

А. В. ВЯЛКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ЗА ВЕКТОРАМИ В ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ШТОПОРА МОДЕЛИ САМОЛЕТА

В статье дан обзор методов определения углов ориентации по наблюдениям за внешними опорными векторами. С тем чтобы сохранить наблюдаемость кинематических параметров движения свободно летающей модели самолета в вертикальной аэродинамической трубе, проанализированы способы определения вектора конечного поворота с помощью двух, трех и более векторов, известных в неподвижной и связанной с моделью системе координат, а также их производных. Предложены способы оценки достоверности рассчитанных углов ориентации. Рассмотрен метод оценки радиуса установившегося штопора свободно летающей модели.

Ключевые слова: вектор конечного поворота, расчет параметров ориентации, инерциальные системы, расчет параметров движения, испытания свободно летающих моделей.

Введение

Современные методы исследования штопора [1] и разработка законов управления с использованием геометрически и динамически подобных моделей летательных аппаратов [2] основаны на определении углов ориентации модели, свободно штопорящей в рабочей части вертикальной аэродинамической трубы. Модель оснащается малогабаритной измерительной управляющей системой, которая по показаниям встроенной триады акселерометров и триады датчиков угловой скорости рассчитывает ориентацию модели в восходящем потоке воздуха и с помощью отклонения рулей управления выводит ее из полета в режиме установившегося штопора. Продолжительность полета не превышает 150 с. Полет проходит в высокоманевренном режиме с угловыми скоростями до 1000 °/с со значительными динамическими ударными нагрузками. Измерение параметров движения выполняется в автономном режиме. Использование данных спутниковой навигации невозможно. Во время полета рассчитываются углы ориентации модели, а также воздушный угол атаки и скольжения. Расчет углов ориентации выполняется с помощью комплементарного фильтра Калмана [1], работающего в пространстве состояний и оснащенного детектором маневра. С помощью измеренной триады акселерометров вектора гравитационного ускорения рассчитываются углы крена и тангажа, из которых фильтр формирует оценку компонент вектора состояния – погрешность углового положения модели и смещение датчиков угловой скорости и выполняет коррекцию измеренной матрицы направляющих косинусов. При обнаружении маневра фильтр переходит в режим простого интегрирования. Рассчитанные углы ориентации, а также атаки и скольжения используются при анализе эффективности исследуемых методов пилотирования в штопоре.

Вялков Андрей Викторович. Кандидат технических наук, начальник отдела, доцент кафедры АЛЭ, ФАЛТ, МФТИ, Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского (г. Жуковский, Московская обл.).

Основным требованием к расчету углов ориентации модели является достоверность рассчитанных углов, что позволяет определить характеристики исследуемого режима штопора и оценить эффективность органов управления модели для данного режима. Более чем десятилетний опыт разработки бортовых систем свободно штурманских моделей и алгоритмов расчета показал, что используемый метод определения углов ориентации в случае маневренного полета модели в штопоре не всегда обеспечивает необходимый уровень достоверности результатов, что не позволяет уверенно определять одну из важных характеристик – радиус штопора.

Основной причиной снижения достоверности расчета углов ориентации является потеря наблюдаемости вектора состояния фильтра Калмана во время маневренного полета модели с последующим влиянием временной и температурной нестабильности начального смещения инерциальных датчиков на погрешность расчета. С учетом того что бортовая система моделей построена с использованием MEMS-датчиков, погрешности расчета углов могут достигать единиц градусов. Обеспечение непрерывной наблюдаемости погрешностей углового положения в векторе состояния во время маневренного полета является надежным способом повышения точности расчета углов ориентации модели и, соответственно, уверенного определения радиуса штопора.

За последнее время в мире разработаны альтернативные методы расчета углов ориентации подвижных объектов, которые сейчас с успехом используются в системах управления и в автопилотах миниатюрных летательных аппаратов. Сюда следует отнести метод пропорционально-интегрирующей компенсации погрешностей, предложенный для комплементарных фильтров в работе [3], и метод градиентного спуска, предложенный в [4] и детализированный для применения в робототехнике [5] и в системах управления миниатюрными летательными аппаратами [6]. Эти методы основаны на минимизации отклонений рассчитанного значения наблюдаемого внешнего вектора от его истинного значения. В первом случае это вектор силы тяжести, во втором – векторы силы тяжести и индукции магнитного поля Земли. Оба метода предполагают непрерывное наблюдение за этими векторами и минимизацию отклонений независимо от режима движения. В случае равномерного и прямолинейного движения и тот и другой метод дают минимальные погрешности, обусловленные точностью датчиков. При маневрировании погрешности возрастают, но благодаря кратковременности маневра не достигают недопустимых значений. В случае свободного штопора в вертикальном воздушном потоке аэродинамической трубы, сопровождающегося вращением модели по окружности с радиусом, равным радиусу штопора, считать маневрирование кратковременным нельзя. К вектору силы тяжести добавляется вектор центростремительного ускорения, и погрешность расчета углов ориентации начинает непрерывно увеличиваться уже не за счет нестабильности датчиков, как в фильтрах Калмана, а из-за искажения наблюдаемого вектора силы тяжести.

Другим альтернативным путем повышения точности расчета углов ориентации является использование результатов наблюдения внешних опорных векторов. Наибольшую точность дает наблюдение световых опорных векторов или векторов Пойтинга с помощью звездных датчиков, что широко используется в навигации космических аппаратов. Метод TRIAD [7], разработанный в 1964 году, и проблема Вахба [8], описанная в 1965 году, подтолкнули к созданию целого ряда алгоритмов [9] определения оптимальной ориентации по результатам измерения набора световых векторов. Разработанные методы могут с успехом применяться и в эксперименталь-

ных установках, в том числе в аэродинамических трубах. Опорные векторы могут быть созданы искусственно с помощью внешних источников света, магнитного или акустического поля, а также радиоволн [10]. К опорным векторам можно отнести вектор силы тяжести, вектор угловой скорости вращения Земли и вектор индукции магнитного поля Земли. Первые два широко используются в современных ИНС. Их наблюдение из состояния покоя дает данные для расчета начальной ориентации объекта, а в случае сложного движения их применение требует учета его закона. В отличие от первых двух вектор индукции магнитного поля Земли неизменен и в состоянии покоя, и в состоянии движения, но подвержен значительным искажениям, вызванным работой электрических бортовых систем. Следует заметить, что для инерциальных систем, построенных с использованием MEMS-датчиков, вектор угловой скорости вращения Земли на сегодняшний день можно считать ненаблюдаемым.

