УДК 527.5
DOI 10.17285/0869-7035.0027

Т. Н. СИРАЯ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВАРИАЦИИ АЛЛАНА КАК ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ И НАВИГАЦИОННЫХ УСТРОЙСТВ

Вариация Аллана изначально была введена как характеристика эталонов времени и частоты, а теперь широко используется во многих областях, включая навигационное приборостроение. В работе проведен анализ способов ее использования в различных задачах, в том числе при оценке характеристик навигационных устройств.

Тем не менее в ряде случаев эффективность применения вариации Аллана ограничена и физическая ее интерпретация неясна. Это связано с ее эмпирическим определением как альтернативной оценки дисперсии.

В работе рассматривается определение вариации Аллана на основе модели случайных процессов со стационарными приращениями, которые содержат как стационарные, так и винеровские процессы. В этой модели основной характеристикой является структурная функция, а вариация Аллана оказывается ее эмпирической оценкой.

Такое представление проясняет статистический смысл вариации Аллана и объясняет ее высокую эффективность при анализе нестационарных сигналов и шумов. Это также позволяет включить вариацию Аллана в систему показателей измерительных и навигационных устройств в качестве интегральной характеристики, отличной от дисперсии и отражающей свойства стабильности аппаратуры.

Ключевые слова: вариация Аллана, дисперсия, характеристика рассеивания, стационарный случайный процесс, спектральное представление, винеровский процесс, случайный процесс со стационарными приращениями, структурная функция.

Введение

Вариация Аллана (ВА) как эмпирическая оценка рассеивания данных была введена более 50 лет назад: исходные публикации [1–3] появились в 1966 г. в специальном выпуске IEEE Proceedings. По этой причине ее полувековой юбилей в 2015–2017 гг. отмечался на многих научных конференциях. В мае 2015 г. на XXII Международной конференции по интегрированным навигационным системам (в АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор») был организован специальный круглый стол «Методы определения характеристик погрешностей навигационных датчиков», посвященный в том числе и вопросам применения методов ВА. В частности, на нем был представлен обзорный доклад проф. Д.В. Аллана [4], а также ряд других, в которых рас-

Сирая Татьяна Николаевна. Доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (С.-Петербург). Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

сматривалось применение методов ВА при разработке навигационной аппаратуры [5–6]. В дальнейшем по материалам круглого стола были подготовлены две статьи, опубликованные в журнале «Гироскопия и навигация» [7, 8].

В настоящее время сформировалось обширное и динамично развивающееся научное направление, которое можно условно назвать анализом ВА, или анализом данных на основе ВА (Allan variance analysis, Allan variance data analysis) [9]. Это направление охватывает следующие предметные области:

1) измерений времени и частоты, в которой методы ВА получили первоочередное развитие [7] и в настоящее время занимают ведущее положение. Для них развиваются все аспекты: теоретические, прикладные и законодательные [4, 7, 10–14]. Методам ВА в этой области посвящены как труды основоположников направления [1–4, 7, 10–11], так и работы других исследователей. Достаточно полная библиография в этой области представлена в статье Д. Аллана [7];
2) измерений электрических и других величин. Приложения методов ВА здесь пока не столь значительны, но представляются весьма разнообразными и перспективными. Следует отметить, например, работы [9, 10, 15–19];
3) навигационного приборостроения, где методы ВА стали применяться позже, но в настоящее время развиваются наиболее динамично. Эта область не только активно заимствует опыт из упомянутых выше направлений, но и вырабатывает специфические варианты использования ВА, которые далее могут найти применение и в других сферах [5, 6, 8, 20–27]. Библиография в этой области представлена, например, в [5, 22].

В перечисленных предметных областях развиваются не только прикладные аспекты, связанные с использованием методов ВА, но и разработаны соответствующие нормативные документы [12–14, 24–27]. Кроме того, можно выделить группу работ, в которых на различных моделях и в разных областях исследуются основные вероятностно-статистические свойства ВА. К ним относятся [3, 10, 15], и в особенности [9], где исследуются свойства ВА для класса авторегрессионных случайных процессов. Таким образом, анализ ВА носит многоаспектный и междисциплинарный характер и активно развивается.

В настоящее время накоплен большой опыт использования методов ВА, который доказывает их эффективность при решении многих прикладных задач. Однако иногда возникают затруднения и неясности в интерпретации полученных результатов [5]. По-видимому, это отчасти связано с тем, что ВА вводится чисто эмпирически, как альтернативная оценка дисперсии в тех случаях, когда классическая оценка неприменима. Формальное определение ВА как статистической оценки, включая выделение базовой модели и искомого параметра масштаба, не приводится.

Тем самым проблема системно-статистической интерпретации ВА, которая находится на стыке теоретической метрологии, прикладной статистики и теории точности систем, до сих пор остается актуальной.

В связи с этим в настоящее время, с учетом накопленного опыта применения ВА и развития соответствующего математического аппарата, полезно уточнить исходные положения при определении ВА и выявить ее статистический смысл. Это позволит уяснить физический смысл результатов, получаемых на основе ВА. Целесообразно включить ВА в набор характеристик измерительных и навигационных устройств и уточнить ее взаимосвязи с современным аппаратом обработки данных в навигационном приборостроении. При анализе естественно сопоставлять ВА с классической дисперсией, которая является традиционной характеристикой рассеивания данных. Это актуально также в связи с предложениями использовать ВА в качестве основной оценки рассеивания вместо дисперсии (см., например, [10]).

В предлагаемой работе проводится анализ опыта использования ВА в различных областях, наиболее подробно – в навигационном приборостроении. На основе проведенного анализа развивается статистическая интерпретация ВА, предложенная в [28, 29]. ВА рассматривается в рамках модели случайного процесса со стационарными приращениями, получены условия, при которых ВА является состоятельной оценкой структурной функции такого процесса.

