

МЕТОДЫ ПОИСКА СИГНАЛОВ СПУТНИКОВЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ В ПРИЕМНИКАХ КОСМИЧЕСКОГО БАЗИРОВАНИЯ

ЧАСТЬ 2. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ КОМБИНИРОВАННОГО ПОИСКА

Настоящая статья является продолжением работы [1], посвященной методам поиска сигналов спутниковых радионавигационных систем в аппаратуре потребителей космического базирования. В предыдущей работе для поиска сигналов был предложен комбинированный подход, при котором наиболее эффективный тип поиска выбирается автоматически на основании априорной информации о частоте Доплера. Здесь предлагается метод расчета параметров комбинированного поиска сигналов.

Метод расчета параметров поиска сигналов СРНС

В первой части было показано, что для обнаружения сигнала в бортовой аппаратуре спутниковой навигации (БАСН) используется процедура усеченного последовательного анализа, называемая также процедурой Вальда. Эта процедура гарантирует минимальное среднее число наблюдений до принятия окончательного решения для заданного уровня вероятности ошибок 1-го и 2-го рода [2]. При этом под ошибкой 1-го рода понимается вывод о наличии сигнала при его фактическом отсутствии, а под ошибкой 2-го рода – необнаружение имеющегося в действительности сигнала. В соответствии с этой процедурой решающая статистика, вычисленная на интервале корреляции T и представляющая собой мощность принятой смеси сигнала и шума, итерационно суммируется в течение N последовательных эпох. На каждой итерации статистика сравнивается с порогом, который является линейной функцией номера итерации. При этом производная этой функции выбирается таким образом, чтобы в случае отсутствия сигнала в принимаемой смеси порог увеличивался быстрее статистики, а при наличии сигнала – медленнее. Решение об отсутствии сигнала принимается, если на очередной итерации статистика оказывается меньше порога. В случае если гипотеза об отсутствии сигнала не отвергнута на интервале N эпох, принимается решение об обнаружении сигнала. Параметрами алгоритма последовательного анализа, которые следует оптимизировать, являются начальный порог обнаружения Π_0 и скорость его изменения $\Delta\Pi$. Очевидно, что Π_0 и $\Delta\Pi$ являются функциями мощности шума на выходе коррелятора, которая зависит от конфигурации приемника (разные малошумящие усилители, симулятор сигналов СРНС или антенна). Для того чтобы устранить эту зависимость, мощность шума должна оцениваться самим алгоритмом поиска. В предлагаемом методе оценка мощности шума обновляется на каждой итерации, когда принимается решение об отсутствии сигнала.

Михайлов Николай Викторович. Кандидат физико-математических наук. Доцент ГУАП, Университет ИТМО, С.-Петербург. Действительный член Международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

Чистяков Валерий Валентинович. Ведущий инженер ООО «РНав», Университет ИТМО, С.-Петербург.

В общем виде аналитических зависимостей вероятности ошибок 1-го и 2-го рода от Π_0 и $\Delta\Pi$ для усеченной процедуры Вальда не получено. Известны лишь верхние границы для этих вероятностей, которые при небольших значениях N являются достаточно грубыми [3]. Однако для рассматриваемого случая, когда обработка сигнала ведется в квадратурных каналах и можно полагать, что квадратурные компоненты свертки входного сигнала с опорным являются независимыми нормально распределенными случайными величинами с единичной дисперсией, такие зависимости можно получить. Математический вывод этих зависимостей приведен в приложении. Методика проектирования, включающая в себя расчет порогов для заданных вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода, а также позволяющая оценить время поиска сигналов, сводится к трем шагам:

- 1) задаться вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода (P_{FA}, P_{MS});
- 2) найти значения Π_0 и $\Delta\Pi$, соответствующие этим вероятностям с помощью формул (11) – (13) и (21), (22), приведенных в приложении;
- 3) оценить среднее время анализа пустой ячейки для выбранных Π_0 и $\Delta\Pi$ по формуле (26).

В следующем разделе рассмотрены примеры применения этой методики ко всем типам поиска, предложенным для БАСН.

