

Е. В. БАРИНОВА, И. В. БЕЛОКОНОВ, И. А. ТИМБАЙ

ПРЕДОТВРАЩЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ НИЗКОВЫСОТНЫХ СПУТНИКОВ КЛАССА CUBESAT

Резонансные режимы движения, проявляющиеся в существенном увеличении амплитуды колебаний по пространственному углу атаки, могут привести к невыполнению целевой задачи полета. В связи с этим в статье исследуются резонансные режимы движения аэродинамически стабилизированных наноспутников формата CubeSat при полете на низких круговых орбитах при малой инерционно-массовой асимметрии. В отличие от осесимметричных тел вращения у наноспутников формата CubeSat резонансы могут проявляться не только из-за наличия малой асимметрии, но и по причине форм-фактора прямоугольного параллелепипеда. В работе получены формулы для определения критических значений продольной угловой скорости наноспутника, при которых выполняются условия возникновения резонансных режимов движения, а также предложен подход к предотвращению возможного появления резонансов для наноспутников класса CubeSat.

Ключевые слова: наноспутник формата CubeSat, аэродинамический момент, резонанс, угол атаки, угол собственного вращения.

Введение

Усложнение задач, решаемых наноспутниками, влечет за собой необходимость детального изучения их динамики. При этом важным вопросом является обеспечение заданной ориентации в пространстве, так как от этого зависит выполнение многих целевых задач полета. Необходимая ориентация наноспутника чаще всего достигается за счет использования пассивных или комбинированных (пассивных в сочетании с активными) систем стабилизации, не требующих расхода рабочего тела и энергии или требующих их в незначительном объеме [1–4]. Для пассивной стабилизации наноспутника по вектору скорости центра масс часто используется

Барина Елена Витальевна. Кандидат технических наук, доцент межвузовской кафедры космических исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва. ORCID 0000-0002-4645-7212.

Белоконов Игорь Витальевич. Доктор технических наук, профессор, заведующий межвузовской кафедрой космических исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва. Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID 0000-0002-5486-8820.

Тимбай Иван Александрович. Доктор технических наук, профессор межвузовской кафедры космических исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва. Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID 0000-0002-5074-1590.

Статья по докладу на XXVIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, 2021.

восстанавливающий аэродинамический момент, что обусловлено запуском большинства наноспутников на низкие околоземные орбиты, где влияние аэродинамического момента является доминирующим [5–8].

Следует отметить: угловое ускорение наноспутника, обусловленное аэродинамическим моментом, значительно выше, чем у спутника с большими размерами и массой (при одинаковых значениях относительного запаса статической устойчивости и объемной плотности) [8], что расширяет диапазон высот, позволяющих использовать аэродинамическую стабилизацию для обеспечения ориентации по вектору скорости центра масс. В этом случае важно учитывать возможность возникновения резонансных режимов движения, которые проявляются в значительном изменении амплитуды колебаний по пространственному углу атаки, когда линейная целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю. Существенное увеличение амплитуды колебаний по углу атаки в значительной степени влияет на условия выполнения показателей полета, формируемых задачами научной миссии. По этой причине исследование возможности возникновения резонансных режимов движения и разработка способов их предотвращения являются актуальными задачами.

Явление резонанса широко известно в разных областях науки, его изучению посвящено большое количество работ. Например, в [9, 10] анализируются резонансы низших порядков при движении волчка Лагранжа с малой массовой асимметрией. Работы [11, 12] посвящены изучению свободных и диссипативных резонансных колебаний систем с двумя степенями свободы вида «пружина–масса», «пружина–маятник», «пружина–масса–маятник». Поведение нелинейной системы с тремя степенями свободы, состоящей из маятниковой массы переменной длины, прикрепленной безмассовой пружиной к принудительному ползуну, в окрестности резонанса описано в [13]. В [14, 15] анализируется влияние параметров элементов спутника на возникновение резонанса конструкции. Возникновение резонанса при движении осесимметричных ракет с малой асимметрией при совпадении скорости вращения вокруг оси симметрии с частотой крена рассмотрено в [16, 17]. В [18, 19] исследуется устойчивость резонансных вращений спутника на эллиптической орбите под действием гравитационного момента. Нелинейные резонансы при колебаниях заряженного спутника в гравитационном и магнитном полях рассмотрены в работах [20, 21].

Хорошо изучены резонансные режимы при неуправляемом спуске космических аппаратов в атмосфере Земли [22–24] и Марса [25–27]. Такие аппараты, как правило, относятся к классу осесимметричных тел вращения, и соответствующий им аэродинамический момент зависит только от угла атаки. В связи с конструктивными особенностями, неточностью изготовления, обгаром теплозащитного покрытия возникает малая инерционно-массовая и геометрическая асимметрия, наличие которой и создает предпосылки возникновения резонанса. Вместе с тем наноспутники формата CubeSat имеют форму прямоугольного параллелепипеда, поэтому аэродинамический момент зависит не только от пространственного угла атаки, но и от угла собственного вращения. Это создает предпосылки возникновения резонанса за счет формы аппарата даже без малой асимметрии. Такие резонансные режимы были рассмотрены авторами ранее в [8]. В работе [28] анализируется возможность возникновения резонансных режимов движения при орбитальном полете у динамически симметричных наноспутников формата CubeSat, обусловленных форм-фактором

прямоугольного параллелепипеда, а также смещением центра масс от продольной оси. В [29] исследуется вопрос возможности возникновения резонансных соотношений при наличии малой динамической несимметричности и центробежных моментов инерции. Настоящая статья является обобщением и продолжением предыдущих работ авторов [8, 28, 29]. В ней выполнено комплексное исследование вопросов возникновения резонансных режимов движения и предложен подход к предотвращению возможности появления резонансов для низковысотных наноспутников класса CubeSat.

Математическая модель

Рассмотрим модель движения относительно центра масс аэродинамически стабилизированного наноспутника формата CubeSat с малой инерционно-массовой асимметрией.

Введем две системы координат (СК): траекторную $OX_k Y_k Z_k$ (совпадает с орбитальной в случае круговой орбиты) и связанную $Oxyz$ (оси связанной СК параллельны ребрам наноспутника, начало координат лежит в центре масс). Связь между траекторной и связанной СК определяется с помощью углов Эйлера, где α – пространственный угол атаки, ψ – угол прецессии, φ – угол собственного вращения

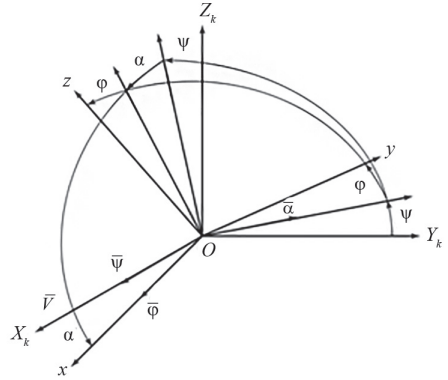


Рис. 1. Взаимное расположение траекторной $OX_k Y_k Z_k$ и связанной с наноспутником $Oxyz$ систем координат

определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos\alpha, & b_{12} &= \sin\alpha \sin\psi, & b_{13} &= -\sin\alpha \cos\psi, & b_{21} &= \sin\alpha \sin\varphi, \\ b_{22} &= \cos\varphi \cos\psi - \cos\alpha \sin\varphi \sin\psi, & b_{23} &= \cos\varphi \sin\psi + \cos\alpha \sin\varphi \cos\psi, \\ b_{31} &= \sin\alpha \cos\varphi, & b_{32} &= -\sin\varphi \cos\psi - \cos\alpha \cos\varphi \sin\psi \\ b_{33} &= -\sin\varphi \sin\psi + \cos\alpha \cos\varphi \cos\psi. \end{aligned}$$

Тензор инерции наноспутника в связанной СК запишем как

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} – центробежные моменты инерции, которые являются малыми, I_x, I_y, I_z – осевые моменты инерции, причем отличие I_y и I_z мало.