Сопоставление ВА и дисперсии показывает, что они отличаются и предназначены для оценивания разных параметров. По этой причине корректнее говорить не о противопоставлении оценок, а о выделении областей их использования и возможности их совместного применения.

Основные сведения о вариации Аллана

Исходные определения

В задачах обработки экспериментальных данных при определении показателей измерительных и навигационных устройств в качестве основной характеристики традиционно принимают дисперсию [30–32]

$$D\,(X) = M\,[X - M(X)]^2, \tag{1}$$

где $M(X)$ – математическое ожидание случайной величины X.

Соответственно, в качестве оценки дисперсии по выборке $\{x_1, ..., x_n\}$ чаще всего используют выборочную дисперсию [30–31]

$$\sigma_в^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 / (n-1)\,, \tag{2}$$

где $\overline{x}$ – среднее значение выборки. Возможны и другие оценки дисперсии, например на основе последовательных разностей [30, 31]:

$$\sigma_a^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 / 2(n-1). \tag{3}$$

Аналогично для случайного процесса $X(t)$, $t \epsilon T$, основными характеристиками являются дисперсия $DX(t)$ и корреляционная функция [33–34]

$$R\,(s,\,t) = M\,[(X(s) - MX(s))(X(t) - MX(t))]. \tag{4}$$

Методы их оценивания наиболее развиты для стационарных процессов [33–35]; в этом случае дисперсия постоянна: $DX(t) = D_0$, а корреляционная функция зависит лишь от разности моментов времени:

$$R\,(s,\,t) = R_0\,(s - t). \tag{5}$$

Однако для нестационарных процессов необходимо рассматривать другие параметры и оценки. Наибольшее распространение получила ВА, которая основана на разностях средних значений процесса на последовательных интервалах времени [1, 4],

$$\sigma_a^2(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau)\right)^2 / 2(n-1), \tag{6}$$

где $x_k(\tau)$, $k = 1...n$ – средние значения процесса $x(t)$ на интервалах I_k длины τ:

$$I_k = (t_0 + k\,\tau,\ t_0 + (k+1)\,\tau).$$

ВА была предложена как эмпирическая оценка рассеивания при исследовании шумов, появляющихся в эталонах времени и частоты, в том числе фликкер-шумов [1–3]. Такие процессы имеют спектральные плотности вида

$$S(\omega) = c/\omega,$$

где c – положительная константа, ω – частота, поэтому [3, 18] классические оценки дисперсии вида (2) для них неприменимы. Однако ВА σ_a^2 вида (6), введенная в [1–3], позволяет исследовать корреляционные свойства фликкер-шумов и других нестационарных процессов. Вследствие этого ВА стала широко использоваться в области измерений времени и частоты, а вскоре получила распространение и в других областях измерений как альтернатива классической оценки дисперсии в случаях, когда последняя неприменима. Тем не менее, в каком смысле ВА заменяет дисперсию или в какой степени ее обобщает, остается не вполне ясным.

В связи с этим целесообразно выяснить, для каких процессов ВА может применяться и какие параметры она позволяет оценивать. Это позволит дать формальное определение ВА как статистической оценки, а также повысить эффективность ее применения на практике.

Основные задачи и области применения вариации Аллана

На практике ВА может применяться в различных целях, прежде всего:
1) в качестве альтернативной оценки дисперсии;
2) как аппарат для выделения из сигналов (шумов) некоторых нестационарных составляющих.

Первый вариант уже давно используется в математической статистике. В рамках классической модели данных – независимой выборки $\{x_1, ..., x_n\}$ дискретная ВА σ_a^2 вида (3) также является несмещенной оценкой дисперсии

$$M(\sigma_a^2) = M(\sigma_в^2) = D(X). \tag{7}$$

Вместе с тем при коррелированных или неоднородных данных свойства оценок σ_a^2 и $\sigma_в^2$ различны. Это используется при проверке гипотез, например, в критерии Аббе [30, 31]:

$$r = \sigma_a^2 / \sigma_в^2. \tag{8}$$

Критерий Аббе проверяет нулевую гипотезу о постоянном среднем

$$H_0\colon M\,x_k = c \tag{9}$$

против альтернативы о наличии постоянного приращения

$$H_1\colon M\,x_{k+1} = M\,x_k + h. \tag{10}$$

Его можно также использовать для проверки гипотезы H_0 против альтернативы о некоррелированных случайных приращениях:

$$H_2\colon x_{k+1} = x_k + z_k, \tag{11}$$

где z_k – некоррелированные приращения с дисперсией $D\,z_k = \sigma_0^2$.

Отметим, что гипотезы H_0 и H_2 отличаются в части основных параметров и оценок масштаба. При гипотезе H_0 (независимой выборке) $\sigma_в^2$ является наилучшей оценкой дисперсии DX, а ВА σ_a^2 – несмещенная, но менее точная оценка DX. Однако при гипотезе H_2 (некоррелированных приращениях) ВА σ_a^2 является наилучшей оценкой другого параметра – дисперсии приращений σ_0^2. Как показано далее, последнее свойство характерно для ВА.

На практике ВА как альтернативная оценка дисперсии удобна в случаях, когда желательно исключить влияние некоторых систематических погрешностей [30, 31]. При этом условие несмещенности ВА (7) выполняется только для некоррелированных данных [9].