Расчет параметров усеченной процедуры Вальда для комбинированного поиска

Параллельный поиск по частоте. В этом режиме поиска корреляция входного сигнала с опорным вычисляется на одной эпохе псевдослучайной последовательности (ПСП), т.е. на интервале $T \approx 1$ мс. Как показано в первой части, влиянием доплеровского сдвига частоты на фазу опорной ПСП при этом можно пренебречь. Однако с увеличением длительности интервала корреляции возрастают энергетические потери, связанные с использованием отсчетов опорной ПСП с нулевой частотой Доплера. Число последовательных эпох N , на которых осуществляется накопление решающей статистики, определяется диапазоном изменения доплеровского сдвига частоты. Ограничив допустимые энергетические потери 2 дБ, получим, что в случае БАСН $N \leq 10$. Для минимизации общего времени поиска сигнала навигационного спутника с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) процедура усеченного последовательного анализа может быть применена отдельно к каждому частотному бину. На Рис. 1, 5 и 9 представлены зависимости вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, а также среднего времени принятия гипотезы N_0 при отсутствии сигнала от приращения порога, полученные для некоторых значений нормированного начального порога при $N = 10$ и $C/N_0 = 36$ дБГц с использованием соотношений из приложения.

Значения Π_0 и $\Delta\Pi$ для данного типа поиска могут быть получены следующим образом. Предположим, что вероятность ошибки 1-го рода не должна превосходить одной ложной тревоги при анализе двумерной области поиска. Если число точек БПФ $M = 256$ и размер кодового бина равен $f_s T / 2$, где $f_s = 5,71$ МГц, то общее число проверяемых позиций код/частота составляет $256 \times 2857 = 7,3e5$. Следовательно, вероятность ошибки 1-го рода для одной позиции код/частота не должна превышать $1,3e-6$. Пусть вероятность ошибки

2-го рода не превосходит 0,1. В силу выбора размера кодовых и частотных битов такая вероятность является допустимой. Значения порога Π_0 и его приращения $\Delta\Pi$ для этих вероятностей равны 1 и 4 соответственно. Среднее время принятия гипотезы H_0 при отсутствии сигнала в этом случае составляет 1,5 мс, т.е. анализ пустой позиции в большинстве случаев занимает 1 или 2 эпохи ПСП.

Последовательный поиск в стандартном диапазоне изменения частоты. Этот тип поиска рассматривается совместно с допоиском, используемым после БПФ для уточнения полученных оценок фазы ПСП и доплеровского сдвига частоты, так как оба алгоритма используют однопороговую схему с одинаковым временем когерентного накопления, равным 1 мс. Благодаря небольшому диапазону изменения доплеровского сдвига частоты длительность интервала наблюдений (число эпох N) для этого типа поиска может быть увеличено. На рис. 2 и 6 представлены зависимости вероятности ошибок первого и второго рода от приращения порога, рассчитанные для $N = 32$ и $C/N_0 = 33$ дБГц. Предположим, что для этого типа поиска вероятность ошибки 1-го рода не должна быть выше $1,0 \cdot 10^{-4}$, что соответствует одной ложной тревоге при анализе всей эпохи кода, а вероятность ошибки 2-го рода такая же, как и в предыдущем режиме. Значения Π_0 и $\Delta\Pi$, соответствующие этим вероятностям, равны 0 и 2. На рис. 10 представлена зависимость среднего времени принятия гипотезы N_0 при отсутствии сигнала от приращения порога для $N = 32$, из которой следует, что среднее время анализа пустой позиции для выбранных значений Π_0 и $\Delta\Pi$ равно 3 мс.

Последовательный поиск в узком диапазоне частоты. Благодаря узкому диапазону изменения доплеровского сдвига частоты время когерентного накопления в этом режиме может быть удвоено ($T = 2$ мс) при сохранении общего времени поиска, как и в предыдущем режиме. При этом чувствительность поиска улучшается на 3 дБ. Для поиска сигналов в широком диапазоне изменения отношения сигнал/шум в данном режиме реализована двухпороговая схема, так как при использовании только одного порога обнаружения невозможно обеспечить приемлемые вероятности ошибок 1-го и 2-го рода. На первом цикле осуществляется поиск сигналов с отношением сигнал/шум порядка 37 дБГц. При этом значения Π_0 и $\Delta\Pi$ выбираются так, чтобы обеспечить приемлемый компромисс между вероятностью ошибки 1-го рода, средним временем принятия гипотезы N_0 и допустимой вероятностью ошибки 2-го рода, так как ошибка, связанная с пропуском сигнала, может быть исправлена на втором цикле поиска. На Рис. 3, 7 и 11 представлены зависимости вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, а также среднее время принятия гипотезы H_0 от приращения порога для первого цикла поиска. Для таких же характеристик поиска, как и в предыдущем режиме, значения Π_0 и $\Delta\Pi$ должны быть равны 2 и 4,5 соответственно.

