

К. А. РЫБАКОВ

**РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ
НАВИГАЦИОННЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
НЕПРЕРЫВНОГО ФИЛЬТРА ЧАСТИЦ**

Предложен новый алгоритм непрерывного фильтра частиц для решения задач нелинейного оценивания сигналов при описании математических моделей объекта наблюдения и измерительной системы с помощью стохастических дифференциальных уравнений. Предложенный алгоритм может применяться в задачах оценивания при обработке навигационных данных. Его апробация проведена на примере решения задачи оценивания погрешности навигационной системы по данным карты геофизического поля.

Ключевые слова: непрерывный фильтр частиц, задача оптимальной нелинейной фильтрации, робастное уравнение Закаи, стохастическая система, оценивание сигналов.

Введение

При обработке навигационной информации нередко приходится сталкиваться с задачами нелинейного оценивания, которые обычно решаются в рамках дискретной постановки [1–3]. Вместе с тем интерес представляет и решение для непрерывного времени. В частности, это необходимо для оценки потерь, связанных с переходом к дискретному времени. В статье рассматривается новый алгоритм непрерывного фильтра частиц для решения таких задач. Непрерывный фильтр частиц, описанный в [4], тесно связан с уравнением Дункана–Мортенсена–Закаи (далее для краткости – уравнение Закаи) – одним из фундаментальных уравнений в теории оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем диффузионного типа. Для построения нового алгоритма предлагается использовать робастное уравнение Закаи, которое можно получить из обычного уравнения Закаи с помощью специальной замены переменных.

Новый алгоритм непрерывного фильтра частиц сформирован по тому же принципу, что и алгоритм, описанный в [4]. Его можно рассматривать как независимый алгоритм оценивания сигналов в стохастических дифференциальных системах. И в условиях, когда точное решение задачи оптимальной фильтрации для непрерывного времени неизвестно, наличие дополнительного алгоритма оценивания позволяет контролировать правильность и точность решения задачи на этапе отладки и тестирования программных или аппаратных средств.

Апробация предлагаемого алгоритма проведена на примере решения задачи оценивания погрешности навигационной системы по данным карты геофизического поля, то есть в задаче навигации по геофизическим полям [1, 5–8].

Рыбаков Константин Александрович. Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет).

Постановка задачи фильтрации

Рассматриваемая в данной статье задача оптимальной фильтрации сигналов для непрерывных стохастических дифференциальных систем заключается в оценивании траектории случайного процесса $X(t)$ по измерениям траектории случайного процесса $Y(t)$ наилучшим образом с точки зрения заданного критерия качества [7, 9, 10]. При этом предполагается, что случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ удовлетворяют системе стохастических дифференциальных уравнений, понимаемых в смысле Ито:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

$$dY(t) = s(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \quad (2)$$

где X – n -мерный вектор; Y – m -мерный вектор; $W(t)$ и $V(t)$ – p -мерный и d -мерный независимые стандартные винеровские процессы; $f(t, x)$, $\sigma(t, x)$, $s(t, x)$ и $\zeta(t)$ – заданные векторные и матричные в общем случае нелинейные функции соответствующих размеров; $t \in [t_0, T]$. Распределение вектора X_0 (начальное распределение) считается заданным плотностью вероятности $\varphi_0(x)$. Уравнение (1) описывает объект наблюдения, а уравнение (2) – измерительную систему.

Далее при записи соотношений для решения задачи оптимальной фильтрации уравнение измерительной системы (2) удобно переписать в форме Ланжевена:

$$Z(t) = \dot{Y}(t) = s(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \quad (3)$$

где $N(t)$ – стандартный гауссовский белый шум, соответствующий винеровскому процессу $V(t)$. Следовательно, в задаче оптимальной фильтрации оценивание траектории $X(t)$ возможно и по измерениям $Z(t)$, поскольку они однозначно связаны с измерениями $Y(t)$.

Многие алгоритмы оптимальной фильтрации используют в качестве входного сигнала именно измерения $Z(t)$ или дифференциал $\dot{Y}(t)$, в том числе и фильтр Калмана–Бьюси. Тем не менее можно предложить алгоритм оптимальной фильтрации, использующий измерения $Y(t)$, и сформировать этот алгоритм по типу фильтров частиц. Описание и апробация такого алгоритма и являются основной целью статьи.

Основы непрерывных фильтров частиц

В этом разделе укажем базовые соотношения, на которых основаны непрерывные фильтры частиц. Непрерывные фильтры частиц не так часто применяются на практике, хотя их реализация не сложнее, чем реализация дискретных фильтров частиц. Именно последним посвящена значительная часть публикаций в настоящее время [2, 11], при этом основы решения задачи оптимальной фильтрации для непрерывных стохастических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, были заложены в 60-х годах прошлого столетия [12, 13], а алгоритмы по типу фильтров частиц были предложены десятилетие спустя [14]. Приведенный ниже материал не претендует на математически строгое изложение, но дает представление об основах непрерывных фильтров частиц на инженерном уровне строгости.

