

**ДВИЖЕНИЕ РОТОРА
БЕСКАРДАННОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА
В УСЛОВИЯХ ОРБИТАЛЬНОГО ПОЛЕТА
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА**

В работе представлены уравнения движения роторов, оси вращения которых расположены при запуске в плоскости орбиты и ортогонально ей. Приведены аналитические решения уравнений движения с использованием детерминированной модели дрейфа бескарданного электростатического гироскопа, исследовано влияние различных физических факторов на параметры движения. Показано соответствие полученных решений экспериментальным данным летных испытаний.

Введение

Электростатические гироскопы (ЭСГ) со сплошным ротором в качестве чувствительных элементов входят в состав разработанной в ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» бескарданной инерциальной системы (БИС) [1], предназначенной для определения ориентации орбитальных космических аппаратов (КА) дистанционного зондирования Земли и формирования информации для управления угловым движением КА. Точность работы БИС определяет качество решения целевой задачи таких аппаратов.

Система БИС ЭСГ включает в себя три гироскопа. Векторы кинетических моментов двух из них при запуске лежат в плоскости орбиты (так называемая «экваториальная» ориентация), а вектор третьего гироскопа направлен перпендикулярно плоскости орбиты («полярная» ориентация). Коррекция показаний системы и калибровка параметров модели дрейфа гироскопов осуществляется по информации от астродатчиков.

Реализация потенциальной точности и надежности системы требует решения целого ряда задач, в том числе:

- оценки влияния параметров движения КА и орбиты на характеристики гироскопа;
- определения новых возможностей для идентификации КМУ в условиях полета;
- разработки алгоритма прогнозирования сходимости векторов кинетических моментов гироскопов.

Егоров Алексей Валерьевич. Инженер 2 категории ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (С.-Петербург).

Ландау Борис Ефимович. Доктор технических наук, главный конструктор по направлению ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». Действительный член Академии навигации и управления движением.

Левин Сергей Львович. Кандидат технических наук, начальник отдела ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор».

Романенко Светлана Георгиевна. Кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор».

Для обеспечения возможности решения этих задач были проведены экспериментальные и теоретические исследования, результаты которых приведены ниже. При этом была предпринята попытка получения в основном аналитических выражений, которые позволят нагляднее оценить вклад физических параметров в характер движения роторов.

Некоторые результаты летных испытаний

Первоначально большинство полученных при испытаниях в космосе реализаций были короткими (обычно не превышали трех суток) [2, 3]. Это не позволяло с достаточной полнотой и достоверностью оценить характер движения роторов гироскопов.

Первая длительная реализация (более 1300 ч) в одном запуске была получена в 2006 г. во время летных испытаний в составе КА «Ресурс-ДК». В ней проявились особенности движения ротора гироскопа, малозаметные на коротком временном промежутке. Длительные испытания подтвердили существенные отличия в поведении гироскопов при наземных стендовых испытаниях и в условиях космической эксплуатации.

На рис. 1 приведены значения направляющих косинусов ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) вектора кинетического момента полярного гироскопа в корпусных осях, полученные в условиях эксплуатации в космосе в течение 550 ч. Здесь и далее рисунок для γ_3 не приводится, так как имеет схожий с γ_1 вид.

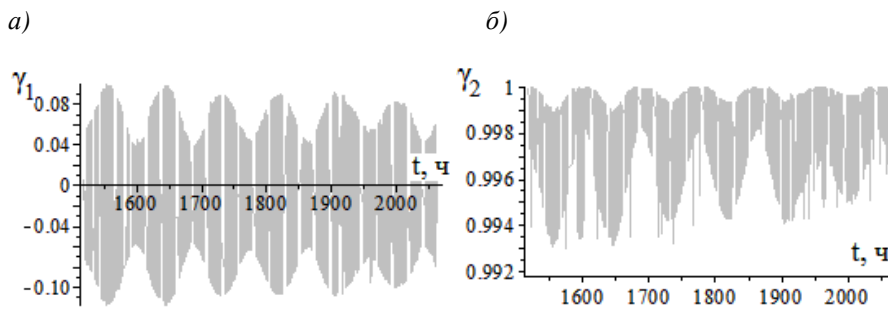


Рис. 1. Направляющие косинусы полярного БЭСГ

Из рисунка видно, что компонента γ_2 близка к единице на протяжении всего пуска, две другие компоненты близки к нулю, т.е. вектор кинетического момента полярного гироскопа *следит* за плоскостью орбиты. Имеют место колебания с высокой частотой, близкой к частоте орбитального обращения (в данном случае к 90 мин), а также низкочастотные биения с периодом около 85 ч. Амплитуда биений уменьшается со временем. Единичные выбросы во второй и третьей компонентах связаны с отклонениями по крену КА во время его целевой работы.

На рис. 2 приведены годографы движения вектора кинетического момента полярного гироскопа в плоскости орбиты, полученные при работе на двух КА с разным характером движения (с рысканьем – КА-1, без рысканья – КА-2).

