

Б. ТЕННШТЕДТ, Н. ВЕДДИГ, Ш. ШЁН

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРФЕРОМЕТРОВ НА ХОЛОДНЫХ АТОМАХ

*В статье обсуждается возможность применения в инерциальной навигации интерферометров на холодных атомах. Представлены погрешности этого нового типа датчиков, а также один из методов оперативного оценивания различных погрешностей формирования его выходного сигнала. Выводится и анализируется структура обобщенного фильтра Калмана, в котором данные атомного интерферометра используются в качестве измерения для коррекции систематических погрешностей традиционного инерциального измерительного модуля, что повышает точность работы бесплатформенной системы любого подвижного объекта. Повышение точности исследуется аналитически на основе установленных дисперсий фильтра, а также посредством моделирования для околоземных спутников. Продемонстрирована коррекция погрешностей грубого инерциального измерительного модуля в процессе лабораторного эксперимента при имитации атомного интерферометра датчиком более высокой точности. Поскольку применение обсуждаемого прибора в качестве гироскопа, как ниже отмечается в статье, ограничено, предложенная схема обеспечивает возможность работы атомного интерферометра в качестве датчика с шестью степенями свободы – как трехосного акселерометра и трехосного датчика угловой скорости.*

**Ключевые слова:** инерциальная навигация, интерферометр на холодных атомах, интегрирование, обобщенный фильтр Калмана.

### 1. Введение

Инерциальные измерительные модули (ИИМ) стали широко использоваться в навигационных системах в последние 50-60 лет [1]. За эти годы портативность, компактность, робастность и чувствительность инерциальных датчиков сильно выросли, но их шум все равно остается слишком высоким, чтобы они могли служить единственным источником сигналов для навигационных систем, так как интегрирование их измерений приводит к появлению погрешностей местоположения от десятков до сотен метров уже в течение нескольких минут.

**Теннштедт** Беньямин. Магистр, научный сотрудник, Институт геодезии, Университет им. Лейбница (Ганновер, Германия). ORCID 0000-0003-4362-0667.

**Веддиг** Николай. Магистр, Институт геодезии, Институт спутниковой геодезии и инерциальных измерений Немецкого аэрокосмического центра, Университет им. Лейбница. ORCID 0000-0001-7401-936X.

**Шён** Штеффен. Доктор технических наук, профессор, Институт геодезии, Университет им. Лейбница. ORCID 0000-0002-5042-6742.

Статья по докладу на XXVIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, 2021.

Научные редакторы перевода: д.ф.-м.н. А.К. Вершовский, д.т.н. Ю.А. Литманович.

Чтобы снизить погрешности определения местоположения, скорости и ориентации, инерциальные датчики часто комбинируются с GPS-приемниками. Их измерительные и точностные характеристики дополняют друг друга, что позволяет успешно решать навигационные задачи. Однако при блокировке, искажении или пропадании спутниковых сигналов точность навигационного решения быстро ухудшается [2].

Атомные интерферометры (АИ) базируются на относительно новом физическом принципе, который можно использовать в инерциальных измерениях. Интерферометр по схеме Маха–Цандера может быть реализован следующим образом: волновой пакет каждого атома с помощью соответствующим образом направленных лазерных лучей переводится в суперпозиционное состояние, а именно расщепляется на две части, характеризующиеся различными значениями механического момента (момента импульса); затем происходит обмен состояниями и последующая рекомбинация волновых пакетов. Фазовый сдвиг между двумя состояниями волновой функции атома после объединения содержит информацию о любых инерционных силах<sup>1</sup>, воздействующих на волновые пакеты во время их движения.

Первые натурные эксперименты с атомными интерферометрами для гравиметрических измерений были проведены в динамических условиях в последнее десятилетие (см., например, [3–5]). Было показано, что по чувствительности и долговременной стабильности в части измерения ускорения АИ превосходят традиционные ИИМ [6, 7]. Точностные характеристики АИ также существенно выше, так как эти датчики практически не имеют дрейфа нуля [8].

Тем не менее есть и ряд недостатков, особенно существенных для высокодинамичного движения. Один из них – временной промежуток, когда происходит охлаждение атомов и датчик становится нечувствительным к любым инерционным воздействиям, что не позволяет получить навигационное решение для всей траектории движения.

При этом высокая чувствительность АИ достигается в основном за счет длительного времени пролета атомов через камеру интерферометра. За это время происходит интегрирование всех инерционных воздействий на атомный волновой пакет. В итоге выходной сигнал датчика содержит только усредненный отклик на воздействия, испытанные атомами в течение фактического времени пролета. Для статических сигналов (измерение локальной силы тяжести или скорости вращения Земли) это не представляет никакой проблемы, но в высокоскоростной навигации при изменении ориентации системы координат (СК) датчика относительно навигационной СК это может приводить к значительным систематическим погрешностям БИНС вследствие известных конических и скаллинг-эффектов.

Интерферометрический фазовый сдвиг является аргументом синусоидальной функции, представляющей выходной сигнал АИ, поэтому он может характеризовать только очень узкий динамический диапазон входного воздействия и подвергаться эффекту неоднозначности, имеющему место при таком способе измерения.

Для увеличения частоты измерения входного воздействия был предложен ряд усовершенствований структуры датчика [9, 7]. Для подавления вибрационного шума, влияющего на непрозрачное зеркало, положение которого определяет опорный сигнал для измерения фазового сдвига, было решено комбинировать АИ с традиционными инерциальными датчиками [10, 11]. Это также помогает решить проблему

<sup>1</sup> Здесь и далее по тексту под инерционными силами (эффектами) авторы подразумевают силы, вызывающие поступательное и/или вращательное движение подвижного объекта – *прим. ред.*

неоднозначности, так как сигнал АИ может быть сопоставлен с ускорением, измеренным ИИМ. Вместе с тем главной проблемой остается достижение компромисса между высокой чувствительностью и способностью измерять изменения инерционных воздействий в течение времени прохождения атомов. Таким образом, работы над применением АИ в инерциальной навигации пока находятся на начальной стадии.

В настоящей статье исследуется перспективный способ комбинирования традиционных датчиков с АИ. Вместо того чтобы дополнить АИ инерциальными измерениями и таким образом улучшить его работу, в этом подходе ИИМ используется как основной датчик в стандартном бесплатформенном алгоритме для получения первичной оценки кинематических параметров. Затем АИ применяется для коррекции ряда систематических погрешностей и смещений ИИМ. В этом случае эффект осреднения сигнала АИ лишь незначительно влияет на решение, так как пользователь полностью контролирует момент использования измерения АИ – в идеале в ситуациях с постоянными инерционными силами.

Статья структурирована следующим образом. Физический принцип АИ и его способность измерять инерционные силы описаны в разделе 2, где также обсуждаются различные режимы работы АИ – в качестве акселерометра и гироскопа, а кроме того, их реализация в алгоритме обобщенного фильтра Калмана (ОФК). Погрешности и источники неопределенностей АИ анализируются в разделе 3, где более подробно излагается процесс съема сигнала в АИ. Показана возможность оперативного оценивания шума с помощью метода максимального правдоподобия. В разделе 4 приводится оценка ожидаемой точности комбинированного алгоритма фильтрации для двух режимов работы на основе установившихся значений дисперсий компонентов вектора состояния. В разделе 5 описываются и обсуждаются экспериментальные исследования. Сначала алгоритм оценивания шума демонстрируется на наборе данных от макета АИ. Во втором эксперименте обсуждается повышение качества работы интегрированного решения на примере установки, аналогичной системе на спутнике Grace, где ИИМ моделируется с помощью электростатического акселерометра (см. например, [12]). Далее приводится описание эксперимента на реальных данных, где смещение нуля бюджетного МЭМС-датчика оценивается с помощью ИИМ высокого класса, который имитирует данные АИ на основе приведенных уравнений. В разделе 6 приводятся результаты, а также обсуждаются перспективы применения метода в реальных приложениях.

## 2. Атомный интерферометр как инерциальный датчик

### 2.1. Принцип измерения

В данном разделе кратко излагаются наиболее важные аспекты технологии АИ в части его использования в качестве инерциального датчика. Более общие и подробные сведения приведены в [13], наиболее новые и носящие практический характер – в [14].

В отличие от традиционных (или классических) инерциальных датчиков в АИ используются корпускулярно-волновые характеристики атомов в комбинации с рамановскими лазерными импульсами для измерения среднего ускорения и угловой скорости атомного облака относительно комплекта находящихся в жесткой вакуумной камере лазеров, положение которых задает опорную СК. Взаимодействие атомов с лазерами приводит к осцилляциям между энергетическим состоянием  $|1, m\rangle$  и со-

стоянием с более высоким значением момента импульса  $|2, m + k\hbar\rangle$  за счет передачи момента  $k\hbar$  при поглощении фотонов, где  $m$  – начальный момент,  $k$  – эффективное волновое число,  $\hbar$  – приведенная постоянная Планка. Вероятность  $p$  того, что атомы могут быть обнаружены в одном из двух состояний, задается уравнением

$$p = -\frac{C}{2} \cos(\phi). \quad (1)$$

Фаза  $\phi$  содержит информацию о разнице траекторий, по которым проходят атомы (рис. 1). Контраст  $C$  связан с амплитудой  $A$  интерференционной картины соотношением  $C = -2A$  (рис. 2). Контраст подвержен воздействию различных физических факторов – гравитационного поля, а также магнитных и электрических полей. В данном случае наибольший интерес представляют инерционные эффекты: ускорения и скорости вращения.