На рассматриваемых высотах движения принято считать, что обтекание наноспутника является свободномолекулярным и удар молекул газа абсолютно неупругий. В этом случае аэродинамическая сила представляет собой силу сопротивления, которая определяется площадью проекции наноспутника на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока [30]. Аэродинамический момент для наноспутников, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, в связанной с наноспутником системе координат можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_{ax} &= -c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi) \cdot (\Delta z b_{21} - \Delta y b_{31}), \\ M_{ay} &= -c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi) \cdot (\Delta x b_{31} - \Delta z b_{11}), \\ M_{az} &= -c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi) \cdot (\Delta y b_{11} - \Delta x b_{21}), \end{aligned} \quad (2)$$

где c_0 – коэффициент, который может принимать значения от 2 до 3 в зависимости от физических свойств газа и поверхности наноспутника, для проектных проработок принимается равным 2,2; $q(H) = \rho(H)[V(H)]^2/2$ – скоростной напор; $\rho(H)$ – плотность атмосферы на данной высоте; $V(H) = \sqrt{\mu / (R_E + H)}$ – скорость полета наноспутника; H – высота полета; μ – гравитационный параметр Земли; R_E – радиус Земли; $\tilde{S}(\alpha, \varphi) = |\cos\alpha| + k_s \sin\alpha (|\sin\varphi| + |\cos\varphi|)$ – площадь проекции наноспутника на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока, отнесенная к характерной площади наноспутника S [31]; k_s – отношение площади одной из боковых поверхностей к характерной площади; Δx – смещение центра масс относительно геометрического центра (центра давления) вдоль продольной оси; $\Delta y, \Delta z$ – смещение центра масс от продольной оси ($\Delta y \ll \Delta x, \Delta z \ll \Delta x$).

Уравнения пространственного движения наноспутника относительно центра масс под действием аэродинамического и гравитационного моментов на круговой орбите можно записать в следующем виде [32]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = I^{-1} \cdot \begin{pmatrix} M_x^\Sigma \\ M_y^\Sigma \\ M_z^\Sigma \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cos\alpha + \dot{\varphi} + \omega_0 b_{12}, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin\alpha \sin\varphi + \dot{\alpha} \cos\varphi + \omega_0 b_{22}, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\alpha \sin\varphi - \dot{\alpha} \sin\varphi + \omega_0 b_{32}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } M_x^\Sigma &= M_{gx} + M_{ax} - I_{xy} \omega_x \omega_z + I_{xz} \omega_x \omega_y + (I_y - I_z) \omega_y \omega_z + I_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2), \\ M_y^\Sigma &= M_{gy} + M_{ay} + I_{xy} \omega_y \omega_z - I_{yz} \omega_x \omega_y + (I_z - I_x) \omega_x \omega_z + I_{xz} (\omega_z^2 - \omega_x^2), \\ M_z^\Sigma &= M_{gz} + M_{az} + I_{yz} \omega_x \omega_z - I_{xz} \omega_z \omega_y + (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + I_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2), \end{aligned}$$

I^{-1} – обращенный тензор инерции (1);

$$\begin{aligned} M_{gx} &= \frac{3\mu}{(R_E + H)^3} \cdot (I_{xy} b_{13} b_{33} - I_{xz} b_{13} b_{23} + I_{yz} (b_{33}^2 - b_{23}^2) + (I_z - I_y) b_{23} b_{33}), \\ M_{gy} &= \frac{3\mu}{(R_E + H)^3} \cdot (-I_{xy} b_{23} b_{33} + I_{xz} (b_{13}^2 - b_{33}^2) + I_{yz} b_{13} b_{23} + (I_x - I_z) b_{13} b_{33}), \\ M_{gz} &= \frac{3\mu}{(R_E + H)^3} \cdot (I_{xy} (b_{23}^2 - b_{13}^2) + I_{xz} b_{23} b_{33} - I_{yz} b_{13} b_{33} + (I_y - I_x) b_{13} b_{23}) - \end{aligned}$$

проекция гравитационного момента на оси связанной системы координат $Oxyz$, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции абсолютной угловой скорости на оси связанной СК; ω_0 – орбитальная угловая скорость.

Перепишем уравнение (3), учитывая (2), пренебрегая гравитационным моментом и сохраняя только линейные члены от асимметрии:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \frac{-c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi)}{I_x} (\Delta z b_{21} - \Delta y b_{31}) - \frac{\Delta_i}{I_x} \omega_y \omega_z + \bar{I}_{xy} \left(\frac{-c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi)}{I_x} \cdot \Delta x b_{31} - \omega_x \omega_z \right) + \\ &+ \bar{I}_{xz} \left(\frac{c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi)}{I_x} \Delta x b_{21} + \omega_x \omega_y \right) + \frac{\bar{I}_{yz}}{I_x} (\omega_y^2 - \omega_z^2), \\ \dot{\omega}_y &= \frac{-c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi)}{I_n} (\Delta x b_{31} - \Delta z b_{11}) + (1 - \bar{I}_x) \omega_x \omega_z + \\ &+ \frac{\Delta_i}{2} \left(\frac{-c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi)}{I_n} \Delta x b_{31} + (2 - \bar{I}_x) \omega_x \omega_z \right) + \bar{I}_{xy} \omega_y \omega_z + \\ &+ \bar{I}_{yz} \left(\frac{c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi)}{I_n} \Delta x b_{21} - (2 - \bar{I}_x) \omega_x \omega_y \right) + \bar{I}_{xz} (\omega_z^2 - \omega_x^2), \\ \dot{\omega}_z &= \frac{-c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi)}{I_n} (\Delta y b_{11} - \Delta x b_{21}) - (1 - \bar{I}_x) \omega_x \omega_y + \\ &+ \frac{\Delta_i}{2} \left(\frac{-c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi)}{I_n} \Delta x b_{21} + (2 - \bar{I}_x) \omega_x \omega_y \right) - \bar{I}_{xz} \omega_y \omega_z + \\ &+ \bar{I}_{yz} \left(\frac{-c_0 q S \cdot \tilde{S}(\alpha, \varphi)}{I_n} \Delta x b_{31} + (2 - \bar{I}_x) \omega_x \omega_z \right) + \bar{I}_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\bar{I}_x = I_x / I_n$; $\bar{I}_{xy} = I_{xy} / I_n$; $\bar{I}_{xz} = I_{xz} / I_n$; $\bar{I}_{yz} = I_{yz} / I_n$; $\Delta_i = (I_z - I_y) / I_n$; $I_n = (I_y + I_z) / 2$.

Обозначим отнесенные к осредненному поперечному моменту инерции I_n проекции вектора кинетического момента на продольную ось наноспутника и на направление скорости центра масс следующим образом [23, 32]:

$$R = \bar{I}_x \omega_x, \quad G = R \cos \alpha + (\omega_y \sin \varphi + \omega_z \cos \varphi) \sin \alpha. \quad (6)$$

Если рассмотреть промежуток времени, равный периоду полного оборота продольной оси спутника относительно вектора скорости центра масс, то прецессию, противоположную направлению вектора скорости, принято называть «обратной» прецессией, а совпадающую с данным направлением – «прямой» [33]. При выполнении условия $R > G$ реализуется обратная прецессия, при $G > R$ – прямая. На рис. 2 показана траектория продольной оси наноспутника на единичной сфере относительно траекторной системы координат для случаев прямой и обратной прецессий.

Аэродинамическое угловое ускорение в плоскости угла атаки можно выразить из (5):

$$\begin{aligned} M_\alpha(\alpha, \varphi, H) &= m_1(H) \left(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|) \right) \cdot \\ &\cdot (\Delta x \sin \alpha - (\Delta y \sin \varphi + \Delta z \cos \varphi) \cos \alpha), \end{aligned} \quad (7)$$

где $m_1(H) = -c_0 S q(H) / I_n$.