Траектория движения вектора кинетического момента на КА-1 (рис. 2, а) – вытянутый по координате γ_1 эллипс, направление осей симметрии которого непрерывно меняется. Годограф на рис. 2, б (КА-2) представляет собой «скручивающуюся–раскручивающуюся» спираль.

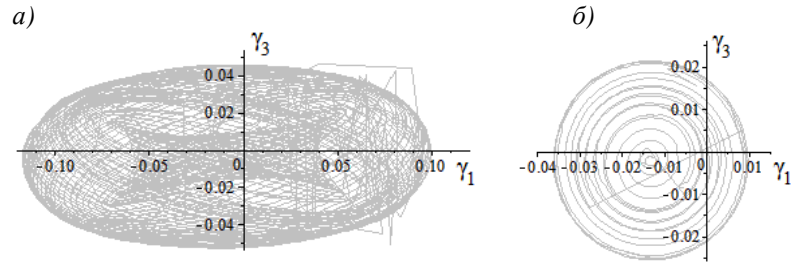


Рис. 2. Годограф полярного гироскопа для КА-1(а) и КА-2(б)

На рис. 3 приведены значения направляющих косинусов γ_1 и γ_2 вектора кинетического момента экваториального гироскопа, полученные в условиях эксплуатации в космосе в течение 70 и 850 ч соответственно.

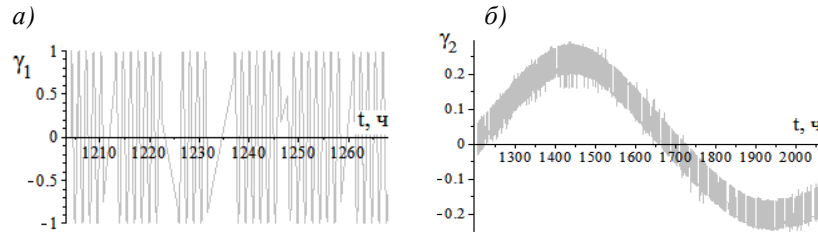


Рис. 3. Направляющие косинусы экваториального БЭСГ

Теоретический анализ

1. Введем следующие основные системы координат:

$O\xi_a\eta_a\zeta_a$ – инерциальная система координат, ось η_a направлена по оси Мира;

$Ox_0y_0z_0$ – орбитальная система координат, ось x_0 – по направлению движения КА, y_0 – по нормали, z_0 – ортогональна плоскости орбиты;

$Ox_Ky_Kz_K$ – корпусная система координат.

Закон движения КА:

– КА вращается по круговой орбите, наклоненной к плоскости земного экватора на угол i , с угловой скоростью $\omega_0=240^\circ/\text{ч}$;

– КА-1 совершает колебания по углу рысканья с угловой скоростью ω_0 и амплитудой $\psi=3,5^\circ$ (у КА-2 такие колебания отсутствуют);

– орбита дрейфует вокруг оси Мира со скоростью $\omega_{др}=2,5^\circ/\text{ч}$.

Уравнения движения БЭСГ в корпусных осях, использующие модель дрейфа для космических условий [1, 3, 4], имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3 - k_0\gamma_2\gamma_3(\gamma_2^2 - \gamma_3^2) + \mu_{23}\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1(v_{31}\gamma_3^2 - v_{12}\gamma_2^2), \\ \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1 - k_0\gamma_3\gamma_1(\gamma_3^2 - \gamma_1^2) + \mu_{31}\gamma_3\gamma_1 + \gamma_2(v_{12}\gamma_1^2 - v_{23}\gamma_3^2), \\ \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2 - k_0\gamma_1\gamma_2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) + \mu_{12}\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3(v_{23}\gamma_2^2 - v_{31}\gamma_1^2). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь k_0 – коэффициент, обусловленный взаимодействием 4-й гармоники формы ротора с полем подвеса; μ_{ij}, ν_{ij} – коэффициенты, характеризующие консервативную и диссипативную части момента от взаимодействия неравностойкого подвеса с радиально несбалансированным ротором; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости движения КА.

Компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ можно определить, представив движение КА в виде последовательных поворотов:

- вокруг оси $O\eta_a$ с угловой скоростью $\omega_{др}$ на угол $\omega_{др} t$ [5];
- вокруг оси $O\xi_1$ (новое положение оси $O\xi_a$ после первого поворота) на угол $90^\circ - i$ (i – угол наклона орбиты); в результате двух поворотов осуществляется переход к орбитальной системе координат;
- вокруг оси z_0 , ортогональной плоскости орбиты с угловой скоростью ω_o на угол $\omega_o t$;
- вокруг нормальной оси за счет колебаний КА по углу рысканья с частотой орбитального обращения и амплитудой ψ .