Прежде определим прямой и обратный производящие операторы диффузионного процесса $X(t)$ [15, 16]:

$$\mathcal{A}_x \varphi(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [f_i(t, x) \varphi(t, x)]}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [g_{ij}(t, x) \varphi(t, x)]}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\mathcal{A}_x^* \psi(t, x) = \sum_{i=1}^n f_i(t, x) \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j},$$

где $\varphi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ – функции, дважды дифференцируемые по координатам вектора x ; $g(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^T(t, x)$. Тогда

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}_x^* \psi(t, x), \quad \psi(t_0, x) = Y(x), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x | x_0)}{\partial t} = \mathcal{A}_x \varphi(t, x | x_0), \quad \varphi(t_0, x | x_0) = \delta(x - x_0), \tag{5}$$

$$\psi(t, x_0) = E[Y(X(t)) | X(t_0) = x_0] = \int_{R^n} Y(x) \varphi(t, x | x_0) dx, \tag{6}$$

где $Y(x)$ – некоторая дважды дифференцируемая по координатам вектора x функция; $E[\cdot]$ – условное математическое ожидание случайного процесса $Y(X(t))$ при заданном начальном условии $X(t_0) = x_0$; x_0 – фиксированный вектор.

Уравнение (4) – обратное уравнение Колмогорова (записанное в «прямом» времени), а уравнение (5) – прямое уравнение Колмогорова [15, 16]. Они описывают переходные плотности вероятности случайного процесса $X(t)$. В частности, $\varphi(t, x | x_0)$ – плотность вероятности сечения случайного процесса $X(t)$ при заданном начальном условии. Можно рассмотреть задачу, когда начальное условие для $X(t)$ случайно и задано некоторой плотностью вероятности [17]:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}_x \varphi(t, x), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x).$$

С помощью этих уравнений можно выразить моментные характеристики случайного процесса $X(t)$, задавая соответствующим образом функцию $Y(x)$. Например, если $Y(x) = x^k$, то $\psi(t, x_0)$ – начальный момент k -го порядка для случайного процесса $X(t)$ с условием $X(t_0) = x_0$. Формула (6) – это вероятностное представление решения уравнения в частных производных параболического типа (4).

Аналитические решения уравнений (4) и (5) можно получить только в частных случаях – например, если уравнение (1) линейно. Для нелинейных уравнений (1) получение даже приближенного решения уравнений (4) и (5) – трудоемкая задача. В то же время приближенное нахождение траекторий случайного процесса $X(t)$ по заданному уравнению (1) основано на простых алгоритмах моделирования случайных величин и известных разностных схемах, соответствующих заданному линейному или нелинейному стохастическому дифференциальному уравнению. Реализация таких алгоритмов – вполне решаемая задача.

По результатам моделирования траекторий случайного процесса $X(t)$ с помощью методов математической статистики можно оценить моментные характеристики, а также функцию распределения и плотность вероятности для $X(t)$, то есть фактически найти приближенные решения уравнений (4) и (5) косвенно, приближенно находя решение уравнения (1) методом статистического моделирования [15].

Такой же подход к приближенному решению может применяться и для уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}_x^* \psi(t, x) + \mu(t, x) \psi(t, x), \quad \psi(t_0, x) = Y(x), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x | x_0)}{\partial t} = \mathcal{A}_x \varphi(t, x | x_0) + \mu(t, x) \varphi(t, x | x_0), \quad \varphi(t_0, x | x_0) = \delta(x - x_0) \quad (8)$$

и, соответственно,

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}_x \varphi(t, x) + \mu(t, x) \varphi(t, x), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x).$$

Тогда аналогом формулы (6) будет вероятностное представление решения уравнения (7) (см. [16])

$$\psi(t, x_0) = E \left[\exp \left\{ \int_{t_0}^t \mu(\tau, X(\tau)) d\tau \right\} Y(X(t)) | X(t_0) = x_0 \right] \quad (9)$$

с учетом того, что (4) и (5) – это уравнения сохранения вероятности [17], их решения нормированы к единице при нормированных начальных условиях, а для уравнений (7) и (8) условие нормировки, вообще говоря, не выполняется.

В формуле (9), если сравнивать ее с формулой (6), появляется весовой коэффициент

$$\omega(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \mu(\tau, X(\tau)) d\tau \right\},$$

поэтому принято формировать алгоритмы моделирования, вводя упорядоченную пару $(X(t), \omega(t))$, с которой сопоставляется название «частица». Выборочная траектория такой пары определяет траекторию движения «частицы» в фазовом пространстве и ее вес. При этом, например, математическое ожидание $X(t)$ выражается формулой

$$\hat{X}(t) = \frac{E[\omega(t)X(t)]}{E[\omega(t)]}, \quad (10)$$

где знаменатель дроби нужен для нормировки решений уравнений (7) и (8).