В статье делается попытка систематизировать методы расчета углов ориентации по результатам наблюдения внешних векторов как из состояния покоя для решения задачи начальной выставки, так и во время маневренного полета модели самолета с целью сохранения наблюдаемости погрешностей углового положения. Рассмотрены способы расчета оценок углов ориентации неподвижной и летающей модели по результатам наблюдения двух (вектор силы тяжести и вектор индукции магнитного поля Земли) и более (искусственно созданные векторы) опорных векторов и методы определения достоверности полученной оценки. В отличие от метода TRIAD в случае двух векторов предложено использовать вектор конечного поворота. Это позволяет получить две оценки углов ориентации и выбрать наиболее достоверную. Описана возможность применения производных опорных векторов, зарегистрированных на летающей модели, что дает возможность частично устранить влияние собственного смещения датчиков. Приведены примеры численного расчета углов ориентации и их достоверности по результатам измерения двух векторов на неподвижной модели. Расчет выполнен по методу TRIAD и с использованием вектора конечного поворота. Наиболее достоверные углы ориентации получены при использовании вектора конечного поворота и расчете угла поворота с помощью измеренного вектора силы тяжести. Показано, что с помощью методов, применяемых для расчета достоверности оценок, может быть получена оценка радиуса штопора свободно летающей модели самолета в вертикальной аэродинамической трубе.

Системы координат

При изложении материала в статье используются нормальная земная и связанная система координат [11]. Начало первой из них $O_o X_g Y_g Z_g$ совместимо с центром масс модели летательного аппарата в начальный момент движения, ось $O_o Y_g$ направим вверх по местной вертикали, ось $O_o X_g$ – на истинный север и ось $O_o Z_g$ – на восток. Связанная система координат $OXYZ$ является подвижной, и ее оси совмещены с осями модели, а центр совместим с центром масс модели.

Примем допущение, что нормальная земная система координат является инерциальной. Это можно считать справедливым, поскольку полет модели не длится более 150 с. Из этого следует, что результаты измерения угловой скорости и ускорения относительно инерциальной системы координат можно считать верными для нормальной земной системы координат.

Вектор конечного поворота

Наиболее простым способом определения углов ориентации объекта, по мнению автора, является использование вектора конечного поворота θ , который описывает поворот на угол φ вокруг единичного вектора e связанной системы координат, повернутой относительно неподвижной нормальной земной системы координат:

$$\theta = 2 e \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot (\cos \gamma_x \quad \cos \gamma_y \quad \cos \gamma_z)^T. \quad (1)$$

В приведенном выражении единичный вектор e представлен через направляющие косинусы, рассчитанные с помощью углов γ между осью конечного поворота и осями нормальной земной системы координат.

Расчет кинематических параметров с использованием вектора конечного поворота подробно описан в [12]. Здесь обозначим только два основных варианта его применения. Одним из них является расчет матрицы направляющих косинусов по известной формуле Родрига:

$$\mathbf{R}_{cb}^n = \cos \varphi \mathbf{I} + (1 - \cos \varphi) e e^T + \sin \varphi \cdot \mathbf{E}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{R}_{cb}^n – рассчитываемая матрица направляющих косинусов, преобразующая векторы из связанной (нижний индекс «cb») в нормальную (верхний индекс «n») систему координат (далее эту матрицу будем обозначать \mathbf{R}), \mathbf{I} – единичная диагональная матрица и \mathbf{E} – кососимметрическая матрица, составленная из элементов единичного вектора e :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторым вариантом является расчет кватерниона ориентации

$$\mathbf{q}_{cb}^n = \left(\cos \frac{\varphi}{2} \quad e_x \sin \frac{\varphi}{2} \quad e_y \sin \frac{\varphi}{2} \quad e_z \sin \frac{\varphi}{2} \right)^T, \quad (3)$$

выполняющего поворот векторов из связанной в нормальную земную систему координат. Преобразование вектора a из нормальной в связанную систему координат выполняется с помощью кватернионного соотношения (присоединенное отображение)

$$a^{cb} = \mathbf{q}_{cb}^n a^n \bar{\mathbf{q}}_{cb}^n. \quad (4)$$

Здесь $\bar{\mathbf{q}}_{cb}^n$ – сопряженный кватернион, равный $\mathbf{q}_{cb}^n = (q_0 \quad -q_1 \quad -q_2 \quad -q_3)^T$.

Компоненты кватерниона также могут быть непосредственно вычислены по известным значениям матрицы направляющих косинусов [13].

Расчет вектора поворота по опорным векторам

Рассмотрим возможность определения вектора конечного поворота по двум, трем и более опорным векторам, заданным своими компонентами в нормальной земной и зарегистрированным в связанной системе координат.

Случай двух векторов показан на рис. 1. Известен вектор \mathbf{a} до поворота и этот же вектор \mathbf{a}' после поворота. Неизвестный единичный вектор \mathbf{e} , вокруг которого выполнен поворот, лежит в плоскости Sa' , перпендикулярной плоскости Sa , проходящей через векторы \mathbf{a} и \mathbf{a}' . Линия пересечения этих плоскостей $OaOa'$ делит неизвестный угол поворота φ_a пополам. Любой вектор \mathbf{e} , выходящий из точки O и лежащий в плоскости Sa' , будет соответствовать этому повороту. Таким образом, единичный вектор \mathbf{e} при использовании одного вектора не может быть определен однозначно.

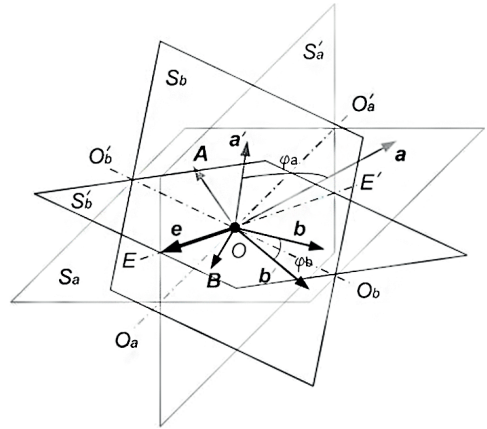


Рис. 1. Поворот двух векторов

Введем второй вектор \mathbf{b} , неколлинеарный вектору \mathbf{a} , и построим еще две плоскости Sb и Sb' . Очевидно, что при совместном повороте системы векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} единичный вектор \mathbf{e} будет одновременно принадлежать плоскостям Sa' и Sb' , т.е. лежать на линии их пересечения EE' . Если вектор \mathbf{b} не лежит на оси вращения, единичный вектор \mathbf{e} определяется однозначно. В противном случае плоскости Sb и Sb' не могут быть определены, соответственно, не может быть определен и вектор \mathbf{e} . Таким образом, необходимым и достаточным условием определмости параметров поворота неколлинеарных векторов является следующее условие: ни один из наблюдаемых векторов не должен лежать на оси вращения.