Нетрудно показать, что с учетом описанных поворотов вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в корпусной системе координат примет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z \sin \omega_0 t \cos(\psi \sin \omega_0 t) - \omega_y \sin(\psi \sin \omega_0 t) \\ \omega_z \sin \omega_0 t \sin(\psi \sin \omega_0 t) - \omega_y \cos(\psi \sin \omega_0 t) \\ (\psi \omega_0 - \omega_z) \cos \omega_0 t \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\omega_y = \omega_0 - \omega_{др} \cos i, \quad \omega_z = \omega_{др} \sin i.$

Анализ движения полярного гироскопа

1. Движение **идеального** полярного гироскопа (при отсутствии уведящих моментов) в корпусных осях с начальной ориентацией вектора кинетического момента в инерциальных осях $H_u = (0 \quad \cos i \quad \sin i)^T$ имеет вид

$$H_k = (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3)^T = \begin{pmatrix} -\sin i \left(\sin \omega_{др} t \cos \omega_0 t + \cos i (1 - \cos \omega_{др} t) \sin \omega_0 t \right) \cos(\psi \sin \omega_0 t) + \\ \quad + (1 - \sin^2 i (1 - \cos \omega_{др} t)) \sin(\psi \sin \omega_0 t) \\ \sin i \left(\sin \omega_{др} t \cos \omega_0 t + \cos i (1 - \cos \omega_{др} t) \sin \omega_0 t \right) \sin(\psi \sin \omega_0 t) + \\ \quad + (1 - \sin^2 i (1 - \cos \omega_{др} t)) \cos(\psi \sin \omega_0 t) \\ \sin i \left(\sin \omega_{др} t \sin \omega_0 t - \cos i (1 - \cos \omega_{др} t) \cos \omega_0 t \right). \end{pmatrix} \quad (3)$$

С учетом малого значения ψ выражение (3) можно упростить

$$H_k = \begin{pmatrix} -\cos i (\sin i - \psi \cos i) \sin \omega_0 t - \sin i \sin \omega_{др} t \cos \omega_0 t + \\ \quad + \sin i (\cos i + \psi \sin i) \cos \omega_{др} t \sin \omega_0 t \\ \psi \sin i \sin \omega_0 t (\sin \omega_{др} t \cos \omega_0 t + \cos i (1 - \cos \omega_{др} t) \sin \omega_0 t) + \\ \quad + (1 - \sin^2 i (1 - \cos \omega_{др} t)) \\ \sin i (\sin \omega_{др} t \sin \omega_0 t - \cos i (1 - \cos \omega_{др} t) \cos \omega_0 t) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Движение идеального гироскопа на больших (несколько месяцев) и малых (несколько суток) интервалах времени при $\psi = 3.5^\circ$, построенное по формулам (3) с использованием математического пакета Maple, приведено на рис. 4

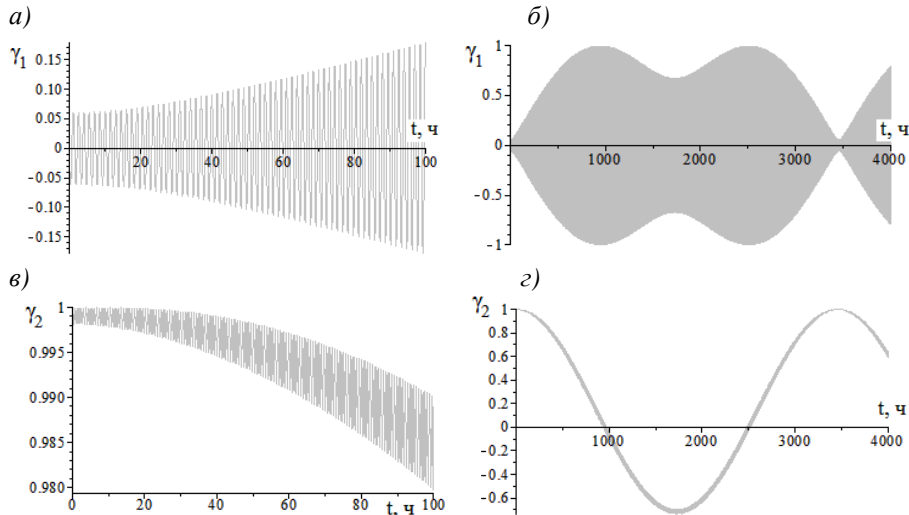


Рис. 4. Направляющие косинусы идеального полярного гироскопа:
а) γ_1 , 100 ч; б) γ_1 , 4000 ч; в) γ_2 , 100 ч; г) γ_2 , 4000 ч

Из выражения (4) и рис. 4 видно, что компонента $\gamma_2(t)$, характеризующая взаимное положение между вектором кинетического момента гироскопа и нормалью к плоскости орбиты, при отсутствии уведящих моментов из-за дрейфа орбиты совершает колебания с частотой $\omega_{др}$ относительно положения равновесия, значение которого зависит от угла наклона орбиты, т. е. «идеальный» полярный гироскоп в отличие от реального не «следит» за плоскостью орбиты, а остается неподвижным в инерциальном пространстве. Движение в плоскости орбиты (компоненты γ_1 и γ_3) – высокочастотное, на которое накладываются биения с частотой $\omega_{др}$.