Перейдем непосредственно к задаче фильтрации. В этой задаче вероятностные характеристики случайного процесса $X(t)$ с учетом имеющихся измерений $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$ описываются уравнениями, структура которых полностью аналогична (7) и (8). В частности, это уравнение Закаи для ненормированной апостериорной плотности вероятности $\varphi(t, x | Z_0^t)$:

$$\frac{\partial \varphi(t, x | Z_0^t)}{\partial t} = \mathcal{A}_x \varphi(t, x | Z_0^t) + \mu(t, x, Z(t)) \varphi(t, x | Z_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x). \quad (11)$$

Существенное отличие уравнения Закаи от (7) состоит в том, что оно является стохастическим дифференциальным, а не детерминированным. Целесообразно записывать его в форме Стратоновича, а не Ито, что позволяет использовать стандартные правила дифференцирования и формулу (9). В этом случае

$$\mu(t, x, z) = s^T(t, x)q(t)\left(z - \frac{1}{2}s(t, x)\right), \quad q(t) = \eta^{-1}(t), \quad \eta(t) = \zeta(t)\zeta^T(t).$$

Алгоритм решения уравнения (11) методом статистического моделирования с помощью вероятностного представления и называется непрерывным фильтром частиц [4]. Он заключается в моделировании траекторий случайного процесса $X(t)$ по заданному уравнению и соответствующих этим траекториям весов $\omega(t)$, после чего производится усреднение траекторий $X(t)$ с учетом весов $\omega(t)$ согласно формуле (10) при следующем задании весового коэффициента:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \exp\left\{\int_{t_0}^t \mu(\tau, X(\tau), Z(\tau))d\tau\right\} = \\ &= \exp\left\{\int_{t_0}^t s^T(\tau, X(\tau))q(\tau)dY(\tau) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^t s^T(\tau, X(\tau))q(\tau)s(\tau, X(\tau))d\tau\right\}. \end{aligned}$$

Этот алгоритм описан, например, в [4]. Тогда $\hat{X}(t)$ – это апостериорное математическое ожидание для случайного процесса $X(t)$ с учетом имеющихся измерений Z_0^t при применении критерия минимума среднеквадратического отклонения погрешности оценивания. По этим результатам моделирования можно оценить апостериорную плотность вероятности $\varphi(t, x | Z_0^t)$, например, с помощью ядерной оценки [19], представляя эту плотность взвешенной комбинацией функций, порожденных сдвигами и сжатиями заданной функции-ядра. Часто ее представляют с помощью взвешенной комбинации дельта-функций. Подобные алгоритмы можно сформировать и при наличии не только винеровского процесса в уравнении, которому удовлетворяет случайный процесс $X(t)$, но и пуассоновского [20, 21].

Робастное уравнение Закаи и фильтр частиц

Рассмотрим робастное уравнение Закаи. Оно получается из уравнения (11) при помощи замены:

$$\varphi(t, x | Z_0^t) = \exp\{w^T(t, x)Y(t)\}p(t, x | Y_0^t), \quad w(t, x) = q(t)s(t, x). \quad (12)$$

Такая замена уничтожает слагаемое, в которое входят измерения $Z(t)$, и добавляет новые слагаемые с измерениями $Y(t)$, при этом новое уравнение остается уравнением в частных производных параболического типа и является не стохастическим, а детерминированным со случайными коэффициентами, формируемыми измерениями $Y(t)$. Траектория случайного процесса $Y(t)$ является сглаженной по отношению к соответствующей траектории случайного процесса $Z(t)$, это обеспечивает более широкие возможности по применению приближенных методов решения, именно по этой причине уравнение было названо робастным [22]. В формуле (12) $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$.

Одна из форм записи этого уравнения следующая:

$$\frac{\partial \rho(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \tilde{\mathcal{A}}_x \rho(t, x | Y_0^t) + v(t, x, Y(t)) \rho(t, x | Y_0^t), \quad \rho(t_0, x) = \Phi_0(x),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_x \rho(t, x) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [\tilde{f}_i(t, x, Y(t)) \rho(t, x)]}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [g_{ij}(t, x) \rho(t, x)]}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \tilde{f}(t, x, y) &= f(t, x) - g(t, x) \left[\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} \right]^T y, \\ v(t, x, y) &= -y^T \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} f(t, x) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[g(t, x) \nabla \nabla^T (y^T w(t, x)) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} y^T \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} g(t, x) \left[\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} \right]^T y - \frac{1}{2} w^T(t, x) s(t, x) - y^T \frac{\partial w(t, x)}{\partial t}, \end{aligned}$$

а ∇ – оператор градиента.

Подробный вывод робастного уравнения Закаи именно в такой форме приведен в [10], в работе [23] оно получено в форме, удобной для реализации численных методов его решения. Здесь же предлагается воспользоваться подходом, изложенным выше, сформировав алгоритм по типу фильтров частиц. Для этого учтем, что $\tilde{\mathcal{A}}_x$ можно рассматривать как прямой производящий оператор вспомогательного диффузионного процесса $\tilde{X}(t)$, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению, понимаемому в смысле Ито:

$$d\tilde{X}(t) = \tilde{f}(t, \tilde{X}(t), Y(t))dt + \sigma(t, \tilde{X}(t))dW(t), \quad \tilde{X}(t_0) = X_0. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что если $\sigma(t, x) \equiv 0$, т.е. уравнение (1) является детерминированным (обыкновенным), а не стохастическим, то уравнение (13) будет совпадать с (1). В этом случае

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, x, y) &= f(t, x) \quad \forall y \in R^m, \\ v(t, x, y) &= -y^T \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} f(t, x) - \frac{1}{2} w^T(t, x) s(t, x) - y^T \frac{\partial w(t, x)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Отметим, что в [10] приведен алгоритм по типу фильтров частиц для нахождения вероятностных характеристик случайного процесса $\tilde{X}(t)$. Однако этот алгоритм можно модифицировать и найти сразу вероятностные характеристики случайного процесса $X(t)$, в том числе и $\hat{X}(t)$ – апостериорное математическое ожидание для случайного процесса $X(t)$ с учетом имеющихся измерений Y_0^t при применении критерия минимума среднеквадратического отклонения погрешности оценивания.

