

МЕТОДИКА СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА РЕКУРРЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ ПРЕДСКАЗАТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Описывается методика, с использованием которой на основе предсказательного моделирования предлагается проводить сопоставление рекуррентных субоптимальных алгоритмов, разрабатываемых для решения задач нелинейной фильтрации, в том числе связанных с обработкой навигационной информации, с точки зрения точности, состоятельности и вычислительной сложности. Приводятся примеры, поясняющие указанную методику и иллюстрирующие ее применение.

Ключевые слова: методика, сопоставление, точность, состоятельность, вычислительная сложность, алгоритмы, нелинейная фильтрация, навигационная информация.

1. Введение

При проектировании современных навигационных и радиотехнических систем значительную роль играют алгоритмы обработки измерительной информации [1–10]. Широкое применение при этом получили алгоритмы, в основе которых лежит предположение о случайном характере обрабатываемых сигналов и погрешностей используемых измерителей. В этом случае при синтезе алгоритмов эффективным оказывается использование теории байесовской фильтрации, позволяющей построить оптимальные в среднеквадратическом смысле алгоритмы оценивания неизвестных параметров и предполагающей задание моделей для сигналов и погрешностей измерения в виде случайных процессов и последовательностей [11–20].

Наибольшее распространение при этом получили марковские процессы и последовательности, которые могут быть описаны с помощью формирующих фильтров в виде дифференциальных или разностных уравнений. Для линейных моделей при гауссовском характере погрешностей универсальным (простым и удобным в вычислительном отношении) алгоритмом, обеспечивающим оптимальное решение задач оценивания, является широко известный фильтр Калмана [2, 11]. При наличии нелинейностей в уравнениях формирующих фильтров и уравнениях, описывающих зависимость измеряемых величин от оцениваемых параметров, такого алгоритма не существует, и разработчики сталкиваются с необходимостью построения упрощенных (субоптимальных) алгоритмов [4, 5, 9, 10]. Эти алгоритмы, с одной стороны, должны обеспечивать точность, близкую к потенциальной, достигаемой с помощью оптимального алгоритма, а с другой – не предъявлять значительных требований к вычислительным средствам при их реализации.

Степанов Олег Андреевич. Член-корреспондент РАН, начальник НОЦ, АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», Университет ИТМО (С.-Петербург). Вице-президент международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID: 0000-0003-3640-3760.

Исаев Алексей Михайлович. Аспирант, младший научный сотрудник, АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», Университет ИТМО. ORCID: 0000-0003-2111-0308.

Следует также заметить, что важной отличительной особенностью алгоритмов фильтрации, разрабатываемых в рамках стохастического байесовского подхода, является возможность учитывать наличие погрешностей измерения и вырабатывать при этом как саму оценку, так и соответствующую им характеристику точности в виде расчетной матрицы ковариаций погрешностей оценивания. Это свойство особенно важно в задачах, связанных с обработкой навигационной информации, поскольку при их решении необходимо не только получать сами оцениваемые параметры, но и иметь количественную характеристику того, с какой точностью они определяются. Алгоритмы, в которых расчетная матрица ковариаций согласована с действительной, получили наименование состоятельных [6, 21, 22]. Необходимо иметь в виду, что традиционно термин «состоятельность» используется при анализе свойств самих оценок [8]. В настоящей же работе он, согласно [6], привлекается для определения свойств алгоритмов оценивания. Из сказанного выше следует, что при разработке субоптимальных алгоритмов решения нелинейных задач фильтрации неизбежно возникает проблема их сопоставления с учетом достигаемой точности, обеспечения свойств состоятельности и вычислительной сложности.

Нередко такое сопоставление осуществляется на основе моделирования с применением метода статистических испытаний. Суть его заключается в том, что сначала сигналы и погрешности измерения многократно моделируются в соответствии с принятыми моделями, а затем с их использованием с помощью разрабатываемого алгоритма вычисляются как сами искомые оценки, так и соответствующие им погрешности оценивания [3, 5, 23–25]. Роль этого подхода в последнее время значительно возрастает. Далее в статье такое моделирование будем называть предсказательным, имея в виду, что окончательные ответы на вопросы, связанные с эффективностью алгоритмов, могут быть получены лишь при испытаниях в реальных условиях.

В настоящее время не существует общепринятой четко сформулированной методики для такого сопоставления алгоритмов. В ряде случаев авторы ограничиваются разовым решением задачи, без привлечения метода статистических испытаний. В частности, такая ситуация характерна для алгоритмов, которые строятся на основе детерминированного подхода [26–30]. Нередки случаи, когда даже не проводится какого-либо сопоставления с уже известными методами, а демонстрируется лишь работоспособность предложенного алгоритма.

Отмеченное выше понятие состоятельности алгоритмов введено в практику не так давно и в отечественной литературе используется достаточно редко [21, 22, 31], так что вопросам анализа состоятельности алгоритмов уделяется еще меньшее внимание. В то же время благодаря многократному моделированию и обработке множества реализаций создаются предпосылки для вычисления выборочной безусловной действительной матрицы ковариаций для погрешностей оценивания, которую и следует затем сопоставлять со значениями выборочной безусловной расчетной матрицы ковариаций для оценки состоятельности. При этом даже в тех случаях, когда такие вычисления осуществляются [23–25], как правило, сопоставление выполняется на качественном уровне с точки зрения и точности, и вычислительной загрузки. Какие-либо количественные характеристики при анализе состоятельности обычно не вводятся.

При решении нелинейных задач важно также иметь в виду, что апостериорная плотность для оцениваемых параметров и их погрешностей не является гауссовской, и поэтому знание величины среднеквадратической погрешности (СКП) не обеспечивает возможность в полной мере охарактеризовать свойства погрешностей оценивания.

Вопросу разработки методики, с использованием которой на основе предсказательного моделирования можно проводить сопоставление алгоритмов нелинейной фильтрации с точки зрения точности, состоятельности и вычислительной загрузки, и посвящена предлагаемая статья. В ней авторы развивают результаты, полученные в [32].

Структура работы следующая. В разделе 2 в рамках байесовского подхода описывается постановка исследуемой задачи нелинейной фильтрации и в общем виде оптимальный алгоритм ее решения. Сама предлагаемая методика рассматривается в разделе 3, а в разделе 4 она поясняется на примере решения задачи нелинейной фильтрации марковской последовательности, в которой уравнения динамики содержат нелинейность второго порядка, а измерения линейны. В разделе 5 применение предложенной методики проиллюстрировано на примере оценки эффективности использования обобщенного и ансамблевого фильтров Калмана для решения задачи навигации по геофизическим полям. Основные выводы приведены в заключении.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача нелинейной дискретной фильтрации – необходимо оценить n -мерный случайный вектор x_k , описываемый с помощью формирующего фильтра [31]

$$x_k = f_k(x_{k-1}) + \Gamma_k w_k, \quad (1)$$

по m -мерным измерениям следующего вида:

$$y_k = h_k(x_k) + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где k – индекс дискретного времени; x_0 – n -мерный случайный гауссовский вектор с функцией плотности распределения вероятности (ф.п.р.в.) $p(x_0) = N(x_0; \bar{x}_0, P_0^x)$ (здесь и далее обозначение $N(a; \bar{a}, A)$ используется для плотности гауссовского случайного вектора a с математическим ожиданием \bar{a} и матрицей ковариаций A); w_k – n_w -мерный центрированный дискретный гауссовский белый шум, не зависящий от x_0 , с известной матрицей ковариаций Q_k ; Γ_k – известная матрица размерности $n \times n_w$; v_k – m -мерный центрированный дискретный гауссовский белый шум, не зависящий от x_0 и w_k , с известной матрицей ковариации R_k .