2. Выясним особенности движения ротора **реального** полярного БЭСГ, т.е. гироскопа, на который действуют уведящие моменты.

На рис. 5 приведены результаты численного решения системы (1) методом Рунге–Кутты в математическом пакете Maple при следующих значениях КМУ: $k_0 = 5^\circ/\text{ч}$, $\mu_{12} = 0.35^\circ/\text{ч}$, $\mu_{23} = -1.2^\circ/\text{ч}$, $\mu_{31} = 0.85^\circ/\text{ч}$; $v_{ij} = 0$ (рис. 5, а, б) и $v_{12} = -0.05^\circ/\text{ч}$, $v_{23} = 0.03^\circ/\text{ч}$, $v_{31} = 0.02^\circ/\text{ч}$ (рис. 5, в, г). Из рисунка видно, что движения диссипативных составляющих достаточно близки, поэтому в даль-

нейшем для простоты и наглядности аналитического решения не будем учитывать коэффициенты ν_{ij} . Сравнение результатов численного решения уравнений (1) (см. рис. 4) с экспериментальными (см. рис. 1, 2) показывает их качественное совпадение: движение вектора кинетического момента полярного гироскопа колебательное с высокой и низкой частотами и происходит относительно некоторого положения равновесия.

Найдем аналитическое решение системы уравнений (1). Следует отметить, что дифференциальные уравнения (1) – нелинейные с периодическими коэффициентами и в общем виде не интегрируются [6]. Но поскольку значение компоненты γ_2 незначительно отличается от единицы, а две другие компоненты остаются близкими к нулю, то первоначальную систему (1) можно упростить, линеаризовав ее в окрестности точки $\gamma^0 = (0, 1, 0)$.

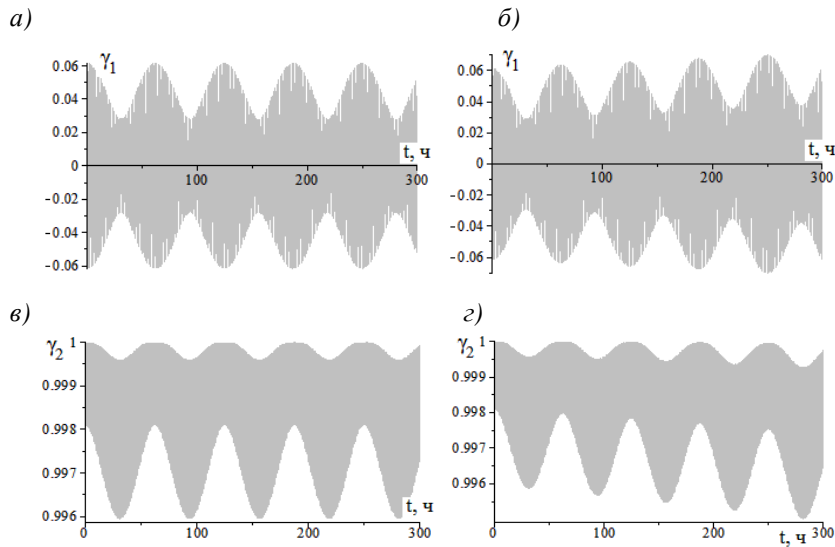


Рис. 5. Численное решение:
а), в) γ_1 и γ_2 без диссипации; б), г) γ_1 и γ_2 с учетом диссипации

Можно сделать также предположение, что, по крайней мере, для некоторого достаточно большого интервала времени T , выполняется условие $\|\gamma_2 - 1\|_T \ll \|\gamma_1\|_T, \|\gamma_2 - 1\|_T \ll \|\gamma_3\|_T$ $\left(\|\phi\|_T = \max_{t \in [0, T]} |\phi(t)| \right)$, и считать далее $\gamma_2(t) \equiv 1$. Использование стандартных приближений $\sin(\psi \sin \omega_0 t) \approx \psi \sin \omega_0 t$, $\cos(\psi \sin \omega_0 t) \approx 1$, справедливых для малых значений амплитуды угла рысканья ($\psi = 3.5^\circ$), также позволяет упростить исходную систему нелинейных уравнений (1) и получить в результате линейную неоднородную систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(t) = (\omega_y - k_0 + \mu_{23})\gamma_3 + (\psi\omega_0 - \omega_z)\cos \omega_0 t, \\ \dot{\gamma}_3(t) = -(\omega_y - k_0 - \mu_{12})\gamma_1 + (\omega_z + \psi\omega_y)\sin \omega_0 t. \end{cases} \quad (5)$$