Найдем угол поворота φ вокруг единичного вектора \mathbf{e} . Используя вывод формулы Родрига в [14, уравнение 3.1.5], запишем равенство для вектора \mathbf{a} :

$$\mathbf{a}' - (\mathbf{e} \times \mathbf{a}') \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \mathbf{a} + (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (5)$$

Отсюда

$$\mathbf{a}' - \mathbf{a} = \mathbf{e} \times (\mathbf{a}' + \mathbf{a}) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Это равенство указывает на коллинеарность векторов в левой и правой части и на соотношение между значением их компонент. Используя это, найдем угол поворота:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{(\mathbf{a}' - \mathbf{a})(\mathbf{a}' - \mathbf{a})}{(\mathbf{a}' - \mathbf{a})(\mathbf{e} \times (\mathbf{a}' + \mathbf{a}))}.$$

Полученное выражение можно записать в более простом виде, в том числе и для опорного вектора \mathbf{b} :

$$-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{(\mathbf{a}' - \mathbf{a})(\mathbf{a}' - \mathbf{a})}{2 \mathbf{e} (\mathbf{a} \times \mathbf{a}')} = \frac{(\mathbf{b}' - \mathbf{b})(\mathbf{b}' - \mathbf{b})}{2 \mathbf{e} (\mathbf{b} \times \mathbf{b}')}. \quad (6)$$

Отрицательный знак перед тангенсом угла поворота определяется направлением поворота – от исходного к повернутому опорному вектору.

Теперь найдем единичный вектор \mathbf{e} . Введем вектор \mathbf{A} , перпендикулярный плоскости Sa :

$$A = a \times a',$$

и произвольный радиус-вектор r , лежащий на плоскости Sa . Тогда уравнение плоскости Sa будет иметь вид

$$A \cdot r + D = 0,$$

где D – радиус-вектор смещения Sa относительно начала координат.

Составим уравнение плоскости Sa' . Для этого введем вектор \tilde{a} , лежащий на линии Oa' пересечения плоскостей Sa и Sa' :

$$\tilde{a} = a + a',$$

и вектор \tilde{A} , нормальный к плоскости Sa' :

$$\tilde{A} = A \times \tilde{a} = (a \times a') \times (a + a'). \quad (7)$$

Уравнение плоскости Sa' , на которой лежит произвольный радиус-вектор \tilde{r} , будет иметь вид:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{r} + \tilde{D} = 0.$$

Аналогичную плоскость построим и для вектора b :

$$\tilde{B} \cdot \tilde{r} + \tilde{D} = 0,$$

где

$$\tilde{B} = B \times \tilde{b} = (b \times b') \times (b + b'). \quad (8)$$

Найдем уравнение линии пересечения EE' плоскостей Sa' и Sb' .

Вектор $C = \tilde{A} \times \tilde{B}$ является направляющим вектором линии пересечения плоскостей Sa' и Sb' . Отсюда можно найти неизвестный единичный вектор

$$e = \frac{\tilde{A} \times \tilde{B}}{|\tilde{A} \times \tilde{B}|}. \quad (9)$$

Полученные формулы (6) и (9) позволяют алгебраически определить неизвестную ориентацию по результатам измерения двух опорных векторов. Формула (9) однозначно определяет единичный вектор e , формула (6) дает две оценки угла поворота φ . С учетом того что повернутые векторы наблюдаются с помощью датчиков, оценки будут иметь разную точность. Это требует определения достоверности оценок и выбора наиболее достоверной. Если в качестве опорных векторов использовать вектор силы тяжести и вектор индукции магнитного поля Земли, зарегистрированные в неподвижной связанной системе координат, то найденная ориентация является решением задачи начальной выставки.

В отличие от описываемого широко известный метод TRIAD [6, 8] использует два единичных опорных вектора a и b в неподвижной системе координат и эти же векторы a' и b' , заданные своими компонентами в повернутой системе координат. Из этих векторов формируется ортогональная тройка единичных векторов

$$a, \frac{a \times b}{|a \times b|}, a \times \frac{a \times b}{|a \times b|} \quad (10)$$

в неподвижной и повернутой системах координат. Учитывая, что векторы – это столбцы, составляется матричное уравнение

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{a} & \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \\ \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} & \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \end{array} \right) = \mathbf{R} \left(\begin{array}{cc} \mathbf{a}' & \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{|\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'|} \\ \mathbf{a}' \times \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{|\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'|} & \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{|\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'|} \end{array} \right), \quad (11)$$

где \mathbf{R} – неизвестная матрица направляющих косинусов. Поскольку все столбцы в известных матрицах (11) – единичные и ортогональные друг другу векторы, решение матричного уравнения имеет простой вид:

$$\mathbf{R} = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{a} & \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \\ \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} & \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} \mathbf{a}' & \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{|\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'|} \\ \mathbf{a}' \times \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{|\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'|} & \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{|\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'|} \end{array} \right)^T. \quad (12)$$

Сложная инверсия в решении (12) заменена простым транспонированием. Рассчитанная матрица \mathbf{R} является нормальной и ортогональной.

В сформированной тройке векторов (10) в качестве ведущего выбран вектор \mathbf{a} . Очевидно, что можно составить другую тройку векторов с ведущим вектором \mathbf{b} . С учетом ограниченной точности наблюдения векторов будут получены две матрицы, из которых следует выбрать наиболее достоверную.

