

О. А. БАБИЧ

РАСШИРЕНИЕ АЛГОРИТМОВ БИНС ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЯРНОЙ НАВИГАЦИИ

Прямоугольная геоцентрическая система координат (Earth-Centered, Earth-Fixed – ECEF) не имеет особых точек в околоземном пространстве, поэтому ее можно использовать в качестве основной для навигации в полярных зонах Земли.

В статье предлагается алгоритм для вычисления прямоугольных координат в виде дополнительной части к базовому алгоритму бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), который рутинно работает от взлета и до посадки.

На основании вычисления текущих прямоугольных координат самолета в полярных областях строится закон управления, обеспечивающий навигацию самолета по принципу «из точки в точку».

Ключевые слова: полярная навигация, бесплатформенная инерциальная навигационная система, акселерометр, гироскоп, стереографическая проекция.

Постановка задачи

Цель данной работы состоит в расширении базового алгоритма БИНС таким образом, чтобы использовать ее в виде основного навигационного средства не только в средних широтах, но и в полярных районах Земли.

Предлагаемые новые дополнительные алгоритмы БИНС решают задачу навигации и управления самолетом в полярных регионах, если возникает необходимость проложить там сложные траектории полетов типа «из точки в точку». Эти же алгоритмы обеспечивают и непрерывную работу БИНС при пересечении полярной области в дальнем полете. В этом случае до подлета к полярной области БИНС работает в основном режиме, во время перелета над полярной областью – одновременно в основном и специальном режимах, за ее пределами – снова в основном режиме. Таким образом, непрерывная работа БИНС в основном режиме обеспечивается здесь от взлета и до посадки при всевозможных траекториях полета.

В современных работах [5–8, 9], посвященных полярной навигации, нередко предлагается в полярной зоне переходить к новой системе координат, у которой полюс размещается в одной из точек земного экватора. Это приводит к сложным пересчетам в точках входа и выхода летательного аппарата на границах полярной зоны.

В настоящей статье приводится вывод новых математических соотношений в виде непрерывного алгоритма для счисления текущих значений земных де-

Бабич Олег Александрович. Доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Московский институт электромеханики и автоматики. Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

картовых координат летательного аппарата. Прямоугольные координаты в системе ECEF не имеют особых точек в околоземном пространстве и поэтому могут быть использованы как основные для навигации в полярных зонах Земли [10–12]. Эти координаты являются невырожденными и унитарными во всех точках околоземного пространства. Они позволяют решить задачу курсовой навигации «из точки и точку» в полярных регионах. При этом курсовые углы отсчитываются от неподвижной линии пересечения плоскости Гринвичского меридиана с горизонтальной плоскостью, которая является касательной к земному эллипсоиду в точках полюсов.

1. Введение

В данной статье применяются следующие обозначения и символика:

- а) координатные трехгранники (Frames) будут обозначаться буквами B (Body), N (Navigation), N_{geo} (Geodetic), E (Earth) и I (Inert). Оси трехгранников N , N_{geo} , E и I изображены на рис. 1. Оси XB , YB , ZB трехгранника B совпадают с осями самолета (рис. 1, а). Заметим, что на рис. 1 направления осей и буквенные обозначения выбраны традиционным для отечественной авиационной и геодезической литературы образом. Кроме того, по традиции курсовые углы и азимуты будут отсчитываться по часовой стрелке в горизонтальной плоскости от направления на север (YN_{geo}) (рис 1, в), а гироскопический курс ψ_{Γ} самолета отсчитывается по часовой стрелке от оси YN , которая рассматривается как курсовая черта «аналитической платформы»;
- б) произвольный вектор \vec{r} в проекциях на оси трехгранника A будет записываться в виде $\vec{r}^A = (\vec{r} \cdot \vec{X}_A, \vec{r} \cdot \vec{Y}_A, \vec{r} \cdot \vec{Z}_A)^T = (r_{XA}, r_{YA}, r_{ZA})^T$. Вектор \vec{R}^E текущего местоположения самолета в земных декартовых координатах будем для краткости записывать в виде $\vec{R}^E = (R_{XE}, R_{YE}, R_{ZE})^T \triangleq (X_E, Y_E, Z_E)^T$;
- в) угловая скорость «подвижного» трехгранника B относительно «закрепленного» трехгранника A , взятая в проекциях на трехгранник D , будет записываться в виде $\vec{\omega}_{AB}^D$;
- г) ортогональную матрицу перехода от трехгранника A к трехграннику B обозначим как C_A^B , так что $\vec{r}^B = C_A^B \vec{r}^A$. Элементы матрицы C_A^B будем обозначать $c_{ij}(AB)$;
- д) единичный вектор (орт) произвольного вектора \vec{r} в проекциях на трехгранник A обозначим $\vec{u}_{\vec{r}}^A$, так что $\vec{u}_{\vec{r}}^A = \frac{1}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}^A$;
- е) матрица векторного умножения для вектора \vec{r}^A будет иметь вид

$$(\vec{r}^A \times) = \begin{pmatrix} 0 & -r_{ZA} & r_{YA} \\ r_{ZA} & 0 & -r_{XA} \\ -r_{YA} & r_{XA} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В статье рассматривается наиболее распространенный тип БИНС, когда «аналитическая платформа» (или, другими словами, навигационный трехгранник XN, YN, ZN , рис 1, б) вращается относительно вертикальной оси \vec{u}_{ZN}^N в инерциальном пространстве с угловой скоростью $\vec{\omega}_{IN}^N \cdot \vec{u}_{ZN}^N = \Omega \sin B$. Известно, что вертикальная угловая скорость платформы относительно Земли при этом [1, 2, 3] будет тождественно равна нулю $\vec{\omega}_{EN}^N \cdot \vec{u}_{ZN}^N = 0$. Тогда принято утверждать, что БИНС работает в режиме гирополукомпаса (ГПК, Directional Gyro), или Wander Azimuth. БИНС только такого типа будут рассматриваться в данной статье.