Решение системы уравнений (5) при нулевых начальных условиях $\gamma_1(0) = \gamma_3(0) = 0$ имеет вид

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = A \sin \omega_0 t + B \sin \omega_\alpha t = -\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\omega_\alpha - \omega_0)t} \sin(\omega_0 t + \varphi(t)), \\ \gamma_3(t) = \frac{2B}{h} \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega_\alpha}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega_\alpha}{2} t\right), \end{cases} \quad (6)$$

где

$$h = \sqrt{\frac{\omega_y - k_0 + \mu_{23}}{\omega_y - k_0 - \mu_{12}}}; \quad \omega_\alpha = h(\omega_y - k_0 - \mu_{12}); \quad \varphi(t) = \arctg \frac{B \sin(\omega_\alpha - \omega_0)t}{A + B \cos(\omega_\alpha - \omega_0)t};$$

$$A = \frac{(\psi\omega_0 - \omega_z)\omega_0 - h(\omega_z + \psi\omega_y)\omega_\alpha}{\omega_0^2 - \omega_\alpha^2}; \quad B = \frac{h(\omega_z + \psi\omega_y)\omega_0 - (\psi\omega_0 - \omega_z)\omega_\alpha}{\omega_0^2 - \omega_\alpha^2}.$$

Выражение для $\gamma_2(t)$ можно найти из второго уравнения системы (1)

$$\gamma_2(t) \approx 1 + (\omega_z - \psi\omega_0) \int_0^t \cos \omega_0 s \gamma_1 ds - (\omega_z + \psi\omega_y) \int_0^t \sin \omega_0 s \gamma_3 ds + \mu_{31} \int_0^t \gamma_1 \gamma_3 ds. \quad (7)$$

Анализ выражения (6) показывает, что компоненты γ_1 и γ_3 содержат в себе, вообще говоря, две частоты: высокую $\frac{\omega_0 + \omega_\alpha}{2} \approx \omega_0$, и низкую $\frac{\omega_0 - \omega_\alpha}{2} \approx \omega_{др} \cos i + k_0 + \mu_{12}$. Кроме того, компоненты γ_1 и γ_3 имеют разные амплитудные значения, т. е. вектор кинетического момента полярного гироскопа движется по эллиптической траектории, направление оси симметрии которой непрерывно меняется с частотой биений. На рис. 6, б приведен вид такого годографа, построенного с использованием формул (6) при $k_0 = 5^\circ/\text{ч}$, $\mu_{ij} = 0$, $\psi = 3.5^\circ$. Характер движения совпадает с экспериментальными данными (см. рис. 2).

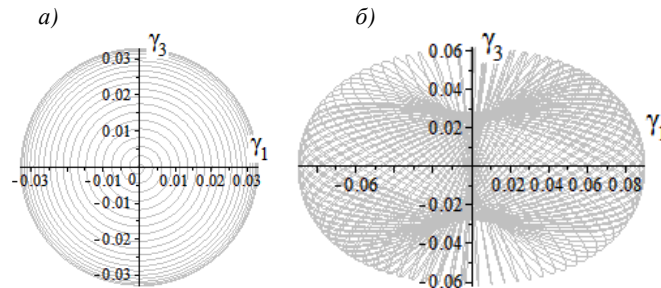


Рис. 6. Годограф полярного гироскопа: а) $\psi = 0$, $\mu_{ij} = 0$; б) $\psi \neq 0$, $\mu_{ij} = 0$

При отсутствии рысканья ($\psi = 0$) $A = -B$, т.е. траектория движения – окружность. Рассмотрим этот случай подробнее, приняв для простоты и наглядности $\mu_{ij} = 0$. При этом $B = \omega_z / 2p$, где $p = (k_0 + \omega_{др} \cos i) / 2$. Выражения (6)–(7) принимают вид:

$$\begin{cases} \gamma_1(t) \approx -2B \sin pt \cos(\omega_0 - p)t, \\ \gamma_2(t) \approx 1 - B^2 + B^2 \cos 2p t, \\ \gamma_3(t) \approx 2B \sin pt \sin(\omega_0 - p)t. \end{cases} \quad (8)$$

Из (8) видно, что компоненты γ_1 и γ_3 имеют одинаковую огибающую, а положение равновесия для γ_2 зависит от k_0 . Присутствие ненулевой постоянной составляющей объясняет то, что при наличии уводящих моментов положение вектора кинетического момента полярного гироскопа остается практически ортогональным плоскости орбиты на протяжении длительного времени. В рассмотренном случае момент от k_0 как бы создает «пружину», которая не дает уходить ротору от дрейфующей орбиты. Это же имело место и в реальных условиях на борту КА (см. рис. 1).