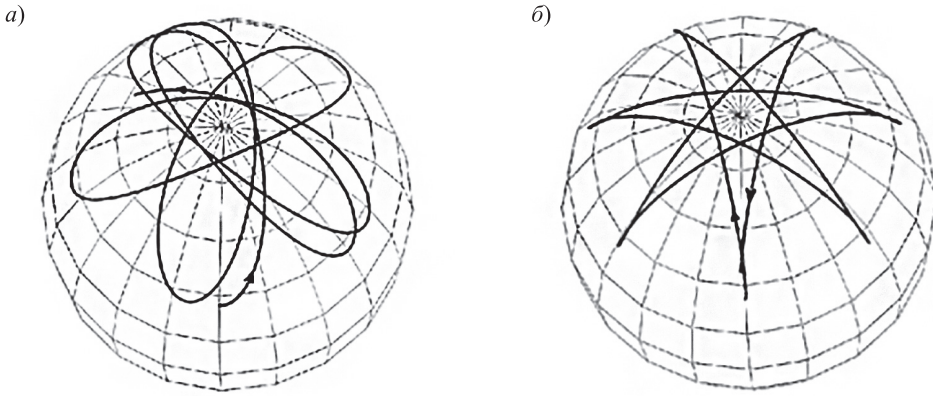


Рис. 2. Годограф продольной оси наноспутника на единичной сфере:
 а – прямая прецессия; б – обратная прецессия

Аппроксимируем в выражении (7) сумму $|\sin \varphi| + |\cos \varphi|$ следующим образом [8]:

$$|\sin \varphi| + |\cos \varphi| \approx 1 + (\sqrt{2} - 1)|\sin 2\varphi|. \quad (8)$$

При этом ошибка аппроксимации не превышает 0,015. Тогда можно представить выражение (7) в виде двух слагаемых, одному из которых в силу его малости припишем малый параметр ε :

$$M_\alpha(\alpha, \varphi, H) = M_\alpha(\alpha, H) + \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H), \quad (9)$$

где $M_\alpha(\alpha, H) = m_0(H)(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha) \sin \alpha$, $m_0(H) = m_1(H) \cdot \Delta x$, (10)

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H) = & m_0(H) k_s (\sqrt{2} - 1) |\sin 2\varphi| \sin^2 \alpha - \\ & - m_1(H) (|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)) \cdot (\Delta y \sin \varphi + \Delta z \cos \varphi) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая представление аэродинамического углового ускорения наноспутников формата CubeSat в виде (9) и пренебрегая орбитальной угловой скоростью и гравитационным моментом, угловое движение динамически симметричного наноспутника на низких круговых орбитах относительно траекторной системы координат можно описать уравнениями в форме, аналогичной [23]:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + F(\alpha, H, R, G) &= \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H) + \varepsilon \Phi_\alpha^I(\alpha, \varphi, H, R, G), \\ \dot{\varphi} &= R / \bar{I}_x - (G - R \cos \alpha) \cos \alpha / \sin^2 \alpha = \Phi_\varphi(\alpha, H), \\ \dot{\psi} &= \frac{G - R \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \\ \dot{H} &= -2\sigma_x(\alpha, \varphi) q(H) V(H) / g = \varepsilon \Phi_H(\alpha, \varphi, H), \\ \dot{R} &= \varepsilon \Phi_R(\alpha, \varphi, H), \\ \dot{G} &= \varepsilon \Phi_G(\alpha, \varphi, H, R), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, H, R, G) &= (G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha) / \sin^3 \alpha - M_\alpha(\alpha, H), \\
 \Phi_\alpha^I(\alpha, \varphi, H, R, G) &= (\bar{I}_{xy} \sin \varphi + \bar{I}_{xz} \cos \varphi) (\dot{\psi}^2 \sin^2 \alpha - R^2) + \\
 &+ (\bar{I}_{xy} \cos \varphi - \bar{I}_{xz} \sin \varphi) \dot{\psi} \dot{\alpha} \sin \alpha + \left(1 - \frac{2}{I_x}\right) R \bar{I}_{yz} (\dot{\psi} \sin \alpha \sin 2\varphi + \dot{\alpha} \cos 2\varphi) + \\
 &+ m_0(H) (|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)) \cdot \sin \alpha (\Delta_i \cos 2\varphi + \bar{I}_{yz} \sin 2\varphi) + \\
 &+ \frac{1}{2} R \Delta_i (\dot{\psi} \sin \alpha \cos 2\varphi + \dot{\alpha} \sin 2\varphi),
 \end{aligned}$$

где $\sigma_x(\alpha, \varphi) = c_0 (|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)) S / m$ – баллистический коэффициент; m – масса наноспутника; $g = g_E (R_E / (R_E + H))^2$, g_E – ускорение свободного падения на поверхности Земли; величины $\bar{I}_{xy}, \bar{I}_{xz}, \bar{I}_{yz}, \Delta_i$ полагаются малыми порядка ε ; $\Phi_G(\alpha, \varphi, H, R)$ – медленно меняющаяся функция, которая равна нулю при нулевых значениях центробежных моментов инерции и динамической симметричности ($\Delta_i = 0$); $\Phi_R(\alpha, \varphi, H)$ – медленно меняющаяся функция, которая равна нулю при отсутствии асимметрии.

Резонансные режимы движения

Для изучения резонансных режимов колебательной системы (12) в соответствии с процедурой, предложенной в [34], приведем систему к форме, в которой содержатся медленно изменяющиеся и быстрые переменные типа быстро вращающихся фаз.

Заменяем первое уравнение системы (12) на два уравнения первого порядка, записанные для амплитуды α_{\max} и фазы колебаний по углу атаки $y = \omega(t - t_0)$. Множитель ω выберем так, чтобы общее решение системы (12) при невозмущенном движении ($\varepsilon = 0$) было 2π -периодической функцией y . В результате приходим к системе уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_{\max} &= \varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, z), \\
 \dot{y} &= \omega(\alpha_{\max}, z) + \varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, z), \quad \dot{\varphi} = \Phi_\varphi(y, \alpha_{\max}, z), \\
 \dot{z} &= \varepsilon \Phi_z(y, \varphi, \alpha_{\max}, z).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $z = \{H, R, G\}$ – вектор медленно меняющихся параметров,

$$\begin{aligned}
 &\varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, z) = \\
 &= \frac{\varepsilon}{F(\alpha_{\max}, z)} \left[(\Phi_\alpha + \Phi_\alpha^I) \text{sign}(\dot{\alpha}) |\dot{\alpha}| - \left(\frac{\partial W(\alpha_{\max}, z)}{\partial z} - \frac{\partial W(\alpha, z)}{\partial z} \right) \Phi_z \right], \\
 &\dot{\alpha} = \pm \sqrt{2 [W(\alpha_{\max}, z) - W(\alpha, z)]}, \quad W(\alpha, z) = \int F(\alpha, z) d\alpha, \\
 &\varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, z) = -\varepsilon 2\pi \text{sign}(\dot{\alpha}) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|} \right) \right] \Phi_z + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_{\max}} \left(\frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|} \right) \right] \Phi_{\alpha_{\max}},
 \end{aligned}$$

$\omega(\alpha_{\max}, z) = \frac{2\pi}{T(\alpha_{\max}, z)}$ – частота собственных колебаний системы (12) при $\varepsilon = 0$,

$T(\alpha_{\max}, z) = 2 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|}$ – период колебаний,

$\alpha_{\max}, \alpha_{\min}$ – максимальное и минимальное значения угла атаки.

Средняя частота собственного вращения определяется следующим образом:

$$\lambda(\alpha_{\max}, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_\varphi(y, \alpha_{\max}, z) dy. \quad (14)$$

Тогда уравнение для угла собственного вращения можно представить в виде

$$\dot{\varphi} = \lambda(\alpha_{\max}, z) + \varepsilon L(y, \alpha_{\max}, z), \quad (15)$$

где $\varepsilon L(y, \alpha_{\max}, z) = \Phi_\varphi(y, \alpha_{\max}, z) - \lambda(\alpha_{\max}, z)$.