На втором цикле общее время поиска увеличено в 4 раза ($N = 64$), а порог настроен для обнаружения сигналов с уровнем порядка 30 дБГц. Выбор Π_0 и $\Delta\Pi$ в этом случае осуществляется так, чтобы достичь приемлемых вероятности ошибки 2-го рода и среднего времени принятия гипотезы H_0 . На Рис. 4, 8 и 12

Рис. 12 представлены зависимости вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, а также среднее время принятия гипотезы H_0 при отсутствии сигнала от приращения порога для $N = 32$ и $C/N_0 = 26$ дБГц. Значения Π_0 и $\Delta\Pi$, при которых

обеспечиваются такие же вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, как и в предыдущих режимах, равны минус 10,0 и 3,25. При этом среднее время анализа пустой ячейки ≈ 20 мс. Характеристики всех типов поиска сигналов в БАСН обобщены в таблице.

Характеристики комбинированного поиска

Тип поиска	C/N_0 , дБГц	T , мс	N	Π_0	$\Delta\Pi$	P_{FA}	P_{MS}	T , мс
Параллельный поиск по частоте	40	1	10	1,0	4,0	1,3e-6	0,03	1,5
Последовательный поиск в стандартном диапазоне изменения частоты	37	1	32	0,0	2,0	1,0e-4	0,02	3,0
Последовательный поиск в узком диапазоне изменения частоты (1-й цикл)	37	2	16	2,0	4,5	1,0e-4	0,07	3,2
Последовательный поиск в узком диапазоне изменения частоты (2-й цикл)	30	2	64	-10,0	3,2	1,0e-4	0,13	20

Таблица иллюстрирует два важных практических аспекта проектирования поиска сигналов СРС в БАСН:

- за счет увеличения времени поиска практически на порядок удается повысить чувствительность поиска на 7–10 дБ (режим последовательного поиска в узком диапазоне);
- в поиске с использованием БПФ вероятность ошибки 1-го рода была выбрана на два порядка ниже, чем в других режимах. Это сделано из-за большого числа проверяемых гипотез в этом режиме.