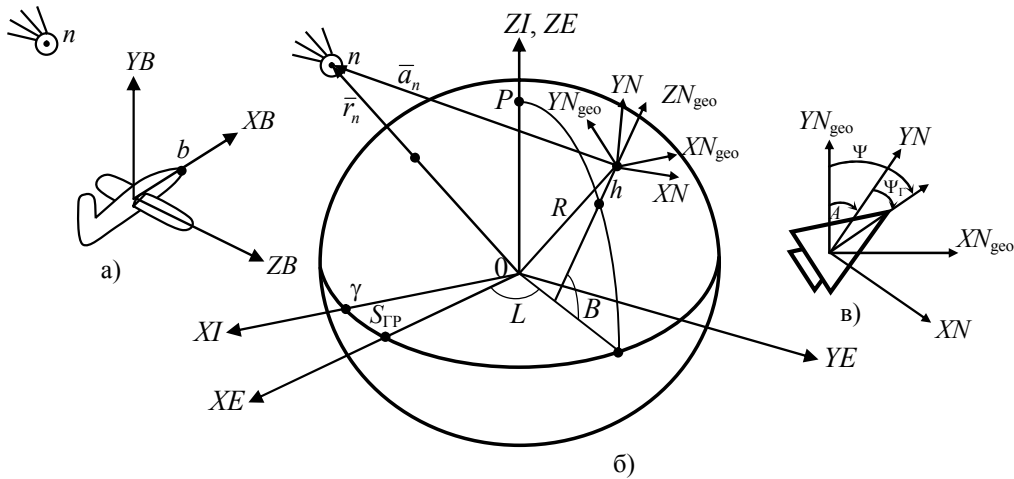


Рис. 1. Навигационные трехгранники и отсчеты углов

Теория БИНС с азимутальным управлением платформы по типу Wander Azimuth полностью разработана и подробно изложена в современной учебной литературе [1, 2, 3]. Именно такие системы получили наибольшее распространение на практике. Базовый (основной) алгоритм у БИНС этого типа заключается в следующем: на его вход поступают сигналы гироскопов $\vec{\omega}_{IB}^B(t)$ и сигналы акселерометров $\vec{a}_{SF}^B(t)$, а на выходе формируются матрица позиционирования $C_N^E(t)$, вектор скорости $\vec{V}^N(t)$, заданный в навигационном трехграннике N , и матрица ориентации $C_B^N(t)$.

Условно базовый алгоритм может иметь вид:

$$\{\vec{\omega}_{IB}^B(t), \vec{a}_{SF}^B(t)\} \Rightarrow \{C_N^E(t), \vec{V}^N(t), C_B^N(t)\}. \quad (2)$$

Известно [1, 2, 3], что базовый алгоритм Wander Azimuth БИНС представляется в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений и состоит из трех основных частей:

- 1) алгоритма позиционирования

$$\dot{C}_N^E = C_N^E (\bar{\omega}_{EN}^N \times), \quad C_N^E \triangleq \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}, \quad \xi = (1 - e^2 u_{33}^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad M = a(1 - e^2)\xi^3 + h, \quad N = a\xi + h, \quad \delta = ae^2\xi^3 M^{-1} N^{-1},$$

$$\bar{\omega}_{EN}^N = \begin{pmatrix} \omega_{EN}^{XN} \\ \omega_{EN}^{YN} \\ \omega_{EN}^{ZN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{32}u_{31} \cdot \delta & \left(-u_{32}^2 \cdot \delta - \frac{1}{N}\right) & 0 \\ \left(u_{31}^2 \cdot \delta + \frac{1}{N}\right) & u_{31}u_{32} \cdot \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{XN} \\ V_{YN} \\ V_{ZN} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В соотношениях (3) элементы $c_{ij}(NE)$ матрицы C_N^E для краткости обозначены символами u_{ij} , то есть $c_{ij}(NE) = u_{ij}$. Этот вид обозначения элементов матрицы C_N^E будем употреблять для краткости и далее;

- 2) алгоритма вычисления скорости

$$\dot{\bar{V}}^N = C_B^N \bar{a}_{SF} + \bar{g}^N - \bar{\omega}_{IE}^N \times (\bar{\omega}_{IE}^N \times \bar{R}^N) - (2\bar{\omega}_{IE}^N + \bar{\omega}_{EN}^N) \times \bar{V}^N,$$

$$\bar{\omega}_{IE}^N = (C_N^E)^T \bar{\omega}_{IE}^E, \quad \omega_{IE}^{XN} = \omega_E u_{31}, \quad \omega_{IE}^{YN} = \omega_E u_{32}, \quad \omega_{IE}^{ZN} = \omega_E u_{33}; \quad (4)$$

- 3) алгоритма ориентации

$$\dot{C}_B^N = C_B^N (\bar{\omega}_{IB}^B \times) - (\bar{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N, \quad \bar{\omega}_{IN}^N = \bar{\omega}_{IE}^N + \bar{\omega}_{EN}^N. \quad (5)$$

Дифференциальные уравнения (3), (4), (5) объединяются в одну общую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, фазовыми координатами которой являются элементы двух матриц и одного вектора C_N^E, \bar{V}^E, C_B^N . Правые части этой системы, как непосредственно видно из (3)–(5), являются непрерывными функциями от фазовых координат. При этом непрерывность правых частей свойственна всем точкам околоземного пространства, включая и точки двух полюсов.

Упомянутая непрерывность доказывает существование решения для основного алгоритма (3)–(5) на всевозможных траекториях полета, в том числе на полярных участках, если они имеются на маршруте.

Непрерывность алгоритма, записанного в форме (3), (4), (5), или его всеширотность, специально оговаривается в работах [1, 2, 3].