Очевидно, что

$$\begin{cases} \gamma_1^2 + \gamma_3^2 \approx (2B \sin pt)^2, & t \geq 0. \\ \gamma_3/\gamma_1 \approx -tg(\omega_0 - p)t, \end{cases}$$

Перейдя к полярным координатам, получим уравнение годографа

$$\rho = \frac{\omega_z}{p} \left| \sin \left(\frac{p}{\omega_0 - p} \varphi \right) \right|. \quad (9)$$

Выражение (9) описывает «скручивающуюся–раскручивающуюся» спираль (см. рис. 6, а).

Анализ движения экваториального гироскопа

1. Движение **идеального** экваториального БЭСГ (при отсутствии уводящих моментов) в корпусных осях с начальной ориентацией вектора кинетического момента в инерциальных осях $H_u = (1 \ 0 \ 0)^T$ имеет вид:

$$\begin{aligned} H_k &= (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3)^T = \\ &= \begin{pmatrix} \left(\cos \omega_{др}t \cos \omega_0t + \cos i \sin \omega_{др}t \sin \omega_0t \right) \cos(\psi \sin \omega_0t) - \\ \qquad \qquad \qquad - \sin i \sin \omega_{др}t \sin(\psi \sin \omega_0t) \\ \left(\cos \omega_{др}t \cos \omega_0t + \cos i \sin \omega_{др}t \sin \omega_0t \right) \sin(\psi \sin \omega_0t) + \\ \qquad \qquad \qquad + \sin i \sin \omega_{др}t \cos(\psi \sin \omega_0t) \\ - \cos \omega_{др}t \sin \omega_0t + \cos i \sin \omega_{др}t \cos \omega_0t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом малого значения $\psi = 3.5^\circ$ выражение (10) запишется:

$$H_k = (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3)^T = \begin{pmatrix} \cos \omega_{др} t \cos \omega_0 t + (\cos i - \psi \sin i) \sin \omega_{др} t \sin \omega_0 t \\ \psi \cos \omega_{др} t \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t + \psi \cos i \sin \omega_{др} t \sin^2 \omega_0 t + \sin i \sin \omega_{др} t \\ - \cos \omega_{др} t \sin \omega_0 t + \cos i \sin \omega_{др} t \cos \omega_0 t \end{pmatrix} \quad (11)$$

Нетрудно показать, что колебания по углу рысканья с амплитудой ψ не оказывают существенного влияния на характер компонент γ_1, γ_3 .

Высокочастотные колебания с малой амплитудой в компоненте γ_2 , заметные на коротких интервалах (рис. 7, в), обусловлены колебанием КА по углу рысканья с амплитудой ψ . Преобладающее движение от плоскости орбиты – низкочастотное колебательное с частотой $\omega_{др}$ дрейфа орбиты и амплитудой $\sin i$. Основное движение вектора кинетического момента в плоскости орбиты содержит колебания с частотой орбитального обращения, на которые накладываются биения с частотой $\omega_{др}$.

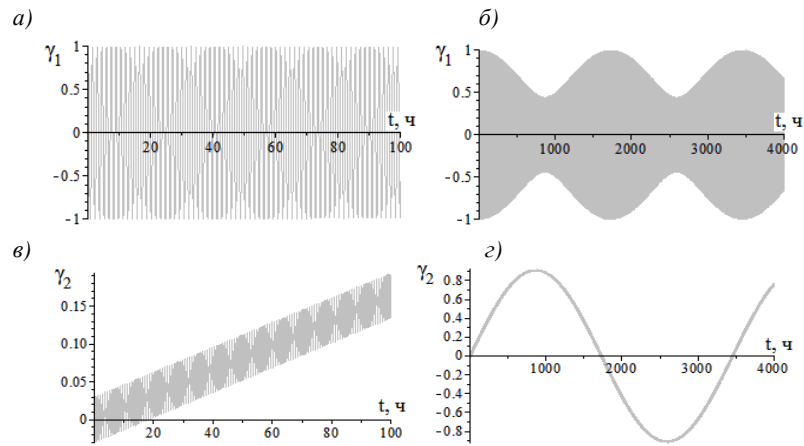


Рис. 7. Направляющие косинусы идеального экваториального БЭСГ:
а) γ_1 , 100 ч; б) γ_1 , 4000 ч; в) γ_2 , 100 ч; з) γ_2 , 4000 ч

2. Выясним особенности движения ротора **реального** экваториального БЭСГ, на который действуют уводящие моменты.

Движение экваториального гироскопа при принятых выше числовых значениях КМУ ($k_0=5^\circ/\text{ч}$, $\mu_{12}=0.35^\circ/\text{ч}$, $\mu_{23}=-1.2^\circ/\text{ч}$, $\mu_{31}=0.85^\circ/\text{ч}$, $\nu_{ij}=0$ и $\psi=0$) представлено на рис. 8, а, б.