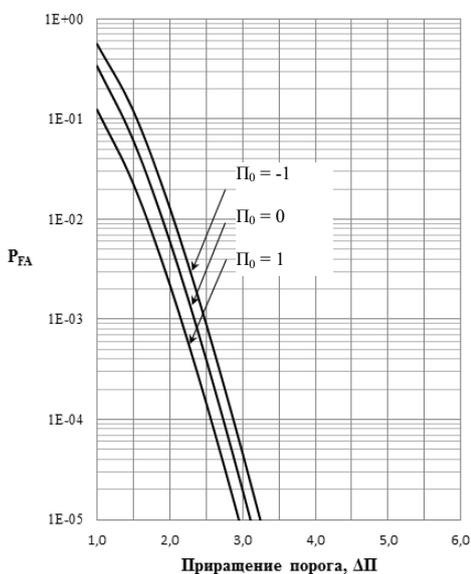


Рис. 1. Вероятность ошибки 1-го рода для $N = 10$

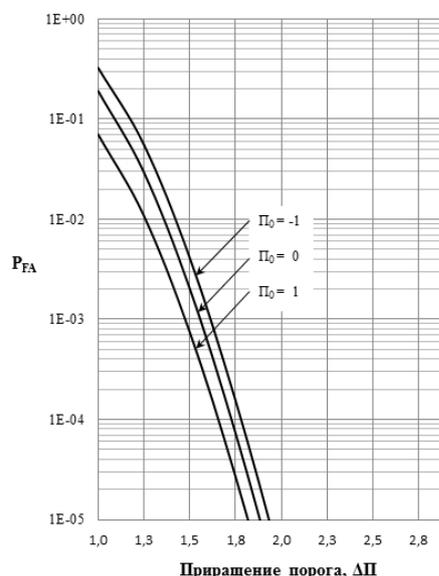


Рис. 2. Вероятность ошибки 1-го рода для $N = 32$

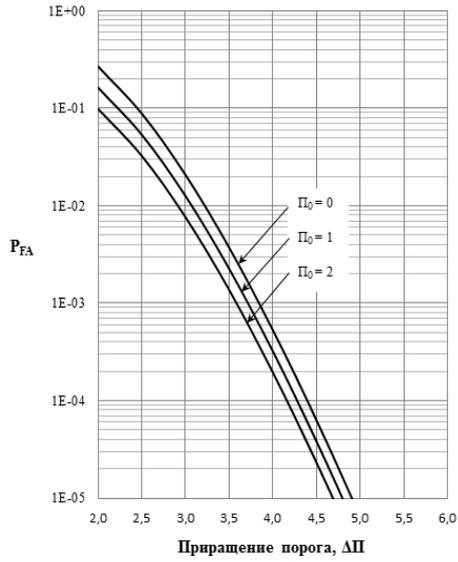


Рис. 3. Вероятность ошибки 1-го рода для $N = 16$

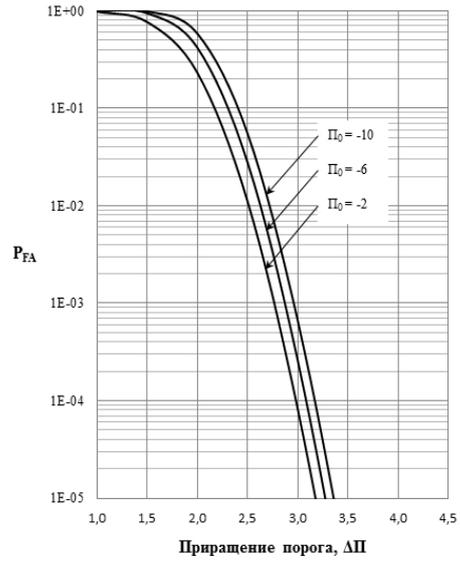


Рис. 4. Вероятность ошибки 1-го рода для $N = 64$

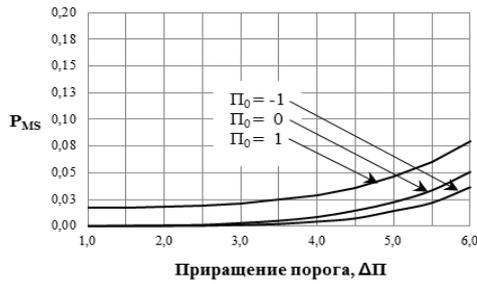


Рис. 5. Вероятность ошибки 2-го рода для $N = 10$ и $C/N_0 = 36$ дБГц

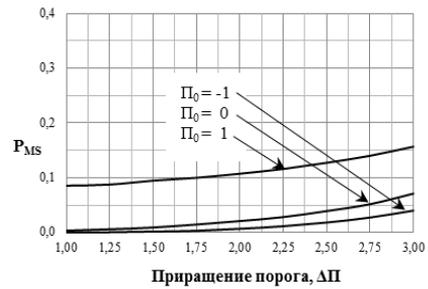


Рис. 6. Вероятность ошибки 2-го рода для $N = 32$ и $C/N_0 = 33$ дБГц

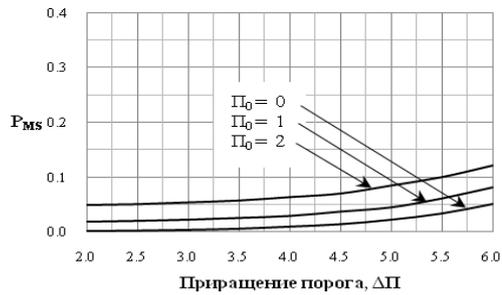


Рис. 7. Вероятность ошибки 2-го рода для $N = 16$ и $C/N_0 = 33$ дБГц

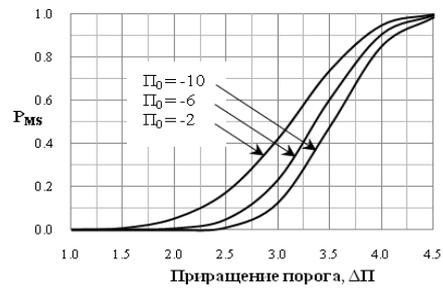


Рис. 8. Вероятность ошибки 2-го рода для $N = 16$ и $C/N_0 = 26$ дБГц

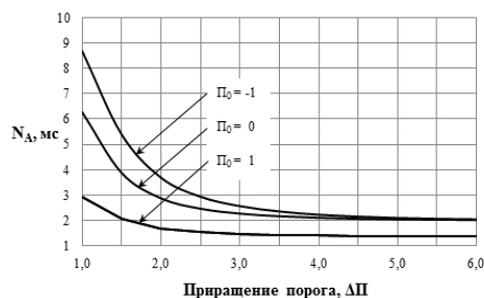


Рис. 9. Среднее время принятия гипотезы H_0 при отсутствии сигнала для $N = 10$

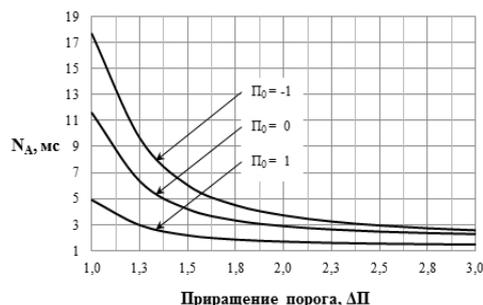


Рис. 10. Среднее время принятия гипотезы H_0 при отсутствии сигнала для $N = 32$

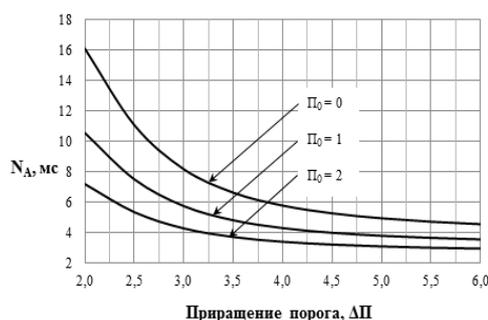


Рис. 11. Среднее время принятия гипотезы H_0 при отсутствии сигнала для $N = 32$

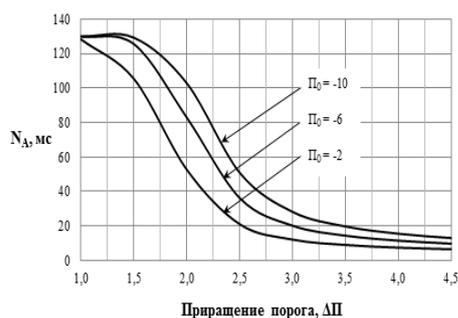


Рис. 12. Среднее время принятия гипотезы H_0 при отсутствии сигнала для $N = 32$

Заключение

Для процедуры усеченного последовательного анализа Вальда получены аналитические зависимости вероятности ошибок 1-го и 2-го рода от значения начального порога обнаружения и скорости его изменения. На основе этих зависимостей разработан метод проектирования поиска сигналов СРНС в БАСН. Приведен пример проектирования всех режимов поиска, даны практические рекомендации для разработчиков БАСН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов, Н. В., Чистяков, В.В. Методы поиска сигналов спутниковых навигационных систем в приемниках космического базирования. Часть 1. Комбинированный поиск // Гироскопия и навигация. - 2013. - №. 4. - С. 60-71.
2. Сейдж, Э., Мелс, Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э. Сейдж, - М.: «Связь», 1976. - 146-156 с.
3. Вальд А. Последовательный анализ. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Изд. 3-е, перераб. и доп. - М.: «Радио и связь», 1989.
5. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. - М.: «Наука», 1969.

