УДК 531.383.11:534.1
DOI 10.17285/0869-7035.0031

А. А. МАСЛОВ, Д. А. МАСЛОВ, И. В. МЕРКУРЬЕВ, В.В. ПОДАЛКОВ

КОМПЕНСАЦИЯ УХОДОВ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА, ВЫЗВАННЫХ АНИЗОТРОПИЕЙ УПРУГИХ СВОЙСТВ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Построена новая математическая модель движения монокристаллического резонатора волнового твердотельного гироскопа в виде тонкой упругой оболочки вращения на подвижном основании, учитывающая влияние электростатической системы возбуждения колебаний. При составлении выражения для потенциальной энергии упругой деформации резонатора учтена малая анизотропия типа кубического кристалла, зависящая от ориентации резонатора по отношению к кристаллографическим осям. Для описания энергии электростатического поля датчиков управления использована дискретная модель. С помощью формализма Лагранжа–Максвелла получены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие в одномодовом приближении колебания упругой оболочки вращения на подвижном основании. Рассмотрены вынужденные и свободные колебание резонатора. Показано, что систематическая погрешность, вызванная анизотропией упругих свойств материала резонатора, может быть скомпенсирована воздействием электростатических сил датчиков управления. Предложены управляющие сигналы для компенсации этих уходов.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, монокристалл, нелинейные эффекты, компенсация уходов.

Введение

Волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) является одним из перспективных датчиков инерциальной информации, применяемых в составе навигационных систем летательных и космических аппаратов [1, 2]. Физический принцип, на котором основан ВТГ, заключается в инертных свойствах упругих волн в осесимметричном твердом теле [3, 4]. Чувствительным элементом ВТГ является тонкий упругий осесимметричный резонатор, изготовленный из материала, обладающего малым коэффициентом потерь при колебаниях.

Маслов Александр Анатольевич. Кандидат технических наук, доцент, ФГОУ ВО «НИУ «Московский энергетический институт» (Москва).

Маслов Дмитрий Александрович. Кандидат технических наук, ассистент, ФГОУ ВО «НИУ «МЭИ».

Меркурьев Игорь Владимирович. Доктор технических наук, заведующий кафедрой, ФГОУ ВО «НИУ «МЭИ». Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

Подалков Валерий Владимирович. Доктор технических наук, профессор, ФГОУ ВО «НИУ «МЭИ». Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

В [3] отмечается, что гироскопическими свойствами обладают практически все собственные формы упругих колебаний резонатора. В реальной конструкции, как правило, используется вторая форма упругих колебаний резонатора, при которой на его кромке укладываются две полные волны упругих деформаций.

Основная форма колебаний тонкого упругого резонатора описывается дифференциальными уравнениями, которые по структуре совпадают с дифференциальными уравнениями маятника Фуко с двумя измеряемыми обобщенными координатами [5]. Управление упругими колебаниями резонатора и измерение параметров волновой картины колебаний проводятся с помощью системы силовых и измерительных электростатических электродов, расположенных вблизи свободной кромки резонатора. С помощью датчиков управления возбуждается первичная волна. При вращении гироскопа, вследствие инертных свойств волн, возникает вторичная волна, пучности которой совпадают с узлами первичной волны. Результирующая волна представляет собой суперпозицию двух описанных волн, которые повернуты относительно друг друга на угол $\pi/4$.

Инерциальная информация определяется по измерениям колебаний резонатора. В режиме вынужденных колебаний вычисляется угловая скорость гироскопа относительно инерциального пространства, то есть гироскоп функционирует в режиме датчика угловой скорости. В режиме свободных колебаний вычисляется угол поворота гироскопа в инерциальном пространстве, то есть гироскоп функционирует в интегрирующем режиме.

Основы теории ВТГ были заложены в работах [3, 4]. Исследование погрешностей таких гироскопов с различными формами колеблющегося резонатора выполнено в [5–13]. Погрешности изготовления резонатора (переменная плотность, толщина и др.) вызывают нарушение симметрии упругих свойств и приводят к биениям резонатора, при которых изгибные колебания совершаются на двух близких частотах. Для совмещения частот колебаний разрабатываются методики динамической балансировки резонатора [6, 7, 14–16], оценки параметров математической модели [11, 17].