Чтобы извлечь эти данные из выходного сигнала АИ, требуется модель, связывающая фазовый сдвиг с инерционными величинами. В классическом эксперименте с оптическим интерферометром фазовый сдвиг связан с разностью оптического пути  $\Delta s$  и длины волны  $\lambda$  (двух) когерентных волн следующим образом:  $\phi = 2\pi\Delta s/\lambda$ . Введя волновое число  $k = 2\pi/\lambda$  и заменив разность путей  $\Delta s$  на  $x$ , получаем следующее уравнение для фазового сдвига:

$$\phi = kx. \quad (2)$$

Для датчика на волнах материи положение  $x$  в поле лазерного излучения может быть описано классической траекторией пролета атомов [15]. Фазовый сдвиг можно получить путем перемножения положения на волновое число  $k$ . В симметричной конфигурации Маха–Цандера время пролета между первым светоделителем (полупрозрачным зеркалом) и глухим отражающим зеркалом равно времени пролета между глухим зеркалом и вторым светоделителем. В этом случае достаточно описать классическую траекторию посредством введения средней линии ([16], рис. 1). Это позволяет описать сложную задачу квантовой физики с помощью относительно простой системы кинематических дифференциальных уравнений:

$$\dot{q}^{b'} = v^{b'}, \quad (3)$$

$$\dot{v}^{b'} = C_b^{b'} f_{ib}^b - C_b^{b'} (2\omega_{ib}^b \times v^b), \quad (4)$$

$$\dot{C}_b^{b'} = C_b^{b'} [\omega_{ib}^b \times], \quad (5)$$

где кинематическое состояние на усредненной траектории определяется положением  $q$  и скоростью  $v$  относительно начального положения в корпусной СК. Вращение этой СК в течение времени пролета также учитывается в матрице поворотов  $C_b^{b'}$ . Ускорения и угловые скорости обозначаются  $\omega_{ib}^b$  и  $f_{ib}^b$ . Согласно уравнению (2) фазовый сдвиг формируется при всех взаимодействиях атомного облака с рамановскими импульсами излучения, характеризующимися эффективным волновым вектором  $k$ . Таким образом, суммарный фазовый сдвиг является следствием всех взаимодействий в течение одного цикла измерений.

После трех рамановских импульсов фазовый сдвиг равен

$$\phi(t_3) = k_1 \odot q(t_1) - 2k_2 \odot q(t_2) + k_3 \odot q(t_3), \quad (6)$$

где  $\odot$  обозначает поэлементное умножение. При условии что  $k$  обычно считается стабильным и идентичным для всех трех импульсов и что  $q(t = 0) = 0$  в лазерной СК, уравнение для фазового сдвига  $\phi$  после финального третьего импульса можно упростить:

$$\phi = k \odot \left( q(T) - 2q\left(\frac{1}{2}T\right) \right). \tag{7}$$

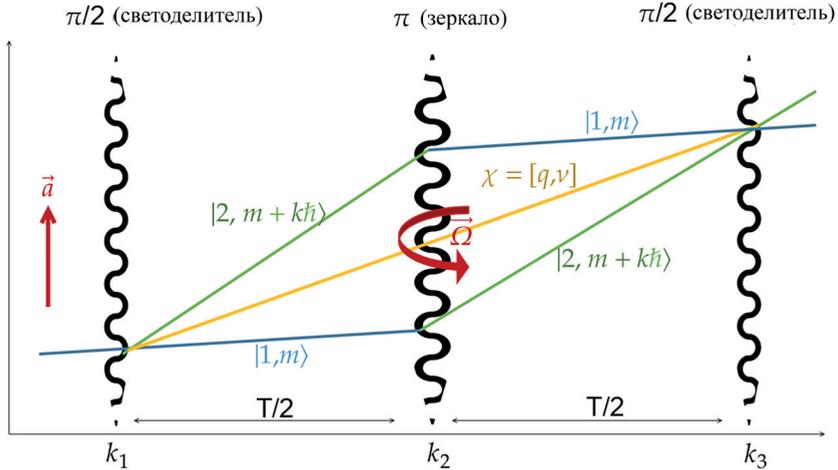


Рис. 1. Принцип работы атомного интерферометра в приборе Маха–Цандера.

Два состояния в суперпозиции (обозначены зеленым и синим цветом) представлены одним кинематическим состоянием на средней линии (желтый цвет), которое служит базой для расчетов сигнала АИ в бесплатформенной конфигурации

### 2.2. Реализация фильтра

Ниже приводятся дальнейшие шаги по выработке интегрированного решения АИ–ИИМ. Общая схема фильтра представлена в разделе 7.1, поэтому здесь уточняются только некоторые важные аспекты. Подробное описание фильтра см. в [17].

Прогноз фазового сдвига и сигнал АИ. Если уравнения (3)–(5) решаются по данным ИИМ  $f_{ib}^b$  и  $\omega_{ib}^b$ , можно спрогнозировать фазовый сдвиг во время цикла измерений при помощи уравнения (7). Поскольку скорость опроса данных ИИМ высока, это реальная возможность решить систему дифференциальных уравнений численно, например интегрированием по методу трапеций. Используя прогноз фазового сдвига  $\phi$ , получаем прогноз измерения

$$h(x, u) = A \odot \cos(\phi_0 + \phi), \tag{8}$$

где  $u$  формально представляет собой указанную выше зависимость от входных данных ИИМ. Следует отметить, что из этого уравнения, которое показывает интерференционную картину, так же как из выходного сигнала АИ  $p$  в (9), исключается смещение нуля АИ  $p_0$  для упрощения последующей записи. Этот параметр снова появляется в разделе 3.

Согласно этому уравнению фазовый сдвиг  $\phi$ , который пропорционален проинтегрированному ускорению, спрятан в неопределенности функции косинуса,  $\phi_0$  обозначает сдвиг фазы лазера, который задается пользователем.

Этап коррекции фильтра. Реальное измерение АИ  $p$  описывается уравнением (1). Нас, однако, интересуют ускорения и в конечном итоге скорости вращения, поэтому необходимо установить функциональное соотношение. Поскольку ОФК на этапе коррекции использует невязку

$$i = p - h(x, u) \tag{9}$$

и, соответственно, уже работает с нелинейной моделью, коэффициент усиления ОФК, который определяет влияние коррекции состояния на вектор состояния, включает матрицу  $H$ . В этой матрице требуется линеаризация аналитической функции  $h(x, u)$  в рабочей точке, чтобы определить чувствительность модели системы к отдельным компонентам вектора состояния. Она представляет весовые коэффициенты невязок при коррекции вектора состояния.

Уравнения измерения и этапа коррекции фильтра имеют некоторые особенности. Во-первых, при использовании только одного измерения АИ мы получим неопределенность фаз (рис. 2). Во-вторых, возникают погрешности линеаризации, когда разница между фазой АИ и спрогнозированной фазой ИИМ слишком велика. Может показаться, что эти недостатки важны для выработки решения, однако далее будет показано, что в уравнениях ОФК они оказывают незначительное влияние [17].

Ранее было показано, что на этапе коррекции фильтра матрица  $H$  является результатом линеаризации уравнения наблюдения (8) в рабочей точке. В результате дифференцирования  $\frac{\partial h}{\partial x}$  получаем:

$$H = \frac{\partial h}{\partial x} = -A \odot \sin(\phi_0 + \phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{\phi_0, x} \tag{10}$$

Для линеаризации требуется, чтобы внешние ускорения в течение времени прохождения атомов были постоянными. Если СК лазера согласована с корпусной СК и скорость вращения и ускорение постоянны в течение цикла измерений АИ, то, объединяя уравнения (4) и (7), получаем следующее выражение для фазового сдвига (см. раздел 7.2):

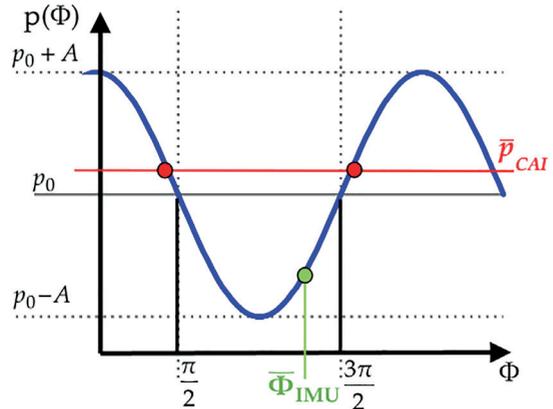


Рис. 2. Проблема неопределенности интерференционной картины. Поскольку измерение АИ представлено атомным отсчетом  $p$  (красная линия), трудно найти соответствующий ему фазовый сдвиг  $\phi$ . Показания ИИМ используются для нахождения соответствующего фрагмента косинусоидального сигнала (зеленая линия). Это делается путем прогнозирования фазы при помощи уравнения (8)

$$\phi = \frac{1}{4}(f_{ib}^b + b_a) \odot kT^2 - \frac{1}{2}(\omega_{ib}^b + b_\omega) \times \bar{v} \odot kT^2, \quad (11)^1$$

где  $b_a, b_\omega$  – смещения нуля акселерометров и гироскопов ИИМ соответственно,  $\bar{v}$  – скорость атомного облака в начале цикла измерений.

Требование постоянства сил, конечно, не будет выполнено в большинстве кинематических приложений, и допущение окажется нарушенным. В этом случае выявляется эффект от использования предложенной схемы ОФК. Поскольку невязка  $i$  рассчитывается без линеаризации, реальная динамика учитывается благодаря высокой частоте передачи данных в ИИМ при прогнозе фазового сдвига. Вместе с тем, как указывалось ранее, матрица  $H$  только определяет вес невязки на этом конкретном этапе. Если же присутствует маленькая погрешность вследствие неверно определенного расстояния в наблюдении АИ и прогноза состояния, она незначительно влияет на результат (рис. 3). Уравнение (11) содержит два члена: первый для линейного ускорения, который позволяет АИ работать как акселерометру, и второй для кориолисова ускорения, который позволяет АИ работать в качестве гироскопа. Ниже приводится объяснение этих двух режимов.