Случай трех и более векторов можно рассмотреть, используя метод наименьших квадратов (МНК). Согласно классическому МНК для линейной системы с вектором измерения \mathbf{z} , вектором состояния \mathbf{x} , матрицей чувствительности \mathbf{H} и шумом \mathbf{v} вида

$$\mathbf{z} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v},$$

выражение оценки \mathbf{x} е вектора состояния \mathbf{x} имеет вид

$$\mathbf{x}e = (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z}.$$

Пусть известно N опорных векторов и все они зарегистрированы в повернутой системе координат. Опорные и зарегистрированные векторы можно сгруппировать в пары и для каждой из них составить ортогональную тройку единичных векторов (10). Очевидно, что число пар будет равно числу перестановок из N по 2:

$$C = \frac{N!}{2!(N-2)!}.$$

Пронумеруем комбинации $n = 0, \dots, C-1$ и обозначим матрицы размером 3×3 , столбцами которых являются векторы тройки, составленной из опорных векторов, через \mathbf{M}'_n , а матрицу из зарегистрированных векторов – через \mathbf{M}'_n . Тогда аналогично (11) можно записать матричное уравнение

$$(\mathbf{M}_0 \ \mathbf{M}_1 \ \dots \ \mathbf{M}_{C-1}) = \mathbf{R} (\mathbf{M}'_0 \ \mathbf{M}'_1 \ \dots \ \mathbf{M}'_{C-1}). \quad (13)$$

В системе (13) неизвестным является матрица \mathbf{R} . Преобразуем (13) к виду линейной системы классического МНК. Для этого транспонируем (13)

$$(\mathbf{M}_0 \ \mathbf{M}_1 \ \dots \ \mathbf{M}_{C-1})^T = (\mathbf{M}'_0 \ \mathbf{M}'_1 \ \dots \ \mathbf{M}'_{C-1})^T \mathbf{R}^T \quad (14)$$

и, учитывая, что неизвестным вектором состояния здесь является транспонированная матрица \mathbf{R} , запишем выражение для оценки матрицы:

$$\mathbf{R}e^T = \left((\mathbf{M}'_0 \ \dots \ \mathbf{M}'_{C-1}) \left(\begin{array}{c} \mathbf{M}'_0{}^T \\ \vdots \\ \mathbf{M}'_{C-1}{}^T \end{array} \right) \right)^{-1} (\mathbf{M}'_0 \ \dots \ \mathbf{M}'_{C-1}) \cdot \left(\begin{array}{c} \mathbf{M}_0{}^T \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{C-1}{}^T \end{array} \right). \quad (15)$$

Перемножая матрицы в правой части решения (13) и учитывая, что матрицы составлены из ортогональных троек единичных векторов, получим: первый сомножитель будет представлять собой сумму C единичных диагональных матриц, а второй – сумму смешанных произведений матриц. В результате (15) можно привести к простому виду:

$$\mathbf{Re} = \frac{1}{C} \sum_{n=0}^{C-1} \mathbf{M}_n \mathbf{M}_n^T. \quad (16)$$

Таким образом, оптимальная МНК оценка матрицы направляющих косинусов является простым средним произведений нормальных и ортогональных матриц, составленных из опорных и зарегистрированных векторов. Следует отметить, что (16) дает нормальную и ортогональную матрицу. При расчете матрицы может быть использован набор результатов измерения с шумом. Достоинством (16) также является отсутствие необходимости инвертирования матриц.

Производные опорных векторов

Вектор конечного поворота можно найти, используя производные опорных векторов, зарегистрированных в связанной системе координат. Пусть такими векторами будут \mathbf{a} и \mathbf{b} . Примечательным здесь является тот факт, что постоянные смещения датчиков при таком подходе частично обнуляются. Найдем неизвестный единичный вектор и угол поворота.

Рассмотрим постоянный опорный вектор \mathbf{a} , рассчитанный по компонентам вектора $\mathbf{a}'(t)$, воспринятого во вращающейся связанной системе координат, поворот которой относительно нормальной системы координат описывается матрицей $\mathbf{R}(t)$, так что

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}(t)\mathbf{a}'(t).$$

Очевидно, что производная опорного вектора должна быть равна нулевому вектору $\mathbf{0}$:

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a}'(t) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{a}}'(t) = \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\Omega}(t)\mathbf{a}'(t) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{a}}'(t) = \mathbf{0}.$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$ – кососимметрическая матрица, составленная из компонент вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ вращения связанной системы координат относительно нормальной, который задан компонентами в связанной системе координат. Отсюда

$$\dot{\mathbf{a}}'(t) = -\boldsymbol{\Omega}(t)\mathbf{a}'(t) = -\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}'(t). \quad (17)$$

Видно, что вектор угловой скорости всегда перпендикулярен производной повернутого опорного вектора $\mathbf{a}'(t)$. Аналогично поступим с опорным вектором \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{R}(t)\mathbf{b}'(t), \\ \dot{\mathbf{b}}'(t) &= -\boldsymbol{\Omega}(t)\mathbf{b}'(t) = -\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{b}'(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, что поскольку вектор угловой скорости перпендикулярен производным опорных векторов в связанной системе координат, то он коллинеарен их векторному произведению. Отсюда можно записать единичный вектор, определяющий мгновенную ось поворота, с точностью до знака:

$$\mathbf{e}(t) = \frac{\omega(t)}{|\omega(t)|} = \frac{\dot{\mathbf{a}}'(t) \times \dot{\mathbf{b}}'(t)}{|\dot{\mathbf{a}}'(t) \times \dot{\mathbf{b}}'(t)|}. \quad (19)$$

Покажем, что равенство (19) верно. Для этого подставим в векторное произведение выражения производных (17) и (18). Здесь возможны два варианта:

1. $\dot{\mathbf{a}}' \times \dot{\mathbf{b}}' = (\omega \times \mathbf{a}') \times (\omega \times \mathbf{b}') = \mathbf{a}' [\omega (\omega \times \mathbf{b}')] - \omega [\mathbf{a}' (\omega \times \mathbf{b}')] = -\omega [\mathbf{a}' (\omega \times \mathbf{b}')] = \omega (\mathbf{a}' \dot{\mathbf{b}}'),$
2. $\dot{\mathbf{a}}' \times \dot{\mathbf{b}}' = (\omega \times \mathbf{a}') \times (\omega \times \mathbf{b}') = \omega [\omega (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')] - \mathbf{b}' [\omega (\mathbf{a}' \times \omega)] = \omega [\mathbf{b}' (\omega \times \mathbf{a}')] = -\omega (\mathbf{b}' \dot{\mathbf{a}}').$

Учитывая, что $(\mathbf{a}' \dot{\mathbf{b}}')$ и $(\mathbf{b}' \dot{\mathbf{a}}')$ – скаляры, и подставляя полученное выражение в правую часть (19), можно убедиться в справедливости равенства (19) с точностью до знака.