В настоящее время ведется разработка ВТГ со сферическим, цилиндрическим и кольцевым монокристаллическим резонатором в микромеханическом исполнении. Резонаторы выполняются из кремния [18, 19, 20], кварца [21], сапфира [22] по различным технологиям, в том числе по микросистемным. Применение монокристаллических конструкционных материалов позволяет снизить уровень инструментальных погрешностей изготовления и потерь при колебаниях. Оптически прозрачный искусственно выращенный сапфир (лейкосапфир) широко используют в полупроводниковой промышленности при изготовлении полупроводниковых микросхем и светодиодов по технологии «кремний на изоляторе». Применение микроэлектромеханических систем на базе полупроводниковых интегральных микросхем позволяет получать приборы низкой стоимости и очень малых размеров и энергопотребления. Вместе с тем микромеханические ВТГ имеют недостаточно высокую точность. Ввиду этого необходимо создавать точные математические модели микромеханических чувствительных элементов, чтобы на этапе конструирования и изготовления приборов с учетом аналитических зависимостей повысить точность гироскопических датчиков.

В связи с этим в данной работе ставится задача разработки математической модели гироскопа с монокристаллическим резонатором и электростатическими датчиками управления, а кроме того, рассматриваются возможности компенсации погрешностей ВТГ, возникающих из-за малой анизотропии типа кубического кристалла, с помощью датчиков управления.

Уравнения колебаний резонатора на подвижном основании

Рассмотрим резонатор ВТГ в виде оболочки вращения (рис. 1), срединная поверхность которой образована поворотом кривой s вокруг оси x_3. Будем считать, что резонатор ограничен двумя параллелями или имеет форму купола. С основанием прибора свяжем ортогональную систему координат $Ox_1x_2x_3$, ось x_3 направим по оси симметрии резонатора. Для описания деформаций резонатора введем ортогональный трехгранник $y_1y_2y_3$, связанный с меридианами и параллелями его срединной поверхности.

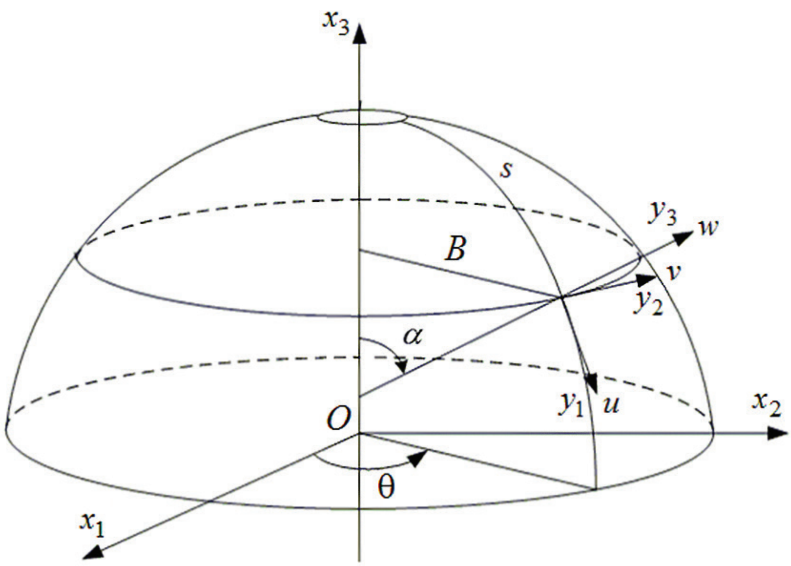

Рис. 1. Расчетная схема ВТГ

В качестве криволинейных координат примем угол $\alpha(0 \le \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2)$, образованный внешней нормалью к срединной поверхности и осью симметрии, и угол в окружном направлении $\theta(0 \le \theta \le 2\pi)$. В этом случае коэффициенты Ламе поверхности примут вид:

$$A = R_1, \ \ B = R_2 \sin\alpha,$$

где R_1, R_2 – радиусы кривизны меридиана и нормального сечения, проведенного к кривой s. Введем необходимый в дальнейшем вектор $\mathbf{r}$, перпендикулярный оси симметрии оболочки, $|\mathbf{r}| = B$.

Пусть $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ – вектор упругого смещения точки срединной поверхности резонатора в осях $y_1y_2y_3$, а оболочка как целое вращается вокруг оси симметрии с переменной во времени угловой скоростью Ω, которую в дальнейшем будем считать малой по сравнению с частотой собственных колебаний ω.

Кинетическая энергия резонатора имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\int_{\sigma} \rho h V^2 d\sigma\,, \tag{1}$$

где ρ – плотность материала резонатора, h – толщина резонатора, $d\sigma = AB\,d\alpha\,d\theta$, **V** − вектор абсолютной скорости произвольной точки резонатора