2. Формы представления выходной навигационной информации в средних и полярных широтах

Исчерпывающая навигационная информация для всех точек околоземного пространства заключена в следующих математических величинах: матрице по-

зиционирования C_N^E , векторе скорости \bar{V}^N и матрице ориентации C_B^N . На любой траектории, в том числе и пересекающей полярные районы, эти величины существуют как математические понятия и изменяются непрерывно.

Матрица C_N^E может быть выражена [1, 2, 3] для средних широт ($|B| < 78^\circ$) через Эйлеровы углы навигации (B, L, A) (рис. 1):

$$C_N^E = \begin{pmatrix} -\sin L \cos A + \sin B \cos L \sin A & -\sin L \sin A - \sin B \cos L \cos A & \cos L \cos B \\ \cos L \cos A + \sin B \sin L \sin A & \cos L \sin A - \sin B \sin L \cos A & \sin L \cos B \\ -\cos B \sin A & \cos B \cos A & \sin B \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$B = \arctg \frac{c_{33}(NE)}{\sqrt{c_{31}^2(NE) + c_{32}^2(NE)}} [-\pi/2, \pi/2], \quad (7)$$

$$L = \arctg \frac{c_{23}(NE)}{c_{13}(NE)} [-\pi, \pi], \quad A = \arctg \frac{-c_{31}(NE)}{c_{32}(NE)} [0, 2\pi].$$

Матрица ориентации C_B^N для всех точек околоземного пространства (при условии, что угол тангажа ϑ не равен $\pm 90^\circ$) выражается через Эйлеровы углы ориентации $\psi_r, \vartheta, \gamma$:

$$C_B^N = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \sin \psi_r & \sin \gamma \cos \psi_r - \sin \psi_r \cos \gamma \sin \vartheta & \cos \gamma \cos \psi_r + \sin \psi_r \sin \gamma \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \psi_r & -\sin \gamma \sin \psi_r - \cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi_r & -\sin \psi_r \cos \gamma + \cos \psi_r \sin \gamma \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \gamma \cos \vartheta & -\sin \gamma \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\psi_r = \arctg \frac{c_{11}(BN)}{c_{21}(BN)} [0, 2\pi],$$

$$\vartheta = \arctg \frac{c_{31}(BN)}{\sqrt{c_{32}^2(BN) + c_{33}^2(BN)}} [-\pi/2, \pi/2], \quad (9)$$

$$\gamma = \arctg \frac{-c_{33}(BN)}{c_{32}(BN)} [-\pi, \pi].$$

Вычисление текущих значений прямоугольных земных координат самолета $\bar{R}^E = [X_E(t), Y_E(t), Z_E(t)]^T$ может быть проведено на основании текущего значения матрицы $C_N^E(t)$. Известно [3], что прямоугольные координаты имеют представления в виде:

$$X_E = (a\xi + h) \cos B \cos L, \quad Y_E = (a\xi + h) \cos B \sin L, \quad Z_E = [a\xi(1 - e^2) + h] \sin B.$$

В таком случае с учетом (8) они могут быть вычислены по формулам:

$$\xi(u_{33}) = (1 - e^2 u_{33}^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad X_E = (a\xi + h)u_{13}, \quad Y_E = (a\xi + h)u_{23}, \quad Z_E = [a\xi(1 - e^2) + h]u_{33}, \quad (10)$$

где $u_{ij} = c_{ij}(NE)$.

Соотношения (10), объединенные с базовым алгоритмом (3), (4), (5), представляют собой полный алгоритм счисления прямоугольных координат $X_E(t), Y_E(t), Z_E(t)$ самолета. Этот алгоритм не имеет вырожденных точек на всей поверхности Земли, а сами координаты X_E, Y_E, Z_E также не имеют вырождения в околоземном пространстве.

Прямоугольные координаты (10), как далее будет показано, могут быть использованы в качестве основных для навигации в полярных областях.

Объединенный алгоритм (3)–(5), (10) может трактоваться как переход от матрицы позиционирования C_N^E к навигационным координатам, заданным в форме (X_E, Y_E, Z_E) , то есть

$$C_N^E \Rightarrow (X_E, Y_E, Z_E). \quad (11)$$

Переход (11) является всеширотным. Для сравнения: переход (7) в виде $C_N^E \Rightarrow (B, L, A)$ справедлив только для средних широт.

Информация о прямоугольных координатах X_E, Y_E, Z_E не используется для решения навигационных задач в средних широтах, а вот знание текущих значений прямоугольных координат, как будет показано далее, может быть положено в основу навигации в полярных районах.

3. Особенности представления матрицы ориентации C_N^E в полярных районах

Матрица ориентации C_N^E (6) в северном полярном районе, когда

$$B \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad B = \frac{\pi}{2} - \Delta B_n, \quad \Delta B_n > 0, \quad \sin B \approx 1, \quad \cos B = \sin \Delta B_n \approx \Delta B_n, \quad (12)$$

имеет вид

$$C_N^E = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(A-L) & -\cos(A-L) & \Delta B_n \cos L \\ \cos(A-L) & \sin(A-L) & \Delta B_n \sin L \\ -\Delta B_n \sin A & \Delta B_n \cos A & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\alpha_n = A - L, \quad 0 \leq \alpha_n \leq 2\pi, \quad \alpha_n = \operatorname{arctg} \frac{u_{22}}{u_{21}} [0, 2\pi] = \operatorname{arctg} \frac{u_{11}}{-u_{12}} [0, 2\pi].$$

Далее будет доказано, что, хотя величины A и L , каждая по отдельности, вырождаются в северном полярном районе, величина их разности $\alpha_n = A - L \approx \text{const}$ не только не вырождается, но и остается постоянной величиной для всего времени полета внутри северной полярной области.