С учетом соотношения (15) система уравнений (13) преобразуется к системе с двумя вращающимися фазами:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\max} &= \varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, z), \\ \dot{y} &= \omega(\alpha_{\max}, z) + \varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, z), \\ \dot{\varphi} &= \lambda(\alpha_{\max}, H) + \varepsilon L(y, \alpha_{\max}, z), \\ \dot{z} &= \varepsilon \Phi_z(y, \varphi, \alpha_{\max}, z). \end{aligned} \quad (16)$$

Аналитическое решение первого уравнения системы (12) получить не представляется возможным, поэтому для проведения приближенного анализа параметров движения зависимость (10) аппроксимируем синусоидальной зависимостью по углу атаки:

$$M_\alpha(\alpha, H) \approx m_0(H) m_{nk} \sin \alpha, \quad (17)$$

где $m_{nk} = \frac{4 + 8k_s}{3\pi}$ – первый член разложения выражения $(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha) \sin \alpha$ в ряд Фурье по синусам.

На рис. 3 показано сравнение выражений $(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha) \sin \alpha$ и $m_{nk} \sin \alpha$ при различных значениях k_s . Как видно из рисунка, синусоидальная аппроксимация (17) отражает основной характер изменения $M_\alpha(\alpha, H)$.

В том случае, когда невозмущенное движение $\varepsilon = 0$, $z = const$ и аэродинамическое угловое ускорение является синусоидальной функцией угла атаки (17), решение для пространственного угла атаки имеет вид [35]:

$$\cos \alpha = A cn^2 \left(\frac{yK(k)}{\pi} + K(k), k \right) + x, \quad (18)$$

где $cn(u)$ – эллиптический косинус, $x = \cos \alpha_{\max}$, $\omega = \pi\beta/K$, $A = x_2 - x$,

$K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода,

$k = \sqrt{A/2\eta}$, $\beta = \sqrt{-m_0 m_{nk} \eta}$, $x_2 - \cos \alpha_{\min} = \eta - (a - bx)/(1 - x_2)$,

$\eta = \sqrt{1 - 2(ax - b)/(1 - x^2) + [(a - bx)/(1 - x^2)]^2}$,

$a = (R^2 + G^2)/(-4m_0 m_{nk})$, $b = RG/((-2m_0 m_{nk}))$.

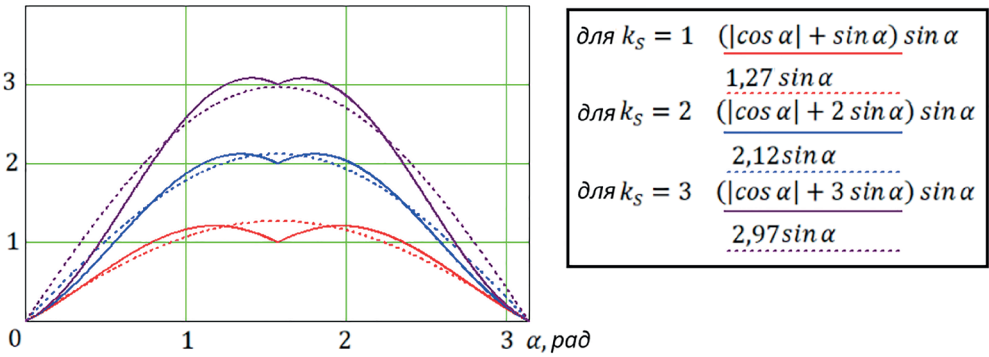


Рис. 3. Сравнение величины $(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha) \sin \alpha$ (сплошная линия) и ее аппроксимации синусоидальной зависимостью $m_{nk} \sin \alpha$ (пунктирная линия)

Для малых значений модуля эллиптических функций k решение (18) можно упростить [22]:

$$\cos \alpha \approx a_1 + b_1 \cos(\omega(t - t_0)), \tag{19}$$

где $a_1 = (x + x_2)/2$, $b_1 = -(x_2 - x)/2$.

Таким образом, при отсутствии возмущений, согласно (19), частота колебаний по углу атаки равна ω , а согласно (15) – средняя частота собственного вращения равна λ .

Рассмотрим правую часть первого уравнения системы (12) как внешнее малое возмущение. Слагаемое $\varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H)$ можно представить в виде двух составляющих, одна из которых $\Phi_{\alpha, form}(\alpha, \varphi, H)$ обусловлена только формой наноспутника

$$\Phi_{\alpha, form}(\alpha, \varphi, H) = m_0(H) k_s (\sqrt{2} - 1) |\sin 2\varphi| \sin^2 \alpha, \tag{20}$$

а вторая $\Phi_{\alpha, \Delta}(\alpha, \varphi, H)$ – как формой, так и смещением центра масс от продольной оси:

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha, \Delta}(\alpha, \varphi, H) = \\ = -m_1(H) (|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)) \cdot (\Delta y \sin \varphi + \Delta z \cos \varphi) \cos \alpha. \end{aligned} \tag{21}$$

Слагаемое $\varepsilon \Phi_\alpha^I(\alpha, \varphi, H, R, G)$ обусловлено как формой наноспутника, так и малой динамической несимметричностью и наличием центробежных моментов инерции.

Резонансные соотношения частот по углам атаки и собственного вращения в соответствии с [36] получим, приравнивая собственную частоту по углу атаки ω к частотам каждого из слагаемых внешних малых возмущений (20), (21):

$$\omega = n\omega + p\lambda, \tag{22}$$

где n, p – целые числа.

Рассмотрим резонансы, обусловленные только формой наноспутника (составляющая $\Phi_{\alpha, form}(\alpha, \varphi, H)$). В выражении (20) стоит произведение сомножителей $|\sin 2\varphi|$ и $\sin^2 \alpha$. Выражение $|\sin 2\varphi|$ имеет частоту $\pm 4\lambda$, выражение $\sin^2 \alpha$ с учетом (19) имеет частоты $0, \pm \omega, \pm 2\omega$. Тогда, используя (22), можно записать:

$$\omega = \pm 4\lambda, \omega = \pm 4\lambda \pm \omega, \omega = \pm 4\lambda \pm 2\omega. \tag{23}$$

Окончательно из (23) найдем резонансные соотношения частот, обусловленные формой аппарата:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \pm \frac{1}{4}\omega, \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}\omega, \quad \lambda = \pm \frac{3}{4}\omega. \quad (24)$$

Аналогично получаются резонансные соотношения частот, обусловленные как формой аппарата, так и смещением центра масс от оси симметрии (для составляющей $\Phi_{\alpha,\Delta}(\alpha, \varphi, H)$):

$$\begin{aligned} \lambda = 0, \quad \lambda = \pm\omega, \quad \lambda = \pm 2\omega, \quad \lambda = \pm 3\omega, \\ \lambda = \pm \frac{1}{3}\omega, \quad \lambda = \pm \frac{2}{3}\omega, \quad \lambda = \pm \frac{1}{5}\omega, \quad \lambda = \pm \frac{2}{5}\omega, \quad \lambda = \pm \frac{3}{5}\omega. \end{aligned} \quad (25)$$

Тем же способом получены резонансные соотношения частот, обусловленные как формой наноспутника, так и малой динамической несимметричностью, а также наличием центробежных моментов инерции (слагаемое $\varepsilon\Phi_{\alpha}^I(\alpha, \varphi, H, R, G)$):

$$\begin{aligned} \lambda = 0, \quad \lambda = \pm \frac{1}{6}\omega, \quad \lambda = \pm \frac{1}{3}\omega, \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}\omega, \quad \lambda = \pm \frac{3}{2}\omega, \\ \lambda = \pm\omega, \quad \lambda = \pm 2\omega, \quad \lambda = \pm 3\omega. \end{aligned} \quad (26)$$

Запишем выражения для средней частоты собственного вращения и частоты колебаний по пространственному углу атаки [22]:

$$\lambda \approx R(1/\bar{I}_x - 1/2) + \text{sign}(R - G)\sqrt{\omega_a^2 + \frac{R^2}{4}}, \quad (27)$$

$$\omega \approx 2\sqrt{\omega_a^2 + \frac{R^2}{4}}, \quad (28)$$

где $\omega_a = \sqrt{-m_0 m_{nk}}$.

С использованием (27), (28) получены формулы для определения критических значений продольной угловой скорости наноспутника, при которых выполняются условия возникновения резонансного движения:

$$\omega_{xkr} = d \sqrt{\frac{\omega_a^2}{1 - \bar{I}_x + \frac{1}{4}(1 - d^2)\bar{I}_x^2}}, \quad (29)$$

где $d = 2k_{res} + 1 > 0$ в случае прямой прецессии; $d = 2k_{res} - 1 > 0$ в случае обратной прецессии; $k_{res} = \lambda/\omega$ – коэффициент, стоящий в резонансных соотношениях частот перед ω .