В непрерывном случае ВА, определенная согласно (6), дает оценку дисперсии среднего значения сигнала $x_k(\tau)$ на интервале τ. Ввиду этого ее можно использовать для выбора интервала осреднения данных τ, при котором ВА $\sigma_a^2(\tau)$ как оценка дисперсии среднего – минимальна [6, 8, 10, 17].

В целом ВА вида (3) или (6) полезны на практике как оценки дисперсии, однако следует отметить, что их эффективность невысока и зависит от корреляции данных [6, 8, 17], так что при их использовании необходимо вводить определенные ограничения и учитывать смещения оценок.

Применение вариации Аллана для выделения нестационарных составляющих сигналов

Общая схема выделения составляющих на основе вариации Аллана

На практике ВА чаще всего используется как математический аппарат для выделения из процесса ряда составляющих [5, 15, 17, 27, 36]. Общую схему применения ВА с этой целью можно представить следующим образом:

- выполняется разложение процесса на «типовые» составляющие с известными корреляционными функциями или составляющие, заданные в виде квазидетерминированных процессов полиномиального типа;
- исследуется асимптотическое поведение ВА типовых составляющих как функций от τ (расчетным путем);
- осуществляется анализ эмпирической ВА с целью сравнения с типовыми составляющими процессов, выделения наиболее значимых из них и оценки их параметров.

Ключевым вопросом является рациональный выбор типовых составляющих. Чаще всего за типовые составляющие принимают [15, 20, 27] винеровский процесс, фликкер-шум и белый шум. По существу, это наиболее важные для практики процессы, анализ которых привел к введению ВА [1–3]. Хотя спектральные методы для них также применялись как приближенные (например, с учетом того, что на практике белый шум ограничен по полосе), но введение ВА представлялось более рациональным способом их анализа.

Для типовых процессов вычисляют математические ожидания ВА $M\sigma_a^2(\tau)$ как функции от τ и параметров процессов [5, 15, 27]. Эти характеристики $M\sigma_a^2(\tau)$ можно назвать теоретическими ВА в отличие от обычных ВА $\sigma_a^2(\tau)$ вида (6), которые являются их оценками по экспериментальным данным.

При сопоставлении с ними различных участков эмпирической ВА $\sigma_a^2(\tau)$, полученной по этим данным, можно выделять значимые составляющие наблюдаемого процесса, а также приближенно оценивать их параметры.

В качестве типовых можно использовать также стационарные, например марковские, процессы. Для стационарного процесса со спектральной плотностью $S(\omega)$ теоретическую ВА вычисляют по формуле [15, 36]

$$M\sigma_a^2(\tau) = \frac{4}{\pi}\int S(\omega)\sin^4(\omega\tau/2)/(\omega\tau)^2 d\omega\ . \tag{12}$$

При этом для стационарных процессов адекватным математическим аппаратом остаются спектральные методы [33–35]. Кроме того, теоретические ВА $M\sigma_a^2(\tau)$ для многих стационарных процессов не являются монотонными функциями от τ, что затрудняет сопоставление с ними эмпирической ВА $\sigma_a^2(\tau)$.

В целом интерпретация полученных описанным выше способом составляющих процесса нередко оказывается не вполне четкой и метод дает лишь качественную картину. Поэтому он чаще относится к предварительным этапам статистического анализа. Для получения более определенных выводов и количественных оценок необходимо привлекать информацию, учитывающую специфику практической задачи и накопленный опыт анализа данных [5, 8, 22].

Наиболее проработаны вопросы использования ВА в области навигационного приборостроения, которые и обсуждаются далее более подробно.

Применение вариации Аллана в навигационном приборостроении

В настоящее время методы ВА наиболее разработаны и стандартизованы применительно к задачам навигационного приборостроения [20–27, 36] и уступают, по-видимому, в этом отношении лишь области измерений времени и частоты [7, 11–14]. Стандартизованные методы обработки данных на основе ВА используются для выделения и оценивания составляющих погрешностей (шумов), которые нормируются для основных типов навигационных устройств. Методы ВА для определения и контроля нормируемых характеристик акселерометров, гироскопов и микромеханических устройств регламентированы в международных стандартах IEEE, прежде всего в [24–27]. Такие методы в целом реализуют описанный выше подход, однако набор типовых составляющих здесь более строго регламентирован и детально изучен.

В частности, для погрешностей гироскопов и акселерометров [27] обычно используется следующее разложение на типовые составляющие:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + x_5(t), \tag{13}$$

где $x_1(t)$ – линейный дрейф;
$x_2(t)$ – случайное блуждание угловой скорости или ускорения;
$x_3(t)$ – нестабильность нуля;

$x_4(t)$ – случайное блуждание угла или скорости;
$x_5(t)$ – шум квантования выходного сигнала.

Наименования приведенных составляющих немного различаются в зависимости от класса устройств (гироскопов, акселерометров и др.). Существенно лишь то, что им соответствуют определенные стохастические модели, которые приведены в табл. 1 [27].