Угол $\alpha_n = A - L$ изменяется по часовой стрелке, так как составляющие его углы A и $(-L)$ изменяются по часовой стрелке. В соответствии с (13) для всего диапазона его изменения $[0, 2\pi]$ с учетом квадрантов он может быть подсчитан по формуле:

$$\begin{aligned} u_{21} &= \cos \alpha_n, u_{22} = \sin \alpha_n, s_1 = \text{sign}[u_{21}], s_2 = \text{sign}[u_{22}], \\ \alpha_n &= \arctg \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n} [0, 2\pi] = s_1 s_2 \arctg \frac{|u_{22}|}{|u_{21}|} + \pi \left[1 - \frac{s_2(1+s_1)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее с помощью геометрического рассмотрения полета в северной полярной области будет доказано, что α_n – это угол между плоскостью Гринвичского меридиана и курсовой чертой YN «платформы».

Для Южного полюса, таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} B &\rightarrow -\frac{\pi}{2}, B = -\frac{\pi}{2} + \Delta B_s, \Delta B_s > 0, \quad \sin B \approx -1, \quad \cos B \approx \Delta B_s, \\ C_N^E &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(A+L) & \cos(A+L) & \Delta B_s \cos L \\ \cos(A+L) & \sin(A+L) & \Delta B_s \sin L \\ -\Delta B_s \sin A & \Delta B_s \cos A & -1 \end{pmatrix}, \\ \alpha_s &= A + L, \quad 0 \leq \alpha_s \leq 2\pi, \quad \alpha_s = \arctg \frac{u_{22}}{u_{21}} [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\alpha_s = s_1 s_2 \arctg \frac{|u_{22}|}{|u_{21}|} + \pi \left[1 - \frac{s_2(1+s_1)}{2} \right], \quad s_1 = \text{sign}[u_{21}], s_2 = \text{sign}[u_{22}].$$

Ниже покажем, что, несмотря на то что в южном полярном районе величины A и L по отдельности вырождаются, величина их суммы $\alpha_s = A + L = \text{const}$ не только не вырождается, но и остается постоянной на все время полета внутри южной полярной области. Угол α_s изменяется по часовой стрелке, так как в южной полярной зоне составляющие углы A и L изменяются по часовой стрелке.

Из сопоставления аналитических соотношений (13) и (15) видно, что они имеют принципиальные различия. По этой причине геометрическое рассмотрение решаемых задач для северной и южной областей далее придется вести раздельно.

4. Решение курсовой задачи для северной полярной зоны

Рассмотрим решение навигационной задачи «полет из точки в точку» для северной полярной зоны. Для этого введем в рассмотрение плоскость $P_n x y$, кото-

рая проходит через Северный полюс P_n и параллельна плоскости земного экватора (рис. 2), при этом ее координатные оси x и y параллельны экваториальным осям XE, YE .

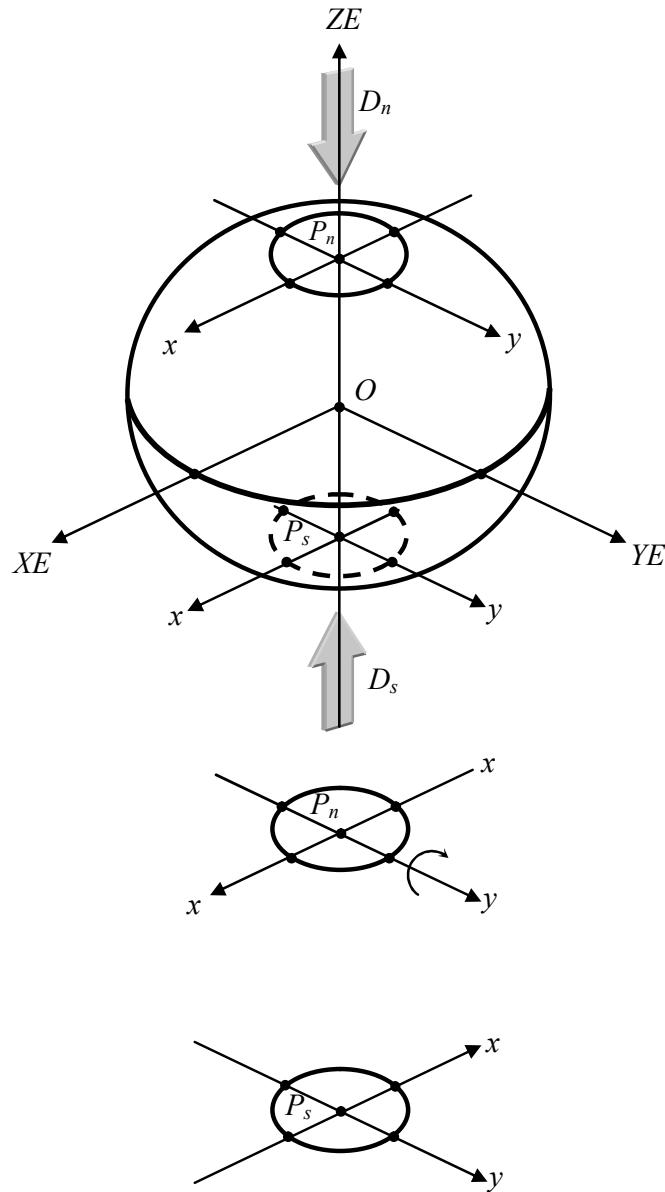


Рис. 2. Системы полярных координат $P_n x y$ и $P_s x y$ в полярных зонах

Плоскость $P_n x y$ с высокой степенью точности может рассматриваться как референцная плоскость для стереографической проекции северного полярного региона. За центр этой стереографической проекции принимается точка O центра Земли. Предполагается, что на проекцию $P_n x y$ наблюдатель смотрит «сверху вниз», то есть для северной полярной зоны (рис. 2) – по стрелке D_n .