В таблице приведены соотношения частот $\lambda = k_{res} \omega$, при которых возникают резонансы для случаев прямой и обратной прецессий. При этом часть резонансных соотношений (24), (25), (26) была отброшена при определении соответствующих критических значений продольной угловой скорости.

Резонансные соотношения частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения

Для прямой прецессии		Для прямой и обратной прецессий	
Соотношение частот $\lambda = k_{res} \omega$	Обуславливающий фактор	Соотношение частот $\lambda = k_{res} \omega$	Обуславливающий фактор
$\lambda = 0$	Форма, $\bar{T}_{xy}, \bar{T}_{xz}, \bar{T}_{yz},$ $\Delta_i, \Delta y, \Delta z$	$\lambda = \frac{3}{5} \omega$	$\Delta y, \Delta z$
$\lambda = \pm \frac{1}{6} \omega$	\bar{T}_{yz}, Δ_i	$\lambda = \frac{2}{3} \omega$	$\Delta y, \Delta z$
$\lambda = \pm \frac{1}{5} \omega$	$\Delta y, \Delta z$	$\lambda = \frac{3}{4} \omega$	Форма
$\lambda = \pm \frac{1}{4} \omega$	Форма	$\lambda = \omega$	$\bar{T}_{xy}, \bar{T}_{xz}, \bar{T}_{yz},$ $\Delta_i, \Delta y, \Delta z$
$\lambda = \pm \frac{1}{3} \omega$	$\bar{T}_{yz}, \Delta_i, \Delta y, \Delta z$	$\lambda = \frac{3}{2} \omega$	\bar{T}_{yz}, Δ_i
$\lambda = \pm \frac{2}{5} \omega$	$\Delta y, \Delta z$	$\lambda = 2\omega$	$\bar{T}_{xy}, \bar{T}_{xz}, \Delta y, \Delta z$
$\lambda = \frac{1}{2} \omega$	Форма, \bar{T}_{yz}, Δ_i	$\lambda = 3\omega$	$\bar{T}_{xy}, \bar{T}_{xz}, \Delta y, \Delta z$

В случае прямой прецессии получено 19 соотношений частот, в случае обратной – 7 соотношений частот, соответствующих резонансу.

Примеры резонансных режимов движения

Для подтверждения результатов, полученных по приближенной модели, были проведены поверочные расчеты по полной модели движения (3), (4), которая учитывает угловую скорость, возникающую при движении по орбите, и гравитационный момент. Для иллюстрации возможности возникновения резонансных режимов движения наноспутников формата CubeSat за основу взят SamSat-218D, который был сконструирован в Самарском национальном исследовательском университете имени академика С.П. Королёва и предназначался для отработки технологии создания замкнутого контура управления его пространственной ориентацией при наличии специально сформированного большого запаса статической устойчивости [37]. При расчетах использована стандартная модель плотности атмосферы Земли.

Основные характеристики наноспутника SamSat-218D:

$$m = 1,8 \text{ кг}; l = 0,328 \text{ м}; S = 0,01 \text{ м}^2; k_s = 3,28; c_0 = 2,2;$$

$$I_x = 0,004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; I_y = I_z = I_n = 0,014 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0; \Delta x = 0,05 \text{ м}; \Delta y = \Delta z = 0.$$

На рис. 4 показано резонансное изменение пространственного угла атаки наноспутника SamSat-218D в случае «лунного» резонанса, обусловленного формой наноспутника. Численное моделирование проводилось при следующих начальных условиях движения: высота полета $H_0 = 319$ км, угол атаки $\alpha_0 = 30^\circ$, угол собственного вращения $\varphi_0 = 0^\circ$, угол прецессии $\psi_0 = 0^\circ$, продольная угловая скорость $\omega_{x0} = 0,6^\circ/\text{с}$, компоненты поперечной скорости $\omega_{y0} = 0^\circ/\text{с}$, $\omega_{z0} = 0,25^\circ/\text{с}$ (здесь и далее составляющие угловой скорости приведены относительно траекторной системы координат). Из графика видно, что резонанс начинается примерно на 25000 с, что соответствует высоте 318,5 км. На этой высоте для случая «лунного» резонанса по выражению (29) рассчитано значение критической угловой скорости $\omega_{xkr} = 0,65^\circ/\text{с}$. На рис. 5 приведена зависимость изменения угла собственного вращения от времени. Из графика видно, что до начала резонанса угол собственного вращения увеличивался и средняя скорость была отлична от нуля. В окрестности резонанса средняя угловая скорость по углу собственного вращения близка к нулю. На рис. 6 приведен годограф продольной оси наноспутника на единичной сфере в начальный момент времени и в окрестности начала резонанса. Как видно из рисунка, в начальный момент времени максимальные отклонения продольной оси от вектора скорости имеют примерно одинаковую величину, тогда как в окрестности резонанса эти отклонения значительно увеличиваются. Параметры движения соответствуют прямой прецессии.

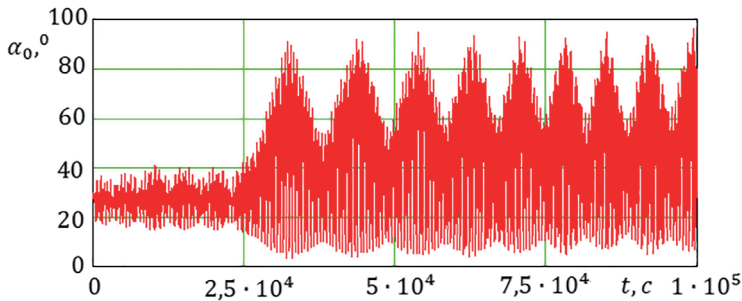


Рис. 4. Изменение пространственного угла атаки в случае «лунного» резонанса

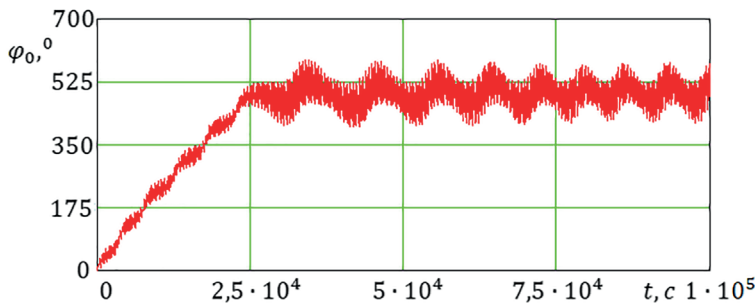


Рис. 5. Изменение угла собственного вращения в случае «лунного» резонанса

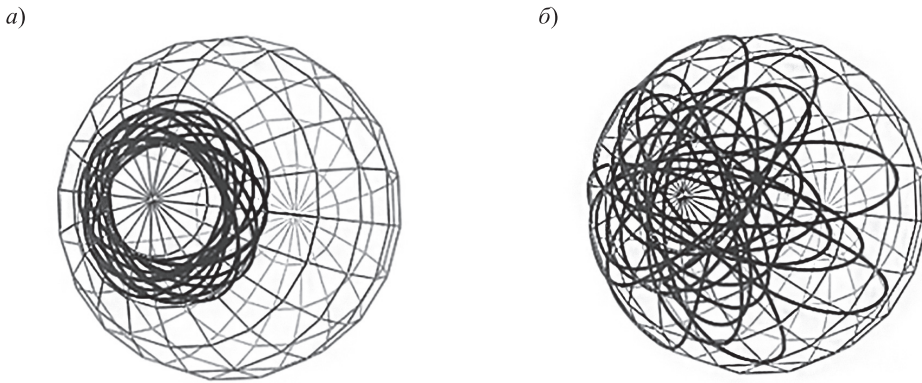


Рис. 6. Годограф продольной оси наноспутника на единичной сфере в случае «лунного» резонанса в начальный момент времени (а) и в окрестности резонанса (б)

На рис. 7 показано резонансное изменение пространственного угла атаки при следующих начальных условиях движения: высота полета $H_0 = 312,5$ км, угол атаки $\alpha_0 = 30^\circ$, угол собственного вращения $\varphi_0 = 0^\circ$, угол прецессии $\psi_0 = 0^\circ$, продольная угловая скорость $\omega_{x_0} = 0,35^\circ/\text{с}$, компоненты поперечной скорости $\omega_{y_0} = \omega_{z_0} = 0^\circ/\text{с}$ (начальное движение соответствует обратной прецессии и имеет место резонансное соотношение частот $\lambda = \frac{3}{4}\omega$). Значительное увеличение амплитуды угла атаки началось примерно на 62600 с, что соответствует высоте $H = 311$ км, где значение критической угловой скорости для данного соотношения частот $\omega_{xkr} = 0,36^\circ/\text{с}$.