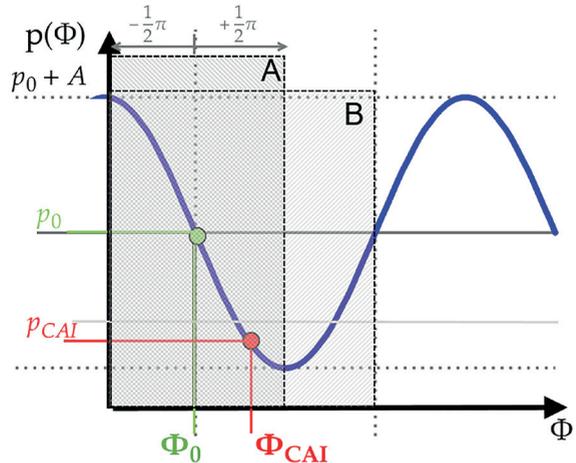


Рис. 3. Фазовый сдвиг желаемого интервала прогнозируется с помощью ИИМ, а фаза лазера настраивается так, чтобы сумма обоих членов была равна  $\pi/2$  (зеленая линия). Когда реальное измерение находится на той же стороне синусоидальной функции (область A), коррекция ОФК точна (с точностью до погрешности линеаризации). Когда измерение АИ находится в области B, ОФК на этапе коррекции имеет большую числовую погрешность, но правильный знак, так что сходимость решения все же возможна

**Акселерометр.** Можно различать два члена линейного ускорения в (11) разными способами, например с помощью антипараллельно ориентированных АИ [18], но здесь возникает ряд вопросов, в частности о согласованности обоих измерений, чтобы гарантировать, что и тот и другой интерферометр находится в одной координатной и временной системе. Эти вопросы, однако, не рассматриваются в данной статье. Было также показано, что при использовании высокоточного ИИМ на кольцевых лазерных гироскопах (КЛГ) точность антипараллельного АИ уступает точности традиционного датчика в высокочастотном диапазоне (см. раздел 4). Чтобы добиться максимально точного решения, можно применить данные КЛГ в качестве контрольного входного сигнала, для того чтобы рассчитать второй член и выделить член, зависящий от линейного ускорения.

Уравнение для наблюдения АИ записывается следующим образом:

$$h(x, u) = A \odot \cos\left(\phi_0 + \frac{1}{4}(f_{ib}^b + b_a) \odot kT^2\right). \quad (12)$$

<sup>1</sup> Соотношение (11) является более общим видом уравнения для разности фаз АИ, чем соотношение, приведенное в [14], которое можно получить аналитическим интегрированием второго члена в (11) для случая движения атомов с постоянным ускорением – прим. ред.

Судя по этому уравнению, при разработке фильтра можно оценивать один из двух разных наборов состояний. Можно напрямую корректировать инерциальное измерение путем расчета чувствительности ( $H = \partial h / \partial f_{ib}^b$ ) или, как обсуждалось ранее, оценить смещение нуля как отдельное состояние по формуле ( $H = \partial h / \partial b_a$ ). В первом методе измерению АИ придается больший вес, но могут появиться систематические погрешности на высокодинамичных траекториях, так как коррекция действительна только для текущего цикла измерений АИ и не влияет на показания ИИМ. Соответствующий линейризованный элемент матрицы  $H$  для смещения нуля акселерометра равен

$$H = \frac{\partial h}{\partial b_a} = -A \odot \sin(\phi_0) \odot \frac{1}{4} kT^2 = -A \odot \frac{1}{4} kT^2. \quad (13)$$

Следует отметить, что рабочей точкой для  $\phi_0$  является  $\pi/2$  для всех осей, а для прогноза смещения нуля – всегда 0, что упрощает запись, практически не ухудшая качества работы.

Гироскоп. Использовать АИ в качестве гироскопа также можно двумя способами. Первый из них – применение уравнения (11), если линейное ускорение известно и кориолисов член можно изолировать. Способ подходит, если СК датчика не ускоряется или если данные о линейном ускорении получены от другого высокоточного датчика. Вместе с тем по точности в части ускорений АИ значительно превосходит большинство известных акселерометров с широким динамическим диапазоном, поэтому такой вариант весьма сомнителен, хотя возможен при работе на космическом аппарате (КА), где используются высокопрецизионные электростатические акселерометры.

Второй способ разделения двух членов ускорения предполагает применение на каждой оси пары антипараллельно ориентированных АИ или похожей схемы [19]. В общем случае для каждой оси есть два наблюдения, а линейное ускорение  $\phi_a = \frac{1}{4}(f_{ib}^b + b_a) \odot kT^2$  воспринимается двумя датчиками идентично:

$$h_A(x, u) = A \odot \cos\left(\phi_0 + \phi_a - \frac{1}{2}(\omega_{ib}^b + b_\omega) \times \bar{v} \odot kT^2\right), \quad (14)$$

$$h_B(x, u) = A \odot \cos\left(\phi_0 + \phi_a + \frac{1}{2}(\omega_{ib}^b + b_\omega) \times \bar{v} \odot kT^2\right). \quad (15)$$

В этом случае, однако, кориолисов член имеет разные знаки. Механические моменты атомов от двух интерферометров направлены друг к другу, в результате чего скорость  $\bar{v}$  меняет знак. Чтобы лучше понять функцию антипараллельной структуры, для смещений нулей акселерометров и гироскопов пар датчиков рассчитываются чувствительности измерения  $H$ :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_A}{\partial b_a} & \frac{\partial h_B}{\partial b_a} \\ \frac{\partial h_A}{\partial b_\omega} & \frac{\partial h_B}{\partial b_\omega} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} A \odot kT^2 & -\frac{1}{4} A \odot kT^2 \\ \frac{1}{2} A \odot k \times \bar{v} T^2 & -\frac{1}{2} A \odot k \times \bar{v} T^2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Допустим, что невязка у обоих датчиков идентична, что соответствует действительности лишь в том случае, если присутствует только линейное ускорение. Таким образом, чувствительности двух выходных сигналов к смещению нуля гироскопа компенсируют друг друга и наблюдается только смещение нуля акселерометра. С другой стороны, если присутствует только вращение, два сигнала  $p_A$  и  $p_B$  имеют разные знаки и чувствительность к смещению нуля акселерометра обнуляется. В этом случае наблюдается только смещение нуля гироскопа.

### 3. Модель погрешностей атомного интерферометра

#### 3.1. Источники неопределенностей

Практически все члены в уравнении (17) включают дополнительные неопределенности, далее перед ними в выражениях ставится  $\delta$ :

$$p = (A + \delta A) \cdot \cos(\phi + \delta\phi) + (p_0 + \delta p). \quad (17)$$

Погрешности определения амплитуды интерференционной картины  $A$  и смещения  $p_0$  часто называются выходными погрешностями и описываются белым шумными процессами. На фазу  $\phi$  может воздействовать множество различных систематических и недетерминированных эффектов. К ним, например, относятся механические вибрации лазерных оптических компонентов, температурные вариации или магнитные поля, влияющие на атомные облака. Все эти эффекты можно назвать техническими помехами, к наиболее значительным из которых, помимо механических вибраций, относится фазовый шум от считывающих лазеров.

Другое значимое ограничение – квантовый шум, связанный с атомным числом  $n_A$  соотношением  $1/\sqrt{n_A}$  [18], однако он входит в фазовый шум. В данной работе неопределенности группируются по трем параметрам –  $\sigma_p$ ,  $\sigma_\phi$  и  $\sigma_A$ . Ниже приводится описание оценивания этих процессов.

#### 3.2. Оперативное оценивание шума

Процесс оперативного оценивания шума производится следующим образом:

- 1) оценивание начальных параметров интерференции  $\zeta(t_0) = [p_0, \phi, A]^T$  ( $t = 0$ ) при статической постановке. При этом используется ОФК, описанный на шаге 2;
- 2) рекуррентное слежение за  $\zeta$  с помощью ОФК с использованием чувствительностей наблюдения  $H = [1, -A \sin(\phi_i), \cos(\phi_i)]$ . Индекс  $i$  обозначает текущее измерение. Системная модель для прогноза здесь не требуется, следовательно, переходная матрица равна единичной матрице;
- 3) далее эти параметры используются в качестве средних значений  $\mu$  для оценивания по методу максимального правдоподобия, чтобы сократить количество неизвестных до дисперсий  $\sigma$ .

С помощью этого метода можно получить первую оценку шума по набору данных начальной выставки. Например, если записан набор данных длиной около 10 мин, можно собрать около 4200 точек данных на частоте порядка 7 Гц. Этого достаточно, чтобы снизить неопределенность оценки.

Вероятность дисперсии  $\sigma_i^2$  при невязке измерения  $x_i$  и допущении  $E|x_i| = 0$  равна

$$L(\sigma_i | x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right). \quad (18)$$

Дисперсия реализации  $\sigma_i^2$  (19) состоит из дисперсии смещения  $\sigma_{p0}^2$ , фазы  $\sigma_\phi^2$  и амплитуды  $\sigma_A^2$ :

$$\sigma_i^2 = A^2 \cdot \sin(\phi_i)^2 \cdot \sigma_\phi^2 + \sigma_{p0}^2 + \cos(\phi_i)^2 \cdot \sigma_A^2. \quad (19)$$

Суммарное правдоподобие по всем  $N$  реализациям равно

$$L(\sigma | x) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right). \quad (20)$$

Логарифмическое правдоподобие равно

$$\ln L(\sigma | x) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{i=1}^N \left(-\ln \sigma_i - \frac{x_i^2}{2\sigma_i^2}\right). \quad (21)$$

Аналитического решения для максимума правдоподобия не существует, так как составные дисперсии  $\sigma_i^2$  приводят к зависимости от фазового сдвига реализаций, см. уравнение (19). Следовательно, нужно использовать итерационную методику типа градиентного подъема.