Известно, что при решении задачи фильтрации в рамках байесовского подхода оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\hat{x}_k^{opt}(Y_k)$ и условная матрица ковариаций $P_k^{opt}(Y_k)$ определяются в виде [12, 14, 5, 33–35]

$$\hat{x}_k^{opt}(Y_k) = \int x_k p(x_k / Y_k) dx_k, \quad (3)$$

$$P_k^{opt}(Y_k) = E_{p(x_k/Y_k)} \left\{ (x_k - \hat{x}_k^{opt}(Y_k))(x_k - \hat{x}_k^{opt}(Y_k))^T \right\}, \quad (4)$$

где $p(x_k/Y_k)$ – апостериорная (условная к набору измерений $Y_k = (y_1, \dots, y_k)^T$) ф.п.р.в., называемая далее просто апостериорной плотностью (АП), а E – знак математического ожидания с нижним индексом, поясняющим, по какой ф.п.р.в. оно вычисляется. Подчеркнем, что оптимальная оценка минимизирует условную (4) и безусловную матрицу ковариаций погрешностей оценивания, определяемую как [3, 5, 8, 33]

$$G_k^{opt} = E_{p(x_k, Y_k)} \left\{ (x_k - \hat{x}_k^{opt}(Y_k))(x_k - \hat{x}_k^{opt}(Y_k))^T \right\}. \quad (5)$$

При этом под минимизацией матриц понимается минимизация соответствующих квадратичных форм [3, 5, 8, 33]. В приведенных соотношениях условная матрица ковариаций (4) определяет текущую погрешность оценивания, соответствующую конкретной реализации измерений Y_k , а безусловная матрица ковариаций (5) – погрешность, рассчитанную путем вероятностного осреднения по всему возможному набору измерений.

Для решения сформулированной задачи необходимо располагать АП $p(x_k/Y_k)$, вычисление которой достаточно трудоемко, что и заставляет разработчиков синтезировать различного рода субоптимальные алгоритмы. В свою очередь, это порождает необходимость анализа их эффективности и сопоставления. Далее будет рассмотрена методика, позволяющая сопоставлять алгоритмы с точки зрения как точности и вычислительной сложности, так и состоятельности, т.е. близости вырабатываемой в алгоритме расчетной матрицы ковариаций ее действительному значению.

3. Методика сравнительного анализа

Предлагаемая методика основана на результатах предсказательного моделирования, проводимого с использованием широко распространенного метода статистических испытаний. Суть его в рассматриваемом случае заключается в том, что сначала сигналы и погрешности измерений моделируются в соответствии с принятыми моделями (1) и (2), которые затем привлекаются для вычисления с помощью подлежащего анализу алгоритма искомых оценок и соответствующих им погрешностей $\varepsilon_k^{\mu(j)}(Y_k^{(j)})$, определяемых как

$$\varepsilon_k^{\mu(j)}(Y_k^{(j)}) = x_k^{(j)} - \hat{x}_k^{\mu(j)}(Y_k^{(j)}), \quad (6)$$

где $x_k^{(j)}, Y_k^{(j)}, j = \overline{1, L}$ – реализации случайных последовательностей, полученные путем моделирования согласно выражениям (1) и (2); L – общее число реализаций; $\hat{x}_k^{\mu}(Y_k^{(j)})$ – оценки для анализируемого алгоритма с индексом μ . С их использованием, как это описано, например, в работе [31], рассчитываются выборочные значения безусловных матриц ковариаций, которые и служат основой для дальнейшего анализа точности и состоятельности:

$$G_k^{\mu} \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (\varepsilon_k^{\mu(j)}(Y_k^{(j)})) (\varepsilon_k^{\mu(j)}(Y_k^{(j)}))^T, \quad (7)$$

$$\tilde{G}_k^{\mu} \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L P_k^{\mu}(Y_k^{(j)}), \quad (8)$$

где $P_k^{\mu}(Y_k^{(j)})$ – условные расчетные матрицы ковариаций для алгоритма с индексом μ . Анализ с позиции точности предлагается проводить путем расчета коэффициента точности ξ_{ik}^{μ} , который позволяет сопоставлять СКП оценивания i -й компоненты вектора состояния, полученную с помощью анализируемого алгоритма, с СКП для другого алгоритма, называемого далее базовым:

$$\xi_{ik}^{\mu} = \frac{\sqrt{[G_k^{\mu}]_{i,i}} - \sqrt{[G_k^*]_{i,i}}}{\sqrt{[G_k^*]_{i,i}}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

где $[G_k^*]_{i,i}$ – диагональные элементы безусловных матриц ковариаций, определяющие выборочные дисперсии для алгоритма с индексом μ ; $[G_k^*]_{i,i}$ – аналогичные величины для базового алгоритма.

Аналогичные коэффициенты обычно задействуются при анализе чувствительности линейных алгоритмов [38]. В качестве базового алгоритма желательно использовать нелинейный оптимальный алгоритм в том случае, если удастся реализовать его в процессе предсказательного моделирования. Такая ситуация представляется идеальной. Под оптимальным здесь понимается алгоритм, позволяющий обеспечить заданный уровень вычислительной погрешности для искомым оценок. В качестве такого алгоритма может быть в частности применен алгоритм, основанный на методе Монте-Карло [36, 37]. Заметим, что принципиальная возможность его построения в ряде случаев появляется в силу того, что предсказательное моделирование осуществляется в режиме камеральной обработки, когда не предъявляется жестких требований по ограничению объема вычислений. Если сделать это затруднительно или даже невозможно, в качестве $[G_k^*]_{i,i}$ может быть использована СКП, соответствующая одному из сопоставляемых алгоритмов, а также СКП, соответствующая нижней границе точности по Рао–Крамеру для матрицы ковариаций погрешностей оптимального оценивания [5, 39–42].

Для анализа состоятельности предлагается рассчитывать коэффициент ς_{ik}^μ , позволяющий для каждой компоненты оценивать отличие действительных и вырабатываемых в алгоритме расчетных значений СКП:

$$\varsigma_{ik}^\mu = \frac{\sqrt{[\tilde{G}_k^\mu]_{i,i}} - \sqrt{[G_k^\mu]_{i,i}}}{\sqrt{[G_k^\mu]_{i,i}}}, i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Как дополнительную характеристику точности анализируемого алгоритма оценивания предлагается для каждой i -й компоненты вектора состояния рассчитывать коэффициент, определяющий вероятность попадания погрешности оценивания ρ_{ik}^μ в заданный интервал. Например, это может быть интервал, соответствующий утренним расчетным значениям СКП (интервал трех сигм). В этом случае вероятность может быть определена как

$$\rho_{ik}^\mu = \frac{N(\varepsilon_{ik}^{\mu(j)})}{L}, \quad (11)$$

где $N(\varepsilon_{ik}^{\mu(j)})$ – количество погрешностей оценивания $\varepsilon_{ik}^j, j = \overline{1, L}$ i -й компоненты вектора состояния, для которых

$$|\varepsilon_{ik}^{\mu(j)}| \leq 3 \cdot \sqrt{[P_k^{\mu(j)}]_{i,i}}.$$

В ряде случаев может быть полезным выявление реализации погрешностей (6) с максимальным значением по некоторым компонентам для фиксированного момента времени. С помощью таких реализаций в дальнейшем становится возможным более подробный анализ причин снижения точности субоптимального алгоритма без повторного привлечения затратного в вычислительном плане метода статистических испытаний. Значения максимальной погрешности и вероятность (11) весьма полезны при решении нелинейных задач, в которых распределение погрешностей оценивания не является гауссовским. Полезным также представляется и построение гистограмм по массиву погрешностей ε_{ik}^j , полученных в процессе предсказательного моделирования, как это делается, например, в работах [23–25].