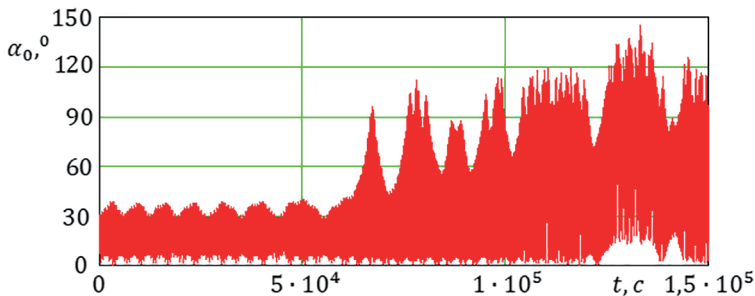


Рис. 7. Резонансное изменение пространственного угла атаки в случае обратной прецессии (соотношение частот $\lambda = \frac{3}{4}\omega$)

На рис. 8 показано резонансное изменение пространственного угла атаки при возможном поперечном смещении центра масс от продольной оси $\Delta z = 0,005$ м. Рассмотрены следующие начальные условия движения: высота полета $H_0 = 324$ км, угол атаки $\alpha_0 = 25^\circ$, угол собственного вращения $\varphi_0 = 0^\circ$, угол прецессии $\psi_0 = 0^\circ$, продольная угловая скорость $\omega_{x_0} = 0,12^\circ/\text{с}$, компоненты поперечной скорости $\omega_{y_0} = \omega_{z_0} = 0^\circ/\text{с}$ (начальное движение соответствует обратной прецессии $R > G$ и имеет место резонансное соотношение частот $\lambda = \frac{3}{5}\omega$). Увеличение амплитуды угла атаки началось практически сразу. Значение критической угловой скорости для данного соотношения частот $\omega_{xkr} = 0,12^\circ/\text{с}$. Для сравнения на рис. 9 приведено нерезонансное поведение пространственного угла атаки при тех же параметрах и начальных условиях и при отсутствии поперечного смещения центра масс от продольной оси ($\Delta y = \Delta z = 0$).

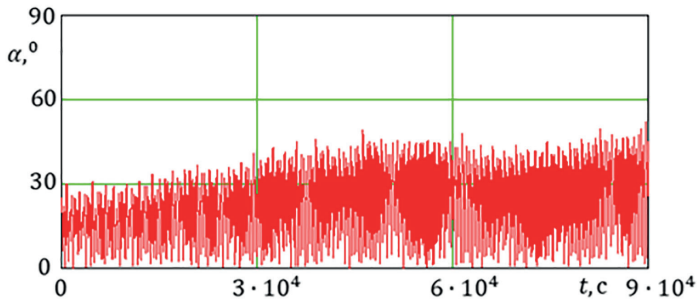


Рис. 8. Резонансное изменение пространственного угла атаки в случае обратной прецессии (соотношение частот $\lambda = \frac{3}{5}\omega$)

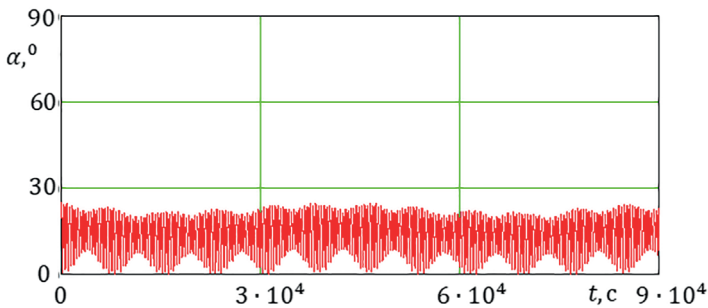


Рис. 9. Нерезонансное изменение пространственного угла атаки

На рис. 10 показано резонансное изменение пространственного угла атаки при возможной малой динамической несимметричности наноспутника $I_y = 0,0125 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $I_z = 0,0155 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, при этом $\Delta y = \Delta z = 0$. Рассмотрены следующие начальные условия движения: высота полета $H_0 = 296,8 \text{ км}$, угол атаки $\alpha_0 = 20^\circ$, угол собственного вращения $\varphi_0 = 45^\circ$, угол прецессии $\psi_0 = 0^\circ$, продольная угловая скорость $\omega_{x0} = 0,3^\circ/\text{с}$, компоненты поперечной скорости $\omega_{y0} = 0^\circ/\text{с}$, $\omega_{z0} = 0,3^\circ/\text{с}$ (начальное движение соответствует прямой прецессии $G > R$ и имеет место резонансное соотношение частот $\lambda = -\omega/3$). Значение критической угловой скорости для данного соотношения частот $\omega_{xkr} = 0,28^\circ/\text{с}$.

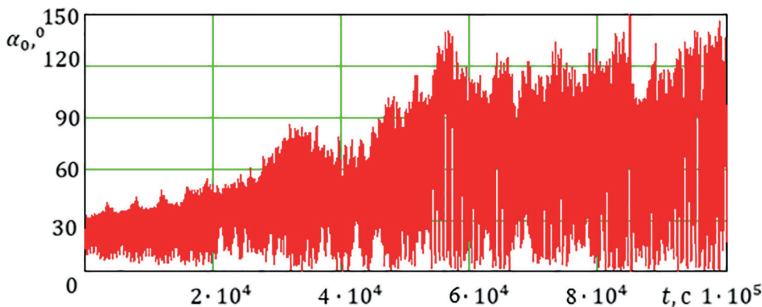


Рис. 10. Резонансное изменение пространственного угла атаки в случае прямой прецессии (соотношение частот $\lambda = -\omega/3$)

Подход к предотвращению возможного появления резонансов для наноспутников класса CubeSat

На рис. 11 и 12 приведены зависимости критических значений продольной угловой скорости для случаев прямой и обратной прецессии соответственно, рассчитанные по соотношению (29) для наноспутника SamSat-218D.

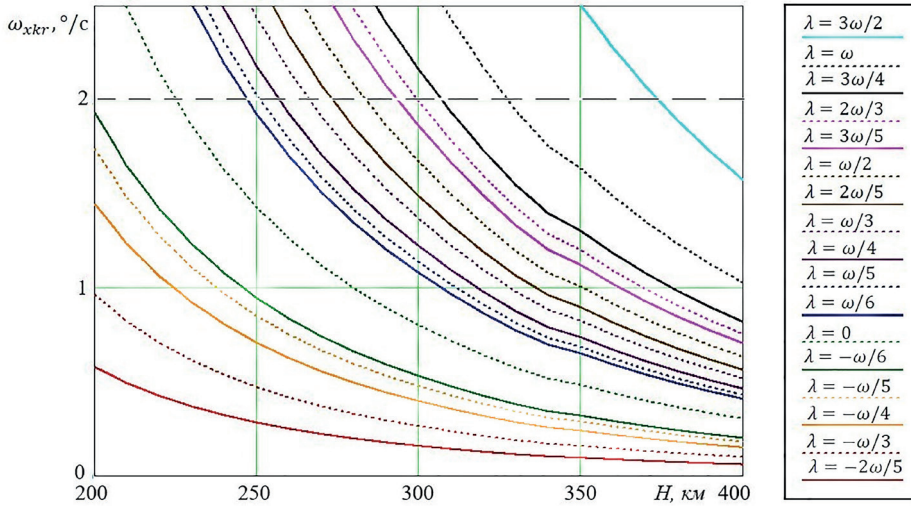


Рис. 11. Зависимости критических значений продольной угловой скорости от высоты в случае прямой прецессии ($G > R$)