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{r} + \mathbf{u}), \tag{2}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t. В проекциях на оси $y_1y_2y_3$ имеем:

$$\mathbf{\Omega} = \left(-\Omega\sin\alpha,\ 0,\ \Omega\cos\alpha\right)^T,\ \mathbf{r} = \left(B\cos\alpha,\ 0,\ B\sin\alpha\right)^T,$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dot{u} - \Omega v\cos\alpha \\ \dot{v} + \Omega[(r+w)\sin\alpha + u\cos\alpha] \\ \dot{w} - \Omega v\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Проекции вектора перемещения **u** на оси $y_1y_2y_3$ будем искать в одномодовом приближении резонатора по основной второй форме колебаний:

$$\begin{aligned} u &= \Psi_1(\alpha) f_* \cos 2\theta - \Psi_1(\alpha) g_* \sin 2\theta, \\ v &= \Psi_2(\alpha) f_* \sin 2\theta + \Psi_2(\alpha) g_* \cos 2\theta, \\ w &= -\Psi_3(\alpha) f_* \cos 2\theta + \Psi_3(\alpha) g_* \sin 2\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

где Ψ_i $(i = 1,2,3)$ − функции второй формы колебаний, зависящие от геометрии резонатора, а $f_* = f_*(t), g_* = g_*(t)$ – обобщенные координаты второй формы колебаний.

Подставляя (2) и (3) в (1) и выполняя интегрирование по окружной координате θ, найдем выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\left[m(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2) + 2\zeta\Omega(g_*\dot{f}_* - f_*\dot{g}_*) \right], \tag{4}$$

где приведенную массу резонатора, соответствующую второй гармонике, представим как

$$m = \pi \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \rho h \left(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2\right) B R_1 d\alpha,$$

а коэффициент ζ – как $2\pi \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \rho h\ \Psi_2\left(\Psi_3 \sin\alpha - \Psi_1\cos\alpha\right) B R_1 d\alpha$.

В связи с малостью Ω опустим слагаемые, содержащие Ω^2.

Для нахождения потенциальной энергии упругой деформации монокристаллического резонатора рассмотрим малую наведенную анизотропию упругих свойств материала типа кубического кристалла. Введем правый ортогональный трехгранник $z_1z_2z_3$, связанный с главными осями анизотропии материала резонатора. Ориентацию осей трехгранника $z_1z_2z_3$ относительно $x_1x_2x_3$ определим с помощью углов Эйлера–Крылова φ, ψ и матрицы направляющих косинусов S_1:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi \\ -\cos\varphi\sin\psi & \cos\psi & \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Согласно рис. 1, ориентация осей трехгранника $y_1y_2y_3$ относительно $x_1x_2x_3$ задается углами α, θ, при этом

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\theta & \cos\alpha\sin\theta & -\sin\alpha \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\alpha\cos\theta & \sin\alpha\sin\theta & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{6}$$

С учетом (5), (6) матрица направляющих косинусов между осями трехгранника $y_1y_2y_3$ и $z_1z_2z_3$ определяется в виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad S = S_2S_1 = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где l_{ij} – направляющие косинусы углов между осями $y_1y_2y_3$ и осями $z_1z_2z_3$.

Удельную (отнесенную к единице площади срединной поверхности резонатора) потенциальную энергию упругой деформации резонатора можно представить следующим образом [23]:

$$P_{уд} = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{11}e_{11} + 2\sigma_{12}e_{12} + \sigma_{22}e_{22}\right) d\varsigma\,. \tag{8}$$

Здесь ς – координата, отсчитываемая от срединной поверхности резонатора в направлении внешней нормали; e_{ij} – деформации элемента резонатора; σ_{ij} – напряжения элемента, которые определяются с использованием обобщенного закона Гука [24]:

$$\sigma_{ij} = H_{ij11}e_{11} + 2H_{ij12}e_{12} + H_{ij22}e_{22} + H_{ij33}e_{33}, \quad (i, j = 1,2,3)\,. \tag{9}$$

Здесь тензор упругих модулей материала H_{ijkl} в осях трехгранника $y_1y_2y_3$ имеет вид [24]:

$$\begin{gathered} H_{ijkl} = 2\mu\, I_{ijkl} + \lambda\, J_{ijkl} + \upsilon\, X_{ijkl}\,, \\ J_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}\,,\ I_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2\,,\ X_{ijkl} = \sum_{m=1}^{3} l_{im}l_{jm}l_{km}l_{lm}\,, \end{gathered} \tag{10}$$

где μ, λ, υ – упругие постоянные (отметим, что для изотропного материала υ = 0), анизотропная упругая постоянная υ полагается малой по отношению к μ и λ; J_{ijkl} – делатационный тензор; δ_{jk} – дельта Кронекера; I_{ijkl} – единичный тензор; X_{ijkl} – анизотропный тензор; $l_{ij}(i, j = 1,2,3)$ – элементы матрицы направляющих косинусов (7).