Для анализа вычислительных затрат рассматриваемых алгоритмов предлагается коэффициент вычислительной сложности

$$\Gamma^\mu = \frac{\tau^\mu - \tau^*}{\tau^*}, \quad (12)$$

где $\tau^\mu = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L t_j^\mu$, $\tau^* = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L t_j^*$, t_j^μ – время, затраченное вычислителем на решение задачи оценивания с применением анализируемого алгоритма, а t_j^* – минимальное время, требующееся самому быстрому из сопоставляемых алгоритмов.

Последовательность расчета предлагаемых коэффициентов описана в табл. 1 в виде псевдокода.

Т а б л и ц а 1

Последовательность расчета предлагаемых коэффициентов

<p>1. Вход: $f_k(\bullet), h_k(\bullet), \Gamma_k, Q_k, R_k, L$.</p> <p>2. Начало: $G_k^\mu = \tilde{G}_k^\mu = 0, \tau^\mu = 0, N(\varepsilon_{ik}) = 0$.</p> <p>3. Для $j = 1, 2 \dots L$.</p> <p>3.1. Моделирование начальных значений вектора состояния: $x_0^j \sim N(x_0; \bar{x}_0, P_0^x)$.</p> <p>3.2. Для $k = 1, 2 \dots$</p> <p>3.2.1. Моделирование порождающих шумов и шумов измерений: $w_k^j \sim N(w_k; 0, Q_k), v_k^j \sim N(v_k; 0, R_k)$.</p> <p>3.2.2. Моделирование реализаций вектора состояния и измерений: $x_k^j = f_k(x_{k-1}^j) + \Gamma_k w_k^j, y_k^j = h_k(x_k^j) + v_k^j$.</p> <p>3.3. Переход к п. 3.2.</p> <p>3.4. Для каждого исследуемого μ-го алгоритма.</p> <p>3.4.1. Запуск таймера.</p> <p>3.4.1.1. Для $k = 1, 2 \dots$ Запуск μ-го алгоритма оценивания. Вход: $y_k^j, x_{k-1}^j, P_{k-1}^{\mu(j)}$. Выход: $\hat{x}_k^{\mu(j)}, P_k^{\mu(j)}$.</p> <p>3.4.1.2. Переход к п. 3.4.1.1.</p> <p>3.4.2. Остановка таймера.</p> <p>3.4.3. Вычисление суммарного времени, затраченного вычислителем на решение задачи оценивания: $\tau^\mu := \tau^{\mu(j)} + t^{\mu(j)}$</p> <p>3.4.4. Для $k = 1, 2 \dots$</p> <p>3.4.4.1. Вычисление погрешностей оценивания и матриц ковариаций исследуемого алгоритма: $\varepsilon_k^{\mu(j)} = x_k^j - \hat{x}_k^{\mu(j)},$ $G_k^\mu = G_k^\mu + \varepsilon_k^{\mu(j)} (\varepsilon_k^{\mu(j)})^T, \tilde{G}_k^\mu = \tilde{G}_k^\mu + P_k^{\mu(j)}$.</p> <p>3.4.4.2. Если верно $\varepsilon_{ik}^{\mu(j)} \leq 3 \cdot \sqrt{[P_k^{\mu(j)}]_{i,i}}$, то $N(\varepsilon_{ik}^{\mu(j)}) = N(\varepsilon_{ik}^{\mu(j)}) + 1$.</p> <p>3.4.4.3. Переход к п. 3.4.4.1.</p> <p>3.5. Переход к п. 3.4.</p> <p>4. Переход к п.3</p> <p>5. Для базового и затем каждого исследуемого μ-го алгоритма.</p> <p>5.1. Осреднение: $G_k^\mu = \frac{1}{L} G_k^\mu, \tilde{G}_k^\mu = \frac{1}{L} \tilde{G}_k^\mu, \tau^\mu = \frac{1}{L} \tau^\mu$.</p> <p>5.2. Для $k = 1, 2 \dots$</p> <p>5.2.1. Согласно (8), (9), (10) и (11) вычисление коэффициентов точности ξ_{ik}^μ, состоятельности ζ_{ik}^μ, вычислительной сложности Γ^μ и вероятности попадания погрешности оценивания в интервал трех расчетных сигм ρ_{ik}^μ.</p> <p>5.2.2. Переход к п. 5.2.</p> <p>6. Переход к п. 5.</p> <p>7. Выход: $\xi_{ik}^\mu, \zeta_{ik}^\mu, \Gamma^\mu, \rho_{ik}^\mu$.</p>

Обсудим более детально предлагаемую методику на примере.

4. Методический пример

Рассмотрим следующий методический пример двумерной задачи полиномиальной фильтрации второго порядка, в котором оцениваемый вектор $x_k = [x_{1,k} \ x_{2,k}]^T$ описывается уравнениями [42]

$$\begin{aligned} x_{1k} &= (1 - x_{2k} \Delta t) x_{1k-1} + w_{1k} \Delta t, \\ x_{2k} &= x_{2k-1}, \end{aligned} \quad x_0 \in N \left(x_0; \begin{bmatrix} \bar{x}_{10} \\ \bar{x}_{20} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \right), \quad (13)$$

а измерения (2) линейны:

$$y_k = x_{1,k} + v_k. \quad (14)$$

С учетом (13) несложно записать вид нелинейной функции $f_k(\bullet)$, матрицы Γ_k и вектора w_k , входящих в (1):

$$f_k(x_{k-1}) = \begin{bmatrix} f_{1k}(x_{k-1}) \\ f_{1k}(x_{k-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - x_{2k} \Delta t) x_{1k-1} \\ x_{2k-1} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_k = \begin{pmatrix} \Delta t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в содержательном плане под рассматриваемую постановку задачи подпадает в частности задача оценивания интервала корреляции марковского процесса первого порядка по его измерениям на фоне белого шума.

С целью более детального рассмотрения методики сопоставим несколько субоптимальных алгоритмов оценивания, основанных на гауссовской аппроксимации апостериорной плотности: обобщенного фильтра Калмана (ОФК), полиномиального фильтра второго порядка (ПФ2) и ансцентного фильтра Калмана (АФК) [31, 44–48].

При сопоставительном моделировании задавались следующие параметры: $\bar{x}_{10} = 2,5$, $\bar{x}_{20} = 0,5$, $\sigma_1^2 = 4$, $\sigma_2^2 = 0,04$, $\sigma_w^2 = 0,01$, $\sigma_v^2 = 0,1$, $\Delta t = 0,1$ с. При вычислении выборочных действительных и расчетных матриц ковариаций моделировались $L = 10000$ реализаций последовательностей (13) и соответствующих им измерений (14). В качестве базового алгоритма, по которому сопоставлялась точность, с применением последовательных методов Монте-Карло был реализован нелинейный оптимальный алгоритм (ОПТ) с количеством частиц 10000. Нетрудно заметить, что при реализации метода Монте-Карло здесь можно воспользоваться методом частичного аналитического интегрирования, поскольку при фиксации компоненты x_{2k} относительно компоненты x_{1k} задача становится линейной [5, 19, 35, 36].

Конкретные выражения для ОФК и ПФ2, соответствующие сформулированной задаче, были получены с помощью соотношений, взятых из табл. 3, представленной в [31]; для оптимального алгоритма – из [36], а для АФК – с учетом псевдокода, приведенного в [45].