Оценка  $\hat{\theta} = [\hat{\sigma}_p, \hat{\sigma}_\phi, \hat{\sigma}_A]^T$  может быть получена методом градиентного подъема по рекуррентному уравнению

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \beta J, \quad (22)$$

где  $J = [\partial \ln L / \partial \hat{\theta}]$  – вектор с производными функции логарифмического правдоподобия по трем параметрам, описываемым уравнениями (23)–(25):

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{p0}} = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\sigma_{p0}}{\sigma_i^2} + x_i^2 \frac{\sigma_{p0}}{\sigma_i^4}\right), \quad (23)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_\phi} = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{A^2 \sin(\phi_i)^2 \sigma_\phi}{\sigma_i^2} + x_i^2 \frac{A^2 \sin(\phi_i)^2 \sigma_\phi}{\sigma_i^4}\right), \quad (24)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_A} = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\cos(\phi_i)^2 \sigma_A}{\sigma_i^2} + x_i^2 \frac{\cos(\phi_i)^2 \sigma_A}{\sigma_i^4}\right). \quad (25)$$

После схождения, когда разница между двумя последующими оценками  $\theta_k - \theta_{k-1}$  становится достаточно маленькой, или после определенного количества шагов можно остановить работу рекуррентного контура. Ширину шага  $\beta$  можно настроить в зависимости от количества реализаций, поскольку они влияют на величину членов суммы и должны быть скомпенсированы. Другой вариант – использовать трансформацию в алгоритм Ньютона–Рафсона, где  $\beta$  определяется по методу обратного Гессiana логарифмического правдоподобия [20]. В этом случае, однако, требуется дополнительный коэффициент для адаптации размера реализации.

Поскольку в данном алгоритме требуется определенное количество реализаций, чтобы обеспечить результаты с достаточной достоверностью оценивания, дисперсии шума следует оценивать по группам. Часто бывает достаточно группы из 200 реализаций. При использовании скорости передачи данных АИ 7 Гц, как указано ранее, период обновления данных о шуме составит около 30 с. Если нет ограничения на время вычисления, группу реализаций можно определить в виде скользящего окна и для каждого измерения АИ рассчитать оценку по методу максимального правдоподобия, максимизируя скорость обновления данных. Исходная оценка  $\hat{\theta}$  в начале каждого онлайн-оценивания определяется по соответствующей априорной оценке.

Таким образом, недостоверность наблюдения АИ  $\sigma_p$  можно представить оценками

$$\sigma_p^2 = A^2 \cdot \sin(\phi)^2 \cdot \hat{\sigma}_\phi^2 + \hat{\sigma}_{p0}^2 + \cos(\phi)^2 \cdot \hat{\sigma}_A^2 \quad (26)$$

и внести в матрицу неопределенности наблюдения  $R$ .

Для проверки работы алгоритма мы смоделировали фрагмент интерференционного сигнала, типичный для макета рассматриваемого интегрированного датчика (рис. 4). Сигнал по всем трем параметрам зашумлен белым шумом процессом.

На рис. 5 показано, что все три моделируемых параметра могут быть реконструированы алгоритмом. Чтобы упростить расчеты, количество итерационных шагов можно уменьшить или остановить работу итерационного контура, когда разница  $|\theta_{k-1} - \theta_k|$  станет ниже определенного порога.

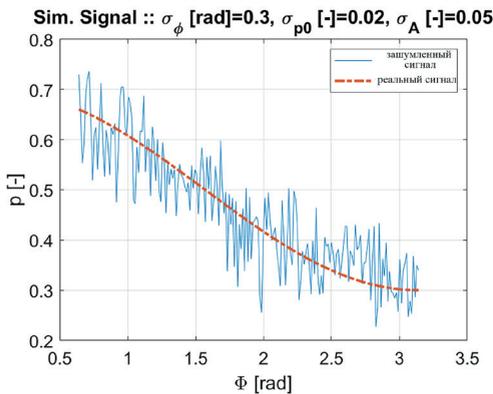


Рис. 4. Пример моделирования. Красной линией обозначен опорный сигнал, представляющий нисходящую часть косинусоидального сигнала, синей – зашумленный сигнал. В общей сложности было сгенерировано 200 реализаций. Параметры сигналов приведены в надписи на рисунке

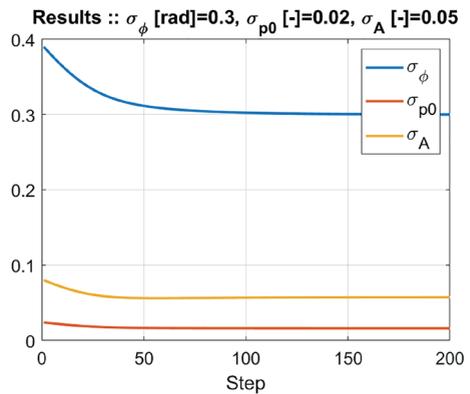


Рис. 5. Оценки компонентов дисперсий, полученные методом градиентного подъема. Схождение среднеквадратического отклонения (СКО) происходит через 50 шагов, и их итоговые значения совпадают с моделируемыми компонентами

Несмотря на то что данные ИИМ используются в качестве контрольного входного сигнала для определения управляемого лазером фазового сдвига  $\phi_0$ , параметры шума, оцениваемые в этом разделе, описывают неопределенности только в реальном выходном сигнале АИ и не зависят от шума ИИМ. Усиление вибрации, однако, приведет к более широкому разбросу реализаций, что обеспечит более точную оценку отдельных компонентов дисперсий.

Первые эксперименты с нестабилизированным АИ показали, что СКО фазы в состоянии покоя равно  $\sigma_\phi = 230$  мрад (см. раздел 5.1), а неопределенность смещения

может быть задана на уровне  $\sigma_{p_0} = 0,025$ . Поскольку лазерную фазу регулируют таким образом, что  $\phi_0 = \pi/2$ , косинус в уравнении (26), на который умножается неопределенность амплитуды, приблизительно равен нулю. В дальнейших исследованиях можно уверенно задавать неопределенность наблюдения АИ на уровне  $\sigma_p = 0,032$ .

#### 4. Анализ работы системы

Задача данного раздела – описать потенциальное улучшение характеристик интегрированной системы ИИМ/АИ, где АИ используется для уточнения инерциальных измерений ускорения или скорости вращения путем коррекции смещения нуля. В качестве параметра, определяющего качество работы, используется дисперсия элементов вектора состояния системы по достижении установившегося состояния фильтра. Это, конечно, связано с вопросом устойчивости системы, которая необходима для достижения установившегося состояния.

Уравнения выводятся сначала для одного общего измерения, а затем на основе полученной формулы обсуждаются две разные реализации АИ в качестве акселерометра и гироскопа.

В общем виде система в установившемся состоянии описывается следующими уравнениями:

$$x_k = \tilde{\Phi}_{k-1} x_{k-1} + K_\infty z_k, \quad (27)$$

где  $x_k$  – состояние в текущий момент времени,  $\tilde{\Phi}_{k-1}$  – переходная матрица установившейся системы,  $K_\infty z_k$  – взвешенное наблюдение фильтра. Установившаяся переходная матрица определяется как

$$\tilde{\Phi} = (I - K_\infty H) \Phi. \quad (28)$$

Установившийся коэффициент усиления ФК равен

$$K_\infty = P_\infty H^T R^{-1} \quad (29)$$

с матрицей шума измерений  $R$ .

Матрицу  $P_\infty$  нужно определить. Переформулирова уравнение коррекции ОФК (30) [21], можно построить выражение так, чтобы включить прогноз матрицы на один шаг и уравнение коэффициента усиления ОФК. Если  $Q$  – матрица ковариации шума процесса, ковариация состояния равна

$$P_k = \Phi P_{k-1} \Phi^T + Q - \Phi P_{k-1} H^T (H P_{k-1} H^T + R)^{-1} H P_{k-1} \Phi^T. \quad (30)$$

Теперь требуется, чтобы  $P_k = P_{k-1} = P_\infty$ , что аналогично установившемуся состоянию неизменной матрицы ковариации состояния.

Таким образом, мы получаем неявное выражение для  $P_\infty$  с квадратичным членом в середине, что представляет собой дискретное алгебраическое уравнение Риккати:

$$P_\infty = \Phi P_\infty \Phi^T + Q - \Phi P_\infty H^T (H P_\infty H^T + R)^{-1} H P_\infty \Phi^T. \quad (31)$$

Чтобы перейти к установившемуся состоянию  $P_\infty$ , система должна быть наблюдаемой и контролируемой, а матрицы  $Q$  и  $R$  – больше нуля. В результате матрица имеет (если имеет) уникальное решение, независимое от  $P_0$ , см. [20].