Из равенства $\sigma_{33} = 0$ и закона (9) получим нормальную деформацию элемента оболочки

$$e_{33} = -\frac{1}{H_{3333}}\left(H_{3311}e_{11} + 2H_{3312}e_{12} + H_{3322}e_{22}\right), \tag{11}$$

остальные компоненты деформации элемента оболочки с учетом гипотезы о нерастяжимости срединной поверхности имеют вид:

$$e_{11} = -\varsigma\kappa_{11},\ e_{22} = -\varsigma\kappa_{22},\ e_{12} = -\varsigma\kappa_{12}\,, \tag{12}$$

где κ_{11}, κ_{22}, κ_{12} – изгибные деформации срединной поверхности резонатора:

$$\begin{gathered}\kappa_{11} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha},\ \kappa_{22} = \frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_2}{\partial\theta} + \frac{1}{BR_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\gamma_1,\\ \kappa_{12} = \frac{1}{BR_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\theta} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\gamma_2 - \frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{B}{R_2}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right),\\ \gamma_1 = \frac{1}{R_1}\left(-\frac{\partial w}{\partial\alpha} + u\right),\ \ \gamma_2 = -\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{v}{R_2}.\end{gathered} \tag{13}$$

После подстановки (3) в (13), а также (9–12) в (8) и интегрирования сначала по координате ς, а затем по окружной координате θ потенциальная энергия оболочки примет вид [10]

$$P = \frac{1}{2}c(f_*^2 + g_*^2 + \tilde\eta_1 f_*^2 + 2\tilde\eta_3 f_* g_* + \tilde\eta_2 g_*^2)\,, \tag{14}$$

где c – коэффициент, характеризующий жесткость; $\tilde\eta_1, \tilde\eta_2, \tilde\eta_3$ – коэффициенты малой анизотропии упругих свойств резонатора, зависящие от его геометрической формы, формы колебаний, ориентации резонатора к кристаллографическим осям, параметров, характеризующих материал резонатора.

Перейдем к определению потенциальной энергии электрического поля датчиков управления. Вычислим потенциальную энергию n конденсаторов, образованных управляющими электродами и резонатором:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j^2}{C_j}\,, \tag{15}$$

где q_j – заряд j-го конденсатора, образованного резонатором и j-м электродом, центр которого расположен под углом $\theta_j = 2\pi(j-1)/n$ к оси Ox_1, $j = 1\ldots n$; n – число электродов; C_j – емкость. Будем считать, что перекрестное влияние конденсаторов отсутствует. Для вычисления емкости используем формулу

$$C_j = \frac{\varepsilon_0 S}{d - w_j} = \frac{C_0}{1 - \frac{\Psi_3(\alpha_1)}{d}\left(-f_*\cos 2\theta_j + g_*\sin 2\theta_j\right)}, \tag{16}$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; S – площадь электрода; d – зазор между недеформированным резонатором и электродами; $C_0 = \varepsilon_0 S/d$ – емкость конденсатора, образованного электродом управления и недеформированным резонатором; нормальный прогиб свободной кромки резонатора $w_j = w\,(\alpha_1, \theta_j, t)$, $j = 1\ldots n$.

Подставляя (16) в (15), получаем выражение для энергии

$$W = \frac{1}{2C_0}\sum_{j=1}^{n} q_j^2\left(1 - \frac{\Psi_3(\alpha_1)}{d}\left(-f_*\cos 2\theta_j + g_*\sin 2\theta_j\right)\right). \tag{17}$$

Для учета вязкоупругих свойств резонатора ВТГ используются модели Зинера [25] и Кельвина−Фойгта. В статье [26] при определении термоупругих потерь материалов ротора применена модель Зинера, а в [27, 28] составлены уравнения динамики с помощью модели Кельвина−Фойгта.

Для описания внутреннего трения в рассматриваемой системе используем модель Кельвина–Фойгта. Внешними потерями пренебрегаем, считая объем корпуса прибора вакуумированным. Введем диссипативную функцию Рэлея, учитывающую внутреннее трение материала резонатора:

$$\Phi = \frac{1}{2} c_* (\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2),$$

где c_* – коэффициент, характеризующий вязкоупругие свойства материала резонатора. Учитывая, что резонатор изготовлен из материала с низким уровнем внутренних потерь, в Ф опущены малые слагаемые.

Для составления уравнений Лагранжа–Максвелла электромеханической системы применяем методику, предложенную в [29, 30]. Для определения функции Лагранжа используем выражения кинетической энергии (4), потенциальной энергии упругой деформации резонатора (14), потенциальной энергии электростатического поля управляющих конденсаторов (17):

$$\begin{gathered} L = \frac{1}{2}\left(m\left(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2\right) + 2\zeta\ \Omega\left(g_*\dot{f}_* - f_*\dot{g}_*\right)\right) - \frac{1}{2}c(f_*^2 + g_*^2 + \tilde{\eta}_1 f_*^2 + \\ +2\tilde{\eta}_3 f_* g_* + \tilde{\eta}_2 g_*^2) - \frac{\Psi_3(\alpha_1)}{2C_0}\sum_{j=1}^{n} q_j^2\left(1 - \frac{1}{d}\left(-f_*\cos 2\theta_j + g_*\sin 2\theta_j\right)\right). \end{gathered} \tag{18}$$