Каждая точка, расположенная в околоземном пространстве, может быть спроектирована на плоскость $P_n x y$ путем переноса, осуществляемого параллельно оси OZE в ее положительном направлении. При этом декартовы координаты (x, y) проекции для любой точки, естественно, будут равны:

$$x = X_E, \quad y = Y_E. \quad (16)$$

Проекции (x, y) (16) можно рассматривать как стереографические только для точек, расположенных близко к Северному полюсу, когда широта этих точек удовлетворяет условию $B > 78^\circ$. Для точек полярного региона прямая на плоскости $P_n x y$, соединяющая две точки, будет являться следом Большого круга, плоскость которого проходит через две исходные точки на Земле и центр Земли.

Дадим теперь геометрическую формулировку для поставленной задачи навигации в северной полярной зоне.

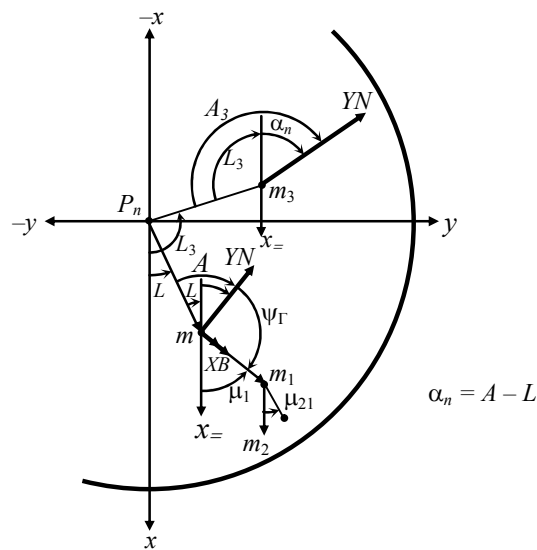


Рис. 3. Геометрия полета в северной полярной зоне

Пусть самолет (рис. 3) находится в точке m с координатами $m(x, y)$ и должен сначала двигаться в точку $m_1(x_1, y_1)$, а далее – в точку $m_2(x_2, y_2)$. Предполагается, что самолет оборудован БИНС типа Wander Azimuth, которая выдает текущие значения $C_N^E(t)$ и $\psi_\Gamma(t)$. Требуется найти математическое выражение для закона управления, обеспечивающего движение самолета по линии mm_1 . Решение задачи о дальнейшем движении по линии m_1m_2 будет, конечно, носить аналогичный характер.

На рис. 3 единичный вектор YN с началом в точке m представляет собой горизонтальную курсовую черту «аналитической платформы» самолета, находящегося в точке m . Свойства движения вектора YN (рис. 1, 3) на плоскости $P_n x y$, или азимутального движения «платформы» при следовании самолета по

траектории $m[x(t), y(t)]$, имеют важное значение для развиваемой далее теории полярной навигации.

Рассмотрим свойства этого вектора.

В силу выбранного способа азимутальной коррекции «аналитической платформы» (ГПК, Wander Azimuth) вертикальная угловая скорость платформы относительно Земли во время движения самолета и во всех точках его траектории равна нулю

$$\omega_{EN}^{ZN} = 0.$$

Заметим, что в северной полярной зоне векторы ZN и ZE почти совпадают. Угол между ними равен ΔB_n , то есть величине, принимаемой нами за малую первого порядка. По этой причине можно считать, что в полярной зоне при $\Delta B_n \rightarrow 0$

$$\omega_{EN}^{ZE} \rightarrow \omega_{EN}^{ZN} = 0. \quad (17)$$

Это означает, что единичный вектор YN при произвольных движениях его начальной точки $m(x, y)$ внутри полярной зоны будет двигаться плоско-параллельно, то есть в любой точке (x, y) чертежа (рис. 3) он будет иметь одно и то же направление относительно осей $P_n x$ и $P_n y$. Так, например, вектор YN при перемещении из точки $m_1(x_1, y_1)$ (рис. 2) в точку $m_3(x_3, y_3)$ по произвольной траектории не изменяет своего исходного направления. Естественно, угол $\alpha_n = A - L$ (рис. 3), заключенный между координатной осью $-x$ и невращающимся вектором YN , должен быть величиной постоянной:

$$\alpha_n[x(t), y(t)] = \text{const (по } x, y, t), \quad (18)$$

если траектория $[x(t), y(t)]$ не выходит за полярную зону.

Величина угла $\alpha_n = A - L = \text{const}$ (18) относится к конкретному полету. В другом полете при входе в полярную зону вектор YN может иметь другое направление в плоскости $P_n x y$ и сохранять уже другое значение α_n исходного направления до выхода из полярной зоны.

Как видим, величина угла α_n разнится от полета к полету, но в течение данного полета внутри полярной зоны она постоянна.

Из геометрических построений (рис. 3) следует, что угол α_n вектора YN измеряется от координатной оси $-x$, а за положительное направление принимается движение по часовой стрелке, при этом α_n изменяется в пределах

$$0 \leq \alpha_n < 2\pi. \quad (19)$$

Текущее значение угла $\alpha_n(t)$ вычисляется по формуле (13).

Введем теперь угол μ_{21} (рис. 3), задающий направление из точки m_1 в точку m_2 . В соответствии с нашим определением это будет угол между осью x и направленным отрезком m_1m_2 , он отсчитывается от оси x (рис. 3) против часовой стрелки и будет равен:

$$\mu_{21} = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} [0, 2\pi] = s_1 s_2 \arctg \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} + \pi \left[1 - \frac{s_2(1 + s_1)}{2} \right], \quad (20)$$

где $s_1 = \text{sign}(x_2 - x_1)$, $s_2 = \text{sign}(y_2 - y_1)$, $0 \leq \mu_{21} \leq 2\pi$.