Таблица 1

Модели основных типовых составляющих и соответствующие теоретические ВА

Обозначение	Наименование составляющей	Модель составляющей	Математические ожидания ВА $M\sigma_a^2(\tau)$
$x_1(t)$	Линейный дрейф	$x_1(t)=R\,t$	$R^2\,\tau^2\,/\,2$
$x_2(t)$	Случайное блуждание угловой скорости или ускорения	Винеровский процесс с корреляционной функцией $R(s,\,t)=K^2\,min\,(s,\,t)$	$K^2\,\tau\,/\,3$
$x_3(t)$	Нестабильность нуля	Фликкер-шум со спектральной плотностью $S(\omega) = B/\omega$	$B^2\,2ln2/\,\pi$
$x_4(t)$	Случайное блуждание угла или скорости	Белый шум со спектральной плотностью $S(\omega) = N$	N^2/τ
$x_5(t)$	Шум квантования выходного сигнала	Шум квантования с параметром масштаба Q	$3\,Q^2\,/\tau^2$

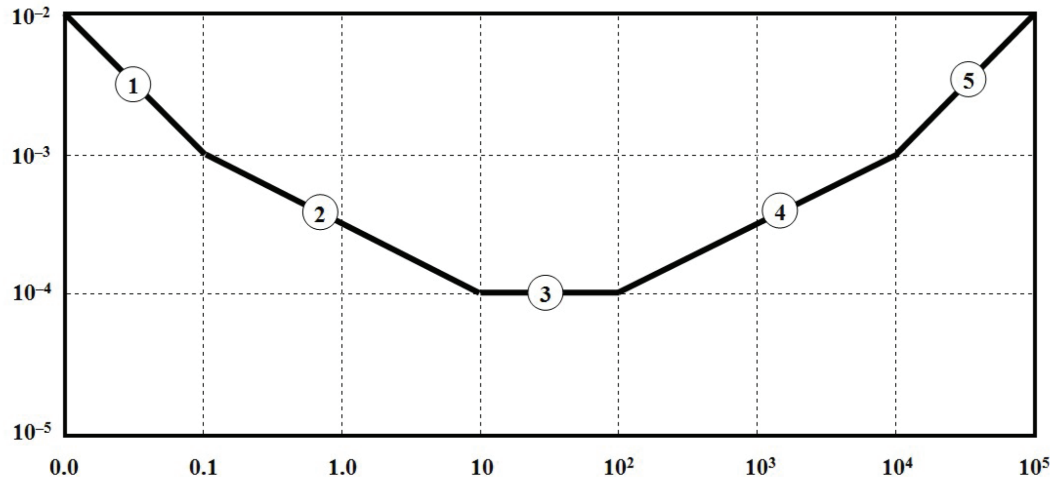
Соответствующие математические ожидания ВА типовых составляющих $M\sigma_a^2(\tau)$ также приведены в табл. 1. Отметим, что указанные наименования составляющих соответствуют [27], но не всегда согласуются с принятыми в отечественной литературе [37]. В частности, согласно [37] составляющая $x_3(t)$ (нестабильность нуля) понимается несколько шире и не всегда связана с фликкер-шумом.

Приведенный набор типовых моделей является рациональным в системном отношении и достаточно полно отражает номенклатуру моделей погрешностей, актуальных для практических задач [20, 27]. Следует отметить, что и в других областях приложений ВА – при измерениях времени и электрических величин – стремятся использовать типовые модели со степенными спектральными плотностями [9, 15]. Тем не менее для навигационного приборостроения эти вопросы стандартизованы наиболее полно.

Таким образом, разложение теоретической ВА на типовые статистически независимые составляющие имеет вид [27]

$$M\sigma_a^2(\tau)=\sum M\,\sigma_{ai}^2\,(\tau)=R^2\tau^2/2+K^2\tau/3+B^2 2ln2/\pi+N^2/\tau+3Q^2/\tau^2. \quad (14)$$

Приведенное разложение ВА на типовые составляющие стандартизовано [27] и обычно представляется в графическом виде. График выглядит наиболее наглядно, если перейти от ВА $\sigma_a^2(\tau)$ к отклонению Аллана $\sigma_a^2(\tau) = [\sigma_a^2(\tau)]^{1/2}$ и принять логарифмический масштаб по осям. Такой график представлен на рисунке [27, 36].



Графики отклонений Аллана (в логарифмическом масштабе) для типовых составляющих: *1* – шум квантования; *2* – белый шум; *3* – фликкер-шум; *4* – винеровский процесс; *5* – линейный дрейф

Приведенный типовой график, разумеется, является идеализированным, поскольку показывает математические ожидания отклонений Аллана. Однако он поясняет основные принципы и может служить опорой при анализе эмпирической кривой $\sigma_a(\tau)$, полученной по реальным данным.

На основе сопоставления полученного графика $\sigma_a(\tau)$ с типовыми графиками $M\sigma_a(\tau)$ обычно можно выделить значимые составляющие сигнала (шума). Нередко также удается приближенно оценить основные параметры составляющих в разложении (14). Для анализа и оценивания параметров составляющих можно использовать более точные статистические методы, в том числе основанные на байесовской фильтрации [38, 39].

Описанный подход по существу позволяет включить ВА в систему показателей измерительных и навигационных устройств. При этом ВА представляется как интегральная (комплексная) характеристика устройства, которая отражает изменение погрешности во времени, а ее основные составляющие (в разложении (14)) могут давать информацию о составляющих погрешностей. Для ряда устройств такие характеристики приведены, например, в [27].

На практике такой анализ не всегда оказывается достаточно определенным и наглядным, и его необходимо дополнять содержательным анализом основных сведений об устройствах и физических принципах, на которых они основаны. Конкретные примеры, показывающие необходимость такой дополнительной информации, приводятся, например, в [5, 6, 8, 22].

Статистические основы ВА как характеристики рассеивания данных

Общая схема определения характеристик рассеивания

При статистическом обосновании ВА как характеристики рассеивания данных целесообразно использовать общий методологический подход к определению показателей (характеристик) погрешностей, принятый в прикладной статистике и теории измерений [30, 32, 40].

Общую схему определения характеристик погрешностей данных можно кратко представить следующим образом [40]:

- формируется базовая (вероятностная) модель данных (например, случайная величина X);
- теоретическая характеристика погрешности определяется как параметр (характеристика) модели (например, дисперсия случайной величины DX);
- эмпирическая характеристика (при обработке данных) определяется как статистическая оценка параметра (характеристики) модели (например, выборочная дисперсия $\sigma_в^2$).