Применяя к функции (18) процедуру Лагранжа и учитывая то, что заряды на электродах ВТГ можно рассчитать по формуле [29, 32] $q_j = U_j C_j$, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\ddot{f} + \omega^2 f = -\gamma\dot{f} + \nu\dot{g} - \eta_1 f - \eta_3 g + \frac{\Psi_3^2(\alpha_1)C_0}{2md^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{U_j^2\cos 2\theta_j}{(1 - f\cos 2\theta_j - g\sin 2\theta_j)^2}, \\ &\ddot{g} + \omega^2 g = -\gamma\dot{g} - \nu\dot{f} - \eta_2 g - \eta_3 f + \frac{\Psi_3^2(\alpha_1)C_0}{2md^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{U_j^2\sin 2\theta_j}{(1 - f\cos 2\theta_j - g\sin 2\theta_j)^2}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\omega = \sqrt{c/m}$ – частота собственных колебаний резонатора; $\gamma = c_*/m$ – коэффициент, характеризующий демпфирование колебаний; $\nu = 2\zeta\Omega$ – нормализованная угловая скорость основания гироскопа; $f = -\Psi_3(\alpha_1) f_*/d$ и $g = \Psi_3(\alpha_1) g_*/d$ – безразмерные обобщенные координаты основной формы, равные отношению радиального смещения резонатора к величине зазора, в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга под углом в 45°; $\eta_1 = \frac{c}{m}\tilde{\eta}_1$, $\eta_2 = \frac{c}{m}\tilde{\eta}_2$, $\eta_3 = \frac{c}{m}\tilde{\eta}_3$ − коэффициенты малой анизотропии упругих свойств резонатора.

Оценить значения параметров математической модели ВТГ, в том числе и коэффициентов η_1, η_2, η_3, можно с использованием методики определения параметров ВТГ [10–12, 17].

В дальнейших исследованиях для учета влияния электростатических сил на динамику ВТГ необходимо знать напряжения, подаваемые на электроды управления.

Режим вынужденных колебаний резонатора

В этом случае с помощью электродов управления создается переменное во времени силовое поле, неизменно ориентированное относительно основания гироскопа.

Для создания второй основной формы колебаний резонатора используем четыре управляющих электрода (i = 1, 5, 9, 13), изображенных на рис. 2.

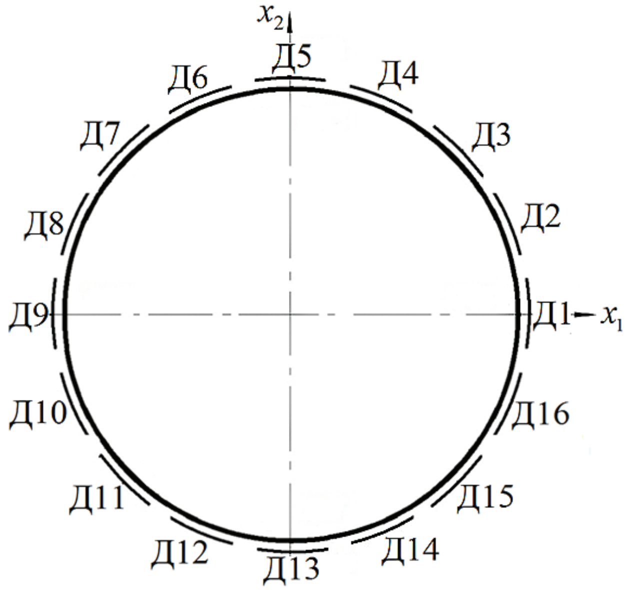

Рис. 2. Расположение электростатических датчиков управления Д1...Д16

Разность потенциалов U_i между резонатором и управляющими электродами зададим следующим образом:

$$U_1 = U_9 = U_0(1 + u\cos\omega_0 t), \quad U_5 = U_{13} = U_0(1 - u\cos\omega_0 t), \tag{20}$$

где U_0 − постоянное опорное напряжение; u – безразмерная амплитуда переменного напряжения; ω_0 – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора. На остальных электродах разность потенциалов задается равной опорному напряжению U_0.