**Расчет вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода
для усеченной процедуры Вальда**

Пусть $Z_k = I_k^2 + Q_k^2$, где I_k, Q_k – квадратурные компоненты свертки входного сигнала с опорным на k -м интервале корреляции, нормированные к средне-квадратическому значению шума. Так как компоненты I_k и Q_k являются, независимыми нормально распределенными случайными величинами с единичной дисперсией, то величина Z_k имеет χ^2 -распределение с двумя степенями свободы и параметром нецентральности λ_k , плотность вероятности которого описывается выражением [4]

$$p(Z_k) = \frac{1}{2} e^{-\frac{Z_k + \lambda_k}{2}} I_0(\sqrt{\lambda_k Z_k}), \quad (1)$$

где $\lambda_k = E^2\{I_k\} + E^2\{Q_k\}$, $E\{x\}$ – математическое ожидание величины x ; $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В случае справедливости гипотезы H_0 об отсутствии сигнала параметр λ_k равен 0, а распределение случайной величины Z_k преобразуется в экспоненциальное с плотностью вероятности:

$$p(Z_k | H_0) = \frac{1}{2} e^{-Z_k/2}, \quad Z_k \geq 0. \quad (2)$$

Так как Z_1, Z_2, \dots, Z_N являются независимыми, то их совместная плотность распределения вероятности равна произведению плотностей каждой из них

$$p(Z_1, Z_2, \dots, Z_N | H_0) = \frac{1}{2^N} e^{-1/2 \sum_{k=1}^N Z_k}. \quad (3)$$

Рассмотрим линейное преобразование Z_1, Z_2, \dots, Z_N , описываемое системой уравнений:

$$\Lambda_i = \sum_{j=1}^i Z_j, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Очевидно, что для $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N$ выполняются неравенства

$$0 \leq \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_N < \infty. \quad (5)$$

Так как якобиан преобразования (4) равен 1, то совместная плотность распределения вероятности величин $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N$ имеет вид:

$$p(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N | H_0) = \frac{1}{2^N} e^{-\Lambda_N/2}. \quad (6)$$

Вероятность ложной тревоги для усеченной процедуры Вальда с порогами $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N$ определяется выражением

$$P_{FA}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = P\{\Lambda_1 > \Pi_1 \cap \Lambda_2 > \Pi_2 \cap \dots \cap \Lambda_N > \Pi_N | H_0\}. \quad (7)$$