Угол, задающий направление от текущей точки $m[x(t), y(t)]$ местоположения самолета на фиксированную i -ю промежуточную точку $m_i(x_i, y_i)$ маршрута, будем обозначать μ_i (см. на рис. 3 угол μ_1 , $i = 1$). Этот угол будет равен:

$$\mu_i = \arctg \frac{y_i - y}{x_i - x} [0, 2\pi] = s_1 s_2 \arctg \frac{|y_i - y|}{|x_i - x|} + \pi \left[1 - \frac{s_2(1 + s_1)}{2} \right], \quad (21)$$

$$s_1 = \text{sign}(x_i - x), \quad s_2 = \text{sign}(y_i - y).$$

Из геометрических построений, представленных на рис. 3, следует равенство

$$\alpha_n + \psi_{\Gamma_1} + \mu_1 = \pi, \quad \alpha_n = A - L$$

или

$$\psi_{\Gamma_1} = \pi - \alpha_n - \mu_1 \pm k \cdot 2\pi, \quad 0 \leq \psi_{\Gamma_1} \leq 2\pi.$$

Член $\pm k \cdot 2\pi$ добавлен для приведения угла к виду, когда $0 \leq \psi_{\Gamma_1} \leq 2\pi$.

Для общего случая на i -ом отрезке маршрута имеем

$$\psi_{\Gamma_i} = \pi - \alpha_n - \mu_i \pm k \cdot 2\pi. \quad (22)$$

Формула (22) является искомым законом управления, обеспечивающим движение самолета по линии mm_i в северной полярной области. Дадим необходимые пояснения.

В соответствии с (22) управление самолетом в горизонтальной плоскости должно осуществляться таким образом, чтобы текущее значение гироскопического курса самолета $\psi_{\Gamma}(t)$ на i -ом отрезке маршрута стремилось к заданному значению (22) ψ_{Γ_i} на этом отрезке:

$$\psi_{\Gamma}(t) \rightarrow \psi_{\Gamma_i}. \quad (23)$$

Величина текущего гироскопического курса $\psi_{\Gamma}(t)$ в (23) является для БИНС стандартным выходным сигналом (9), а величина заданного значения ψ_{Γ_i} вычисляется по формулам (10), (14), (16), (21) и (22).

В заключение этого пункта отметим, что для полетов в северной полярной зоне прямоугольная сетка координат с отсчетом курсовых углов от следа Гринвичского меридиана применялась на практике с 1940-х годов [4].

5. Решение курсовой задачи для южной полярной зоны

Геометрия навигации в южной полярной зоне представлена на рис. 2 и 4.

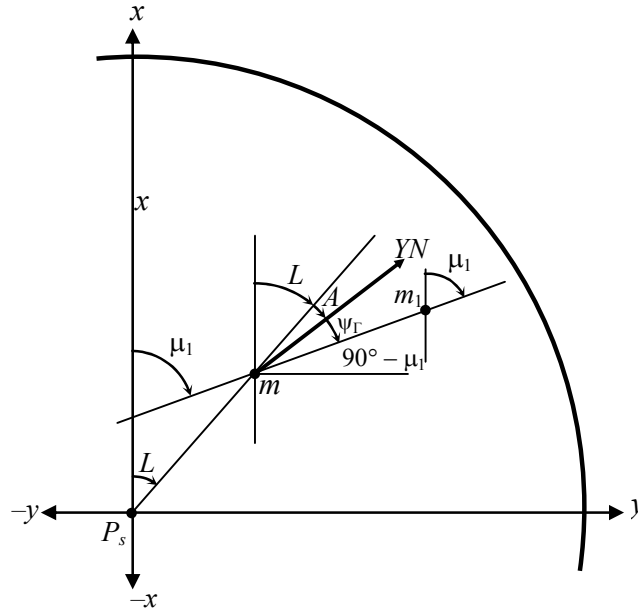


Рис. 4. Геометрия полета в южной полярной зоне

Из этих геометрических построений вытекают соотношения:

$$\begin{aligned}
 x &= X_E, & s_1 &= \text{sign}(x_i - x), & s_2 &= \text{sign}(y_i - y), \\
 y &= Y_E, & \mu_i &= s_1 s_2 \arctg \frac{|y_i - y|}{|x_i - x|} + \pi \left[1 - \frac{s_2(1 + s_1)}{2} \right], & A + L + \psi_{\Gamma} + 90^\circ - \mu_i &= 0, \\
 \alpha_s &= (L + A) = \text{const}, & \alpha_s + \psi_{\Gamma_i} - \mu_i &= 0, & \psi_{\Gamma_i} &= -\alpha_s + \mu_i \pm k \cdot 2\pi.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Из (24) получаем закон курсового управления в южной полярной зоне

$$\psi_{\Gamma_i} = (-\alpha_s + \mu_i \pm k \cdot 2\pi), \quad \psi_{\Gamma_i} \in [0, 2\pi], \quad \psi_{\Gamma}(t) \rightarrow \psi_{\Gamma_i},
 \tag{25}$$

где угол α_s вычисляется по формуле (15), а угол μ_i – по формуле (24).

6. Пересечение полярной зоны в дальнем полете

Предположим, что самолет в дальнем полете на каком-то этапе маршрута должен двигаться по ортодромии $RrsS$ (рис. 5), которая пересекает полярную зону на отрезке rs . При этом ясно, что кусок rs – это непрерывная часть большой ортодромии $RrsS$. Предполагается также, что крайние точки R и S лежат вне полярной зоны.