Таким образом, для ВА должны быть определены подходящие модель и параметр модели аналогично тому, как это приведено выше для дисперсии. Тогда ВА будет адекватно включена в статистическую систему характеристик, то есть получит статистическую интерпретацию. Следовательно, будет обеспечена возможность корректно и объективно сопоставлять ВА с классической дисперсией и другими оценками рассеивания данных. Ключевым вопросом является выбор модели данных для определения ВА.

Практика применения ВА показала, что она эффективна в случае нестационарных и обобщенных процессов – винеровских процессов, белых и фликкер-шумов, для которых обычные спектральные методы неприменимы. Поэтому при выборе стохастической модели для формального определения ВА необходимо учитывать следующие требования:

- модель содержит стационарные процессы;
- модель имеет простое функциональное представление (аналог спектрального представления стационарного процесса) и наглядную характеристику масштаба (аналог дисперсии);
- модель содержит практически важные нестационарные процессы, прежде всего винеровские.

Простое расширение стационарной модели на множество обобщенных стационарных процессов, очевидно, недостаточно, поскольку не содержит винеровских процессов, важных для практики.

Выбор исходной модели для определения вариации Аллана

Анализ выражений (3) и (6), задающих ВА, показывает, что хорошей моделью для определения ВА могло бы служить множество винеровских процессов, поскольку в этом случае последовательные приращения независимы и однородны (образуют классическую выборку). Кроме того, в данном случае норма функционального пространства (порожденного корреляционной функцией винеровского процесса) совпадает с ВА [41], однако эта модель, очевидно, недостаточна, поскольку не содержит стационарных процессов.

Расширением множества стационарных процессов, включая винеровские, служит множество случайных процессов со стационарными приращениями [35, 42], которое введено в работах А.Н. Колмогорова и А.М. Яглома. Приведем основные определения, связанные с ними.

Случайный процесс $X(t)$, $-\infty<t<\infty$, называется [35] случайным процессом со стационарными приращениями (далее – СПСП), если математическое ожидание приращения пропорционально длине интервала времени

$$M\,[X(s) - X(t)] = a\,(s - t),$$

где a – постоянная, и ковариация приращений зависит только от разностей моментов времени

$$M\,[(X(u) - X(t))\,(X(v) - X(t))] = D(u - t,\ v - t).$$

Вследствие этого корреляционные свойства процесса описываются структурной функцией $D_0(\tau)$ [35] вида

$$D_0(\tau) = M\,[X(t{+}\tau) - X(t)]^2. \tag{15}$$

Свойства структурной функции $D_0(\tau)$, определенной согласно (15), отличаются от свойств корреляционной функции $R_0(t)$ стационарного процесса, определенной (5). Корреляционная функция всегда ограничена: $|R_0(t)| \le R_0(0)$, а структурная функция $D_0(\tau)$ может быть неограниченной. Например, винеровский процесс имеет структурную функцию $D_0(\tau) = K^2\tau$.

Тем не менее структурная функция все же подчиняется условию [42]

$$D_0(\tau) \le A\,\tau^2, \tag{16}$$

где равенство достигается для линейной функции $X(t) = c_0 + c_1\,t$ со случайными коэффициентами, имеющей структурную функцию $D_0(\tau) = A\,\tau^2$.

Важным свойством СПСП является наличие спектрального представления, но более общего вида, чем в стационарном случае:

$$X(t) = \int [(e^{it\omega} - 1)/(i\,\omega)]\,dZ(\omega) + X_0, \tag{17}$$

где $Z(\omega)$ – случайная функция с некоррелированными приращениями;
X_0 – случайная величина.

Структурная функция СПСП также имеет спектральное представление

$$D_0(\tau) = 2\int [(1 - \cos\tau\,\omega) / \omega^2]\,dF(\omega), \tag{18}$$

где $F(\omega)$ – неубывающая спектральная функция, такая, что при $\omega > \mu$

$$M\,|Z(\omega) - Z(\mu)|^2 = F(\omega) - F(\mu).$$

Множество СПСП содержит стационарные процессы, однако является их существенным расширением, поскольку включает ряд нестационарных процессов, прежде всего винеровских. Описанные процессы эффективно используются при анализе физических явлений (например, турбулентности) в атмосфере и океане [43].

В случае дифференцируемого процесса спектральная функция $F(\omega)$ является ограниченной. Из соотношения (17) видно [42], что $X(t)$ получается интегрированием стационарного процесса. В общем случае функция $F(\omega)$ удовлетворяет следующему условию: при любом $a > 0$ конечны интегралы вида

$$\int_a^{\infty} dF(\omega)/\omega^2 < \infty, \quad \int_{-\infty}^{-a} dF(\omega)/\omega^2 < \infty. \tag{19}$$

Например, винеровскому процессу со структурной функцией $D_0(\tau) = K^2\tau$ соответствует спектральная функция $F(\omega) = K^2\ \omega\ /\ 2\pi$. Очевидно, функция $F(\omega)$ удовлетворяет условию (19), но не является ограниченной, поэтому винеровский процесс не будет дифференцируемым в обычном смысле. Вместе с тем если формально (как обобщенный процесс [42]) продифференцировать спектральное представление (17), то будет получен обобщенный стационарный процесс с той же спектральной функцией $F(\omega)$, то есть белый шум.

Формальное определение вариации Аллана

Если в качестве исходной модели для определения ВА принять описанное выше множество СПСП, то эта характеристика получает естественную статистическую интерпретацию. В данном случае основная характеристика – структурная функция $D_0(\tau)$ вида (15), а ВА $\sigma_a^2(\tau)$ задает статистическую (параметрическую) оценку этой характеристики.