Если установить для коэффициентов (9), (10) уровень 0,1, который означает, что отличие от сравниваемого значения не превышает 10%, то все рассмотренные фильтры удовлетворяют этим требованиям. Худший результат среди субоптимальных фильтров с точки зрения точности и состоятельности показывает ОФК. Точность и состоятельность АФК и ПФ2 сопоставимы.

Ниже на рис. 1 приводятся графики коэффициентов ξ_{2k}^{sub} , ζ_{2k}^{sub} . Синим цветом обозначен ОФК (1), черным – ПФ2 (2), фиолетовым – АФК (3). Коэффициенты для первой компоненты для всех сопоставляемых субоптимальных алгоритмов имеют близкие значения и здесь не приводятся.

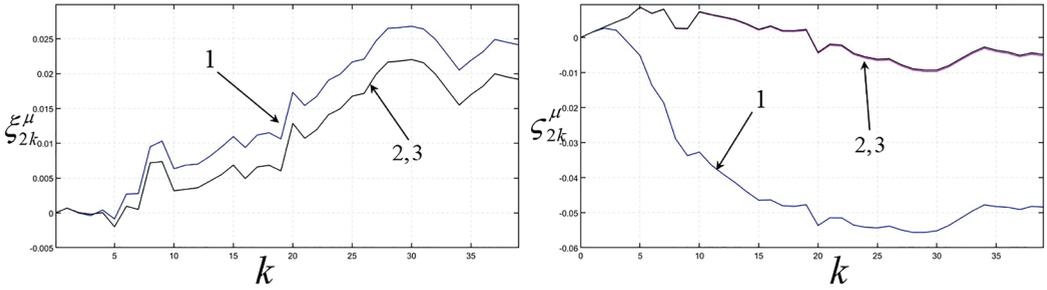


Рис. 1. Коэффициенты ξ_{2k}^{sub} , S_{2k}^{sub}

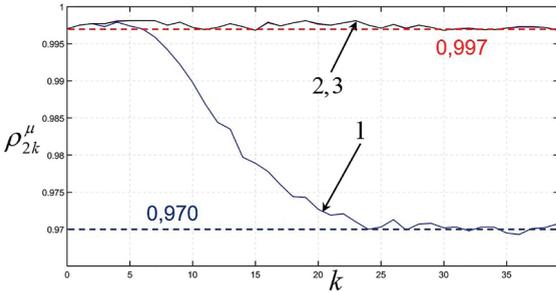


Рис. 2. Коэффициенты ρ_{2k}^{μ}

Результаты расчета коэффициентов (11), характеризующих вероятности попадания погрешностей оценивания в интервал трех сигм, приведены на рис. 2.

Известно, что для гауссовского закона распределения вероятность попадания в интервал трех сигм по каждой компоненте равна 0,997. Из представленных результатов следует, что все алгоритмы, кроме ОФК,

обеспечивают вероятность попадания в интервал трех сигм, соответствующую гауссовскому закону распределения. Для ОФК же вероятность попадания погрешностей оценивания в этот интервал после обработки 25-го измерения составляет $\rho_1^{ЕКФ} \approx 0.970$. Таким образом, можно предположить, что вид плотностей распределения погрешностей оценивания всех рассматриваемых субоптимальных алгоритмов, кроме ОФК, близок к гауссовскому.

Результаты расчета коэффициентов (12), характеризующих вычислительную сложность сопоставляемых алгоритмов, приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Результаты расчета вычислительной сложности

	ОФК	ПФ2	АФК	ОПТ
T^{μ}	–	0,6	4,2	$1,9 \cdot 10^3$

При определении этих коэффициентов использовался процессор QuadCore Intel Core i5-4690K с номинальной тактовой частотой 3,8 ГГц. Сопоставляя коэффициенты, характеризующие вычислительную сложность, можно заметить, что увеличение объема вычислений по сравнению с наименее затратным алгоритмом ОФК для ПФ2 составляет $\approx 60\%$, а для АФК – более 400%. Авторы отдают себе отчет в приближенном характере приводимой оценки вычислительной сложности. Тем не менее, учитывая полученные результаты, можно сформировать некоторое представление о соотношении вычислительной сложности.

5. Применение методики сравнительного анализа алгоритмов в задаче навигации по геофизическим полям

В качестве примера, иллюстрирующего применение предлагаемой методики, рассмотрим один из возможных простейших вариантов задачи коррекции показаний навигационной системы (НС) по данным о геофизических полях. Заметим, что интерес к решению этой задачи значительно возрос в последнее время в связи с широким внедрением различного рода робототехнических подвижных объектов, включая автономные подводные аппараты [49–51]. В работе [52] предложен алгоритм решения этой задачи, основанный на выделении в составе погрешностей корректируемой навигационной системы постоянной и переменной составляющих и линеаризации уравнений измерений относительно переменной составляющей. В связи с этим в частности возникает необходимость определения уровня априорной неопределенности, при котором такая линеаризация допустима. Покажем, что привлечение описанной методики создает предпосылки ответа и на этот вопрос.

Сформулируем задачу навигации по ГФП, следуя работам [52, 53]. Полагаем, что на борту подвижного объекта имеется НС, вырабатывающая показания $y_k^{HC} = [y_k^{HC(1)} \quad y_k^{HC(2)}]^T$ координат объекта в виде

$$y_k^{HC} = X_k + \Delta_k, \quad (15)$$

где $X_k = [X_k^{(1)} \quad X_k^{(2)}]^T$ – неизвестные истинные значения координат объекта, а $\Delta_k = [\Delta_k^{(1)} \quad \Delta_k^{(2)}]^T$ – погрешности их измерения. Кроме того, считаем, что имеется измеритель и цифровая карта некоторого геофизического поля для района, в котором передвигается объект.

Таким образом, можно записать измерения

$$y_k = \phi(X_k) + \Delta y_k^\Sigma, \quad (16)$$

где функция $\phi(X_k)$ определяет зависимость измеряемого параметра от координат объекта, а Δy_k^Σ – суммарные погрешности измерения карты и измерителя.

Решение задачи рассмотрим в рамках так называемой инвариантной постановки. В этом случае путем замены в (16) X_k на $(y_k^{HC} - \Delta_k)$ можно сформулировать задачу фильтрации погрешностей Δ_k по измерениям

$$y_k = \phi(y_k^{HC} - \Delta_k) + \Delta y_k^\Sigma. \quad (17)$$

Заметим, что в рамках такой постановки измерения НС трактуются как известные входные сигналы [54, 55].

Будем рассматривать простейший вариант задачи, для которого считается, что погрешности НС за время проведения коррекции постоянны, а суммарная погрешность карты и измерителя представляет собой дискретный белый шум.

Из сказанного следует, что необходимо решить задачу оценивания вектора состояния

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} = \Delta \quad (18)$$

по измерениям

$$y_k = \phi(y_k^{HC} - \Delta) + v_k = s_k(\Delta) + v_k. \quad (19)$$

Считаем также, что вектор Δ и погрешности v_i независимы друг от друга и для них справедливы предположения:

$$p(\Delta) = N(\Delta; 0, P_\Delta), \quad P_\Delta = \begin{bmatrix} \sigma_\Delta & 0 \\ 0 & \sigma_\Delta \end{bmatrix}, \quad p(v_k) = N(v_k; 0, \sigma_\Sigma^2). \quad (20)$$

В этом случае легко записать следующее выражение для апостериорной плотности [53]:

$$p(\Delta/Y_k) = c \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{\sigma_\Delta} \right) + \sum_{j=1}^k \frac{(y_j - s_j(\Delta_1, \Delta_2))^2}{\sigma_\Sigma^2} \right\}, \quad (21)$$

где $Y_k = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T$, а c – нормирующая константа.