Учитывая неравенства (5), выражение (7) может быть записано в виде:

$$P_{FA}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = \int_{\Pi_N} \int_{\Pi_{N-1}} \dots \int_{\Pi_1}^{\Lambda_N} \dots \int_{\Pi_1}^{\Lambda_2} p(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N | H_0) d\Lambda_1 d\Lambda_2 \dots d\Lambda_N. \quad (8)$$

Подставив (6) в (8), получим:

$$P_{FA}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = \frac{1}{2^N} \int_{\Pi_N} e^{-\Lambda_N/2} \int_{\Pi_{N-1}} \dots \int_{\Pi_1}^{\Lambda_N} d\Lambda_1 d\Lambda_2 \dots d\Lambda_N. \quad (9)$$

Пусть $Q(\Lambda_N) = \int_{\Pi_{N-1}} \int_{\Pi_1}^{\Lambda_2} \dots \int_{\Pi_1}^{\Lambda_N} d\Lambda_1 d\Lambda_2 \dots d\Lambda_{N-1} = \sum_{k=1}^N q_k \Lambda_N^{k-1}$. Тогда выражение

(9) примет вид

$$P_{FA}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = \frac{1}{2^N} \int_{\Pi_N} e^{-\Lambda_N/2} Q(\Lambda_N) d\Lambda_N. \quad (10)$$

Используя свойство линейности интеграла, преобразуем (10) следующим образом:

$$P_{FA}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=1}^N q_k F_k(\Pi_N), \text{ где } F_k(\Pi_N) = \int_{\Pi_N} x^{k-1} e^{-x/2} dx. \quad (11)$$

Значения $F_k(\Pi_N)$ могут быть вычислены с помощью рекуррентного соотношения:

$$F_k(\Pi_N) = 2\Pi_N^{k-1} e^{-\Pi_N/2} + 2(k-1)F_{k-1}(\Pi_N), \text{ где } F_1(\Pi_N) = 2e^{-\Pi_N/2}. \quad (12)$$

Коэффициенты полинома $Q(\Lambda_N)$ вычисляются итерационно:

$$\begin{cases} q_j^{(i)} = \frac{q_{j-1}^{(i-1)}}{j-1}, j = N \dots 2 \\ q_1^{(i)} = -\frac{q_{N-1}^{(i-1)}}{N-1} \Pi_{i-1}^{N-1} - \frac{q_{N-2}^{(i-1)}}{N-2} \Pi_{i-1}^{N-2} - \dots - q_1^{(i-1)} \Pi_{i-1} \end{cases} \text{ при } 1 < i \leq N. \quad (13)$$

Значения коэффициентов полинома на 1-й итерации определяются следующим образом: $q_N^{(1)} = 0, q_{N-1}^{(1)} = 0, \dots, q_1^{(1)} = 1$.

Учитывая, что $\Pi_k = \Pi_1 + (k-1)\Delta\Pi$, вероятность ложной тревоги усеченной процедуры Вальда является функцией только трех параметров, т.е.

$$P_{FA}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = P_{FA}(N, \Pi_1, \Delta\Pi).$$

Вероятность пропуска сигнала для усеченной процедуры Вальда задается выражением:

$$P_{MS}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = P\{\Lambda_1 < \Pi_1 \cup \Lambda_2 < \Pi_2 \cup \dots \cup \Lambda_N < \Pi_N | H_1\}. \quad (14)$$

Так как вероятность того, что произойдет хотя бы одно из N событий равна единице минус вероятность того, что не произойдет ни одно из этих событий, то последнее выражение может быть записано в виде:

$$P_{MS}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = 1 - P\{\Lambda_1 > \Pi_1 \cap \Lambda_2 > \Pi_2 \cap \dots \cap \Lambda_N > \Pi_N | H_1\}. \quad (15)$$

Учитывая неравенства (5), вероятность пропуска сигнала находится следующим образом:

$$P_{MS}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = 1 - \int_{\Pi_N} \int_{\Pi_{N-1}}^{\Lambda_N} \dots \int_{\Pi_1}^{\Lambda_2} p(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N | H_1) d\Lambda_1 d\Lambda_2 \dots d\Lambda_N, \quad (16)$$

где $p(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N | H_1)$ – совместная плотность распределения вероятности $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N$ при условии справедливости гипотезы H_1 о наличии сигнала. В этом случае плотность распределения вероятности Z_k имеет нецентральное χ^2 -распределение с параметром нецентральности λ_k . Будем считать, что на интервале N эпох средняя мощность принятой смеси сигнала и шума не меняется, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = \lambda$. Используя представление $I_0(x)$ в виде ряда [5], выражение для плотности распределения вероятности Z_k может быть преобразовано к виду

$$p(Z_k | H_1) = \frac{1}{2} e^{-\frac{Z_k + \lambda_k}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda_k Z_k / 4)^i}{(i!)^2}, Z_k \geq 0. \quad (17)$$