Подставляя (20) в (19) и пренебрегая малыми величинами f, g выше третьего порядка, получим уравнения колебаний резонатора:

$$\begin{aligned} &\ddot f + \omega^2 f = -\gamma\dot f + \nu\dot g + \mu_*\left[2f - \frac{\eta_1}{\mu_*}f - \frac{\eta_3}{\mu_*}g + 3(f^2+g^2)f + \right. \\ &\left. + (1+3f^2)u\cos\omega_0 t + \frac{u^2}{2}f + \frac{u^2}{2}f\cos 2\omega_0 t\right], \\ &\ddot g + \omega^2 g = -\gamma\dot g - \nu\dot f + \mu_*\left[2g - \frac{\eta_2}{\mu_*}g - \frac{\eta_3}{\mu_*}f + 3(f^2+g^2)g\right], \end{aligned} \tag{21}$$

где $\mu_* = 4\Psi_3^2(\alpha_1)U_0^2C_0/(md^2)$ – коэффициент, характеризующий малость электрических сил, действующих на резонатор.

Из анализа уравнений (21) следует, что последнее слагаемое первого уравнения указывает на наличие параметрического возбуждения. В [31] рассмотрены уравнения (21) без учета влияния анизотропии резонатора ($\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$). Показано, что при использовании позиционного возбуждения появляется сопутствующее ему параметрическое возбуждение колебаний и что используемая для возбуждения колебаний амплитуда напряжения недостаточна для возникновения неустойчивых колебаний.

Влияние нелинейности на динамику ВТГ, описываемую уравнениями (21) при пренебрежении u^2 и без учета влияния анизотропии резонатора, рассмотрено в [32, 33]. Показано, что опорное напряжение на электродах управления ВТГ вызывает угловую скорость дрейфа гироскопа, пропорциональную произведению амплитуд основной и квадратурной волн колебаний и квадрату опорного напряжения. В [32, 33] также продемонстрированы влияние нелинейности на амплитуду колебаний и зависимость резонансной частоты от амплитуды колебаний.

Динамика системы при наличии постоянных напряжений на управляющих электродах

Для компенсации уходов, обусловленных анизотропией упругих свойств резонатора, на электроды подаются постоянные напряжения U_j, $j = 1,\ldots,16$ между j-м электродом датчика управления и резонатором следующим образом:

$$\begin{aligned}
&U_1 = U_9 = U_0(1+u_1), \qquad U_5 = U_{13} = U_0(1-u_1),\\
&U_3 = U_{11} = U_0(1+u_2), \qquad U_7 = U_{15} = U_0(1-u_2),\\
&U_8 = U_{12} = U_0(1+u_3), \qquad U_{10} = U_0(1-u_3),
\end{aligned} \tag{22}$$

где u_1, u_2, u_3 – нормализованные по отношению к U_0 сигналы управляющих напряжений. На остальных электродах разность потенциалов задается равной опорному напряжению U_0; u_i<<1, i = 1,2,3.

Подставляя (22) в (19) и пренебрегая малыми величинами f, g, u_i третьего порядка, получим:

$$\begin{aligned}
&\ddot{f} + \omega^2 f = -\gamma\dot{f} + \nu\dot{g} + \frac{\mu_*}{4}\left(8f + \left(-4u_1 + u_3 - \frac{\eta_1}{\mu_*}\right)f - \left(3u_3 + \frac{\eta_3}{\mu_*}\right)g + u_{13}\right),\\
&\ddot{g} + \omega^2 g = -\gamma\dot{g} - \nu\dot{f} + \frac{\mu_*}{4}\left(8g + \left(-4u_2 + u_3 - \frac{\eta_2}{\mu_*}\right)g - \left(3u_3 + \frac{\varepsilon\eta_3}{\mu_*}\right)f + u_{23}\right),
\end{aligned} \tag{23}$$

где введены обозначения $u_{13} = u_1 - \dfrac{u_3}{2\sqrt{2}} + \dfrac{u_3^2}{4\sqrt{2}}, \qquad u_{23} = u_2 - \dfrac{u_3}{2\sqrt{2}} + \dfrac{u_3^2}{4\sqrt{2}}.$

Полученные уравнения динамики позволяют анализировать влияние электростатических сил на динамику волнового твердотельного гироскопа с монокристаллическим резонатором. Анализ этих дифференциальных уравнений показывает, что малая наведенная анизотропия упругих свойств резонатора приводит к расщеплению частот и биению. Разность между величинами собственных частот характеризует погрешность гироскопа, для уменьшения которой необходимо оценить параметры математической модели и скомпенсировать эти погрешности силовым электростатическим воздействием.

Приравнивая нулю выражения в скобках перед f, g, получим значения напряжений, необходимых для компенсации уходов, вызванных анизотропией упругих свойств резонатора:

$$u_1 = -\frac{\eta_3}{12\mu_*} - \frac{\eta_1}{4\mu_*}, \qquad u_2 = -\frac{\eta_3}{12\mu_*} - \frac{\eta_2}{4\mu_*}, \qquad u_3 = -\frac{\eta_3}{3\mu_*}$$

Коэффициенты η_1, η_2, η_3, необходимые для расчета сигналов компенсации, находятся при испытаниях прибора по методикам идентификации параметров [10–12, 17].