Покажем, как предложенная методика поможет ответить на следующий вопрос: при каком уровне начальной неопределенности основанные на гауссовской аппроксимации алгоритмы оказываются эффективными?

Под эффективностью алгоритма будем понимать возможность обеспечения заданного уровня по коэффициентам состоятельности и точности, который определим величиной 10%.

Заметим, что в рамках рассматриваемой задачи в принципе не представляет особого труда реализовать алгоритм вычисления оптимальной оценки, что обусловлено постоянством погрешностей НС и, как следствие, достаточно простым видом АП (21). Необходимая точность вычисления оптимальной оценки может быть при этом легко обеспечена простым увеличением числа узлов в методе точечных масс или числа частиц в методе Монте-Карло [56]. Вместе с тем, как известно, например, из работы [5], для рассматриваемой в рамках инвариантного подхода задачи данные ковариационного канала ОФК будут соответствовать нижней границе точности по Рао–Крамеру, вычисляемой для фиксированной истинной траектории, задаваемой координатами $X_p, i = \overline{1, k}$. Таким образом, в качестве $\sqrt{[G_k^*]_{i,i}}$ при расчете коэффициента точности может быть использовано значение СКП, рассчитываемое в ковариационном канале ОФК, что упрощает процедуру предсказательного моделирования. Заметим, что производные для функции $s_k(\Delta)$, которые нужны при определении нижней границы, вычисляются в точках $X_p, i = \overline{1, k}$. Не-

обходимость фиксации траектории при анализе точности есть следствие постановки и решения задачи коррекции в рамках инвариантного подхода [5, 8, 53, 55]. Его особенность заключается в том, что итоговая оценка координат, получаемая путем уточнения показаний навигационной системы y_k^{HC} с использованием оценок $\hat{\Delta}_k$ в виде $\hat{y}_k^{HC} = y_k^{HC} - \hat{\Delta}_k$, соответствует решению задачи оценки траектории с позиций небайесовского подхода [8].

Будем полагать, что задача коррекции решается с использованием гравитационного поля, карта которого задавалась с помощью модели EGM 2008 [52]. Схема изолиний аномалий силы тяжести района и траектория движения объекта приведены на рис. 3.

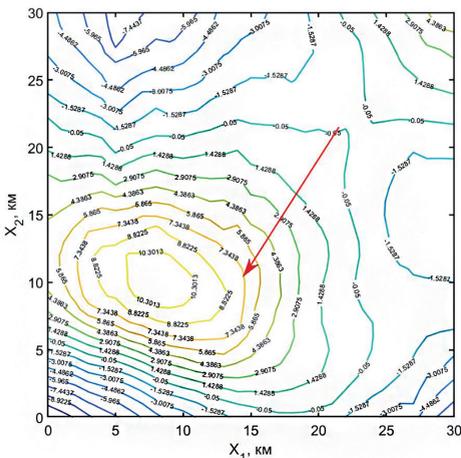


Рис. 3. Схема изолиний аномалий силы тяжести района и траектория движения объекта (красный)

Коэффициенты точности, состоятельности, вероятности попадания в заданный интервал и вычислительной сложности рассчитывались с осреднением по 10000 реализациям. При этом предполагалось, что $\sigma_{\Sigma} = 0,5$ мГал, $\Delta t = 1$ мин; траектория принималась фиксированной, скорость вдоль траектории $V = 5$ м/с; координаты начала галса $X_{1H} = 21,5$ км, $X_{2H} = 21,5$ км; координаты конца галса $X_{1K} = 14,5$ км, $X_{2K} = 10,5$ км; расстояние между измерениями $\delta = 300$ м; для параметра σ_{Δ} последовательно задавались значения $\sigma_{\Delta} = 0,4$ км, $\sigma_{\Delta} = 0,5$ км, $\sigma_{\Delta} = 0,6$ км и $\sigma_{\Delta} = 0,7$ км.

Сначала продемонстрируем результаты моделирования для $\sigma_{\Delta} = 0,4$ км. Как и в приведенном ранее примере, синим цветом обозначим результаты для алгоритма ОФК, а фиолетовым – для АФК. На рис. 4 представлены графики зависимости коэффициентов ξ_{ik}^{μ} от числа измерений. На всех рисунках ниже, так же как и в методическом примере, цифра 1 соответствует ОФК, а цифра 3 – АФК.

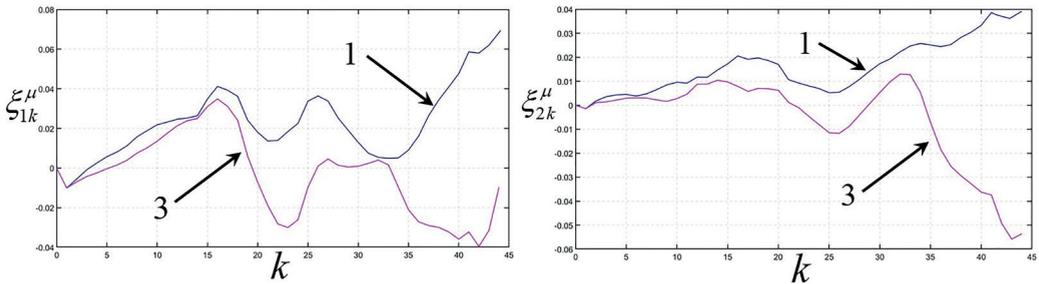


Рис. 4. Графики зависимости коэффициентов ξ_{ik}^{μ} от числа измерений при $\sigma_{\Delta} = 0,4$ км

Как следует из полученных результатов, для обоих субоптимальных алгоритмов значения СКП для каждой из составляющих координат на момент окончания коррекции отличаются от значений нижней границы по Рао–Крамеру на величину, не превышающую 8%. На рис. 5 приведены графики зависимости коэффициентов ζ_{ik}^{μ} от числа измерений.

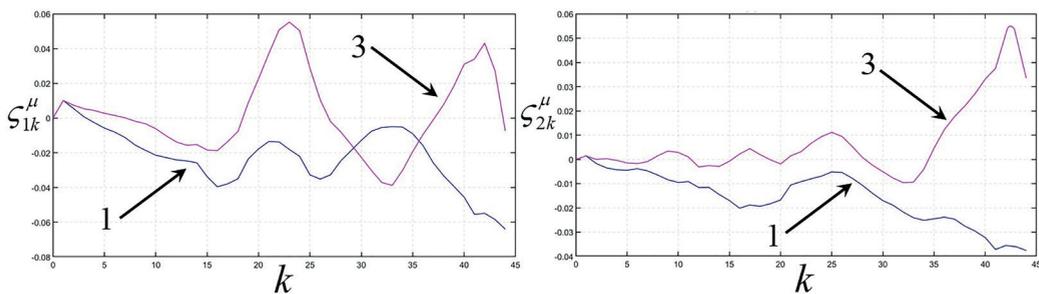


Рис. 5. Графики зависимости коэффициентов ζ_{ik}^{μ} от числа измерений при $\sigma_{\Delta} = 0,4$ км

Вычисление коэффициентов, характеризующих состоятельность алгоритмов, показывает, что для случая $\sigma_{\Delta} = 0,4$ км, как для ОФК, так и для АФК, расхождение действительной и расчетной характеристик точности при оценивании каждой компоненты вектора состояния не превышает 6%. На рис. 6 приведены графики зависимости коэффициентов ρ_{ik}^{μ} от числа измерений.