В силу независимости Z_1, Z_2, \dots, Z_N их совместная плотность распределения вероятности определяется следующим образом:

$$p(Z_1, Z_2, \dots, Z_N | H_1) = \frac{1}{2^N} e^{-1/2 \left\{ \sum_{k=1}^N Z_k + N\lambda \right\}} \sum_{i_1 \dots i_N} \frac{(\lambda Z_1 / 4)^{i_1} \dots (\lambda Z_N / 4)^{i_N}}{(i_1!)^2 \dots (i_N!)^2}. \quad (18)$$

Индексы суммирования в (18) принимают все возможные значения в диапазоне от 0 до $+\infty$. Следовательно, при условии справедливости гипотезы H_1 выражение для совместной плотности распределения вероятности с.в. $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N$, с учетом соотношений (4), имеет вид:

$$p(\Lambda_1, \dots, \Lambda_N | H_1) = \frac{1}{2^N} e^{-\{\Lambda_N + N\lambda\}/2} \times \sum_{i_1 \dots i_N} \left(\frac{\lambda}{4} \right)^{i_1 + \dots + i_N} \frac{\Lambda_1^{i_1} (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{i_2} \dots (\Lambda_N - \Lambda_{N-1})^{i_N}}{(i_1!)^2 \dots (i_N!)^2}. \quad (19)$$

Введем обозначения:

$$a_N = \frac{1}{2^N} e^{-N\lambda/2}, b_{i_1 \dots i_N} = \frac{(\lambda/4)^{i_1 + \dots + i_N}}{(i_1!)^2 \dots (i_N!)^2}, c_{j_2 \dots j_N} = (-1)^{j_2 + \dots + j_N} C_{i_2}^{j_2} \dots C_{i_N}^{j_N},$$

где C_i^j – число сочетаний из i по j . Тогда выражение (19) может быть преобразовано к виду:

$$p(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N | H_1) = a_N \sum_{i_1 \dots i_N} \left\{ \sum_{j_2 \dots j_N} c_{j_2 \dots j_N} e^{-\Lambda_N/2} \Lambda_1^{i_1+j_2} \Lambda_2^{i_2-j_2+j_3} \dots \Lambda_N^{i_N-j_N} \right\}. \quad (20)$$

Индексы суммирования j_2, \dots, j_N изменяются в диапазонах: $0 \leq j_2 \leq i_2, \dots, 0 \leq j_N \leq i_N$. Подставив (29) в (16), получим следующее выражение для вероятности пропуска сигнала:

$$P_{MS}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = 1 - a_N \sum_{i_1 \dots i_N} \left\{ \sum_{j_2 \dots j_N} c_{j_2 \dots j_N} P_{i_1 \dots i_N, j_2 \dots j_N}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) \right\}, \quad (21)$$

где $P_{i_1 \dots i_N, j_2 \dots j_N}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = \int_{\Pi_N} \int_{\Pi_{N-1}} \dots \int_{\Pi_1}^{\Lambda_N} e^{-\Lambda_N/2} \Lambda_1^{i_1+j_2} \Lambda_2^{i_2-j_2+j_3} \dots \Lambda_N^{i_N-j_N} d\Lambda_1 \dots d\Lambda_N$.

Пусть $Q_{k_1 \dots k_N}(\Lambda_N) = \int_{\Pi_{N-1}} \dots \int_{\Pi_1}^{\Lambda_N} \Lambda_1^{k_1} \Lambda_2^{k_2} \dots \Lambda_N^{k_N} d\Lambda_1 d\Lambda_2 \dots d\Lambda_{N-1} = \sum_{k=1}^M q_k \Lambda_N^{k-1}$, где

$M = k_1 + k_2 + \dots + k_N + N$. Тогда выражение для $P_{i_1 \dots i_N, j_2 \dots j_N}(\Pi_1, \dots, \Pi_N)$, с учетом (11), может быть записано в виде: $P_{i_1 \dots i_N, j_2 \dots j_N}(\Pi_1, \dots, \Pi_N) = \sum_{k=1}^M q_k F_k(\Pi_N)$. Коэф-