Новый алгоритм по типу фильтров частиц на основе робастного уравнения Закаи заключается в моделировании траекторий вспомогательного случайного процесса $\tilde{X}(t)$ и соответствующих этим траекториям весов $\tilde{\omega}(t)$:

$$\tilde{\omega}(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^t v(\tau, \tilde{X}(\tau), Y(\tau))d\tau\right\}. \quad (14)$$

Усреднения траекторий $\tilde{X}(t)$ с учетом весов $\tilde{\omega}(t)$ согласно формуле (10) здесь недостаточно [24]. Необходимо еще учесть множитель, используемый в замене (12). Для этого введем новую весовую функцию

$$\tilde{\omega}^*(t) = \exp\{w^T(t, \tilde{X}(t))Y(t)\} \tilde{\omega}(t) = \exp\{w^T(t, \tilde{X}(t))Y(t)\} \exp\left\{\int_{t_0}^t v(\tau, \tilde{X}(\tau), Y(\tau))d\tau\right\}.$$

Тогда

$$\hat{X}(t) = \frac{E[\tilde{\omega}^*(t)\tilde{X}(t)]}{E[\tilde{\omega}^*(t)]}. \quad (15)$$

Далее приведем алгоритм непрерывного фильтра частиц, используя в качестве разностной схемы для стохастических дифференциальных уравнений (1), (2) и (13) простейшую схему Эйлера–Маруямы [25], а для приближенного вычисления интеграла в (14) – метод прямоугольников или метод трапеций. Для более точных расчетов рекомендуется в качестве разностной схемы применять схему Хьюна [26].

Определим дискретные моменты времени $t_k = t_0 + kh$, где h – достаточно малый шаг численного интегрирования, считая для удобства, что для некоторого k момент времени t_k совпадает с T .

Разностная схема Эйлера–Маруямы на примере уравнения (1) имеет вид

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

а схема Хьюна –

$$X_{k+1} = X_k + \frac{h}{2}(a(t_k, X_k) + a(t_{k+1}, X_k^p)) + \frac{\sqrt{h}}{2}(\sigma(t_k, X_k) + \sigma(t_{k+1}, X_k^p))\Delta W_k,$$

где $X_k^p = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k$, $a(t, x) = f(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s \frac{\partial \sigma_{*l}(t, x)}{\partial x} \sigma_{*l}(t, x)$,

а ΔW_k – p -мерный случайный вектор, координаты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение для всех k . В последней формуле $\sigma_{*l}(t, x)$ – столбец матричной функции $\sigma(t, x)$ с номером $l = 1, 2, \dots, p$.

Дополнительно отметим, что в этом алгоритме помимо нахождения оптимальной оценки моделируется и исходная непрерывная стохастическая система согласно уравнениям (1) и (2).

Алгоритм

С учетом сказанного выше предлагаемый алгоритм будет включать следующие основные шаги.

Шаг 1. Задать M – число вспомогательных моделируемых траекторий (частиц); h – шаг численного интегрирования. Получить реализацию начальных

векторов состояний X_0 и \tilde{X}_0^i согласно заданному начальному распределению $\varphi_0(x)$, $i = 1, 2, \dots, M$.

Принять $k = 0$, $Y_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0^i = 1$ ($\tilde{\omega}_k^i$ – весовой коэффициент), $i = 1, 2, \dots, M$.

Шаг 2. Принять

$$M_k^* = \sum_{i=1}^M \tilde{\omega}_k^{i*} \quad (M_0^* = M),$$

где $\tilde{\omega}_k^{i*} = \tilde{\omega}_k^i \exp(w^T(t_k, \tilde{X}_k^i) Y_k)$, и найти статистические характеристики вектора состояния по реализациям $\tilde{X}_k = \{\tilde{X}_k^i\}_{i=1,2,\dots,M}$ с учетом весовых коэффициентов $\tilde{W}_k^* = \{\tilde{\omega}_k^{i*}\}_{i=1,2,\dots,M}$. Оценки вектора состояния и ковариационной матрицы погрешности оценивания по результатам измерений можно записать:

$$\hat{X}_k = \frac{1}{M_k^*} \sum_{i=1}^M \tilde{\omega}_k^{i*} \tilde{X}_k^i, \quad \hat{R}_k = \frac{1}{M_k^*} \sum_{i=1}^M \tilde{\omega}_k^{i*} (\tilde{X}_k^i - \hat{X}_k)(\tilde{X}_k^i - \hat{X}_k)^T.$$

Проверить условие $T - t_k = 0$. Если оно выполнено, то завершить процесс. Получить реализацию оцениваемого вектора состояния в следующем узле t_{k+1} :

$$X_{k+1} = X_k + h f(t_k, X_k) + \sqrt{h} \sigma(t_k, X_k) \Delta W_k, \quad Y_{k+1} = Y_k + h s(t_k, X_k) + \sqrt{h} \zeta(t_k) \Delta V_k,$$

где ΔW_k , ΔV_k – p -мерный и d -мерный случайные векторы соответственно, их координаты независимы и имеют стандартное нормальное распределение для всех k .