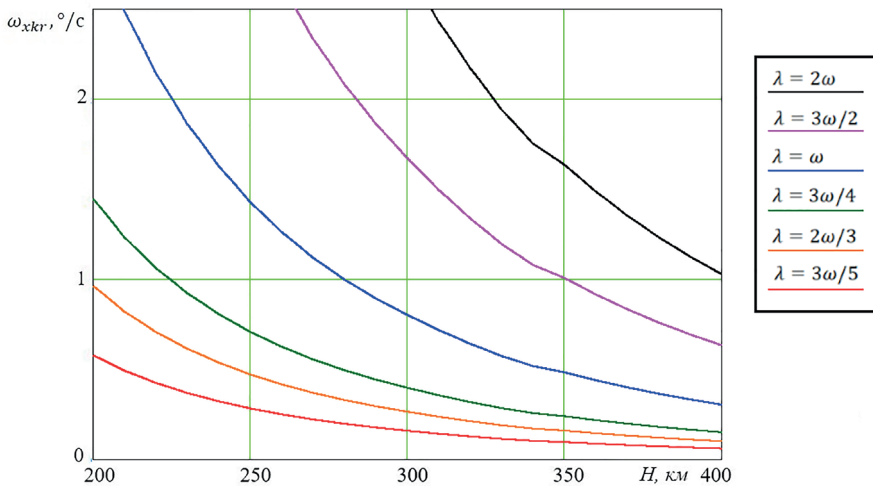


Рис. 12. Зависимости критических значений продольной угловой скорости от высоты в случае обратной прецессии ($R > G$)

Из рис. 11 и 12 можно сделать вывод, что для случая прямой прецессии количество критических значений угловой скорости значительно выше, чем для случая обратной прецессии, а следовательно, увеличивается возможность возникновения

резонансного режима движения. Вместе с тем тип прецессии начального движения определяется начальными условиями движения, и реализация того или иного типа прецессии в общем случае носит вероятностный характер.

Следует отметить, что при движении наноспутника происходит постепенное уменьшение высоты, и при одном и том же начальном значении продольной угловой скорости на некоторых высотах выполняется резонансное условие (29), а на некоторых не выполняется (рис. 11 и 12). Например, при начальном значении продольной угловой скорости $\omega_{x0} = 2^\circ/\text{с}$ в случае прямой прецессии на высоте 400 км нет резонанса, а при снижении до высоты 374 км возможен резонанс при соотношении частот $\lambda = 3\omega/2$. При дальнейшем уменьшении высоты до 200 км прямая $\omega_{x0} = 2^\circ/\text{с}$ пересечет еще 11 кривых критических значений угловой скорости для различных соотношений частот (рис. 11). Кроме того, необходимо учитывать, что при наличии малой асимметрии само значение продольной угловой скорости будет меняться с течением времени, поэтому диапазон ее значений, исключающий возможность возникновения резонансных режимов, будет различным для разных высот, и важно отслеживать текущее значение скорости.

Тем не менее даже при совпадении значения продольной угловой скорости с критическим значением изменение амплитуды колебаний по углу атаки может быть различным. На изменение угла атаки основное влияние оказывает длительность резонанса, которая определяет уровень подкачки энергии в колебательную систему. В зависимости от длительности резонанса различают три вида движения в его окрестности: прохождение через резонанс, неустойчивый резонанс и устойчивый резонанс. При прохождении через резонанс амплитуда по углу атаки не успевает заметно измениться, так как резонансное условие кратковременно. Наибольшее изменение амплитуды по углу атаки происходит в случае устойчивого резонанса.

В данной работе предложен следующий подход к предотвращению резонансных режимов движения на этапе проектных работ:

- при создании наноспутника максимально уменьшить смещение центра масс от продольной оси за счет компоновки аппарата, например с помощью балансировочных грузиков. Это позволит ослабить влияние резонанса, обусловленного смещением центра масс;
- так как убрать резонансы, вызванные формой наноспутника, за счет изменения внутренней компоновки не представляется возможным, то исключить данные режимы предлагается наложением ограничений на величину продольной угловой скорости при отделении от пускового устройства.

Следует отметить, что ввиду погрешности определения масс-инерционных характеристик существующими средствами полностью исключить инерционно-массовую асимметрию не представляется возможным [38]. Кроме того, при движении наноспутника происходит уменьшение высоты, а соответственно, и изменение величин критических скоростей, поэтому одних только ограничений на величину продольной угловой скорости при отделении от пускового устройства недостаточно.

В работах [39, 40] сделаны попытки выявить характер движения относительно центра масс для наноспутника SamSat-218D, выведенного 28 апреля 2016 года на орбиту высотой 486 км, по изменению интенсивности падения высоты полета. К октябрю 2021 г. орбита наноспутника снизилась ориентировочно до 390 км. На больших высотах маловероятно выявить косвенным образом появление резонанс-

ного режима, тем более в период низкой солнечной активности, в силу близости ускорений, порождаемых гравитационным и аэродинамическим моментами. Вместе с тем при дальнейшем снижении наноспутника открывается возможность проверить сделанные выше теоретические выводы о возникновении резонансных режимов.

В связи с вышеизложенным предлагается проводить мониторинг движения наноспутника относительно центра масс и при операционном управлении периодически отслеживать текущее значение продольной угловой скорости и сравнивать его с критическими значениями для данной высоты. Если значения окажутся близкими, то необходимо включать режим управления, задачей которого является изменение продольной угловой скорости для исключения возможности возникновения резонансных режимов движения.

Выводы

В настоящей работе выполнен анализ возможности возникновения резонансных режимов движения по углу атаки для наноспутников формата CubeSat. Получены соотношения для определения критических значений продольной угловой скорости наноспутника, при котором выполняются условия возникновения резонансного движения. Проведение поверочных расчетов по пространственной модели движения наноспутника относительно центра масс подтвердило правильность полученных результатов.

Резонансные режимы, как правило, не рассматриваются при создании наноспутников формата CubeSat, что может оказаться критическим при выполнении целевых задач в случае пассивной аэродинамической стабилизации наноспутника. Предложенный в работе подход позволяет разработчикам принять меры для предотвращения появления резонансных режимов движения и тем самым выполнить требования, накладываемые целевой задачей миссии. В частности, целесообразно рассмотреть вопрос о введении в систему управления движением наноспутника дополнительного контура обратной связи, задачами которого станут прогнозирование возможности возникновения резонансного режима и формирование управляющего момента с целью предотвращения его возникновения (устранение условий его возникновения).

Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

ЛИТЕРАТУРА

1. **He, L., Chen, X., Kumar, K. D., Sheng, T. and Yue, C.**, A novel three-axis attitude stabilization method using in-plane internal mass-shifting, *Aerospace Science and Technology*, 2019, vol. 92, pp. 489–500.
2. **Chesi, S., Gong, Q., Romano, M.**, Aerodynamic Three-Axis Attitude Stabilization of a Spacecraft by Center-of-Mass Shifting, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, vol. 40, no. 7, pp. 1613–1626.
3. **Belokonov, I. and Timbai, I.**, The Selection of the Design Parameters of the Aerodynamically Stabilized Nanosatellite of the CubeSat Standard, *Procedia Engineering*, 2015 vol. 104, pp. 88–96.
4. **Belokonov, I.V., Timbai, I.A. and Barinova, E.V.**, Design Parameters Selection for CubeSat Nanosatellite with a Passive Stabilization System, *Gyroscopy and Navigation*, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 149–161.