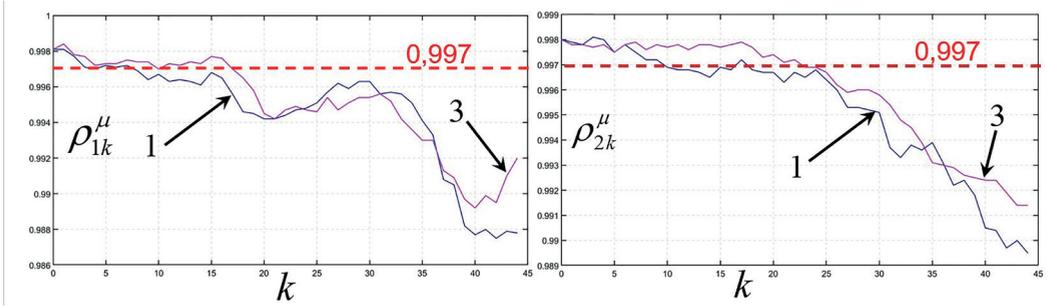


Рис. 6. Графики зависимости коэффициентов ρ_{ik}^{μ} от числа измерений для $\sigma_{\Delta} = 0,4$ км

Помимо графиков самих коэффициентов, на рис. 6 красной пунктирной линией обозначен доверительный уровень вероятности $\rho^{\Gamma} = 0,997$, соответствующий гауссовскому распределению. Несложно заметить, что вероятность, с которой погрешности оценивания для ОФК и АФК попадают в интервал трех сигм, выработанных в ковариационных каналах соответствующих алгоритмов, близка к ρ^{Γ} .

При сопоставлении вычислительной сложности рассматриваемых алгоритмов использовался тот же вычислитель, что и в предыдущем примере, а само сопоставление проводилось относительно ОФК. В результате расчетов было получено значение $T^{АФК} \approx 5$. Таким образом, вычислительная сложность АФК выше, чем ОФК на $\approx 500\%$. Такая разница в первую очередь обусловлена затратным в вычислительном плане интерполяционным правилом расчета значений поля (с использованием кубических сплайнов), которое применяется в алгоритме АФК при расчете преобразования каждой сигма-точки. Отметим, что зачастую вычислительную сложность АФК считают близкой к сложности ОФК. При этом в некоторых работах отмечается значительная вычислительная трудоемкость АФК, и для ее снижения предлагаются специальные приемы, направленные на сокращение числа операций [59]. Вопрос о соотношении вычислительной сложности АФК и ОФК в общем случае заслуживает дополнительного исследования и выходит за рамки настоящей статьи.

Графики коэффициентов для случаев $\sigma_{\Delta} = 0,5$ км, $\sigma_{\Delta} = 0,6$ км и $\sigma_{\Delta} = 0,7$ км имеют аналогичный характер, результаты расчета коэффициентов на момент окончания режима коррекции приведены в виде табл. 3.

В таблице звездочкой отмечены значения СКП, которые оказались меньше величины, соответствующей нижней границе точности по Рао–Крамеру. Поскольку теоретически такого быть не может, появление отрицательных коэффициентов ξ_k^{μ} объясняется вычислительными погрешностями, оцениваемыми на уровне 5%. Красным цветом в таблице выделены ячейки, содержимое которых не удовлетворяет установленным требованиям эффективности субоптимального алгоритма.

При $\sigma_{\Delta} = 0,4$ км для обоих алгоритмов выполняется требование 10% уровня для коэффициентов точности и состоятельности, и их можно считать эффективными. При $\sigma_{\Delta} = 0,5$ км требования к алгоритму с точки зрения как точности, так и состоятельности выполняются лишь для АФК, в то время как ОФК в целом перестает быть эффективным, хотя оба требования еще соблюдаются при оценивании $\Delta_k^{(1)}$. При $\sigma_{\Delta} = 0,6$ км АФК по-прежнему обеспечивает эффективность и начинает показывать неудовлетворительные результаты при $\sigma_{\Delta} = 0,7$ км.

Поскольку ОФК основан на линейаризации, ясно, что проведенное выше сопоставление алгоритмов с использованием предложенной методики позволяет получить ответ на вопрос, касающийся определения уровня априорной неопределенности, при котором линейаризация допустима, и на вопрос об эффективности алгоритмов, основанных на гауссовской аппроксимации.

Т а б л и ц а 3

Результаты расчета коэффициентов

			$\sigma_{\Delta} = 0,4$ км	$\sigma_{\Delta} = 0,5$ км	$\sigma_{\Delta} = 0,6$ км	$\sigma_{\Delta} = 0,7$ км
ОФК	$\Delta_k^{(1)}$	$\xi_{1k}^{ОФК}$	0,08	0,20	0,28	0,37
		$\varsigma_{1k}^{ОФК}$	-0,06	-0,15	-0,21	-0,27
		$\rho_{1k}^{ОФК}$	0,988	0,972	0,955	0,935
	$\Delta_k^{(2)}$	$\xi_{2k}^{ОФК}$	0,04	0,09	0,17	0,25
		$\varsigma_{2k}^{ОФК}$	-0,04	-0,08	-0,13	-0,19
		$\rho_{2k}^{ОФК}$	0,990	0,977	0,961	0,937
АФК	$\Delta_k^{(1)}$	$\xi_{1k}^{АФК}$	-0,01*	0,06	0,06	0,12
		$\varsigma_{1k}^{АФК}$	-0,01	-0,04	-0,05	-0,07
		$\rho_{1k}^{АФК}$	0,992	0,985	0,980	0,970
	$\Delta_k^{(2)}$	$\xi_{2k}^{АФК}$	-0,05*	-0,05*	-0,05*	-0,03*
		$\varsigma_{2k}^{АФК}$	0,03	0,04	0,05	0,05
		$\rho_{2k}^{АФК}$	0,991	0,985	0,980	0,973

Прежде чем привести заключительные выводы, сделаем несколько замечаний.

1. При сопоставлении алгоритмов с использованием выражений (9), (10) рассчитывались коэффициенты, с помощью которых анализировалась точность и состоятельность для каждой компоненты отдельно. В общем случае может возникать необходимость вычисления коэффициентов, позволяющих анализировать точность и состоятельности одновременно для нескольких компонент вектора состояния. Вычислить вероятность попадания в заданную область интересующих нас компонент не представляет труда. Что касается коэффициентов (9), (10), то в качестве простейшего варианта это может быть сделано, например, с использованием следа матрицы ковариаций. Вместе с тем этот вопрос заслуживает отдельного, более детального рассмотрения.

2. Следует отметить, что само по себе количественное сравнение СКП различных алгоритмов, а также расчетной и действительной СКП друг с другом для одного и того же алгоритма не является чем-то новым. Тем не менее, как уже говорилось во введении, такое сравнение в лучшем случае осуществляется с позиции точности. Особенность же описанной методики заключается в том, что предполагается проводить сопоставление еще и с точки зрения состоятельности и вычислительной сложности.