фициенты полинома $Q_{k_1 \dots k_N}(x)$ могут быть найдены итерационно:

$$\left\{ \begin{aligned} q_{k_1+\dots+k_i+i}^{(i)} &= \frac{q_{k_1+\dots+k_{i-1}+i-1}^{(i-1)}}{k_1 + \dots + k_{i-1} + i - 1} \\ q_{k_2+\dots+k_i+i-1}^{(i)} &= \frac{q_{k_2+\dots+k_{i-1}+i-2}^{(i-1)}}{k_2 + \dots + k_{i-1} + i - 2} \\ &\vdots \\ q_{k_{i-1}+k_i+2}^{(i)} &= \frac{q_{k_{i-1}+1}^{(i-1)}}{k_{i-1} + 1} \\ q_{k_i+1}^{(i)} &= -\frac{q_{k_1+\dots+k_{i-1}+i-1}^{(i-1)}}{k_1 + \dots + k_{i-1} + i - 1} \prod_{i-1}^{k_1+\dots+k_{i-1}+i-1} - \dots - \frac{q_{k_{i-1}+1}^{(i-1)}}{k_{i-1} + 1} \prod_{i-1}^{k_{i-1}+1} \end{aligned} \right. \quad \text{при } 1 < i \leq N. \quad (22)$$

Для первой итерации значения коэффициентов определяются следующим образом:

$$q_n^{(1)} = \begin{cases} 1, & n = k_1 + 1 \\ 0, & n \neq k_1 + 1 \end{cases}$$

В случае справедливости гипотезы H_0 среднее число наблюдений, необходимое для принятия этой гипотезы, определяется выражением

$$N_A(N, \Pi_1, \Delta\Pi) = \sum_{k=1}^N k P_k + (N+1) P_{FA}(N, \Pi_1, \Delta\Pi), \quad (23)$$

где P_k – вероятность того, что гипотеза принята на k -м шаге. Введем обозначения:

$$A_k = \Lambda_1 > \Pi_1 \cap \Lambda_2 > \Pi_2 \cap \dots \cap \Lambda_{k-1} > \Pi_{k-1} \cap \Lambda_k < \Pi_k,$$

$$B_k = \Lambda_1 > \Pi_1 \cap \Lambda_2 > \Pi_2 \cap \dots \cap \Lambda_{k-1} > \Pi_{k-1} \cap \Lambda_k > \Pi_k,$$

$$C_k = \Lambda_k < \Pi_k.$$

Тогда $P_k = P\{A_k\}$. События $B_{k-1} \cap C_k$ и $B_{k-1} \cap \overline{C_k}$ являются взаимно исключающими. Следовательно, вероятность того, что произойдет одно из этих двух событий, равна сумме вероятностей появления отдельных событий:

$$P\left\{(B_{k-1} \cap C_k) \cup (B_{k-1} \cap \overline{C_k})\right\} = P\{B_{k-1} \cap C_k\} + P\{B_{k-1} \cap \overline{C_k}\}.$$

С другой стороны, $(B_{k-1} \cap C_k) \cup (B_{k-1} \cap \overline{C_k}) = B_{k-1} \cap (C_k \cup \overline{C_k}) = B_{k-1}$. Таким образом, справедливо соотношение: $P\{B_{k-1} \cap C_k\} = P\{B_{k-1}\} - P\{B_{k-1} \cap \overline{C_k}\}$. Осталось заметить, что $B_{k-1} \cap C_k = A_k$, $B_{k-1} \cap \overline{C_k} = B_k$, т.е. $P\{A_k\} = P\{B_{k-1}\} - P\{B_k\}$. Учитывая, что $P\{B_k\} = P_{FA}(k, \Pi_1, \Delta\Pi)$, выражение для P_k может быть записано следующим образом:

$$P_k = \begin{cases} P_{FA}(k-1, \Pi_1, \Delta\Pi) - P_{FA}(k, \Pi_1, \Delta\Pi), & k > 1 \\ 1 - P_{FA}(1, \Pi_1, \Delta\Pi), & k = 1 \end{cases} \quad (24)$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^N k P_k = 1 - P_{FA}(1, \Pi_1, \Delta\Pi) + \sum_{k=2}^N k \{P_{FA}(k-1, \Pi_1, \Delta\Pi) - P_{FA}(k, \Pi_1, \Delta\Pi)\}. \quad (25)$$

После упрощения (25) выражение для среднего числа наблюдений преобразуется к виду:

$$N_A(N, \Pi_1, \Delta\Pi) = 1 + \sum_{k=1}^N P_{FA}(k, \Pi_1, \Delta\Pi). \quad (26)$$

Abstract. This paper continues the study [1] devoted to methods of GNSS signal search applied in space-based receivers. In Part 1, a combined approach is proposed, where the most effective search type is selected automatically based on a priori Doppler frequency. Here, a method to calculate the parameters of combined search is described. Calculation of probabilities of the first and second type errors for truncated Wald analysis is given in appendix to this paper.

Key words: truncated Wald analysis, GNSS, space-based receivers, combined signal search

Материал поступил 26.08.13