5. Samir, A. Rawashdeh and Lumpp, James E., Jr., et al., Aerodynamic Stability for CubeSats at ISS Orbit, *JoSS*, 2013, vol. 2, no. 1, pp. 85–104.
6. Rawashdeh, S., Jones, D., Erb, D., Karam, A., Lumpp, Jr, J.E., Aerodynamic attitude stabilization for a ram-facing CubeSat. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2009, vol. 133, pp. 583–595.
7. Psiaki, M.L., Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, vol. 27, no. 3, pp. 347–355.
8. Belokonov, I.V., Timbai, I.A., and Nikolaev P.N., Analysis and Synthesis of Motion of Aerodynamically Stabilized Nanosatellites of the CubeSat Design, *Gyroscopy and Navigation*, 2018, vol. 9, no. 4, pp. 287–300.
9. Zabolotnov, Y.M., The resonance motions of a statically stable Lagrange top at small nutation angles, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, vol. 4, no. 80, pp. 302–310.
10. Zabolotnov, Y.M., Resonant Motions of the Statically Stable Lagrange Spinning Top, *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 652–668.
11. Plakhsy, K.Y. and Mikhlín, Y.V., Dynamics of nonlinear dissipative systems in the vicinity of resonance, *Journal of Sound and Vibration*, 2015, vol. 334, pp. 319–337.
12. Plakhsy, K.Y. and Mikhlín, Y.V., Interaction of free and forced nonlinear normal modes in two-DOF dissipative systems under resonance conditions, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 94, pp. 281–291.
13. Pietrzak, P., Ogińska, M., Krasuski, T., Figueiredo, K. and Olejnik, P., Near the resonance behavior of a periodically forced partially dissipative three-degrees-of-freedom mechanical system, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 15, no. 5.
14. García-Pérez, Á., Sanz-Andrés, A., Alonso, G. and Chimenó Manguán, M., Dynamic coupling on the design of space structures, *Aerospace Science and Technology*, 2019, vol. 84, pp. 1035–1048.
15. Fakoor, M., Mohammad Zadeh, P. and Momeni Eskandari, H., Developing an optimal layout design of a satellite system by considering natural frequency and attitude control constraints, *Aerospace Science and Technology*, 2017, vol. 71, pp. 172–188.
16. Liaño, G., Castillo, J. L. and García-Ybarra, P. L., Nonlinear model of the free-flight motion of finned bodies, *Aerospace Science and Technology*, 2014, vol. 39, pp. 315–324.
17. Xu, Y., Yue, B., Yang, Z., Zhao, L. and Yang, S., Study on the chaotic dynamics in yaw–pitch–roll coupling of asymmetric rolling projectiles with nonlinear aerodynamics, *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 97, no. 4, pp. 2739–2756.
18. Bardin, B.S. and Chekina, E.A., On the stability of resonant rotation of a symmetric satellite in an elliptical orbit, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2016, vol. 21, no. 4, pp. 377–389.
19. Bardin, B.S. and Chekina, E.A., On the Constructive Algorithm for Stability Analysis of an Equilibrium Point of a Periodic Hamiltonian System with Two Degrees of Freedom in the Case of Combinational Resonance, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 2, pp. 127–144.
20. Cheng, Y., Gómez, G., Masdemont, J.J. and Yuan, J., Analysis of the relative dynamics of a charged spacecraft moving under the influence of a magnetic field, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 62, pp. 307–338.
21. Aleksandrov, A.Y. and Tikhonov, A.A., Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite, *Aerospace Science and Technology*, 2020, vol. 104.
22. Aslanov, V.S., Boiko V. V., Nonlinear resonant motion of an asymmetrical spacecraft in the atmosphere, *Cosmic Research*, 1985, vol. 23, no. 3, pp. 341–347.
23. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978.
24. Zabolotnov, Y.M. and Lyubimov, V.V., Application of the method of integral manifolds for construction of resonant curves for the problem of spacecraft entry into the atmosphere, *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 5, pp. 453–459.
25. Kurkina, E.V. and Lyubimov, V.V., Estimation of the Probability of Capture into Resonance and Parametric Analysis in the Descent of an Asymmetric Spacecraft in an Atmosphere, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2018, vol. 12, no. 3, pp. 492–500.
26. Lyubimov, V.V. and Lashin, V.S., External stability of a resonance during the descent of a spacecraft with a small variable asymmetry in the martian atmosphere, *Advances in Space Research*, 2017, vol. 59, no. 6, pp. 1607–1613.
27. Zabolotnov, M.Y., A study of oscillations near a resonance during the descent of a spacecraft in the atmosphere, *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 2, pp. 171–177.
28. Barinova, E.V., Belokonov, I. V. and Timbai, I.A., Study of Resonant Modes of Cubesat Nanosatellite Motion under the Influence of the Aerodynamic Moment, *27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*, 2020, pp. 1–4.

29. **Barinova, E.V., Belokonov, I. V. and Timbai, I.A.**, Study of Resonant Modes of Motion of a Cubesat Nanosatellite with Small Inertia-Mass Asymmetry under the Aerodynamic Moment, *28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*, 2021, pp. 1–4.
30. **Белецкий В.В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
31. **Kirillin, A., Belokonov, I., Timbai, I., Kramlikh, A., Melnik, M., Ustiugov, E., Egorov, A., and Shafran, S.**, SSAU nanosatellite project for the navigation and control technologies demonstration, *Procedia Engineering*, 2015, vol. 104, pp. 97–106.
32. **Асланов В.С.** Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. Физматлит, 2004.
33. **Platus, D.H.**, Dispersion of spinning missiles due to lift nonaveraging, *AIAA J.*, 1977, vol. 15, no. 7, pp. 909–915
34. **Волосов В.М., Моргунов Б.И.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М: МГУ, 1971.
35. **Aslanov, V. S.**, Determination of the amplitude of three-dimensional oscillations of a ballistic vehicle with a small asymmetry during atmospheric entry, *Cosmic Research*, 1980, vol. 18, no. 2, pp. 141–146.
36. **Боголюбов Ю. А., Митропольский Н.Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М: Наука, 1974.
37. **Belokonov, I.V., Kramlikh, A.V., and Timbai, I.A.**, Low-orbital transformable nanosatellite: Research of the dynamics and possibilities of navigational and communication problems solving for passive aerodynamic stabilization, *Advances in the Astronautical Sciences*, 2015, vol. 153, pp. 383–397.
38. **Белоконов И.В., Баринова Е.В., Ключник В.Н., Ивлиев А.В., Болтов Е.А.** Технология и способ экспериментального определения масс-центровочных и инерционных характеристик наноспутников формата CUBESAT // *Космическая техника и технологии*. 2021. № 3 (34). С. 83–95.
39. **Belokonov, I.V., Timbai, I.A., Nikolaev, P.N.**, Approach to estimation of nanosatellite's motion concerning mass centre by trajectory measurements, *12th IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation*. Berlin, Germany, 6–10 May 2019, <https://iaaspace.org/wp-content/uploads/iaa/Scientific%20Activity/conf/sseo2021/berlin2019proceedings.pdf>.
40. **Belokonov, I.V., Timbai, I.A., Nikolaev, P.N.**, Reconstruction of motion relative to the center of mass of a low-altitude nanosatellite from trajectory measurements, *Proceedings of 72nd International Astronautical Congress*, Dubai, IAC-21, 25–29 October 2021, B4,3,8,x66209, p. 7.

Barinova, E.V., Belokonov, I.V., and Timbai, I.A. (Samara National Research University, Russia) Preventing Resonant Motion Modes for Low-Altitude CubeSat Nanosatellites, *Girokopiya i Navigatsiya*, 2021, vol. 29, no. 4 (115), pp. 115–133.

Abstract. Resonant modes of motion, manifested as a significant increase in the oscillation amplitude of the spatial angle of attack, can result in the failure of the CubeSat mission. This paper is concerned with the study of the resonant motion modes of aerodynamically stabilized CubeSat nanosatellites in low circular orbits with small inertia and mass asymmetry. In contrast to axisymmetric bodies of rotation, resonances in CubeSat nanosatellites can be caused not only by small asymmetry, but they also arise due to the form factor of the rectangular parallelepiped. Formulas have been obtained to determine the critical values of the nanosatellite longitudinal angular velocity at which the conditions for the emergence of resonant motion modes are fulfilled. An approach is proposed to prevent possible resonances for CubeSat nanosatellites.

Key words: CubeSat nanosatellite, aerodynamic moment, resonance, angle of attack, angle of proper rotation.

Материал поступил 08.11.2021