Аналитическое решение дифференциального уравнения Риккати для одного состояния дает следующий результат:

$$0 = P_\infty^2 + QP_\infty - \frac{QR}{H^2}, \tag{32}$$

а также имеет два решения:

$$P_{\infty,1,2} = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{QR}{H^2}}. \tag{33}$$

Уравнение (33) обеспечивает возможность аналитического описания ковариации для всех установившихся состояний. Поскольку отрицательных ковариаций не существует, выражение под знаком квадратного корня добавляется к первому члену и второе решение не требуется. При включении измерительных уравнений смещения нуля выражения имеют вид:

$$P_{\infty,ba} = -\frac{Q_a}{2} + \sqrt{\frac{Q_a^2}{4} + \frac{Q_a R_a}{(\frac{1}{4} AkT^2)^2}}, \tag{34}$$

$$P_{\infty,bg} = -\frac{Q_g}{2} + \sqrt{\frac{Q_g^2}{4} + \frac{Q_g R_g}{(Ak\bar{v}T^2)^2}}. \tag{35}$$

Следовательно, помимо неопределенностей двух датчиков в матрицах  $Q$  и  $R$ , точность оценок смещения нуля зависит от настроек АИ в связи с параметрами  $k$ ,  $\bar{v}$  и  $T$ . Для режима гироскопа выбирается дифференциальная схема с двумя датчиками. Таким образом, чувствительность увеличивается в два раза по сравнению с элементами уравнения (16).

Вопрос наблюдаемости также решается косвенно, так как ненаблюдаемое состояние не будет иметь адекватной модели измерений  $H$  и дисперсия окажется бесконечной. Что касается шума процесса в  $Q$ , то дисперсия ускорения от скорости по данным ИИМ используется для получения результата.

Таблица 1

**Дисперсия установившегося состояния для разных сценариев:**  
**А – космический аппарат (КА) с электростатическим акселерометром,**  
**В – компенсационные акселерометры современного высокоточного ИИМ,**  
**С – типичный высокоточный КЛГ.**  
**Дисперсия измерения R наблюдения АИ не меняется, но оказывает разное воздействие в зависимости от интервалов измерений и чувствительности наблюдения**

Сценарий (время)	$Q$	$R$	$P_\infty$
А (10 с)	$1 \cdot 10^{-20}(\text{м/с}^2)^2$	$1,024 \cdot 10^{-3}$	$4,82 \cdot 10^{-20}(\text{м/с}^2)^2$
В (0,04 с)	$2,5 \cdot 10^{-9}(\text{м/с}^2)^2$	$1,024 \cdot 10^{-3}$	$8,25 \cdot 10^{-10}(\text{м/с}^2)^2$
С (0,04 с)	$4 \cdot 10^{-16}(\text{рад/с})^2$	$1,024 \cdot 10^{-3}$	$5,9 \cdot 10^{-14}(\text{рад/с})^2$

Данное небольшое исследование может быть использовано для оценивания потенциального улучшения точности АИ при рассматриваемом сценарии. В табл. 1 представлены различные сценарии комбинирования традиционного датчика с АИ. В сценарии А используется схема с электростатическим акселерометром, установленная на КА. Дисперсия сигнала сравнительно мала, но АИ имеет большой интервал измерения – 10 с. Поскольку в чувствительности  $H$  это время возводится в квадрат, дисперсия установившегося состояния имеет прежний порядок величины. В эксперименте, рассмотренном в разделе 5.2, показано, что интегрированный сигнал сохраняет данный уровень стабильности в течение долгого времени.

В сценарии В шум процесса соответствует типичному компенсационному акселерометру современного высокоточного ИИМ. Интервал измерений АИ значительно сокращается из-за ограниченного размера датчика – с этим требованием может столкнуться разработчик датчика на основе АИ для наземной навигации. Тем не менее дисперсия установившегося состояния для интегрированного решения все же улучшается в три раза по сравнению с дисперсией ИИМ.

Дисперсия установившегося состояния гироскопа (сценарий С) немного хуже, чем у КЛГ. Более точные модели АИ имеют более высокие показатели (см., например, [22, 23, 24, 19]).

## 5. Экспериментальные результаты

### 5.1. Идентификация шума

В описанном эксперименте шум реального измерения макета АИ [10] определяется с помощью алгоритма идентификации шума, описанного в разделе 3.2. Вибрации ретроотражающего зеркала, которое задает инерциальную опорную СК, измеряются оптомеханическим датчиком ускорения.

На рис. 6 точки данных обозначены синим цветом. Выходные сигналы АИ откладываются по оси  $y$ , входное ускорение – по оси  $x$ . Интерференционная картина восстановлена и параметризована с минимизацией среднеквадратических отклонений с помощью ОФК (красная линия).

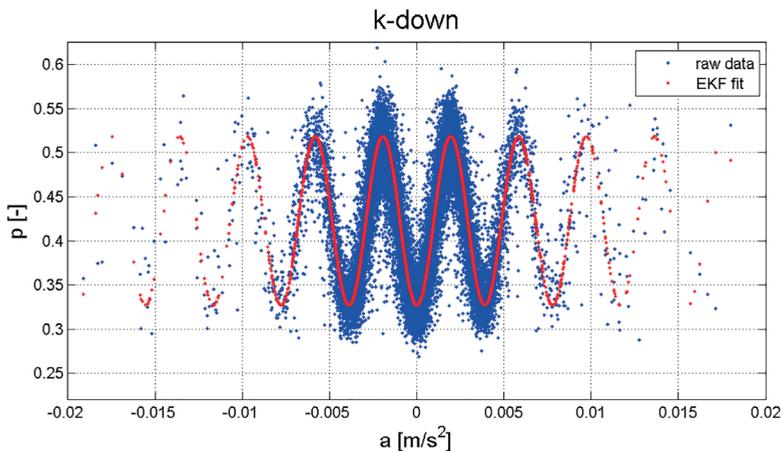


Рис. 6. Аппроксимация ОФК (красная линия) интерференционной картины, реконструированная по точкам данных (обозначены синим цветом)

На рис. 7 показано изменение во времени оцениваемых параметров интерференции. Видно, что они сохраняют относительную стабильность в течение долгого времени.

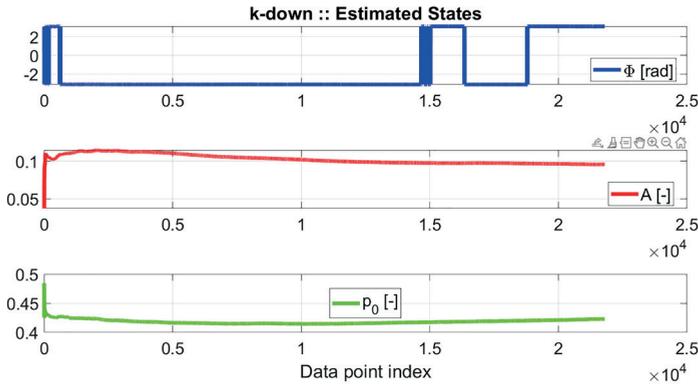


Рис. 7. Аппроксимация ОФК состояний интерференционной картины. По оси абсцисс отложены индексы реализаций. Оценка фазы близка к  $\pm\pi$  и периодически «прыгает» в графическом представлении

Оценки компонентов дисперсии представлены на рис. 8. Оценка  $\sigma_{p_0}$  относительно постоянна в течение времени эксперимента и составляет приблизительно 0,025. Оценка СКО фазы имеет в середине отрезок с более низким шумом около  $10^4$ . Это соответствует периодам с более низкой вибрацией (рис. 9).

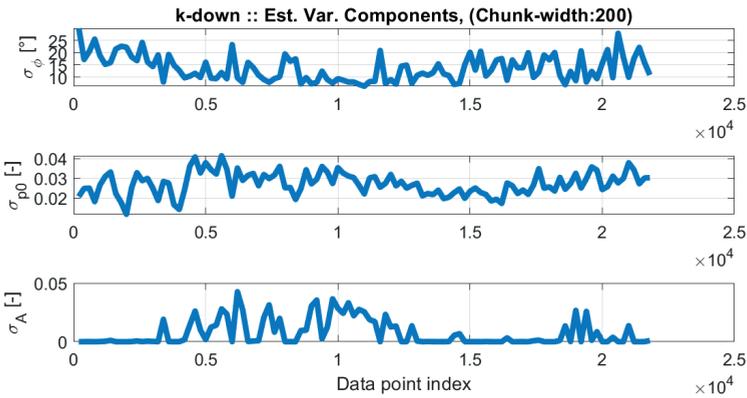


Рис. 8. Идентифицированные компоненты дисперсий для группы из 200 реализаций

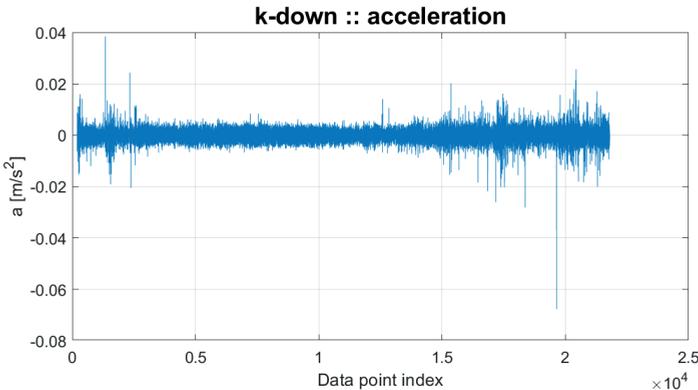


Рис. 9. Вибрации, измеренные оптомеханическим акселерометром

### 5.2. Орбитальное движение спутника

В данном примере представлен простой сценарий без внешних сил. Нас интересует только направление вдоль траектории движения, поскольку считается, что датчик помещается на гиросtabilизированную платформу. Таким образом, наблюдаемо только линейное ускорение. Применяется электростатический акселерометр с дисперсией шума  $q_{IMU}^2 = (1e-10)^2 \text{ м}^2 / \text{с}^5 \cdot 10 \text{ с}$  в белом диапазоне и дополнительным фликкер-шумом, моделируемым гауссово-марковским процессом со временем корреляции  $\tau = 10 \text{ с}$  и СКО входного белого шума  $\sigma_{gm} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ м/с}^2$ .