Для того чтобы изложить это более подробно, целесообразно выделить несколько модификаций ВА, связанных с различными способами осреднения случайного процесса на выделенных интервалах, в том числе:

- дискретная ВА вида (3) для случайного процесса с дискретным временем $\{x_k, k=0, 1, 2, \ldots\}$;
- дискретная ВА вида (3) при простой τ-дискретизации процесса с непрерывным временем $X(t)$, $0<t<\infty$, то есть $x_k = X(k\tau)$;
- ВА вида (6) для δ-сглаженного процесса, когда значения $x_k = x_k(\delta)$ определены как средние процесса $X(t)$ на подынтервалах $I_k = (k\tau, k\tau+\delta)$, $\delta \le \tau$;
- традиционная ВА вида (6), соответствующая τ-сглаженному процессу (при $\delta=\tau$).

Свойства ВА как оценки структурной функции зависят от свойств распределений процесса $X(t)$ и его структурной функции.

<u>Утверждение 1</u>

Предположим, что процесс со стационарными приращениями $X(t)$, $0<t<\infty$, имеет конечные моменты выше второго порядка (например, соответствует гауссовскому распределению) и его структурная функция $D_0(\tau)$ удовлетворяет следующему условию: при любом $\tau > 0$

$$\lim\ \{[D_0(t+\tau) + D_0(t-\tau)]/2 - D_0(t)\} = 0 \text{ при } t\to\infty. \tag{20}$$

Тогда введенные выше ВА обладают следующими свойствами:

1) дискретная ВА вида (3) является состоятельной оценкой структурной функции $D_0(\tau)/2$;
2) традиционная ВА вида (6) является состоятельной оценкой сглаженной структурной функции $D_\tau(\tau)/2$.

Краткое доказательство этого утверждения приводится в приложении.

Отметим отличия введенного условия (20) (которое можно назвать «эргодичностью приращений СПСП») от классического условия эргодичности стационарных процессов [33–35]. В случае стационарного процесса $X(t)$ с корреляционной функцией $R_0(t)$ условие (20) приводится к виду

$$2\,R_0(t) - [R_0(t+\tau) + R_0(t-\tau)] \to 0 \text{ при } t\to\infty. \qquad (21)$$

Такое условие несколько слабее, чем классическое условие эргодичности $R_0(t)\to 0$ [33]. По-видимому, с этим связано то, что иногда для стационарного процесса рационально оценивать структурную, а не корреляционную функцию, поскольку при этом исключаются некоторые составляющие погрешностей [43].

Условие (20) выполняется для ряда нестационарных процессов, имеющих неограниченные корреляционные и структурные функции, например для винеровских процессов, имеющих $D_0(\tau) = K^2\tau$. Однако это условие выполняется не всегда: например, оно нарушено при квадратичной структурной функции вида $A\,\tau^2$ (для отмеченного выше СПСП вида $X(t) = c_0 + c_1\,t$).

В целом модель процессов со стационарными приращениями позволяет формально определить ВА и получить ее статистическую интерпретацию. Следовательно, можно непосредственно сопоставить ВА и дисперсию в соответствии с этапами их определения как характеристик рассеивания [28, 29]. Такое сопоставление характеристик представлено в табл. 2.

Таблица 2

Сопоставление ВА и дисперсии как характеристик рассеивания

№		Конкретные этапы для характеристики рассеяния	
		Дисперсии	ВА
1	Модель данных	Случайная величина X	Процесс со стационарными приращениями $X(t)$
2	Параметр модели (теоретическая характеристика)	Дисперсия DX	Структурная функция $D_0(\tau)$
3	Оценка параметра (эмпирическая характеристика)	Выборочная дисперсия S^2	Вариация Аллана $\sigma_a^2(\tau)$

Сопоставление дисперсии и ВА на основе базовых моделей показывает, что это принципиально различные оценки, предназначенные для разных параметров процессов. В частности, ВА $\sigma_a^2(\tau)$ не просто альтернативная оценка дисперсии, но другая масштабная характеристика, отражающая изменение свойств процесса во времени.

Таким образом, проблема выбора – использовать на практике дисперсию или ВА – в некотором смысле теряет актуальность. С другой стороны, открываются возможности совместного применения двух характеристик $\sigma_в^2$ и $\sigma_a^2(\tau)$ при обработке данных и контроле параметров устройств.

Применение ВА дополняет анализ данных на основе дисперсии при решении практических вопросов, в частности на расширенном множестве моделей (при наличии нестационарных процессов). Следовательно, в широком круге задач совместное применение дисперсии и ВА также оказывается полезным. Их взаимосвязи необходимо учитывать при интерпретации результатов обработки данных и контроле параметров устройств.

Полученное представление позволяет корректно включить ВА в набор характеристик (показателей) измерительных и навигационных устройств, исследовать взаимосвязи ВА и других характеристик.

При этом отдельные составляющие ВА (в разложении вида (14)) дают информацию о составляющих погрешностей и рекомендованы в стандартах IEEE [24–27] при контроле качества устройств. В связи с этим целесообразно более широко вводить рекомендации по применению ВА в нормативные документы, регламентирующие контроль характеристик измерительных и навигационных устройств.

Кроме того, модель СПСП допускает обобщения. Например, в [35, 42] рассматриваются случайные процессы со стационарными приращениями n-го порядка. Такого рода обобщения отвечают предложениям по использованию приращений высокого порядка [5] и могут быть полезны на практике.