Таким образом, из полученной математической модели следует, что систематическая погрешность, вызванная анизотропией упругих свойств материала резонатора, может быть скомпенсирована воздействием электростатических сил датчиков управления.

Уравнения (19) и полученные из него при учете вида напряжений, подаваемых на датчики управления, уравнения (21) и (23) справедливы для сферических, цилиндрических и кольцевых резонаторов, которые можно рассматривать как частные случаи оболочки вращения.

Уравнения (19), описывающие динамику монокристаллического резонатора, могут использоваться для исследования резонаторов, изготовленных из плавленого кварца, которому присуща малая анизотропия типа кубического кристалла, зависящая от ориентации резонатора по отношению к кристаллографическим осям [34].

Числовой пример

Рассмотрим полусферический резонатор, изготовленный из плавленого кварца с малой наведенной анизотропией типа кубического кристалла, вызванной погрешностями изготовления, например при неравномерном остывании кварца. Проведем числовую оценку дрейфа угловой скорости. Плотность резонатора $\rho = 2400$ кг/м^3, радиус резонатора $R = 0{,}0025$ м, толщина $h = 0{,}00003$ м. Вычислим значение второй основной частоты резонатора ω, изготовленного из кварца, упругие постоянные которого имеют следующие значения: $\lambda = 1{,}67\cdot10^{10}$ Па, $\mu = 5{,}0\cdot10^{10}$ Па.

Частота резонатора ω, рассогласование частот Δ и дрейф угловой скорости Ω, рассчитанные по формулам, приведенным в данной статье и в [34], равны:

$$\omega = 46792\ \text{с}^{-1}\ (7447\ \text{Гц});\ \Delta = 304\ \varepsilon\ \text{с}^{-1}\ \text{при}\ \varphi = \pi/2\ \text{и}\ \psi = 0;\ \Omega = -\Delta/(4K) = 275\ \varepsilon\ \text{с}^{-1}.$$

При $\varepsilon = \upsilon / \mu = 10^{-7}$ имеем угловую скорость ухода

$$\Omega = -\Delta/(4K) = 2{,}75\cdot10^{-7}\text{с}^{-1}\ (5{,}67\ ^\circ/\text{час}),$$

существенную для гироскопа навигационного применения.

Заключение

Разработана математическая модель движения анизотропного резонатора ВТГ в виде тонкой упругой оболочки вращения на подвижном основании, учитывающая упругие свойства монокристаллического резонатора и нелинейные свойства электростатической системы возбуждения колебаний. Предложены управляющие сигналы для компенсации уходов, вызванных анизотропией упругих свойств резонатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Делэйе Ф.** Бортовая инерциальная система координат SpaceNaute® для европейской ракеты-носителя «Ариан-6» на основе волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2018. Т. 26. №4 (103). С. 3–13.
2. **Переляев С.Е.** Обзор и анализ направлений создания бесплатформенных инерциальных навигационных систем на волновых твердотельных гироскопах // Новости навигации. 2018. № 2. С. 21–27.
3. **Журавлев В.Ф., Климов Д.М.** Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
4. **Журавлев В.Ф.** Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. №3. 1993 С.15−26.
5. **Журавлев В.Ф.** Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. №6. С. 27–35.
6. **Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.** О балансировке волнового твердотельного гироскопа // Известия РАН. Механика твердого тела. 1998. №4. С. 4–16.
7. **Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К.** Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во «Ким Л.А», 2017. 194 с.
8. **Rozelle, D.M.,** The Hemispherical Resonator Gyro: From Wineglass to the Planets, *Proc. 19th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meetin*g, 2009, pp. 1157–1178.
9. **Loper, E.J., Lynch, D.D.,** Vibratory rotation sensor, US Pat. № 4,951,508. Int.Cl.: G01C19/566, 1990.
10. **Меркурьев И.В., Подалков В.В.** Динамика волнового твердотельного и микромеханических гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.
11. **Журавлев В.Ф.** Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 2000. №5. С. 186–192.
12. **Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В**. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 167 с.
13. **Asadian, M.H., Wang, Y., Shkel, A.M.,** Development of 3D Fused Quartz Hemi-Toroidal Shells for High-Q Resonators and Gyroscopes, *IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems*, 2019, pp.1380–1383.
14. **Лунин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А.** Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М.: Радиотехника, 2014.
15. **Лунин Б.С., Басараб М.А., Юрин А.В., Чуманкин Е.А.** Цилиндрический резонатор из кварцевого стекла для недорогих вибрационных гироскопов // Юбилейная XXV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, СПб., 2018. С. 204–207.
16. Б**асараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Чуманкин Е.А**. Балансировка полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов методом химического травления // Гироскопия и навигация. 2015. Т. 88. №1. С. 61–70.
17. **Пат. 2544308** Российская Федерация, МПК G01C 19/56. Способ определения параметров волнового твердотельного гироскопа. / Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.; приор. 25.06.13; заявитель и патентообладатель НИУ МЭИ; опубл. 20.05.15, Бюл. № 14.
18. **Desta, Y.M.,** Fabrication of high aspect ratio vibrating cylinder microgyroscope structures by use of the LIGA process, PhD thesis, USA: Louisiana State University, 2005.
19. **Cho, J., Gregory, J.A. and Najafi, K.,** Single-crystal-silicon cylindrical rate integrat-ing gyroscope (CING), *Transducers'11*, Beijing, China, 2011, pp. 2813–2816.
20. **Тимошенков С.П., Анчутин С.А., Плеханов В.Е., Кочурина Е.С., Тимошенков А.С., Зуев Е.В**. Разработка математического описания кольцевого резонатора микрогироскопа // Нано- и микросистемная техника. 2014. №5. С.18–25.
21. **Senkal, D., Ahamed, M.J., Trusov, A.A., and Shkel, A.M.**, Achieving Sub-Hz Frequency Symmetry in Micro-Glassblown Wineglass Resonators, *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2014, vol. IV 23, no. 1, pp. 30–38.
22. **Сарапулов С.А., Литвинов Л.А., Бакалор Т.О.** Особенности конструкции и технологии изготовления высокодобротных сапфировых резонаторов твердотельных гироскопов типа CRG-1 // XIV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, СПб., 2007. С. 41–43.