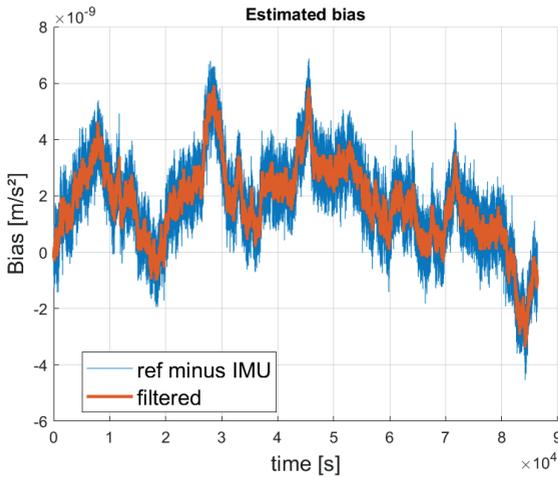


Рис. 10. Оценка систематической погрешности ускорения. Синяя линия – разница между сигналом электростатического акселерометра и опорным сигналом, красная линия – отфильтрованная оценка погрешности ускорения

же и для высоких частот. На низких частотах примешиваются фликкер-шум и случайное блуждание.

Данное моделирование демонстрирует улучшение долговременной стабильности интегрированного фильтра АИ. Несмотря на то что большое время опроса ограничивает потенциальную разницу измерений обоих датчиков, смещение нуля можно отследить, как видно из рис. 10, так как сильных скачков не происходит.

На рис. 11 показана спектральная плотность мощности (СПМ) данных ИИМ, АИ и отфильтрованных данных. Все графики плотностей обрезаются моделируемой траекторией, поэтому анализируется только остаточный процесс. СПМ атомного интерферометра имеет в основном белом шумный характер. В СПМ инерциального модуля доминирует белом шумный процесс, так же

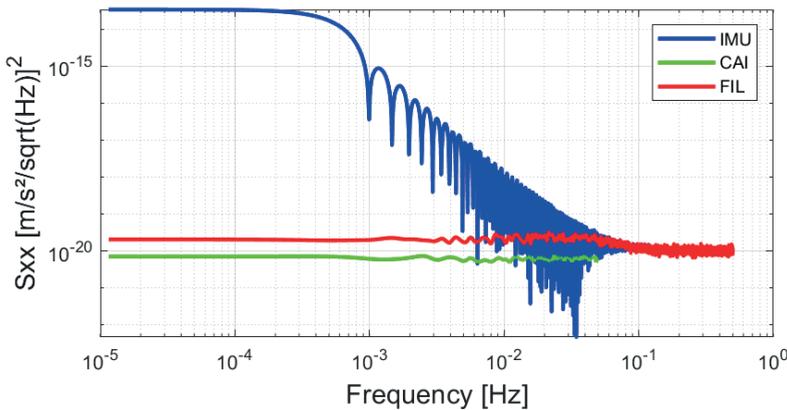


Рис. 11. СПМ сигнала ИИМ (синяя линия), отфильтрованного сигнала (красная линия) и сигнала АИ (зеленая линия). В высокочастотном диапазоне отфильтрованное решение соответствует ускорению от ИИМ, а при появлении сигнала АИ интегрированное решение обладает более высокой долговременной стабильностью

Поскольку для скоростей опроса данных более 1/10 с единственным подходящим датчиком является ИИМ, его решение совпадает с отфильтрованным решением, и измерение АИ имеет более высокую долговременную стабильность. Если это измерение доступно с шагом 10 с, оно обеспечивает стабильность отфильтрованного решения. Отфильтрованный сигнал ускорения состоит из отфильтрованного состояния смещения нуля, извлеченного из сигнала ИИМ. В силу этого его шум всегда будет выше, чем шум решения АИ.

### 5.3. Калибровка ИИМ

Первая серия измерений для имитации интегрированной схемы АИ/ИИМ была выполнена в помещении. Схема построена следующим образом (см. рис. 12): два ИИМ разных классов точности устанавливаются на гексапode (шестистоечной конструкции) Physik Instrumente, модель Н-840. Применялись ИИМ на КЛГ навигационного класса, модель iNATRQT-4003 и МЭМС ИИМ Lord модели 3DM-GQ-45 тактичского класса. В течение 170 с проводился динамический эксперимент, в процессе которого повороты гексапода задавались небольшими изменениями углов наклона (до 0,0654 рад). Система удерживалась в каждой ориентации в течение нескольких секунд, а затем возвращалась к исходному положению. Сценарий поворотов по оси крена и дифферента был идентичен для обоих датчиков, но повороты по оси дифферента производились с задержкой относительно оси крена. Более подробно об эксперименте см. в [25].



Рис. 12. Схема установки для измерений в помещении. ИИМ на КЛГ iMAR и МЭМС ИИМ Lord Microstrain (черного цвета) помещены на гексапode. Оба датчика подсоединены к одному разветвителю ГНСС-антенны (рядом с гексаподом), что обеспечивает временную синхронизацию датчиков

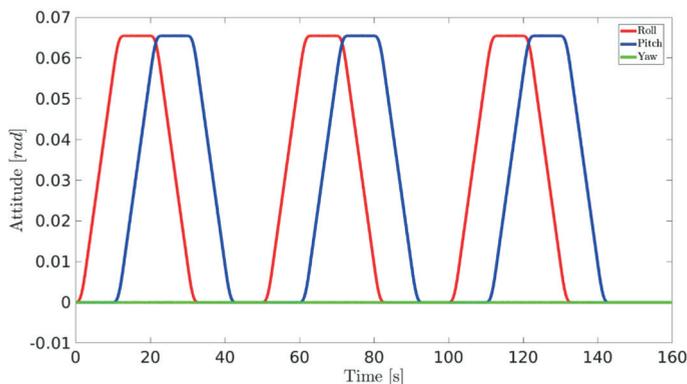


Рис. 13. Опорный сигнал движения гексапода

Как видно из рисунков, смещения нуля акселерометра (рис. 14) и гироскопа (рис. 15) можно отследить достаточно легко. Некоторые систематические эффекты

возникают при изменении углов наклона, что может быть вызвано рассогласованием одного из двух датчиков. Следует также отметить, что МЭМС ИИМ был прикреплен к высококачественному ИИМ двусторонним скотчем, что могло привести к дополнительным смещениям между измерениями вследствие задержки ускорения при не жестком соединении.

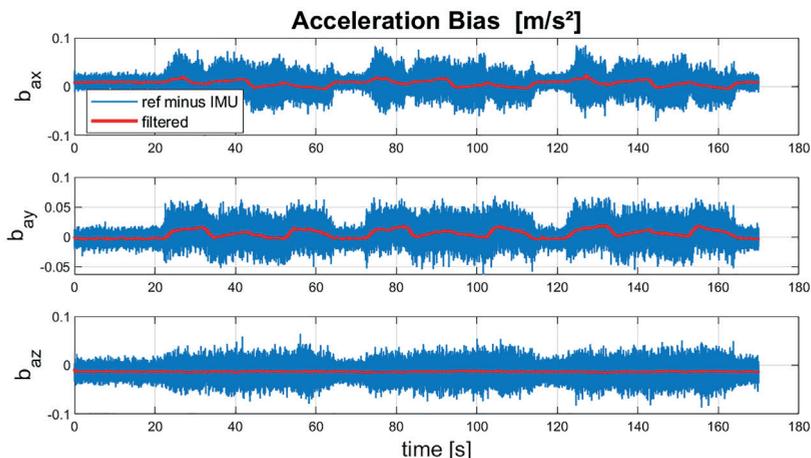


Рис. 14. Оценка смещения нуля акселерометра по трем осям.  
Синий график – разница между двумя измерениями ИИМ, красный график – отфильтрованное смещение нуля

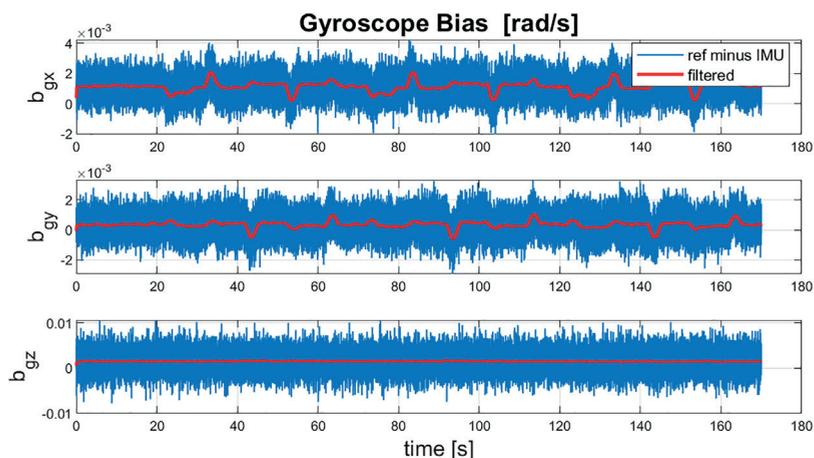


Рис. 15. Оценка смещения нуля гироскопа по трем осям.  
Синий график – разница между двумя измерениями ИИМ, красный график – отфильтрованное смещение нуля

## 6. Заключение

В статье представлена и успешно протестирована адаптируемая схема на основе ОФК для интегрирования данных традиционного ИИМ и наблюдений АИ.

Для идентификации шума наблюдений АИ предлагается итеративная методика на основе метода максимального правдоподобия. Неопределенности, полученные

в течение статичных периодов эксперимента, сравнимы с результатами экспериментов в [11]. Результаты можно применить для задания модели шума в ОФК. Выявлена очевидная взаимосвязь усиления вибраций и фазового шума; в дальнейшем планируется также изучить другие потенциальные источники погрешностей.