Заключение

1. Приведенный анализ показывает, что ВА представляет собой характеристику второго порядка, которая существенно отличается от дисперсии и отражает изменения свойств процессов во времени.
2. Для статистического обоснования ВА в качестве базовой модели использовано множество случайных процессов со стационарными приращениями. В рамках этой модели ВА (при введенных в работе условиях) является состоятельной оценкой структурной функции.
3. Сопоставление классической дисперсии и ВА на основе базовых моделей показывает их существенные различия. ВА $\sigma_a^2(\tau)$ не просто является альтернативной оценкой дисперсии, а оказывается другой масштабной характеристикой.
4. Применение ВА на практике расширяет возможности анализа данных, в том числе при наличии нестационарных процессов. Совместное применение дисперсии и ВА также представляется эффективным.
5. В области навигационного приборостроения ВА является характеристикой, отражающей свойства составляющих погрешностей устройств, и может использоваться при контроле качества аппаратуры.
6. Анализ ВА (как область исследований) развивается не только в прикладном, но и в теоретическом и законодательном аспектах. В теоретическом плане целесообразно исследовать ВА на различных моделях данных, включая процессы со стационарными приращениями n-го порядка. В законодательном плане необходимо более полно отражать методы ВА в нормативных документах, регламентирующих контроль измерительной и навигационной аппаратуры.

Приложение

Доказательство утверждения 1

Доказательство основано на отмеченном в [42] свойстве процесса $X(t)$ со стационарными приращениями: при любом (фиксированном) $\tau>0$ центрированный случайный процесс $Y_\tau(t)$, образованный τ-разностями

$$Y_\tau(t) = X(t+\tau) - X(t),$$

является стационарным. Далее для простоты изложения предполагается, что математическое ожидание процесса $M\ Y_\tau(t) = 0$.

Очевидно, дисперсия процесса $Y_\tau(t)$ равна значению структурной функции процесса $X(t)$:

$$M\,[Y_\tau(t)]^2 = M\,[X(t+\tau) - X(t)]^2 = D_0(\tau).$$

Следовательно, выражения (3) и (6), определяющие ВА (в дискретном и непрерывном случаях), представляют собой оценки дисперсии процесса $Y_\tau(t)$. Чтобы проверить сходимость оценок, необходимо выразить корреляционную функцию $R_\tau(t)$ процесса $Y_\tau(t)$ через структурную функцию $D_0(t)$ процесса $X(t)$.

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{gathered} R_\tau(t) = M\,[(X(t+\tau) - X(t))\,(X(\tau) - X(0))] = \\ = M\,\{[X(t+\tau) - X(0)]^2 + [X(t) - X(\tau)]^2 - \{[X(t+\tau) - X(\tau)]^2 - [X(t) - X(0)]^2\}\ /\ 2 = \\ = [D_0(t+\tau) + D_0(t-\tau)]/2 - D_0(t) = \Delta D_0(t, \tau). \end{gathered}$$

Если для структурной функции $D_0(t)$ процесса $X(t)$ выполнено условие (20) (то есть $\Delta D_0(t, \tau) \to 0$ при $t \to \infty$), то для корреляционной функции стационарного процесса $Y_\tau(t)$ выполнено условие $R_\tau(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому процесс $Y_\tau(t)$ является эргодическим, и дискретная ВА, определенная согласно (3), – состоятельная оценка структурной функции $D_0(\tau)/2$.

Для случая традиционной ВА вида (6) применимы аналогичные рассуждения, поскольку приходится переходить к последовательности средних значений $x_k(\tau)$ процесса $X(t)$ на интервалах I_k.

При этом средним значениям $x_k(\tau)$ соответствует структурная функция $D_\tau(\tau)$, получаемая путем сглаживания исходной структурной функции $D_0(\tau)$ процесса $X(t)$ при его усреднении на интервалах I_k длины τ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Allan, D.W.,** Statistics of atomic frequency standards, *Proc. IEEE*, 1966, 54, no.2, p. 221.
2. **Barnes, J.A.,** Atomic timekeeping and statistics of precision signal generators, *Proc. IEEE*, 1966, vol. 54, no. 2.
3. **Barnes, J.A., Allan, D.W.,** A Statistical model of Flicker noise, *Proc. IEEE*, 1966, vol. 54, no. 2.
4. **Аллан Д.У.** Вариации Аллана: история создания, преимущества и недостатки, основные области применения // XXII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2015.
5. **Кробка Н.И.** О топологии графиков вариации Аллана и типовых заблуждениях в интерпретации структуры шумов гироскопов // XXII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2015.
6. **Степанов О.А., Челпанов И.Б., Моторин А.В.** О точности оценивания постоянной составляющей погрешности датчиков и ее связи с вариацией Аллана // XXII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2015.
7. **Аллан Д.У.** Вариации Аллана: история создания, преимущества и недостатки, основные области применения // Гироскопия и навигация. 2015. № 4 (91).
8. **Степанов О.А., Челпанов И.Б., Моторин А.В.** Точность оценивания постоянной составляющей погрешности датчиков и ее связь с вариацией Аллана // Гироскопия и навигация. 2016. № 4. С. 63–74.