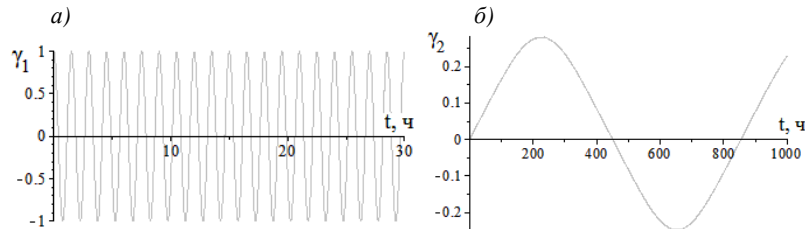


Рис. 8. Экваториальный БЭСГ

Имеет место качественное совпадение характера движения ротора идеального и реального гироскопа (рис. 3, рис. 8). Отличие заключается в количественных оценках: при наличии уводящих моментов компонента γ_2 имеет значительно меньший период, меньшую амплитуду и содержит в себе более высокие частоты (в частности, как было показано в [3], колебания с $1/4$ периода орбитального движения КА связаны с наличием моментов от взаимодействия четвертой гармоники формы ротора с полем подвеса).

Так как амплитуда колебаний компоненты γ_2 значительно меньше амплитуды колебаний двух других компонент, исключим из уравнений (1) слагаемые вида $a \cdot \gamma_2^3$. В первом приближении

$$\begin{cases} \gamma_1(t) \approx \cos \omega_y t, \\ \gamma_3(t) \approx -\sin \omega_y t, \end{cases} \quad (12)$$

поэтому можно с приемлемой точностью принять $\gamma_1^3 \approx \gamma_1$, $\gamma_3^3 \approx \gamma_3$.

При $\mu_{ij} = 0$, $v_{ij} = 0$, $\psi = 0$ уравнения (1) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = -\omega_z \cos \omega_0 t \gamma_2 + \omega_y \gamma_3 + k_0 \gamma_2 \gamma_3, \\ \dot{\gamma}_2 = \omega_z \cos \omega_0 t \gamma_1 - \omega_z \sin \omega_0 t \gamma_3, \\ \dot{\gamma}_3 = -\omega_y \gamma_1 + \omega_z \sin \omega_0 t \gamma_2 - k_0 \gamma_1 \gamma_2. \end{cases} \quad (13)$$

Замены

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_2(t) &= -k_0 \int_0^t \gamma_2(\theta) d\theta + \omega_{др} \cos i \cdot t + \text{arctg} \frac{\omega_z}{k_0}; \\ q(t) &= (\gamma_1 + j\gamma_3) e^{j\omega_0 t} - j \frac{\omega_z}{k_0} \quad (j - \text{мнимая единица}) \end{aligned}$$

приводят уравнения (13) к виду

$$\begin{cases} \dot{q} = j \frac{d\tilde{\gamma}_2}{dt} q - \frac{\omega_{др}^2 \sin 2i}{2k_0}, \\ \frac{d^2 \tilde{\gamma}_2}{dt^2} = -k_0 \omega_z \text{Re } q \end{cases} \quad (14)$$

с начальными условиями:

$$q(0) = 1 - j \frac{\omega_z}{k_0}; \quad \tilde{\gamma}(0) = \text{arctg} \frac{\omega_z}{k_0}; \quad \dot{\tilde{\gamma}}_2(0) = \omega_{др} \cos i.$$

Выразим $q(t)$ из первого уравнения системы (14)

$$q(t) = e^{j\tilde{\gamma}_2(t)} \left(\left(1 - j \frac{\omega_z}{k_0} \right) e^{-j \text{arctg} \frac{\omega_z}{k_0}} - \frac{\omega_{др}^2 \sin 2i}{2k_0} \int_0^t e^{-j\tilde{\gamma}_2(\theta)} d\theta \right). \quad (15)$$

Подстановка (15) во второе уравнение дает

$$\frac{d^2 \tilde{\gamma}_2}{dt^2} = -b \sin \tilde{\gamma}_2(t), \quad (16)$$

где $b = \omega_z \sqrt{\omega_z^2 + k_0^2}$.

Исследование уравнения (16) показало, что при различных значениях параметра b приближенное решение может быть представлено в виде

$$\tilde{\gamma}_2(t) \approx g(t) = A \cos(\omega t - \varphi). \quad (17)$$

Подстановка выражения (17) в уравнение (16) позволяет определить значения параметров:

$$A = \arccos \frac{3\omega_z^2 - \omega_{др}^2}{2b}; \quad \omega \approx \frac{\omega_{др} \cos i}{\sqrt{A^2 - \tilde{\gamma}^2(0)}}; \quad \varphi \approx \operatorname{arccotg} \ell; \quad \ell = \frac{\tilde{\gamma}(0)}{\sqrt{A^2 - \tilde{\gamma}^2(0)}}.$$

После обратных замен и некоторых несложных преобразований получаем

$$\gamma_2(t) \approx \frac{\omega_{др} \cos i}{k_0} \left(1 + \sqrt{\ell^2 + 1} \sin(\omega t - \varphi) \right). \quad (18)$$

Полученное выражение показывает, что амплитуда и период колебаний компоненты γ_2 зависят от величины коэффициента k_0 – уменьшаются с ростом k_0 , т.е. с увеличением уводящих моментов.