На основе идентифицированных неопределенностей было исследовано качество работы системы путем расчета дисперсий установившегося состояния интегрированного решения. Результаты расчета ускорений для наземной навигации демонстрируют потенциальное улучшение точности уже по статистическим данным макета датчика.

Тем не менее главное преимущество интегрирования – это повышенная долговременная стабильность полученного решения. Она достигается главным образом за счет наблюдения систематических погрешностей традиционного ИИМ с помощью АИ. Спектральная плотность мощности данных, полученных на КА, с большой общей продолжительностью и большим интервалом измерений АИ – яркое тому подтверждение.

Точность решения на малых интервалах целиком определяется точностью ИИМ. Она также зависит от реализации варианта использования данных АИ в схеме фильтра. Если оцениванию подлежит только смещение нуля, точность значительно увеличивается. Если требуется получить скорректированный сигнал ускорения, для снижения белого шума разницы можно применить дополнительный низкочастотный фильтр, так как все систематические компоненты погрешности уже удалены.

Фильтр показал хорошие результаты в эксперименте с двумя ИИМ разных классов точности, где ИИМ высокой точности имитировал АИ на основе представленных моделей. Продемонстрирована коррекция систематических погрешностей для акселерометров и гироскопов по всем трем пространственным осям.

Применение АИ в качестве гироскопа, будучи теоретически возможным, требует еще множества исследований, но и в этом случае наблюдения имеют такие же шумовые характеристики, как и в предыдущих примерах. Таким образом, поскольку плотность белого шума АИ ниже, чем у высококачественных КЛГ (по крайней мере на коротких интервалах измерений), долговременная стабильность также является достоверным фактором. Это означает, что систематические эффекты и долговременные дрейфы любого традиционного датчика можно скорректировать с помощью ОФК.

## 7. Приложение

### 7.1. Уравнения системы и фильтра

Ниже приводится описание ОФК с полным кинематическим вектором состояния, который содержит 21 компоненту:

$$X = \left[ x^n \ v^n \ \theta \ b_a \ b_\omega \ \gamma \ l \right], \quad (36)$$

где каждый компонент представляет собой вектор  $3 \times 1$ ,  $x^n$ ,  $v^n$  – трехкомпонентные векторы положения и скорости в навигационной СК,  $\theta$  – углы крена, дифферента и рыскания, определяющие ориентацию корпусной СК относительно навигационной СК. Оставшиеся элементы представляют различные систематические погрешности

системы:  $b_a$  – смещение нуля акселерометра,  $b_\omega$  – смещение нуля гироскопа по трем осям,  $\gamma$  – рассогласование между идеальной СК АИ и СК ИИМ,  $l$  – смещение между этими СК.

Динамическое поведение ИИМ моделируется следующей системой дифференциальных уравнений. Члены, постоянные относительно систематических погрешностей, опущены, так как они неактуальны при построении переходной матрицы:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^n &= v^n, \\
 \dot{v}^n &= C_b^n \cdot \hat{f}^b, \\
 \hat{f}^b &= (I - [\gamma \times]) \cdot (f^b - b_a) - (\hat{\omega}_{ib}^b \times (\hat{\omega}_{ib}^b \times l)), \\
 \hat{\omega}_{ib}^b &= (I - [\gamma \times]) \cdot (\omega_{ib}^b - b_\omega), \\
 \dot{C}_b^n &= C_b^n \cdot [\omega_{nb}^b \times], \\
 \dot{b}_a &= 0, \\
 \dot{b}_\omega &= 0, \\
 \dot{\gamma} &= 0,
 \end{aligned} \tag{37}$$

где  $\dot{x}^n$  и  $\dot{v}^n$  – производные положения и скорости в навигационной СК,  $\hat{f}^b$  – реальное удельное (кажущееся) ускорение, измеренное датчиком ( $f^b$ ). Это измерение корректируется с помощью смещения нуля акселерометра ( $b_a$ ), рассогласования ( $\gamma$ ) и псевдоускорения, вызванного смещением (произведением с двумя знаками умножения, содержащим  $l$ );  $\hat{\omega}_{ib}^b$  – реальная угловая скорость, включающая скорректированную измеренную угловую скорость  $\omega_{ib}^b$ , смещение нуля гироскопа и матрицу рассогласований. Матрица перехода  $C_b^n$  между навигационной и корпусной СК обновляется по данным угловых скоростей  $\omega_{nb}^b$ , рассчитанным по  $\omega_{ib}^b$ , за вычетом скорости вращения Земли и скорости движения.

Полученное дискретное решение данной системы дифференциальных уравнений описывается приведенной ниже переходной матрицей. Следует отметить, что компонент с двумя знаками умножения в уравнении (37) был упрощен путем исключения недиагональных произведений:

$$\Phi = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \Delta t(I - \Gamma) & 0_{3 \times 3} & -\Delta t[f^b \times] & \Delta t[\omega^b \times]^2 \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \Delta t(I - \Gamma) & -\Delta t[\omega^b \times] & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Производная функции системы относительно входных данных  $B = \partial f(x, u) / \partial u$  также требуется для расчета матрицы шума процесса:

$$B = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & -2\omega_{ib}^b \times l \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{12 \times 3} & 0_{12 \times 3} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Матрица шума процесса получается путем свертки дисперсий шума в  $Q_u$  по времени интегрирования в системе  $\Phi$ . В предположении о стационарности системы можно упростить ее следующим образом:

$$Q_k = \Phi_k B_k Q_u B_k^T \Phi_k^T \Delta t. \quad (40)$$

Дополнительные неопределенности для остальных состояний также добавляются на главной диагонали результирующей матрицы  $Q_k$ , чтобы стабилизировать фильтр.

Граничные уравнения фильтра задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ w_k &\sim N(0, Q_k), \\ v_k &\sim N(0, R_k), \\ E[w_k w_j^T] &= Q_k \delta_{k-j}, \\ E[v_k v_j^T] &= R_k \delta_{k-j}, \\ E[v_k w_j^T] &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Начальный вектор состояния ( $x_0$ ) в момент времени  $t = 0$  задается нулевым, а фоновые шумовые процессы входных переменных ( $\omega_k$  с матрицей дисперсий и ковариаций  $Q_k$ ) и измерений ( $v_k$  с матрицей дисперсий и ковариаций  $R_k$ ) полагаются белым шумными.

Этап прогноза соответствует стандартной форме комплементарного фильтра Калмана:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= f(\hat{x}_{k-1}^+, u_k), \\ P_k^- &= \Phi_k \cdot P_{k-1}^+ \cdot \Phi_k^T + Q_k, \end{aligned} \quad (42)$$

где нижний индекс  $k$  обозначает текущий этап итерации, верхний индекс “+” – отфильтрованную переменную, “-” – спрогнозированную переменную, знак ^ над символом – оцениваемую переменную,  $P$  – матрицу дисперсий и ковариаций состояния,  $\delta x$  – погрешность вектора состояния, полагающуюся нулевой после прохождения этапа фильтра.

Затем производится этап фильтрации, аналогичный обычному ОФК:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k)^{-1}, \\ \delta \hat{x}_k^+ &= K_k \cdot (p_k - h(\hat{x}_k^-)), \\ \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + \delta \hat{x}_k^+, \\ L_k &= (I - K_k \cdot H_k), \\ P_k^+ &= L_k \cdot P_k^- \cdot L_k^T + K_k \cdot R_k \cdot K_k^T, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $K_k$  – матрица усиления ОФК,  $H_k$  – матрица наблюдений, введенная выше для различных режимов работы АИ при описании смещения нуля акселерометра и гироскопа. Уравнения наблюдений для смещений и рассогласований см. в [17]. Затем полученная в результате невязка прибавляется к прогнозу состояния системы.

### 7.2. Вывод соотношения для фазового сдвига АИ

Фазовый сдвиг АИ, связанный с положением атомов на средней линии, описывается следующим уравнением:

$$\phi = k \odot \left( q(T) - 2q\left(\frac{T}{2}\right) \right). \quad (44)$$

Дифференциальное уравнение для скорости атомов:

$$\dot{v} = f_{ib}^{*b} - 2\omega_{ib}^{*b} \times \bar{v}. \quad (45)$$

Двойное интегрирование дает возможность определить положение  $q$ :

$$q(t) = \iint_0^t \dot{v} d^2t. \quad (46)$$

Следует отметить, что в отличие от уравнения (4) для обозначения скорости атомов рядом с векторным произведением используется другой символ –  $\bar{v}$ . Это необходимо, поскольку для аналитического интегрирования нужно постоянное значение  $v$ , что, естественно, вступает в противоречие с дифференциальным уравнением. Вновь введенный символ  $\bar{v}$  обозначает скорость атомов в начале цикла измерений. Типичное значение  $\bar{v} = 2,8$  м/с для пары АИ с атомами, движущимися во встречных направлениях.