3. Описанная методика ориентирована на сопоставление алгоритмов решения нелинейных задач оценивания, проектируемых с позиций стохастического подхода. Следует, однако, заметить, что существует целый спектр алгоритмов решения задач оценивания, основанных на детерминированном подходе, не предполагающем случайного характера сигналов и погрешностей их измерения. В частности, к этому классу можно отнести алгоритмы, основанные на использовании методов эллипсоидов, оптимизации на графах, динамического расширения регрессора и т.п. [26–30, 57]. При проектировании алгоритмов такого рода также возникает потребность в их сопоставлении, в том числе и с алгоритмами, основанными на стохастическом подходе. Несмотря на то что в алгоритмах, базирующихся на детерминированном подходе, как правило, не предусмотрено вычисление расчетных характеристик точности и поэтому вопрос о сравнении с этих позиций затруднителен, в части сопоставления их по точности предлагаемая методика вполне может быть использована и в этом случае. То же самое можно сказать и относительно так называемых робастных алгоритмов [60].

4. Несомненно, что наиболее полный ответ на вопрос об эффективности того или иного алгоритма дают результаты его применения при решении задач с привлечением реальных данных. Вместе с тем результаты, полученные согласно предложенной методике, основанной на предсказательном моделировании, позволяют проанализировать зависимость точности от различных условий, что в значительной степени создает предпосылки для повышения эффективности испытаний в реальных условиях и, в частности, сокращения времени и ресурсов для их проведения.

6. Заключение

Описана методика оценки эффективности и сопоставления алгоритмов нелинейной фильтрации, в соответствии с которой на основе предсказательного моделирования вычисляются коэффициенты, позволяющие в количественном отношении сравнивать алгоритмы с точки зрения точности, состоятельности и вычислительной сложности. Коэффициент точности характеризует снижение СКП оценивания каждой из сопоставляемых компонент оцениваемого вектора состояния по сравнению с СКП, достигаемой с использованием базового алгоритма, или с величиной, задающей нижнюю границу точности по Рао-Крамеру. Коэффициент состоятельности характеризует отличие действительных и вырабатываемых в алгоритме расчетных значений СКП для каждой компоненты, а коэффициент вычислительной сложности – время, затрачиваемое на реализацию анализируемого алгоритма по сравнению с наиболее простым алгоритмом. Помимо этих коэффициентов, с помощью методики может рассчитываться и вероятность попадания погрешности в заданный интервал или область.

Предложенная методика поясняется на примере решения задачи нелинейной фильтрации марковской последовательности второго порядка, описываемой нелинейными уравнениями по измерениям линейного вида. Проведено сравнение обобщенного и ансцентного фильтров Калмана и алгоритма полиномиальной фильтрации второго порядка. В рассматриваемом примере все сопоставляемые субоптимальные алгоритмы удовлетворяют заданному требованию 10% уровня по коэффициенту точности и состоятельности. В то же время для ОФК вероятность попадания погрешности в заданную область трех сигм наименьшая и составляет 0,97, что заметно

меньше вероятности 0,997, соответствующей гауссовскому закону, которую обеспечивают остальные алгоритмы. При этом вычислительные затраты при реализации ОФК ниже на 60%, чем для ПФ2, и на 400% – чем для АКФ.

Результаты применения предложенной методики продемонстрированы на примере сопоставления и оценки эффективности ОФК и АКФ для решения задачи навигации по геофизическим полям. При этом под эффективностью алгоритмов понималось обеспечение заданного уровня по коэффициенту состоятельности и коэффициенту точности, вычисляемому по отношению к нижней границе по Рао–Крамеру. Определен уровень начальной неопределенности, задаваемый среднеквадратическим отклонением по каждой координате, при котором эти алгоритмы оказываются эффективными. Показано, что для рассматриваемого примера ОФК эффективен при уровне начальной неопределенности 400 м, а с помощью АКФ можно добиться хороших результатов и при начальной неопределенности 600 м, однако его вычислительная сложность почти в 6 раз выше, чем ОФК.

Авторы выражают признательность Ю.В. Болотину, Е.А. Руденко, Д.А. Кошаеву за ценные замечания, высказанные при обсуждении работы.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ № 23-19-00626,
<https://rscf.ru/project/23-19-00626/>*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Челпанов И.Б.** Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах. М.: Наука, 1967.
2. **Autolas, A.S., ed.,** *Mathematical System Theory. The Influence of R.E.Kalman*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
3. **Дмитриев С.П.** Высokоточная морская навигация. Судостроение. Санкт-Петербург, 1991. 223 с.
4. **Ярлыков М.С., М.А.Миронов.** Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993. 461 с.
5. **Степанов О.А.** Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 1998. 370 с.
6. **Bar-Shalom, Y., Li, X., Kirubarajan, T.,** *Estimation with applications to tracking and navigation*, New York, Wiley-Interscience, 2001, 581 p.
7. **Brown, R.G., Hwang, P.Y.C.,** *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, 4rd Ed., John Wiley, 2012.
8. **Степанов О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации Изд. 3-е, исправленное и дополненное. Том. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 509 с.
9. **Шахтарин Б.И.** Нелинейная оптимальная фильтрация в примерах и задачах. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений радиотехнических и приборных специальностей. Москва, 2008.
10. **Dunik, J., Biswas, S.K., Dempster, A.G., Pany, T., Closas, P.,** State Estimation Methods in Navigation: Overview and Application, *IEEE A&E Systems Magazine*, 2020, vol. 12, no. 35, pp. 16–31.
11. **Kalman, R.E.,** A new approach to linear filtering and prediction problems, *Trans. ASME. Series D, J. Basic Engineering*, 1960, 82, pp. 35–45.
12. **Стратонович Р.Л.** Условные процессы Маркова // Теория вероятн. и ее примен. 1960. Т. 5. № 2. С. 172–195.
13. **Стратонович Р.Л.** Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов // Радиотехника и электроника. 1960. Т. 5. № 11. С. 1751–1763.
14. **Jazwinski, A.H.,** *Stochastic process and filtering theory*, New York: Academic Press, 1970.
15. **Gelb, A.,** *Applied Optimal Estimation*, M.I.T. Press, Cambridge, 1974.