Приближение для компоненты γ_2 не учитывает высокие частоты. Полученные формулы позволяют найти числовые оценки амплитуды и периода колебаний координаты γ_2 . Так, при $k_0 = 5^\circ/\text{ч}$ амплитуда колебаний равна 0.188, а период равен 706 ч, что подтверждает сделанный ранее вывод.

Как было сказано выше (12), для компонент γ_1 и γ_3 характерно быстрое движение с частотой, близкой к частоте орбитального обращения. Более точные выражения могут быть получены из (15) с учетом (18)

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{k_0} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega_{др}^2 - \omega_z^2}{\omega_z (A^2 - \tilde{\gamma}^2(0))} g(t) \\ \omega_z - \sqrt{\omega_z^2 - k_0^2} \cos g(t) - \omega_z^2 \operatorname{ctg} i \int_0^t \sin(g(t) - g(\theta)) d\theta \end{pmatrix}.$$

Аналогично могут быть получены формулы для второго экваториального гироскопа, т.е. гироскопа с начальной ориентацией вектора кинетического момента ротора в инерциальных осях $H_u = \begin{pmatrix} 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix}^T$ или $H_u = \begin{pmatrix} 0 & \sin i & -\cos i \end{pmatrix}^T$.

Угол между векторами кинетических моментов полярного и экваториального гироскопов

Оценкой сходимости гироскопов является угол между векторами их кинетических моментов. Величина этого угла влияет на работоспособность системы.

На рис. 9 представлен угол между векторами кинетических моментов полярного и экваториального гироскопов по информации о направляющих косинусах, полученной с КА-1, и угол, построенный по аналитическим выражениям.



Рис. 9. Угол между векторами кинетического момента полярного и экваториального гироскопов

На графике хорошо видны колебания с периодом около 75-80 ч и 1800 ч. Анализ вышеприведенных выражений показывает, что колебания с малым периодом обусловлены движением полярного гироскопа, а медленные – движением экваториального.

Заключение

Летные испытания системы ориентации космических аппаратов на базе БЭСГ подтвердили существенные отличия в движении роторов гироскопов при наземных стендовых испытаниях и в условиях космической эксплуатации, которые в значительной степени определяются влиянием динамики орбиты и КА на движение ротора.

Получены аналитические решения уравнений движения роторов полярного и экваториального электростатических гироскопов с учетом особенностей движения орбитальных космических аппаратов и дрейфа орбиты. Показано качественное и количественное соответствие полученных решений экспериментальным данным летных испытаний. Эти решения позволяют провести наглядный анализ влияния различных физических факторов на параметры и характер движения роторов, дают возможность в будущем разработать новые методики полетной идентификации дрейфов гироскопов, оценить адекватность модели ухода, обеспечить возможность прогнозирования сходимости векторов кинетических моментов гироскопов.

Полученные результаты позволяют повысить точность решения задачи калибровки (идентификации параметров модели дрейфа) гироскопов в условиях орбитального полета КА.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 10800904-А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау, Б.Е. Основные результаты разработки и испытаний системы определения ориентации на электростатических гироскопах для низкоорбитальных космических аппаратов / Б.Е.Ландау [и др.] // Гироскопия и навигация.- 2007.- №2(57).- С. 3-12.
2. Емельянец, Г.И. Калибровка дрейфов инерциальной системы ориентации на электростатических гироскопах по данным астровизирующего устройства в условиях космического аппарата / Г.И.Емельянец [и др.].- Материалы XI межд. конф. по интегрированным навигационным системам.- СПб: ЦНИИ «Электроприбор», 2004.-С. 127-129.

3. **Романенко, С.Г.** О движении роторов электростатических гироскопов бескарданной системы ориентации орбитального космического аппарата / С.Г.Романенко [и др.] // Гироскопия и навигация.- 2000.- №3(30).- С. 3-11.
4. **Буравлев, А.П.** Модель дрейфа свободного ЭСГ и методы идентификации ее параметров / А.П.Буравлев [и др.] // Материалы IV российско-китайского симпозиума по инерциальной технике. – СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 1993.
5. **Стирнс, Э.** Космическая навигация. – М.: Военное изд-во МО СССР, 1996 (пер. с англ.).
6. **Белецкий, В.В.** Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1972.- 359 с.

Abstract. The paper presents motion equations of the rotors the rotation axes of which are located at the spacecraft launch in the orbit plane and orthogonally to it. Analytic solutions of the motion equations using the drift deterministic model for the gimballess electrostatically suspended gyro are given, various physical agents effect on the motion parameters is studied. Correspondence between the solutions obtained and the flight tests experimental data is shown.

Key words: gimballess electrostatically suspended gyro, spacecraft, polar and equatorial orientations, attitude determination system.

Материал поступил 2.11.11