23. **Филин А.П.** Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1987. 256 с.
24. **Сиротин, И.Ю., Шаскольская, М.П.** Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.
25. **Zener, C.M.,** Elasticity and Anelasticity of Metals. USA, Chicago, Univ. of Chicago Press, 1948.
26. **Матвеев В.А., Басараб М.А., Лунин Б.С., Чуманкин Е.А., Юрин А.В.** Термоупругие потери в конструкционных материалах резонаторов волновых твердотельных гироскопов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». 2015, №2 (101). С. 28–39.
27. **Мартыненко Ю.Г., Меркурьев И.В., Подалков В.В.** Управление нелинейными колебаниями вибрационного кольцевого микрогироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 77–89.
28. **Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В., Подалков В.В.** Влияние малой вязкоупругой анизотропии материала на точностные характеристики волнового твердотельного гироскопа с резонатором в виде оболочки вращения // Вестник МЭИ, 2010. №3. С. 20–27.
29. **Журавлев В.Ф., Линч Д.Д.** Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. №5. С. 12–24.
30. **Мартыненко Ю.Г.** Аналитическая динамика электромеханических систем. М.: МЭИ, 1984, 64 с.
31. **Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.** Исследование стационарных режимов колебаний резонатора гироскопа при наличии позиционного и сопутствующего ему параметрического возбуждений // Гироскопия и навигация. 2014. №2 (85). С. 61–69.
32. **Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.** Нелинейные эффекты в динамике цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электростатической системой управления // Гироскопия и навигация. 2015. №1 (88). С. 71–80.
33. **Маслов Д.А.** Влияние нелинейных свойств электростатических и электромагнитных датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа: дис. к.т.н. НИУ МЭИ, 2019. 127 с.
34. **Меркурьев И.В.** Динамика гироскопических чувствительных элементов систем ориентации и навигации малых космических аппаратов: дис. д.т.н. МЭИ, 2006. 296 с.

Maslov, A.A., Maslov, D.A., Merkuriev I.V., Podalkov, V.V. (Moscow Power Engineering Institute, Moscow) Compensation of Wave Solid-State Gyro Drifts Caused by Anisotropy of Elastic Properties of a Single-Crystal Resonator, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2020, vol. 28, no. 2 (109), pp. 25–36.

Abstract. A new mathematical model is constructed for the motion of a single-crystal resonator of a wave solid-state gyroscope in the form of a thin elastic shell of revolution on a moving base, taking into account the influence of an electrostatic oscillation excitation system. When compiling the expression for the potential energy of elastic deformation of the resonator, a low anisotropy of the cubic crystal type was taken into account, depending on the resonator orientation relative to the crystallographic axes. A discrete model is used to describe the energy of the electrostatic field of control sensors. Using the Lagrange-Maxwell formalism, nonlinear differential equations are obtained that describe, in the single-mode approximation, the oscillations of the elastic shell of revolution on a moving base. The forced and free oscillations of the resonator are considered. It is shown that a bias caused by anisotropy of the elastic properties of the resonator can be compensated by the effect of electrostatic forces of the control sensors. Control signals are proposed to compensate these errors.

Key words: wave solid-state gyroscope, single crystal, nonlinear effects, error compensation.

Материал поступил 04.04.2020