Полученный единичный вектор соответствует мгновенной оси поворота, поэтому угол поворота φ также должен соответствовать текущему моменту времени, т.е. угол поворота является функцией времени $\varphi(t)$. Определить $\varphi(t)$ можно двумя способами. Первый состоит в использовании исходных и повернутых опорных векторов, что полностью соответствует полученному выше выражению (6), где под \mathbf{a}' и \mathbf{b}' следует понимать векторы $\mathbf{a}'(t_1)$ и $\mathbf{b}'(t_1)$, а под \mathbf{a} и \mathbf{b} – векторы $\mathbf{a}'(t_0)$ и $\mathbf{b}'(t_0)$. Конечно, рассчитанный угол поворота будет соответствовать повороту на интервале времени $[t_0, t_1]$. Второй подход заключается в использовании дискретного времени.

Будем считать, что производные опорных векторов в (19) и, соответственно, единичный вектор \mathbf{e} не меняются или незначительно меняются на интервале времени T . Тогда для определения угла можно воспользоваться выражением (5), в котором за исходный примем опорный вектор $\mathbf{a}(t-T)$, а за повернутый опорный вектор – $\mathbf{a}(t)$. Перепишем выражение (5):

$$\mathbf{a}(t) - (\mathbf{e}(t) \times \mathbf{a}(t)) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \mathbf{a}(t-T) + (\mathbf{e}(t) \times \mathbf{a}(t-T)) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда

$$\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t-T) = \mathbf{e}(t) \times (\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t-T)) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Для малого интервала T это выражение можно переписать, используя производную опорного вектора:

$$\dot{\mathbf{a}}'(t) T = \mathbf{e}(t) \times (\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t-T)) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Затем определим угол конечного поворота на интервале T :

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi(t)}{2} = \frac{\dot{\mathbf{a}}'(t) \dot{\mathbf{a}}'(t) T}{\dot{\mathbf{a}}'(t) (\mathbf{e}(t) \times (\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t-T)))}. \quad (20)$$

Интегрирование найденного угла поворота (20) при известном единичном векторе (19) позволяет найти матрицу (2) и кватернион (3) ориентации. Выражение, аналогичное (20), можно также записать и для вектора \mathbf{b} .

Точность расчета углов ориентации зависит от собственного смещения и шумов датчиков. При расчете единичного вектора (19) смещение датчиков обнуляется, поскольку там использованы производные опорных векторов, а при расчете мгновенного угла поворота выражение (20) непосредственно входит в результаты расчета – в знаменателе стоит сумма результатов измерения.

Достоинством оценки углов ориентации с помощью производных является отсутствие необходимости знать угловую скорость, недостатком – необходимость дифференцирования результатов измерения с шумом и фильтрации. Полученные оценки углов ориентации предназначены для наблюдения за погрешностями углового положения и не зависят от характера движения связанной системы координат.

Достоверность углов ориентации

Параметр достоверности расчета углов ориентации для случая использования двух опорных векторов наиболее просто составить исходя из инвариантности их скалярного произведения к повороту системы координат [15]. Действительно, учитывая, что произведение скалярное, получим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{R}(t)\mathbf{a}'(t)) \cdot (\mathbf{R}(t)\mathbf{b}'(t)) = \mathbf{a}'(t)^T \mathbf{R}(t)^T \mathbf{R}(t) \mathbf{b}'(t) = \mathbf{a}'(t) \cdot \mathbf{b}'(t),$$

или значение скалярного произведения опорных векторов сохраняется независимо от угла и направления поворота. Отсюда параметр вида

$$Er = \left| 1 - \frac{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \right|, \quad (21)$$

если в числитель поместить измеренные вектора, будет указывать на относительную погрешность измерения опорных векторов, которая приводит затем к погрешности расчета углов ориентации. Параметр Er «бракует» сразу два измеренных вектора. Если учесть, что использование вектора конечного поворота благодаря (6) и (20), так же как и в методе TRIAD, при замене ведущего вектора дает две оценки углов ориентации, то можно составить индивидуальный параметр для каждого измеренного опорного вектора.

Первый подход основан на равенстве нулю векторного произведения коллинеарных векторов. Если, например, измеренный вектор \mathbf{a}' с помощью рассчитанной оценки углов ориентации пересчитать в неподвижную систему координат, то полученная оценка опорного вектора $\hat{\mathbf{a}}$ должна быть коллинеарна опорному вектору \mathbf{a} . Модуль векторного произведения опорного вектора и его оценки покажет точность измерения и погрешность расчета ориентации:

$$Er = |\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{a}}|. \quad (22)$$

Записанный параметр (22) позволяет повекторно проанализировать достоверность оценок и при необходимости во время настройки системы скорректировать соответствующие измерения.

Второй подход основан на уравнении (17), которое перепишем в виде дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{a}}'(t) + \omega(t) \times \mathbf{a}'(t) = 0 \quad (23)$$

и используем результаты измерения опорного вектора $\mathbf{a}'(t)$ и угловой скорости $\omega(t)$, полученные с помощью датчиков угловой скорости. Учтем, что датчики, воспринимающие опорный вектор и угловую скорость в виде измеренных векторов $\mathbf{a}'_m(t)$ и $\omega_m(t)$, имеют собственное смещение $\Delta\mathbf{a}_m$ и $\Delta\omega_m$, которые являются медленно меняющимися величинами:

$$\mathbf{a}'_m = \mathbf{a}' + \Delta\mathbf{a}_m, \quad \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{a}_m \approx 0, \quad \omega_m = \omega + \Delta\omega_m, \quad \frac{d}{dt}\Delta\omega_m \approx 0.$$

После подстановки результатов измерения в (23) с учетом (17) получим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}'_m + \omega_m \times \mathbf{a}'_m &= \dot{\mathbf{a}}' + \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{a}_m + (\omega + \Delta\omega_m) \times (\mathbf{a}' + \Delta\mathbf{a}_m) = \\ &= \Delta\omega_m \times \mathbf{a}' + \omega \times \Delta\mathbf{a}_m + \Delta\omega_m \times \Delta\mathbf{a}_m \neq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Величина отклонения (24) от нулевого вектора зависит от погрешностей измерения опорного вектора и угловой скорости. С помощью (23) можно составить параметр, подтверждающий достоверность рассчитанных углов ориентации:

$$Er = |\dot{\mathbf{a}}'_m + \omega_m \times \mathbf{a}'_m|. \quad (25)$$

Околонулевые значения параметра указывают на достоверность расчета углов, а сравнение величины параметров (25) для разных опорных векторов – на то, какой опорный вектор целесообразно выбирать для расчета угла конечного поворота (6), (20) и углов ориентации.