Шаг 3. Получить реализацию вспомогательного вектора состояния и весовой коэффициент в следующем узле t_{k+1} :

$$\tilde{X}_{k+1}^i = \tilde{X}_k^i + h \tilde{f}(t_k, \tilde{X}_k^i, Y_k) + \sqrt{h} \sigma(t_k, \tilde{X}_k^i) \Delta \tilde{W}_k^i,$$

$$\tilde{\omega}_{k+1}^i = \tilde{\omega}_k^i \exp(v(t_k, \tilde{X}_k^i, Y_k) h) \quad \text{или} \quad \tilde{\omega}_{k+1}^i = \tilde{\omega}_k^i \exp\left(\frac{v(t_k, \tilde{X}_k^i, Y_k) + v(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1}^i, Y_{k+1})}{2} h\right),$$

где $\Delta \tilde{W}_k^i$ – p -мерный случайный вектор, его координаты независимы и имеют стандартное нормальное распределение для всех k и i .

Шаг 4. Проверить условия:

если $i = M$, то принять $t_{k+1} = t_k + h$, $k = k + 1$ и перейти к шагу 2;

если $i < M$, то принять $i = i + 1$ и перейти к шагу 3.

Здесь нужно подчеркнуть, что приведенный алгоритм содержит необходимый минимум шагов для моделирования траекторий исходной системы (1) и (2), моделирования ансамбля траекторий вспомогательного случайного процесса $\tilde{X}(t)$ согласно уравнению (13) и соответствующих им весовых коэффициентов $\tilde{\omega}(t)$ по формуле (14), а также для оценивания траектории исходной системы по результатам моделирования траекторий пары $(\tilde{X}(t), \tilde{\omega}(t))$.

Весовые коэффициенты при практической реализации алгоритмов по типу фильтров частиц могут достаточно быстро расти, что приводит к ошибкам переполнения. Отчасти этого можно избежать, обеспечивая нормировку данных весовых коэффициентов. Для этого на шаге 2 алгоритма можно их переопределять:

$$\tilde{\omega}_k^i := \frac{\tilde{\omega}_k^i}{M_k}, \quad i=1,2,\dots,M, \quad M_k = \sum_{i=1}^M \tilde{\omega}_k^i.$$

Такая нормировка не влияет на результат оценивания, поскольку в формулах (10) и (15) имеют значение не абсолютные величины весов, а относительные. Если этого оказывается недостаточно, то можно воспользоваться логарифмированием, переходя от показательных функций к степеням $v(t_k, \tilde{X}_k^i, Y_k)h$ и $w^T(t_k, \tilde{X}_k^i)Y_k$ со сдвигом на величину, которая обеспечивает корректность потенцирования, то есть нахождение значения показательной функции без ошибок переполнения [27]. Дополнительные шаги алгоритма, например обновление выборки, также могут применяться [11].

Отметим, что в представленном алгоритме осуществлен фактический переход к дискретному времени, который вызван необходимостью применения численных методов решения уравнений (1), (2) и (13). Однако дискретный аналог формулы (14) для весовых коэффициентов базируется именно на робастном уравнении Закаи, которое используется в задаче оптимальной фильтрации сигналов для непрерывных стохастических дифференциальных систем. При формальном применении дискретных фильтров частиц к разностным аналогам уравнений (1), (2) и (13) обновление весовых коэффициентов будет проводиться иначе.

Апробация алгоритма непрерывного фильтра частиц на основе робастного уравнения Закаи

Осуществим апробацию приведенного выше алгоритма на примере решения задачи оценивания погрешности навигационной системы по данным карты геофизического поля [1, 5–8]. Рассмотрим эту задачу в ее простейшей постановке, полагая, что оцениванию подлежит лишь одна составляющая координат, а погрешность навигационной системы за время решения задачи не меняется.

Будем полагать, что объект движется прямолинейно с заданной постоянной скоростью, то есть координата объекта описывается функцией $x(t) = x_0 + Vt$, где x_0 – начальная координата, V – скорость движения.

Измерения (показания навигационной системы) имеют вид $z(t) = x(t) + \Delta$, где Δ – гауссовская центрированная случайная величина с дисперсией σ_Δ^2 (погрешность навигационной системы). Дополнительно имеются измерения аномалий силы тяжести, представляемые в виде

$$y(t) = s(x(t)) + \Delta y(t),$$

где $s(x)$ – полином заданной степени q с известными коэффициентами $s(x) = F_0 + \sum_{k=1}^q F_k x^k$, $\Delta y(t)$ – центрированный гауссовский белый шум интенсивности r^2 (Δ и $\Delta y(t)$ независимы).

Задача заключается в оценивании величины Δ по измерениям $z(t)$ и $y(t)$ на заданном отрезке времени $[0, T]$.

Числовые параметры в рассматриваемом примере заданы следующим образом: $x_0 = 8$ км, $V = 0,005$ км/с, $T = 200$ с, $\sigma_\Delta = 1$ км, $r = 1$ мГал/ $\sqrt{\Gamma}$ ц. Коэффициенты полинома $s(x)$ при $q = 1$: $F_0 = 31$ мГал, $F_1 = 0,08$ мГал/км; при $q = 2$: $F_0 = 45$ мГал, $F_1 = -3$ мГал/км, $F_2 = 0,15$ мГал/км²; при $q = 3$: $F_0 = 65$ мГал, $F_1 = -10$ мГал/км,

$F_2 = 1,0$ мГал/км², $F_3 = -0,03$ мГал/км³ (рассматриваются три варианта описания геофизического поля: линейной, квадратичной и кубической функциями).