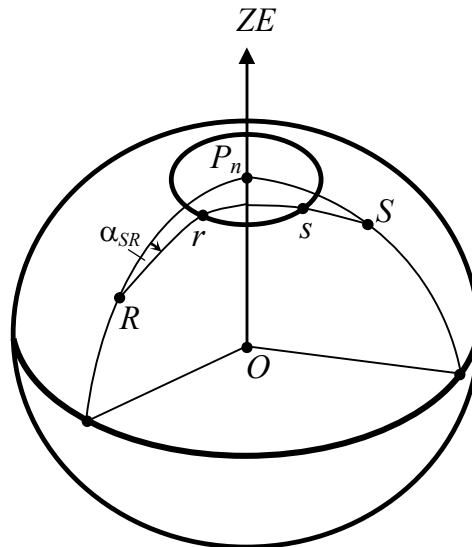


Рис. 5. Пересечение полярной зоны в дальнем полете

Известно [3], что полет по ортодромии курсовым методом осуществляется следующим образом. Для начальной точки R ортодромии $RrsS$ рассчитывается исходный курсовой угол α_{SR} , который является функцией от географических координат начальной точки $R(B_R, L_R)$ и географических координат конечной точки $S(B_S, L_S)$ ортодромии. Пример такого расчета дается в [3]. Вычисление угла α_{SR} может производиться как перед полетом, так и оперативно в полете.

Если при пролете исходной точки R азимут «аналитической платформы» равен $A(R)$, то дальнейшее следование по ортодромии $RrsS$ осуществляется путем выдерживания гироскопического курса Ψ_Γ постоянным и равным

$$\Psi_{\Gamma_{SR}} = \alpha_{SR} - A(R) = \text{const}, \quad \Psi_\Gamma \rightarrow \Psi_{\Gamma_{SR}}. \quad (26)$$

Обоснование закона управления (26) для обеспечения движения самолета по ортодромии (геодезической линии) RS вытекает из следующих рассуждений. Известно [3], что азимут $\alpha_{SR}(t)$ ортодромии изменяется по закону

$$\dot{\alpha}_{SR} = \frac{V_{East}}{N} \text{tg}B, \quad \alpha_{SR}(t_0) = \alpha_{SR}(R). \quad (27)$$

Курс самолета $\psi(t) = A(t) + \psi_{\Gamma}(t)$, при $\psi_{\Gamma}(t) = \text{const}$ изменяется по тому же закону и в начальной точке R они совпадают:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{V_{East}}{N} \text{tg}B, \quad \psi(R) = \alpha_{SR}(R).$$

Это и доказывает состоятельность закона управления (26).

Заметим, что управление по закону (26) осуществляется на основании использования только базового алгоритма (3), (4), (5), (9). Это возможно в силу невырожденности этого алгоритма во всех точках околоземного пространства.

Возможно также применение здесь специальных алгоритмов (22) и (25), разработанных для сложных полетов внутри полярной зоны. Для этого точку S (рис. 5) выхода траектории $RrsS$ из полярной зоны нужно принять равной точке $m_s(x_s, y_s)$ (рис. 3, (25)), координаты которой равны $x_s = X_{Es}$, $y_s = Y_{Es}$, где X_{Es}, Y_{Es} – прямоугольные земные координаты (10) точки S .

Далее с помощью законов управления (22) или (25) направить самолет в эту точку.

7. Замечание о способе комплексирования БИНС и СРНС в полярных областях

В полярных областях невозможно сравнение позиционных и скоростных показаний БИНС и спутниковой радионавигационной системы (СРНС) в терминах $L, B, h, V_{North}, V_{East}, V_{Up}$ (рис. 1), так как указанные величины в этих зонах не существуют как понятия.

По этой причине при построении фильтра Калмана предлагается сравнивать позиционные сигналы в терминах X_E, Y_E, Z_E , а скоростные – в терминах $\dot{X}_E, \dot{Y}_E, \dot{Z}_E$. Заметим, что сигналы

$$(X_E, Y_E, Z_E) \text{ и } (\dot{X}_E, \dot{Y}_E, \dot{Z}_E) \quad (28)$$

являются внутренними операционными сигналами СРНС [3], то есть не требуют каких-либо дополнительных вычислений. Тем не менее для вычисления перечисленных сигналов (28) необходимо иметь связь как минимум с четырьмя навигационными спутниками. В полярных областях возможно явление, когда число наблюдаемых спутников меньше четырех. В этом случае необходимо вести фильтрацию на уровне псевдодальностей [2].

В целом полный алгоритм Калмана, построенный на идеях использования прямоугольных координат самолета, требует, конечно, детальной проработки.

Выводы

1. Для БИНС разработан новый алгоритм позиционирования, когда ее дополнительными выходными сигналами являются земные прямоугольные координаты $X_E(t), Y_E(t), Z_E(t)$ самолета.

2. В силу того что вычисление этих координат обладает свойством всеширотности, то есть не имеет вырождения ни в одной точке околоземного пространства, указанные координаты могут быть использованы для определения местоположения самолета в полярных регионах Земли.

3. Предложенный новый алгоритм счисления не отменяет классического базового алгоритма БИНС, а работает параллельно с ним в полярных зонах, то есть является дополнением к базовому алгоритму, который при этом непрерывно работает от взлета и до посадки.

4. Разработаны курсовые законы управления самолетом для обеспечения сложной навигации «из точки в точку» для маршрутов, лежащих внутри полярных областей Земли.

