rakhviashvili, S.Sh**., Modeling of flicker noise with the help of fractional integro-differentiation, *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 2006, vol. 76, no. 6, pp. 123–126.
14. **Feder, J.**, *Fractals*, New York: Plenum Press, 1988.
15. **Shishkin, E.I.**, *Modelirovanie i analiz prostranstvennykh i vremennykh fraktal'nykh ob''ektov* (Modeling and Analysis of Spatial and Temporal Fractal Objects), Ekaterinburg, Uralski Gos. Universitet, 2004.
16. **Barabash, T.K.**, **Maslovskaya, A.G.**, Computer modeling of fractal time series. *Vestnik AmGU*, 2010, no. 49, pp. 31–38.

17. **Ostanin, S.A.**, A generator of fractal noise of arbitrary dimension, *Zhurnal radioelektroniki. Elektronnyi zhurnal*, ISSN 1684-1719, Institut radiotekhniki i elektroniki im. V.A. Kotel'nikova RAN, 2012, no. 8.
18. **Savel'ev, V.M. and Antonov, D.A.**, Alignment of an inertial navigation system of an unmanned aerial vehicle on a moving base, *Elektronnyi zhurnal* (Electronic journal), *"Trudy MAI",* no. 45, 2011.
19. **Solov'ev, A.N., Sablin, A.V., and Lyalinskii, A.A.**, Development of simulation environment for inertial navigation systems. MES-2014. *Vserossiiskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem* (All-Russian Scientific and Technical Conference "Problems of development of prospective micro- and nanoelectronic systems"), Russia, Moscow, October, 2014, IPPM RAN.
20. **Zhidkova, N.V. and Volkov, V.L.**, Simulation of a strapdown orientation system. Modern problems of science and education. *Elektronnyi zhurnal* (Electronic journal). ISNN 2070-7428, 2015, no. 1, (Part 1). https://science-education.ru/ru/article/view?id=17099.
21. **Stepanov, O.A.**, *Osnovy teorii otsenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigatsionnoi informatsii* (Fundamentals of the Estimation Theory with Applications to the Problems of Navigation Information Processing), Part 2, *Vvedenie v teoriyu fil'tratsii* (Introduction to the Filtering Theory), St. Petersburg: TsNII Elektropribor, 2012.
22. **Ostrem, K.Yu.**, Introduction to stochastic control theory (Vvedenie v Stohasticheskuyu Teoriyu Upravleniya. M.: Mir, 1973.
23. IEEE Std 952-1997(R2008). IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single Axis Interferometric Fiber Optic Gyros.
24. **Krobka, N.I.**, On the topology of the Allan variance graphs and typical misconceptions in the interpretation of the structure of the gyros noise, Panel discussion: Methods for Navigation Sensor Performance Determination. XXII Sankt-Peterburgskaya mezhd. konf. po integrirovannym navigatsionnym sistemam (22nd St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems), 25– 27 May, 2015, Saint Petersburg: Elektropribor, Russia

Материал поступил 21.03.2017