Следуя постановке и общей методике решения задачи навигации по геофизическим полям в рамках байесовской теории нелинейной фильтрации [5], уравнение (1) запишем в форме $dX(t) = 0$, где $X_0 = X(0)$ – гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_Δ^2 , то есть $X(t) = \Delta$, а уравнение (2) – в форме

$$dY(t) = s(z(t) - \Delta)dt + rdV(t). \quad (16)$$

Таким образом, размерности n и m вектора состояния X и вектора измерений Y равны единице, $V(t)$ – одномерный ($d = 1$) стандартный винеровский процесс (X_0 и $V(t)$ независимы).

При апробации алгоритмов моделировались случайная величина X_0 согласно заданному распределению и измерения $Y(t)$ методом Эйлера–Маруямы на основе стохастического дифференциального уравнения измерительной системы (16). В терминах исходной постановки задачи моделировались погрешность навигационной системы Δ , а также измерения $z(t)$ и $y(t)$. Шаг численного интегрирования $h = 1$ с. По измерениям оценивалась траектория случайного процесса $X(t)$, то есть величина Δ . Использовался обобщенный фильтр Калмана–Бьюси, алгоритм непрерывного фильтра частиц из [4] и алгоритм непрерывного фильтра частиц, приведенный выше (число частиц $M = 10^4$). Для оценки среднеквадратического отклонения погрешности Δ такое моделирование проводилось 10^4 раз, причем число частиц и объем выборки для оценки среднеквадратического отклонения погрешности Δ выбраны одинаковыми для уравнивания порядков возникающих статистических погрешностей [18], которые пропорциональны величине $1/10^2$.

Далее на рис. 1–3 приведены графики оценки среднеквадратического отклонения погрешности Δ для трех вариантов представления карты геофизического поля: линейной, квадратичной и кубической функциями ($q = 1, 2, 3$). Обозначения: \square – обобщенный фильтр Калмана–Бьюси, \circ – непрерывный фильтр частиц из [4], \triangle – непрерывный фильтр частиц, приведенный выше.

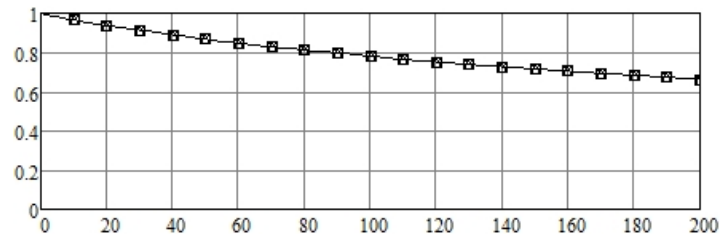


Рис. 1. Оценки среднеквадратического отклонения погрешности Δ при $q = 1$

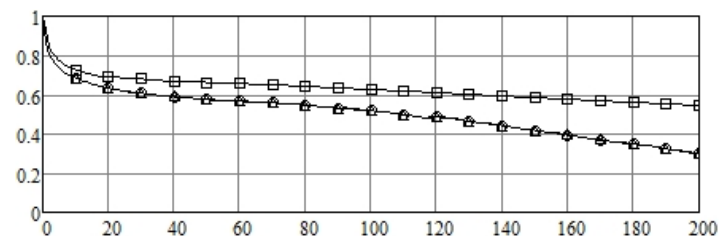
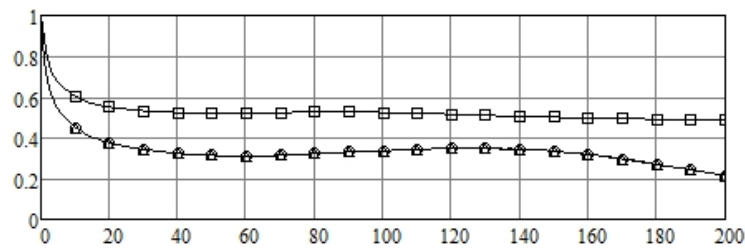


Рис. 2. Оценки среднеквадратического отклонения погрешности Δ при $q = 2$

Рис. 3. Оценки среднеквадратического отклонения погрешности Δ при $q = 3$

В случае $q = 1$ результаты оценивания тремя фильтрами практически совпадают, что вполне естественно для линейной модели измерителя. А при $q = 2$ и $q = 3$ фильтры частиц показывают более точный результат оценивания (обобщенный фильтр Калмана–Бьюси для нелинейной модели измерителя является субоптимальным). К моменту времени $T = 200$ с среднеквадратическое отклонение погрешности Δ для фильтров частиц при $q = 2$ меньше среднеквадратического отклонения для обобщенного фильтра Калмана–Бьюси в 1,7 раза, а при $q = 3$ – в 2,3 раза. Эти результаты показывают актуальность применения нелинейных фильтров в подобных задачах.