16. **Gibbs, B.P.**, *Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook*, John Wiley&Sons, Inc., 2011.
17. **Simon, D.**, *Optimal State Estimation: Kalman H_∞ and Nonlinear Approaches*, New Jersey, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2006.
18. **Basin, M.**, *New Trends in Optimal Filtering and Control for Polynomial and Time-Delay Systems*, Springer, 2008.
19. **Särkkä, S.**, *Bayesian Filtering and Smoothing*, Cambridge University Press, 2013.
20. **Рыбаков К.А.** Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: Изд-во МАИ, 2017.
21. **Болотин Ю.В., Брагин А.В., Гулевский Д.В.** Исследование состоятельности расширенного фильтра Калмана в задаче навигации пешехода с БИНС, закрепленными на стопах // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29. № 2 (113). С. 59–77.
22. **Брагин А.В., Болотин Ю.В.** Новый алгоритм коррекции в автономной навигации пешехода // XXX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 2023. С. 69–78.
23. **Руденко Е.А.** Автономное оценивание траектории спускаемого аппарата рекуррентными гауссовскими фильтрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. № 5. 2018. С. 9–29.
24. **Stepanov, O., Motorin, A.**, *Performance criteria for the identification of inertial sensor error models*, Sensors, 2019, vol. 19, no. 9.
25. **Кошаев Д.А.** Многоальтернативный алгоритм однопаяковой навигации автономного необитаемого подводного аппарата без априорных данных о его местоположении. Часть 2. Моделирование // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28. № 3 (110). С. 76–94.
26. **Bobtsov, A., Yi, B., Ortega, R., Astolfi, A.**, Generation of New Exciting Regressors for Consistent On-line Estimation of Unknown Constant Parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, vol. 67, no. 9, pp. 4746–4753.
27. **Бобцов А.А., Николаев Н.А., Ортега Р.** Новый класс наблюдателей переменных состояния динамических систем, основанный на параметрической идентификации // 15-я Мультиконференция по проблемам управления. Санкт-Петербург: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2022.
28. **Матасов А.И.** Методы выпуклого анализа для решения задачи оценивания // 15-я Мультиконференция по проблемам управления. Санкт-Петербург: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2022.
29. **Хлебников М.В.** Разреженная фильтрация при внешних возмущениях // 15-я Мультиконференция по проблемам управления. Санкт-Петербург, 2022.
30. **Ширяев В.И., Хаданович Д. В., Подвилова Е.О., Прохорова Д.О.** Алгоритмы гарантированного оценивания и их реализация в реальном времени // Материалы 15-й мультиконференции по проблемам управления. Санкт-Петербург, 2022.
31. **Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Васильев В.А., Торопов А.Б., Басин М.В.** Алгоритм полиномиальной фильтрации в задачах обработки навигационной информации при квадратичных нелинейностях в уравнениях динамики и измерений. Часть I. Описание и сопоставление с алгоритмами калмановского типа // Гироскопия и навигация. 2021. Том 29. №3 (114). С. 3–33.
32. **Степанов О.А., Исаев А.М.** Сравнительный анализ эффективности алгоритмов оценивания в задачах обработки навигационной информации на основе предсказательного моделирования // XVI Всероссийская мультиконференция по проблемам управления. 2023. С. 219–222.
33. **Дмитриев С.П., Шимелевич Л.И.** Нелинейные задачи обработки навигационной информации. Л.: ЦНИИ «РУМБ», 1977. 84 с.
34. **Chen, Z.**, *Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond*, Adaptive Systems Lab., McMasterUniv., Hamilton, Canada, 2003.
35. **Ristic, B., Arulampalam, S., and Gordon, N.**, *Beyond the Kalman Filter: Particle Filter for Tracking Applications*, Artech House Radar Library, 2004.
36. **Doucet, A., Freitas, N., Gordon, N.**, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, New York, NY, Springer New York, 2001, 590 p.
37. **Берковский Н.А., Степанов О.А.** Исследование погрешности вычисления оптимальной байесовской оценки методом Монте-Карло в нелинейных задачах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. №3. С. 16–23.
38. **Степанов О.А., Кошаев Д.А.** Универсальные Matlab-программы анализа потенциальной точности и чувствительности алгоритмов линейной нестационарной фильтрации // Гироскопия и навигация. 2004. №2. С. 81–92.

39. Кошаев Д.А., Степанов О.А. Применение неравенства Рао–Крамера в задачах нелинейного оценивания. Теория и системы управления // Известия Академии наук СССР. 1997. №2. С. 65.
40. Кошаев Д.А. Сравнение нижних границ точности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. №2. С. 62–65.
41. Van Trees, H.L., Bell, K.L., *Bayesian bounds for parameter estimation and nonlinear filtering tracking*, San-Francisco: Wiley – IEEE Press, 2007.
42. Stepanov, O.A., Vasiliev, V.A., Basin, M.V., Tupysev, V.A., Litvinenko, Y.A., Efficiency Analysis of Polynomial Filtering Algorithms in Navigation Data Processing for a Class of Nonlinear Discrete Dynamical Systems, *IET Control Theory & Applications*, 2021, 15, pp. 248–559.
43. Степанов О.А., Васильев В.А. Предельно достижимая точность оценивания по Рао–Крамеру в задачах нелинейной фильтрации при наличии порождающих шумов и ошибок измерения, зависящих от оцениваемых параметров // Автоматика и телемеханика. 2016. № 1. С. 104–133.
44. Julier, S.J., Uhlmann, J.K., and Durrant-Whyte, H.F., A new approach for filtering nonlinear systems, *Proc. IEEE Amer. Contr. Conf.*, 1995, pp. 1628–1632.
45. Julier, S.J. and Uhlmann, J. K., A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems, *Proc. of AeroSense: The 11th Int. Symp. on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls.*, 1997.
46. Julier, S.J., Uhlmann, J.K., Unscented filtering and nonlinear estimation, *Proceedings of the IEEE*, 2004, vol. 92, no. 3, pp. 401–422.
47. Gustafsson, F., Hendeby, G., Some Relations Between Extended and Unscented Kalman Filters, *Signal Processing, IEEE Transactions*, 2012, vol. 60, no. 2, pp. 545–555, <https://doi.org/10.1109/TSP.2011.2172431>.
48. Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Исаев А.М. Полиномиальный фильтр третьего порядка в задаче оценивания скалярного марковского процесса по нелинейным измерениям // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2022. №4.
49. Степанов О.А., Торопов А.Б. Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Часть 2. Современные тенденции развития // Гироскопия и навигация. 2015. №4 (91). С. 147–159.
50. **Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли** / под общей редакцией В.Г. Пешехонова, редактор О.А. Степанов. Санкт-Петербург: АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2017. 390 с.
51. Melo, J. and Matos, A., Survey on advances on terrain based navigation for autonomous underwater vehicles, *Ocean Engineering*, Jul. 2017, vol. 139, p. 250-264, doi: 10/gbkpww.
52. Степанов О.А., Васильев В.А., Торопов А.Б. Решение задачи навигации по геофизическим полям с учетом изменчивости погрешностей корректируемой навигационной системы // XXIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург: АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2022. С. 60–65.
53. Степанов О.А., Торопов А.Б. Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Ч. 1. Обзор алгоритмов // Гироскопия и навигация. 2015. №3 (90). С. 102–125.
54. Красовский А.А., Белоглазов И.Н., Чигин Г.П. Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем. М.: Наука, 1979. С. 448.
55. Stepanov, O.A., Optimal and sub-optimal filtering in integrated navigation systems. Chapter 8, *Aerospace Navigation Systems*, Editors: A. Nebylov, J. Watson, Wiley, 2016.
56. Торопов А.Б., Степанов О.А. Использование последовательных методов Монте-Карло в задаче корреляционно-экстремальной навигации // Изв. вузов. Приборостроение. 2010. Т. 53. № 10. С. 49–54.
57. Loeliger, H.-A., An introduction to factor graphs, *IEEE Signal Processing Magazine*, Jan. 2004, vol. 21, no. 1, pp. 28–41.
58. Бесекерский В.А., Небылов А.В. Робастные системы автоматического управления. М.: Наука, 1983. 240 с.
59. Белов Р.В., Кляпнев Д.А., Огородников К.О. Метод снижения вычислительной сложности апсцентного фильтра Калмана // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2019. №1 (124). С. 17–23.
60. Небылов А.В., Лопарев А.В., Небылов В.А. Применение методов робастной фильтрации по числовым характеристикам воздействий при решении задач обработки навигационной информации и управления движением // Гироскопия и навигация. Том 30. №3 (118). 2022. С. 65–79. DOI 10.17285/0869-7035.0099.

Stepanov, O.A. and Isaev, A.M. (Concern CSRI Elektropribor, St. Petersburg, Russia, ITMO University, St. Petersburg, Russia)

A Procedure of Comparative Analysis of Recursive Nonlinear Filtering Algorithms in Navigation Data Processing Based on Predictive Modeling, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2023, vol. 31, no. 3 (122), pp. 48–65.

Abstract. The paper describes a procedure based on predictive modeling for comparing recursive suboptimal algorithms developed for nonlinear filtering problems including those involving navigation data processing. The algorithms are compared in terms of accuracy, consistency, and computational complexity. The provided examples explain the procedure and illustrate its application.

Key words: procedure, comparison, accuracy, consistency, computational complexity, algorithms, nonlinear filtering, navigation data.

Материал поступил 22.09.2023