5. Разработан курсовой закон управления для случаев пересечения полярных областей в дальнем полете.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Savage, P.G.**, Strapdown Analytics – Second Edition, Strapdown Associates, Inc., Maple Plane, Minnesota, 2007, pp. 5–19, 5–22.
2. **Savage, P.G.**, Computational Elements for Strapdown Systems, *Low Cost Navigation Sensors and Integration Technology*, NATO RTO-EN-SET-116, October 2008, pp. 3–3, 3–4.
3. **Бабич О.А.** Обработка информации в навигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991. С. 105, 264.
4. **Maclure, K.C.**, Polar Navigation, *Arctic*, 1949, 2(3), 183–194.
5. **Yi-qing Yao, Xiao-su Xu, Yao Li, Yi-ting Liu, Jin Sun and Jin-wu Tong**, Transverse Navigation under Ellipsoidal Earth Model and its Performance in both Polar and Nonpolar areas, *The Journal of Navigation*, 2016, vol. 69, issue 2, pp. 335–352. DOI:10.1017/S0373463315000715.
6. **Introduction to Modern Navigation Systems**, Published by Esmat Bekir, Word Scientific Publishing Co. Pte.Ltd. 5 Toh Tuck Link, Singapour 596224.
7. **BoeingAero**, Polar Route Operations, <http://www.boeing.com/commercial/aeromagazine/aero---16/polar.html>.
8. **Юманов В.С.** Алгоритм преобразования квазигеографических координат, предусматривающий возможность работы в различных эллипсоидах // XV конференция молодых ученых «Навигация и управление движением». СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». СПб., 2013. С. 95–100.
9. **Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли.** Под общей ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова; науч. редактор д.т.н. О.А. Степанов. СПб.: ГИЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. С. 201.
10. **Qian Li, Yueyang Ben, Fei Yu, and Jiubin Tan**, Transversal Strapdown INS Based on Reference Ellipsoid for Vehicle in the Polar Region, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2016, vol. 65, no. 9, pp. 7791–7795. DOI: 10.1109/TVT.2015.2497713.
11. **Fangjun Qin, Lubin Chang, and An Li**, Improved Transversal Polar Navigation Mechanism for Strapdown INS using Ellipsoidal Earth Model, *The Journal of Navigation*, 2018, 71, 1460–1476. DOI: 10.1017/S0373463318000425.
12. **Ruonan Wu, Qiuping Wu, Fengtian Han, Rong Zhang, Peida Hu, and Haixia Li**, Hybrid Transverse Polar Navigation for High-Precision and Long-Term INSs, *Sensors*, 2018, 18, 1538. DOI: 10.3390/s18051538.

Babich, O.A. (Moscow Institute of Electromechanics and Automatics, Russia)

Extension of the Basic Strapdown INS Algorithms to Solve Polar Navigation Problems, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2019, vol. 27, no. 3 (106), pp. 103–118.

Abstract. The Earth-centered, Earth-fixed (ECEF) frame does not have any specific points in the near-Earth space; therefore, it can be used as the basic one for navigation in the polar regions.

The paper considers a new algorithm for calculation of ECEF coordinates. The proposed algorithm is complementary to the basic strapdown INS algorithm, which functions in its normal mode from aircraft takeoff to landing.

In the polar regions, the aircraft control law that supports flights on the point-to-point principle is based on calculation of ECEF coordinates.

Key words: polar navigation, strapdown inertial navigation system (SINS), accelerometer, gyro, wander azimuth, stereographic projection.

REFERENCES

1. **Savage, P.G.**, *Strapdown Analytics – Second Edition*, Strapdown Associates, Inc., Maple Plane, Minnesota, 2007, pp. 5–19, 5–22.
2. **Savage, P.G.**, Computational Elements for Strapdown Systems, *Low Cost Navigation Sensors and Integration Technology*, NATO RTO-EN-SET-116, October 2008, pp. 3–3, 3–4.
3. **Babich, O.A.**, *Obrabotka informatsii v navigatsionnykh kompleksakh* (Information Processing in Navigation Systems), Moscow: Mashinostroenie, 1991.
4. **Maclure, K.C.**, Polar navigation, *Arctic*, 1949, 2(3), pp. 183–194.
5. **Yi-qing Yao, Xiao-su Xu, Yao Li, Yi-ting Liu, Jin Sun, and Jin-wu Tong**, Transverse navigation under ellipsoidal Earth model and its performance in both Polar and Nonpolar areas, *The Journal of Navigation*, 2016, vol. 69, issue 2, pp. 335–352. DOI:10.1017/S0373463315000715.
6. **Introduction** to Modern Navigation Systems, Published by Esmat Bekir, Word Scientific Publishing Co. Pte.Ltd. 5 Toh Tuck Link, Singapour 596224.
7. **BoeingAero**, Polar Route Operations, <http://www.boeing.com/commercial/aeromagazine/aero---16/polar.html>.
8. **Yumanov, V.S.**, Algorithm for the transformation of quasigeographical coordinates providing for the possibility of working in various ellipsoids, *XV konferentsiya molodykh uchenykh "Navigatsiya i upravlenie dvizheniem"* (15th Conference of Young Scientists "Navigation and Motion Control"), St. Petersburg: TsNII Elektropribor, 2013, pp. 95–100.
9. *Sovremennyye metody i sredstva izmereniya parametrov gravitatsionnogo polya Zemli* (Modern technologies and methods for measuring the Earth's Gravity Field Parameters), Peshekhonov, V.G., Gen. ed., Stepanov, O.A., Sci. ed., St.Petersburg: TsNII Elektropribor, 2017.
10. **Qian Li, Yueyang Ben, Fei Yu, and Jiubin Tan**, Transversal strapdown INS based on reference ellipsoid for vehicle in the Polar Region, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2016, vol. 65, no. 9, pp. 7791–7795. DOI: 10.1109/TVT.2015.2497713.
11. **Fangjun Qin, Lubin Chang, and An Li**, Improved transversal polar navigation mechanism for strapdown INS using ellipsoidal Earth model, *The Journal of Navigation*, 2018, 71, 1460–1476. DOI: 10.1017/S0373463318000425.
12. **Ruonan Wu, Qiuping Wu, Fengtian Han, Rong Zhang, Peida Hu, and Haixia Li**, Hybrid Transverse Polar Navigation for High-Precision and Long-Term INSs, *Sensors*, 2018, 18, 1538. DOI: 10.3390/s18051538.

Материал поступил 18.01.2019