Следует заметить, что параметр достоверности (25) указывает на качество измерения опорного вектора и на его согласованность с измеренной угловой скоростью. Недостатком этого параметра является то, что его значение также зависит от погрешностей измерения угловой скорости. Значение параметра (22) не зависит от угловой скорости. В результате параметр (25) можно использовать для «браковки» измеренных опорных векторов, параметр (22) – для определения лучшей оценки углов ориентации, параметр (21) – для оценки качества измерения.

Приведенные параметры могут быть использованы как погрешности измерения в методах МНК или шумов наблюдения в фильтрах Калмана.

Численные примеры

Приведем примеры расчета углов ориентации, в которых в качестве опорных векторов используем вектор силы тяжести, действующий на покоящуюся модель, и вектор индукции магнитного поля Земли. Эти примеры соответствуют случаю начальной выставки, связанной с моделью системы координат.

1. Идеальный случай. Датчики не имеют собственного смещения. Зададим нормированный вектор силы тяжести \mathbf{a} и вектор индукции магнитного поля Земли \mathbf{b} в нормальной системе координат для г. Жуковский:

$$\mathbf{a} = (0 \ 1 \ 0)^T, \quad \mathbf{b} = (0,314 \ -0,947 \ 0,061)^T. \quad (26)$$

Пусть связанная система координат неподвижна и повернута относительно нормальной на угол крена $\gamma = 14,5^\circ$, угол рыскания $\psi = -13,5^\circ$ и угол тангажа $\vartheta = 11,73^\circ$. Такому повороту соответствуют следующие значения опорных векторов в связанной системе координат:

$$\mathbf{a}' = (0,2033 \quad 0,9479 \quad -0,2452)^T, \quad \mathbf{b}' = (0,1204 \quad -0,9641 \quad 0,2349)^T.$$

Расчет угла поворота φ и единичного вектора \mathbf{e} по выражениям (6) и (9) дает следующие результаты:

$$\varphi = 0,385, \quad \mathbf{e} = (0,589 \quad -0,539 \quad 0,603)^T.$$

Расчет матрицы и кватерниона по выражениям (2) и (3) приводит к углам ориентации, обозначенным выше. Погрешности расчета углов нет.

2. Реальный случай. Датчики имеют собственное смещение:

$$\Delta \mathbf{a}_m = (0,0005 \quad -0,001 \quad -0,0008)^T, \quad \Delta \mathbf{b}_m = (-0,007 \quad 0,005 \quad 0,008)^T. \quad (27)$$

Результаты расчета погрешностей углов ориентации и значения параметров достоверности представлены в таблице. Расчет углов производился по формулам (6) и (9) при разных опорных векторах в (6) и с использованием метода TRIAD, для которого формировались ортогональные тройки векторов с разными ведущими векторами. Расчет параметра достоверности (25) не проводился, поскольку он соответствует случаю подвижной свободно штопорящей модели. Пример использования параметра достоверности (25) приведен в следующем разделе.

Т а б л и ц а

Результаты расчета погрешностей углов ориентации и значения параметра достоверности

Метод	Ведущий вектор	Ошибки углов [°]			Параметр достоверности		
		$\Delta\gamma$	$\Delta\delta$	$\Delta\theta$	(21)	(22) \mathbf{a}	(22) \mathbf{b}
Вектор конечного поворота (6), (9)	\mathbf{a}	0,06	0,23	0,04	0,0025	$1 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-5}$
	\mathbf{b}	0,61	-0,28	0,37	0,0025	0,011	$8 \cdot 10^{-5}$
TRIAD	\mathbf{a}	0,06	1,40	0,04	0,0025	0	0,006
	\mathbf{b}	0,07	1,40	0,39	0,0025	0,006	0

Из представленных данных видно, что при относительной погрешности скалярных произведений (21) измеренных опорных векторов, равной 0,25%, наибольшую достоверность (22) обеспечивает расчет углов ориентации при использовании вектора конечного поворота и вектора силы тяжести для расчета угла поворота (6).

Погрешность определения угла рыскания при использовании метода TRIAD составила 1,4°. Ее причиной послужило заданное в (27) смещение магнитометра по оси OZ. Из таблицы также видно, что параметр достоверности (22) для метода TRIAD не меняет своего значения и всегда принимает нулевое значение для ведущего вектора, даже если этот вектор измерен со значительной погрешностью.

Представленный численный пример показывает, что наиболее достоверные углы ориентации достигаются при использовании вектора конечного поворота и расчете угла поворота с помощью измеренного вектора силы тяжести, погрешность измерения которого (27) существенно меньше.

Детальный анализ точности использованных в примере методов требует определения чувствительности к вариациям компонент измеренных опорных векторов и является предметом отдельного исследования.

Оценка радиуса штопора

С помощью параметра достоверности (25) можно сформулировать простой способ оценки радиуса штопора свободно летающей модели. Этот параметр основан на уравнении (23), которое справедливо для любого вектора в связанной системе координат и для всех случаев движения твердого тела.

Запишем уравнение (23) для вектора силы тяжести. Учтем, что в чистом виде вектор силы тяжести \mathbf{g}' акселерометры, расположенные на маневрирующей модели, измерять не могут. При движении к вектору силы тяжести добавится сумма ускорений \mathbf{u}' , состоящая из центростремительного ускорения от вращения, тангенциального ускорения, ускорения Кориолиса и ускорения поступательного движения. При произвольном движении будет регистрироваться ускорение \mathbf{U}' , которое определится вектором силы тяжести \mathbf{g}' , вектором скорости \mathbf{v}' и вектором ω :

$$\mathbf{U}' = \mathbf{g}' + \mathbf{u}' = \mathbf{g}' + \dot{\mathbf{v}}' + \omega \times \mathbf{v}' . \quad (28)$$

Здесь все векторы определены в связанной с моделью системе координат.