Заключение

В статье представлен новый алгоритм непрерывного фильтра частиц на основе робастного уравнения Закаи для решения нелинейных задач оценивания. Его апробация проведена на примере решения задачи оценивания погрешности навигационной системы по данным карты геофизического поля в ее простейшей постановке.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами оценивания с помощью непрерывного фильтра частиц, описанного в [4], а в линейной постановке – с результатом оценивания посредством фильтра Калмана–Бьюси. В нелинейной постановке (при описании измерителя при помощи нелинейного уравнения) непрерывные фильтры частиц обеспечивают более точный результат оценивания по сравнению с обобщенным фильтром Калмана–Бьюси.

В дальнейших исследованиях планируется апробировать предложенный алгоритм на более сложной задаче оценивания, а также провести сравнение непрерывного и дискретного фильтров частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-00530-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 1998.
2. Bergman, N., Recursive Bayesian Estimation Navigation and Tracking Applications, Ph.D. Diss., Linköping University, 1999.
3. Sequential Monte Carlo Methods in Practice, Ed. by Doucet A., De Freitas N., Gordon N., Springer, 2001.
4. Bain, A., Crisan, D., Fundamentals of Stochastic Filtering, Springer, 2009.
5. Степанов О.А., Торопов А.Б. Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Ч. 1. Обзор алгоритмов // Гироскопия и навигация. 2015. № 3 (90). С. 102–125.

6. **Степанов О.А., Торопов А.Б.** Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Ч. 2. Современные тенденции развития // *Гироскопия и навигация*. 2015. № 4 (91). С. 147–159.
7. **Степанов О.А.** Методы обработки навигационной измерительной информации. СПб: Университет ИТМО, 2017.
8. **Степанов О.А., Васильев В.А., Торопов А.Б., Лопарев А.В., Басин М.В.** Сравнительный анализ алгоритмов фильтрации в задачах обработки навигационных измерений полиномиального типа // *Материалы XXXI конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова, Санкт-Петербург, 2–4 октября 2018 г.* СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2018. С. 146–154.
9. **Синицын И.Н.** Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2007.
10. **Рыбаков К.А.** Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: Изд-во МАИ, 2017.
11. **Степанов О.А., Торопов А.Б.** Применение последовательных методов Монте-Карло с использованием процедур аналитического интегрирования при обработке навигационной информации // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, 16–19 июня 2014 г.: Тр. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 3324–3337.
12. **Вусу, R.S.**, Nonlinear filtering theory, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1965, vol. 10, no. 2, p. 198.
13. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов // *Труды МИАН СССР*. 1968. Т. 104. С. 135–180.
14. **Зарицкий В.С., Светник В.Б., Шимелевич Л.И.** Метод Монте-Карло в задачах оптимальной обработки информации // *Автоматика и телемеханика*. 1975. № 12. С. 95–103.
15. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
16. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.
17. **Тихонов В.И., Миронов М.А.** Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977.
18. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – М.: Издательский центр «Академия», 2006.
19. **Silverman B.W.** Density estimation for statistics and data analysis. Chapman & Hall, 1986.
20. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Приближенное решение задачи прогнозирования для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2017. Т. 20. № 1. С. 1–11.
21. **Rudenko, E.A.**, Continuous Finite-Dimensional Locally Optimal Filtering of Jump Diffusions, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, no. 4, pp. 505–528.
22. **Hazewinkel, M.**, Lectures on linear and nonlinear filtering // *Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems* (eds. W.O. Schiehlen, W. Wedig), Springer-Verlag, 1988, pp. 103–136.
23. **Luo, X., Yau, S.S.-T.**, Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, vol. 58, no. 10, pp. 2563–2578.
24. **Rybakov, K.A.**, Robust Duncan–Mortensen–Zakai equation for non-stationary stochastic systems, *Proceedings of the 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*, Novosibirsk Akademgorodok, Russia, September 18–22, 2017, IEEE, 2017, pp. 151–154.
25. **Maruyama, G.**, Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Series 2, 1955, vol. 2, no. 4, pp. 48–90.
26. **Burrage, K., Tian, T.**, Predictor-corrector methods of Runge–Kutta type for stochastic differential equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2002, vol. 40, no. 4, pp. 1516–1537.
27. **Рыбаков К.А.** Об особенностях программной реализации фильтров частиц для непрерывных систем наблюдения и оценивания // *Материалы XXXI конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова, Санкт-Петербург, 2–4 октября 2018 г.* СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2018. С. 180–191.

Rybakov, K.A. (Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia)
Solving the Nonlinear Problems of Estimation for Navigation Data Processing Using Continuous-Time Particle Filter, *Гироскопия и навигация*, 2018, vol. 26, no. 4 (103), pp. 82–95.

Abstract. A new continuous-time particle filter algorithm is proposed for solving the problems of nonlinear estimation of signal when describing the mathematical models of an observed object and a measuring system by means of stochastic differential equations. This algorithm can be used in the estimation problems related to navigation data processing. The algorithm verification is presented by example of a navigation system error estimation using geophysical field map data.

Key words: continuous-time particle filter, optimal nonlinear filtering problem, robust Zakai equation, stochastic system, signal estimation.