9. **Zhang, N.F.,** Allan variance of time series models for measurement data, *Metrologia*, 2008, 45, pp. 549–561.
10. **Allan, D.W.,** Should the classical variance be used as a basic measure in standards metrology?, *IEEE Trans. on Instr. & Meas.*, 1987, vol. IM-36, pp. 646–654.
11. **Allan, D.W., Ashby N., Hodge, C.C.,** The Science of Timekeeping, Application Note 1289, Hewlett-Packard Company, 1997.
12. **Riley, W.J.,** Handbook of frequency stability analysis, NIST Special Publication 1065, 2008.
13. **IEEE Std 1139-1999** IEEE Standard definitions of physical quantities for fundamental frequency and time metrology – random instabilities.
14. **ГОСТ Р 8.567-2014**. ГСИ. Измерения времени и частоты. Термины и определения.
15. **Witt, T.J.,** Testing for correlations in measurements with the Allan Variance, *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology IV*, World Scient. Publ., 2000, pp. 273–288.
16. **Witt, T.J., Tang, Y.,** Investigation of noise in measurements of electronic voltage Standards, *IEEE Trans. on Instr. & Meas.*, 2005, vol. IM-54, pp. 567–570.
17. **Катков А.С.** Применение преобразования Аллана для анализа предельных возможностей мер и компараторов напряжения // Измерительная техника. 2006. №6. С. 49–52.
18. **Keshner, M.S.,** 1/f noise, *Proc. IEEE*, 1986, vol. 70, no.3.
19. **Lesage, P., Ayi, Th.,** Characterisation of frequency stability: analysis of the modified Allan variance and properties of its estimate, *IEEE Trans. Instr. Meas.*, 1984, vol. IM-33, no. 4.
20. **Ng, L.C., Pines, D.J.,** Characterisation of ring laser gyro performance using the Allan variance method, *J. Guidance*, 1997, vol. 20, no. 1.
21. **Кучерков С.Г., Лычев Д.И., Скалон А.И., Чертков Л.А.** Использование вариации Аллана при исследовании характеристик микромеханических гироскопов // Гироскопия и навигация. 2003. №2 (41). С. 98–104.
22. **Кробка Н.И.** Дифференциальные методы идентификации структуры шумов гироскопов // Гироскопия и навигация. 2011. № 1. С. 59–77.
23. **Распопов В.Я.** Микромеханические приборы: учебное пособие. М.: Машиностроение, 2007. 400 с.
24. **IEEE Std 647-1995**. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for single-axis laser gyros.
25. **IEEE Std 671-85** (2010) Specification Format Guide and Test Procedure for Nongyroscopic Inertial Angular Sensors: Jerk, Acceleration, Velocity, and Displacement.
26. **IEEE Std 952-1997** IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros.
27. **IEEE Std 1554-2005** IEEE recommended practice for inertial sensor test equipment, instrumentation, data acquisition, and analysis.
28. **Siraya, T.N.,** Stationary increment random functions as a basic model for Allan variance, *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, vol. 89. Advanced Mathematical & Computational Tools In Metrology & Testing XI*, World Scient. Publ., 2018, pp. 332–340.
29. **Сирая Т.Н.** Метрологический подход к обоснованию вариации Аллана как характеристики рассеяния данных // 7-я Междунар. научно-техн. конф. «СУДОМЕТРИКА». 2018.
30. **Браунли К.А.** Статистическая теория и методология в науке и технике. М.: «Наука», 1977.
31. **Линник Ю.В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962.
32. **Земельман М.А.** Метрологические основы технических измерений. М.: Изд-во стандартов, 1991. 228 с.
33. **Крамер Г., Лидбеттер М.** Стационарные случайные процессы. М.: Изд-во «Мир», 1969.
34. **Свешников А.А.** Прикладные методы теории случайных функций. М.: «Наука», 1968. 464 с.
35. **Яглом А.М.** Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
36. **Степанов О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Том 2. Введение в теорию фильтрации. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017.
37. **Гироскопия.** Терминология: сборник научно-нормативной терминологии. Вып. 118. М.: Институт проблем передачи информации РАН, 1994.
38. **Моторин А.В.** Идентификация моделей погрешностей навигационных датчиков и средств коррекции методами нелинейной фильтрации. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. СПб.: Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2017.
39. **Stepanov, O., Motorin, A.,** Performance Criteria for the Identification of Inertial Sensor Error Models, *Sensors* (Basel, Switzerland), 2019.

40. **Сирая Т.Н.** Методы обработки данных при измерениях и метрологические модели // Измерительная техника. 2018. № 1. С. 9–14.
41. **Сирая Т.Н.** Вариация Аллана как оценка погрешности измерения // Гироскопия и навигация, 2010. № 2 (69). С. 29–36.
42. **Yaglom, A.M.,** *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*, vol. 1, 2, Springer-Verlag, New York, 1987.
43. **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. М.: Наука. Часть 1, 1965. Часть 2, 1967.

Siraya, T.N. (Concern CSRI Elektropribor, JSC, St. Petersburg, Russia)

Statistical Interpretation of Allan Variance as a Characteristic of Measurements and Navigation Devices, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2020, vol. 28, no. 1 (108), pp. 3–18.

Abstract. Allan variance was originally introduced as a characteristic for time and frequency standards, and now it is widely used in many fields, including the construction of navigation devices. The paper presents an outline of Allan variance applications in various tasks, including the estimation of characteristics of navigation devices.

Nevertheless, there are some cases when the efficiency of Allan variance is insufficient, and its physical interpretation appears to be vague. It seems to be associated with purely empirical origin of this characteristic, as the initial scale parameter has not been defined yet.

Statistical interpretation of the Allan variance is proposed in the paper. It is based on the model of random processes with stationary increments, which includes both stationary and Wiener processes. Structure function is the main scale parameter in this model, and Allan variance is an empirical estimate of this parameter.

This representation clarifies the statistical meaning of Allan variance, and it also explains high efficiency of Allan variance for non-stationary signals and noises. Thus, Allan variance is a general characteristic which describes the stability of the measurement and navigation devices.

Key words: Allan variance, variance, scale parameter, stationary random process, spectral representation, Wiener process, random process with stationary increments, structure function.

Материал поступил 21.11.2019