Если зарегистрированное ускорение \mathbf{U}' подставить в уравнение (23), то сумма в левой части уравнения не даст нулевого вектора. Действительно, учитывая, что для опорного вектора \mathbf{g}' уравнение (23) соблюдается, получим:

$$\dot{\mathbf{U}}' + \omega \times \mathbf{U}' = \dot{\mathbf{u}}' + \omega \times \mathbf{u}' . \quad (29)$$

Здесь левая часть уравнения – это производная измеренного ускорения \mathbf{U}' для связанной системы координат, а правая часть – производная неизвестной суммы ускорений \mathbf{u}' . Очевидно, что если выполнить коррекцию измеренного ускорения, вычитая из него неизвестное ускорение \mathbf{u}' :

$$\mathbf{U}'_c = \mathbf{U}' - \mathbf{u}' ,$$

то правая часть (29) обратится в нулевой вектор

$$\dot{\mathbf{U}}'_c + \omega \times \mathbf{U}'_c = 0 \quad (30)$$

и параметр достоверности (25) примет вид

$$Er = \left| \dot{\mathbf{U}}'_c + \omega \times \mathbf{U}'_c \right| . \quad (31)$$

Значение параметра будет указывать на точность коррекции и достоверность последующей оценки радиуса штопора.

Рассмотрим полет модели самолета в режиме установившегося штопора в воздушном потоке вертикальной аэродинамической трубы. В этом случае центр тяжести модели совершает равномерное движение по круговой цилиндрической поверхности с радиусом, равным радиусу штопора. Такое движение можно представить в виде суммы поступательного движения по вертикали, которое компенсируется скоростью набегающего вертикального воздушного потока, и кругового движения с

постоянной угловой скоростью. Отсюда следует, что производной скорости $\dot{\mathbf{v}}'$ в (28) можно пренебречь и за неизвестное ускорение \mathbf{u}' принять центростремительное ускорение от вращения

$$\mathbf{u}' = \omega \times \mathbf{v}' . \quad (32)$$

Теперь, используя измеренную угловую скорость ω и измеренное ускорение U' , численным решением дифференциального уравнения (29) с последующим сглаживанием рассчитаем неизвестное ускорение \mathbf{u}' и вектор скорости \mathbf{v}' :

$$\mathbf{v}' = -\frac{\omega \times \mathbf{u}'}{\omega \cdot \omega} . \quad (33)$$

Это равенство легко получить, если обе части выражения (32) умножить слева векторно на ω и раскрыть двойное векторное произведение:

$$\omega \times \mathbf{u}' = \omega \times \omega \times \mathbf{v}' = \omega \cdot (\omega \cdot \mathbf{v}') - \rho \cdot (\omega)^2 .$$

Учитывая, что вектор угловой скорости ω и вектор скорости \mathbf{v}' для вращающегося твердого тела ортогональны друг другу, получим (33).

Рассмотрим пример полета модели в режиме штопора. Схема проведения испытаний на свободный штопор приведена в [2].

На рис. 2 показаны данные, зарегистрированные на протяжении одного испытания бортовой системой модели, которая содержала ортогональную триаду акселерометров и триаду датчиков угловой скорости. До 8-й секунды модель покоилась на ложементе. На 18-й секунде экспериментатор запустил модель в вертикальный воздушный поток аэродинамической трубы, придав ей начальное вращение. С момента запуска вращение модели постепенно замедлялось, и на 47-й секунде она вошла в режим установившегося штопора. Данное испытание было предназначено для определения характеристик штопора, и управление рулями модели не проводилось. На 62-й секунде оператор с помощью верхней подвески вывел модель из режима штопора, и на 64-й секунде она повисла на тросе верхней подвески. Это сопровождалось возникновением ударных нагрузок, которые продолжались до 70-й секунды. Затем экспериментатор остановил модель и на 80-й секунде установил на ложемент.

На рис. 3 показан рассчитанный параметр достоверности (25). Красным цветом отмечен параметр достоверности, соответствующий нескорректированной левой части уравнения (29), синим – параметр достоверности (31) после расчета \mathbf{u}' и коррекции U' . Рассчитанный с помощью (33) вектор скорости \mathbf{v}' полностью определяет радиус-вектор мгновенного центра вращения и радиус штопора:

$$\rho = -\frac{\omega \times \mathbf{v}'}{\omega \cdot \omega} . \quad (34)$$

Справедливость равенства доказывается аналогично справедливости (33).

Ненулевое значение параметра достоверности Er на участке установившегося штопора (47...62 секунда) обусловлено колебаниями модели по углам крена и тангажа, что вызывает нестабильность угловой скорости и возмущает векторные произведения в (29) и (32). Возмущающими факторами стали собственное смещение нулей и шумы датчиков, а также ограниченный частотный диапазон измерений. Полученная оценка радиуса штопора хорошо согласуется с результатами визуальных наблюдений за полетом модели. Описанный метод оценки радиуса штопора не предназначен для использования в режиме реального времени.

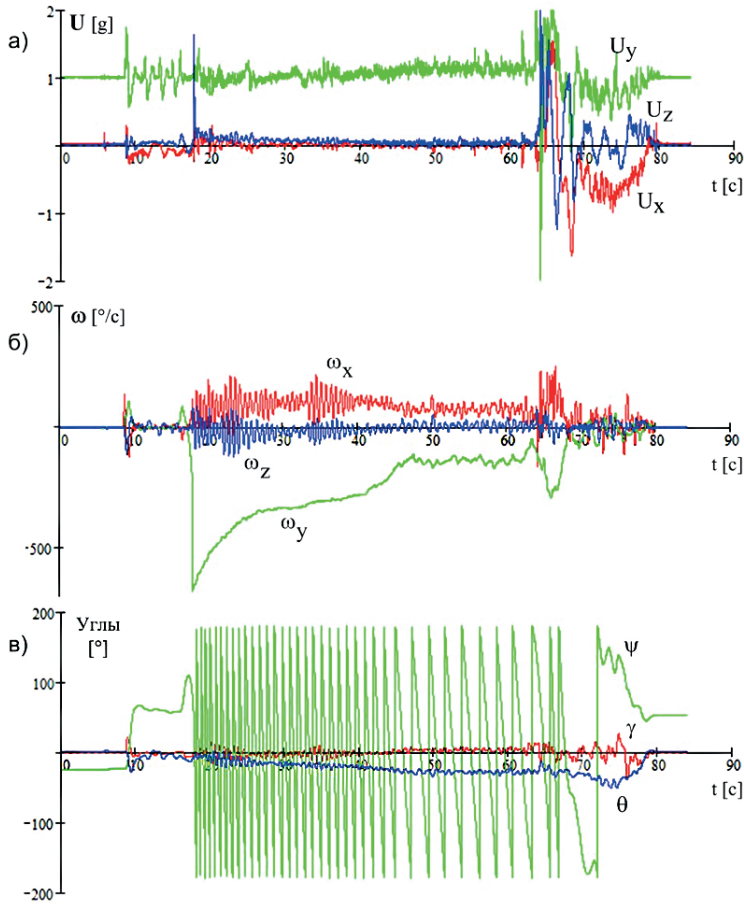


Рис. 2. Результаты испытания свободно штопорящей модели:
 а – измеренные ускорения, б – измеренные угловые скорости, в – рассчитанные углы Эйлера