REFERENCES

1. **Stepanov, O.A.**, *Primenenie teorii nelineinoi fil'tratsii v zadachakh obrabotki navigatsionnoi informatsii* (Nonlinear Filtering Theory Applied to Navigation Information Processing), St. Petersburg: Concern CSRI Elektropribor, 1998.
2. **Bergman, N.**, Recursive Bayesian estimation navigation and tracking applications, *Ph.D. Diss.*, Linköping University, 1999.
3. **Doucet, A., De Freitas, N. and Gordon N. (Eds)**, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer, 2001.
4. **Bain, A. and Crisan, D.**, *Fundamentals of Stochastic Filtering*, Springer, 2009.
5. **Stepanov, O.A. and Toropov, A.B.**, Nonlinear filtering for map-aided navigation. Part 1. An overview of algorithms, *Gyroscopy and Navigation*, 2015, vol. 6, no. 4, pp. 324–337.
6. **Stepanov, O.A. and Toropov, A.B.**, Nonlinear filtering for map-aided navigation. Part 2. Trends in the algorithm development, *Gyroscopy and Navigation*, 2016, vol. 7, no. 1, pp. 82–89.
7. **Stepanov, O.A.**, *Metody obrabotki navigatsionnoi izmeritel'noi informatsii* (Methods of Navigation Measurement Data Processing), St. Petersburg: ITMO University, 2017.
8. **Stepanov, O.A., Vasil'ev, V.A., Toropov, A.B., Loparev, A.V. and Basin, M.V.**, Comparative analysis of filtering algorithms in processing the navigation measurements of polynomial type, *Materialy XXXI konferentsii pamyati vydayushchegosya konstruktora giroskopicheskikh priborov N.N. Ostryakova* (Proceedings of the 31st Conference in Memory of N.N. Ostryakov), St. Petersburg, Concern CSRI Elektropribor, 2018, pp. 146–154.
9. **Sinit'syn, I.N.**, *Fil'try Kalmana i Pugacheva* (Kalman and Pugachev Filters), Moscow: Logos, 2007.
10. **Rybakov, K.A.**, *Statisticheskie metody analiza i fil'tratsii v nepreryvnykh stokhasticheskikh sistemakh* (Statistical Methods of Analysis and Filtering in Continuous-Time Stochastic Systems), Moscow: Moscow Aviation Institute Publisher, 2017.
11. **Stepanov, O.A. and Toropov, A.B.**, Application of sequential Monte Carlo methods using analytical integration procedures for navigation information processing, Proceedings of the 12th All-Russian Meeting on Control Issues (VSPU- 2014), Moscow, June 16–19, 2014, Moscow: IPU RAN, 2014, pp. 3324–3337.
12. **Bucy, R.S.**, Nonlinear filtering theory, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1965, vol. 10, no. 2, p. 198.
13. **Liptser, R.Sh. and Shiryaev, A.N.**, Nonlinear filtering of Markovian diffusion processes, *Trudy MIAN SSSR* (Materials of Steklov Mathematical Institute, USSR Academy of Sciences), 1968, vol. 104, pp. 135–180.
14. **Zaritskii, V.S., Svetnik, V.B. and Shimelevich, L.I.**, Monte-Carlo technique in problems of optimal information processing, *Automation and Remote Control*, 1975, vol. 36, no. 12, pp. 2015–2022.
15. **Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V.**, *Vvedenie v teoriyu sluchainykh protsessov* (Tutorial on the Theory of Random Processes), Moscow: Nauka, 1977.
16. **Øksendal, B.**, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* (Translation into Russian), Moscow: Mir, 2003.
17. **Tikhonov, V.I. and Mironov, M.A.**, *Markovskie protsessy* (Markovian Processes), Moscow: Sovetskoe radio, 1977.
18. **Mikhailov, G.A. and Voitisek, A.V.**, *Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo* (Numerical Statistical Modeling. Monte Carlo Methods), Moscow: Akademiya Publishing Center, 2006.
19. **Silverman B.W.** *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman & Hall, 1986.
20. **Averina, T.A. and Rybakov, K.A.**, An approximate solution of the prediction problem for stochastic jump-diffusion systems, *Numerical Analysis and Applications*. 2017, vol. 10, no. 1, pp. 1–10.

21. **Rudenko, E.A.**, Continuous finite-dimensional locally optimal filtering of jump diffusions, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, no. 4, pp. 505–528.
22. **Hazewinkel, M.**, Lectures on linear and nonlinear filtering, in *Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems*, eds. W.O. Schiehlen, W. Wedig, Springer-Verlag, 1988, pp. 103–136.
23. **Luo, X., Yau, S.S.-T.**, Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, vol. 58, no. 10, pp. 2563–2578.
24. **Rybakov, K.A.**, Robust Duncan–Mortensen–Zakai equation for non-stationary stochastic systems, *Proceedings of the 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*, Novosibirsk Akadem-gorodok, Russia, September 18–22, 2017, IEEE, 2017, pp. 151–154.
25. **Maruyama, G.**, Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Series 2, 1955, vol. 2, no. 4, pp. 48–90.
26. **Burrage, K. and Tian, T.**, Predictor-corrector methods of Runge–Kutta type for stochastic differential equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2002, vol. 40, no. 4, pp. 1516–1537.
27. **Rybakov, K.A.**, Specific features of computer-aided realization of particle filters for observation and estimation continuous-time systems, *Materialy XXXI konferentsii pamyati vydayushchegosya konstruktora giroskopicheskikh priborov N.N. Ostryakova* (Proceedings of the 31st Conference in Memory of N.N. Ostryakov), St. Petersburg, Concern CSRI Elektropribor, 2018, pp. 180–191.

Материал поступил 05.03.2018