В результате интегрирования получаем следующие выражения для других элементов положения:

$$q_f\left(\frac{T}{2}\right) = \int \int_0^{\frac{T}{2}} f_{ib}^{*b} d^2t = \frac{1}{8} f_{ib}^{*b} T^2, \quad (47)$$

$$q_f(T) = \int \int_0^T f_{ib}^{*b} d^2t = \frac{1}{2} f_{ib}^{*b} T^2, \quad (48)$$

$$q_\omega\left(\frac{T}{2}\right) = \int \int_0^{\frac{T}{2}} 2\omega_{ib}^{*b} \times \bar{v} d^2t = \frac{1}{4} \omega_{ib}^{*b} \times \bar{v} T^2, \quad (49)$$

$$q_\omega(T) = \int \int_0^T 2\omega_{ib}^{*b} \times \bar{v} d^2t = \omega_{ib}^{*b} \times \bar{v} T^2 \quad (50)$$

и в сумме

$$\phi = k \odot \left( (q_f(T) + q_\omega(T)) - 2\left(q_f\left(\frac{T}{2}\right) + q_\omega\left(\frac{T}{2}\right)\right) \right), \quad (51)$$

$$= k \odot \left( \frac{1}{4} f_{ib}^{*b} - \frac{1}{2} \omega_{ib}^{*b} \times \bar{v} \right) T^2, \quad (52)$$

где  $f_{ib}^{*b}$  и  $\omega_{ib}^{*b}$  могут содержать соответствующие модели погрешностей ИИМ.

В заключение следует отметить, что данная линеаризованная модель фазового сдвига в контексте ОФК используется только для расчета чувствительности измерений в матрице  $H$  и содержит некоторые описанные выше упрощения. Для улучшения сходимости фильтра можно расширить модель фазового сдвига на основе реальной траектории и динамических параметров, характерных для сценария применения датчика, т.е. включить в модель члены более высокого порядка, вызванные изменением ускорения и скоростей вращения в течение цикла измерений.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального министерства по экономике и энергетике Германии, проект 50RK1957. Авторы выражают благодарность авторскому коллективу [10] за предоставление данных интерферометра для экспериментального исследования в разделе 5.1, а также EXC-2123 QuantumFrontiers-390837967 – за предоставление платформы для обмена данными. Н. Веддиг благодарит Институт спутниковой геодезии и инерциальных измерений Немецкого аэрокосмического центра за финансовую помощь.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Titterton, D. and Weston, J.**, *Strapdown Inertial Navigation Technology*, Institution of Engineering and Technology, 2004.
2. **Noureddin, A., Karamat, T.B., and Georgy, J.**, *Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-Based Positioning and Their Integration*, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
3. **Bidel, Y., Zahzam, N., Blanchard, C., Bonnin, A., Cadoret, M., Bresson, A., Rouxel, D., and Lequentrec-Lalancette, M.F.**, Absolute marine gravimetry with matter-wave interferometry, *Nature Communications*, Feb 2018, vol. 9, no. 1.
4. **Bidel, Y., Zahzam, N., Bresson, A., Blanchard, C., Cadoret, M., Olesen, A.V., and Forsberg, R.**, Absolute airborne gravimetry with a cold atom sensor, Jan 2020, *Journal of Geodesy*, vol. 94, no. 2.
5. **Geiger, R., Ménot, V., Stern, G., Zahzam, N., Cheinet, P., Battelier, B., Villing, A., Moron, F., Lours, M., Bidel, Y., Bresson, A., Landragin, A., and Bouyer, P.**, Detecting inertial effects with airborne matter-wave interferometry, *Nature Communications*, Sep 2011, vol. 2, no. 1.
6. **Hu, Z.-K., Sun, B.-L., Duan, X.-C., Zhou, M.-K., Chen, L.-L., Zhan, S., Zhang, Q.-Z., and Luo, J.**, Demonstration of an ultrahigh-sensitivity atom-interferometry absolute gravimeter, *Physical Review A*, Oct 2013, vol. 88, no. 4, p. 043610.
7. **Savoie, D., Altorio, M., Fang, B., Sidorenkov, L.A., Geiger, R., and Landragin, A.**, Interleaved atom interferometry for high-sensitivity inertial measurements, *Science Advances*, Dec 2018, vol. 4, no. 12.
8. **Freier, C., Hauth, M., Schkolnik, V., Leykauf, B., Schilling, M., Wziontek, H., Scherneck, H.-G., Müller, J., and Peters, A.**, Mobile quantum gravity sensor with unprecedented stability, *Journal of Physics: Conference Series*, Jun 2016, vol. 723, p. 012050.
9. **Rakholia, A.V., McGuinness, H.J., and Biedermann, G.W.**, Dual-axis high-data-rate atom interferometer via cold ensemble exchange, *Physical Review Applied*, Nov 2014, vol. 2, no. 5, p. 054012.
10. **Richardson, L.L., Rajagopalan, A., Albers, H., Meiners, C., Nath, D., Schubert, C., Tell, D., Wodey, É., Abend, S., Gersemann, M., Ertmer, W., Rasel, E.M., Schlippert, D., Mehmet, M., Kumanchik, L., Colmenero, L., Spannagel, R., Braxmaier, C., and Guzmán, F.**, Optomechanical resonator-enhanced atom interferometry, *Communications Physics*, Nov 2020, vol. 3, no. 1.
11. **Cheiney, P., Fouché, L., Templier, S., Napolitano, F., Battelier, B., Bouyer, P., and Barrett, B.**, Navigation-compatible hybrid quantum accelerometer using a Kalman filter, *Physical Review Applied*, Sep 2018, vol. 10, p. 034030, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.10.034030>.
12. **Christophe, B., Boulanger, D., Foulon, B., Huynh, P.A., Lebat, V., Liorzou, F., and Perrot, E.**, A new generation of ultra-sensitive electrostatic accelerometers for GRACE Follow-on and towards the next generation gravity missions, *Acta Astronautica*, 2015, vol. 117, pp. 1–7, <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.06.021>.
13. **Kasevich, M., Weiss, D.S., Riis, E., Moler, K., Kasapi, S., and Chu, S.**, Atomic velocity selection using stimulated Raman transitions, *Physical Review Letters*, May 1991, vol. 66, pp. 2297–2300, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.2297>.

14. **Voronov, A.S. and Rivkin, B.S.**, Gyroscope on de Broglie waves: Intricate things in simple words, *Gyroscopy and Navigation*, 2021, vol. 12, no. 3, pp. 195–203.
15. **Storey, P. and Cohen-Tannoudji, C.**, The Feynman path integral approach to atomic interferometry: A tutorial, *Journal De Physique II*, 1994, vol. 4, pp. 1999–2027.
16. **Antoine, C. and Borde, C.J.**, Quantum theory of atomic clocks and gravito-inertial sensors: An update, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, Apr 2003, vol. 5, no. 2, pp. S199–S207, <https://doi.org/10.1088/1464-4266/5/2/380>.
17. **Tennstedt, B. and Schön, S.**, Integration of atom interferometers and inertial measurement units to improve navigation performance, in *28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS)*, 31.05.–02.06.2021, St. Petersburg, Russia, Piscataway, NJ: IEEE, 2021, <https://doi.org/10.23919/ICINS43216.2021.9470809>.
18. **Gauguet, A., Canuel, B., Lévêque, T., Chaibi, W., and Landragin, A.**, Characterization and limits of a cold-atom Sagnac interferometer, *Physical Review A*, Dec 2009, vol. 80, p. 063604, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.063604>.
19. **Gersemann, M., Gebbe, M., Abend, S., Schubert, C., and Rasel, E.M.**, Differential interferometry using a Bose-Einstein condensate, *The European Physical Journal D*, Oct 2020, vol. 74, no. 10.
20. **Schweppe, F.C.**, *Uncertain Dynamic Systems*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1973.
21. **Dasgupta, S., Brown, D.R., and Wang, R.**, Steady state Kalman filter behavior for unstabilizable systems, in *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, Dec 2014.
22. **Durfee, D.S., Shaham, Y.K., and Kasevich, M.A.**, *Long-term stability of an area-reversible atom interferometer Sagnac gyroscope*, October 2005, <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0510215v1>.
23. **Tackmann, G., Berg, P., Abend, S., Schubert, C., Ertmer, W., and Rasel, E.M.**, Large area Sagnac atom interferometer with robust phase read out, *Comptes Rendus Physique*, 2014, vol. 15, no. 10, pp. 884–897, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070514001388>.
24. **Dutta, I., Savoie, D., Fang, B., Venon, B., Alzar, C.G., Geiger, R., and Landragin, A.**, Continuous cold atom inertial sensor with 1 nrad/sec rotation stability, *Physical Review Letters*, May 2016, vol. 116, no. 18.
25. **Weddig, N., Tennstedt, B., and Schön, S.**, Performance evaluation of a three-dimensional cold atom interferometer based inertial navigation system, in *2021 DGON Inertial Sensors and Systems (ISS)*, IEEE, 2021, accepted for publication.

---

**Tennstedt, B.** (Institut für Erdmessung, Leibniz Universität Hannover, Hanover, Germany), **Weddig, N.** (Institut für Erdmessung, DLR Institute for Satellite Geodesy and Inertial Sensing (DLR-SI), Leibniz Universität Hannover), **Schoen, S.** (Institut für Erdmessung, Leibniz Universität Hannover)  
Improved Inertial Navigation With Cold Atom Interferometry, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2021, vol. 29, no. 4 (115), pp. 22–45.

**Abstract.** This article discusses chances and challenges of using cold atom interferometers in inertial navigation. The error characteristics of the novel sensor are presented, as well as one option for an online estimation of the different readout errors. An extended Kalman filter framework is derived and analysed which uses the readout of the atom interferometer as observation in order to correct several systematic errors of a conventional IMU, allowing for an improved strapdown calculation in an arbitrary target system. The performance gain is discussed analytically based on the steady state variances of the filter, as well as on the example of a simulated scenario for Earth orbit satellites. The correction of the conventional IMU errors is further demonstrated in an experiment under laboratory conditions with a higher class sensor emulating an atom interferometer. While the application of the novel technology as a gyroscope is still limited, as pointed out in the paper, the presented framework yields options for a full six degree of freedom operation of the atom interferometer.

**Key words:** inertial navigation, cold atom interferometry, hybridization, extended Kalman filter.

Материал поступил 14.10.2021