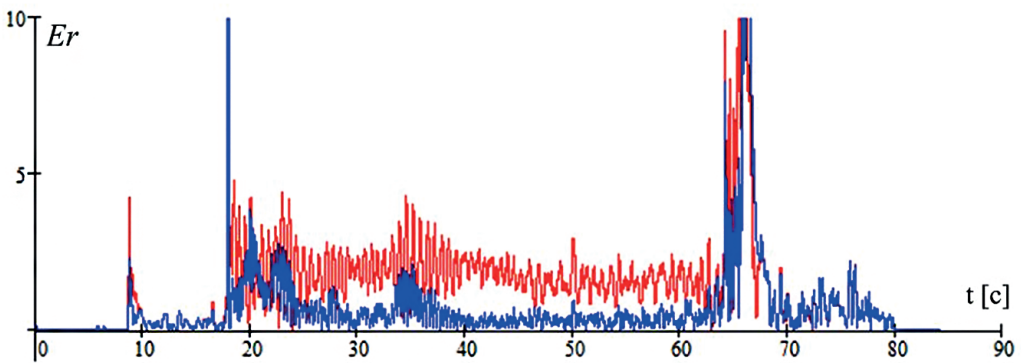


Рис. 3. Значение параметра достоверности Er для полета модели в режиме установившегося штопора

Заключение

Представленные методы расчета вектора конечного поворота использованы при разработке алгоритмов бортовых инерциальных систем для проведения испытаний

свободно летающих моделей на штопор. С помощью выражений (6) и (9) реализована начальная выставка связанной с моделью системы координат. Использование производных измеренных опорных векторов, согласно выражениям (19) и (20) или (19) и (6), позволяет оценивать углы ориентации во время маневренного полета и способно обеспечить непрерывную наблюдаемость погрешностей расчета углового положения. Экспериментальная проверка возможностей применения производных, измеренных с шумом опорных векторов, требует модернизации экспериментальной оснастки и является предметом дальнейших исследований. Параметры (21), (22) и (25) позволяют оценить достоверность рассчитанных оценок углов ориентации модели на разных участках полета модели и используются для общей оценки качества алгоритмов и аппаратного оснащения экспериментальной модели. Полет свободно летающей модели в режиме установившегося штопора демонстрирует работоспособность параметра достоверности (25) и реализованного с его помощью способа определения радиуса штопора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вялков А.В. Инерциальная технология штопорного эксперимента // Ученые записки ЦАГИ. 2016. Том XLVII. №5. С. 58–69.
2. Микеладзе В.Г. Авиация общего назначения. Рекомендации для конструкторов. М.: ЦАГИ, 1996. С. 272–273.
3. Mahony, R., Hamel, T., and Pflimlin, J.-M., Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, vol. 53, no. 5, pp. 1203–1218.
4. Madgwick, S.O.H., Harrison, A.J.L., Vaidyanathan, R., Estimation of IMU and MARG orientation using a gradient descent algorithm, *Proceedings of the IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR '11)*, July 2011, Zurich, Switzerland, pp. 1–7.
5. Wilson, S., Eberle, H., Hayashi, Y., Madgwick, S.O.H., McGregor, A., Jing, X., Vaidyanathan, R., Formulation of a new gradient descent MARG orientation algorithm: Case study on robot teleoperation, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 130, pp. 183–200.
6. Valenti, R.G., Dryanovski, I., Xiao, J., Keeping a Good Attitude: A Quaternion-Based Orientation Filter for IMUs and MARGs, *Sensors*, 2015, 15, 19302–19330. DOI:10.3390/s150819302.
7. Markley, F.L., Attitude determination using two vector measurements, *NASA_techdoc_19990052720*, 1998.
8. Wahba, G., A least squares estimate of satellite attitude, *SIAM review*, 1965, vol. 7, no. 3, pp. 409–409.
9. Hashim, H.A., Attitude Determination and Estimation using Vector Observations: Review, Challenges and Comparative Results, arXiv preprint, 2020.
10. Welch, G.F., Foxlin, E., Motion tracking: no silver bullet, but a respectable arsenal, *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 2002, 22, pp. 24–38.
11. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М., 1980.
12. Шилов А.А. Об уравнениях кинематики твердого тела // Ученые записки ЦАГИ. 2001. Т. XXXII. №1–2.
13. Шалагинов В.М. Алгоритмы вычисления кватерниона по известным значениям матрицы ориентации объекта // Гироскопия и навигация. 2009. №2(65). С. 56–71.
14. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. С. 101.
15. Литманович Ю.А. Об одном подходе к использованию избыточной информации в задачах определения угловой ориентации по наблюдению за двумя векторами // Гироскопия и навигация. 2012. №3. С. 99–110.

Vyalkov, A.V. (Zhukovskiy Central Aerohydrodynamic Institute, Moscow region, Russia)

Attitude Determination by External Vectors in Airplane Free Spin Investigation, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2020, vol. 28, no. 3 (110), pp. 43–59.

Absrtact. The article gives an overview of the methods for determining orientation angles from observations of external reference vectors. To maintain the observability of the kinematic parameters of the free-flying aircraft model motion in a vertical wind tun-nel, we analyzed the methods for determining the finite rotation vector using two, three or more vectors, known in a model body frame, as well as their derivatives. The methods to estimate the reliability of the calculated orientation angles are proposed. The method for estimating the radius of the free-flying model spin is considered.

Key words: finite rotation vector, attitude determination, free flight tests, inertial systems, motion parameters calculation.

Материал поступил 26.03.2020