

Г.М. ДОВГОБРОД

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ СУДНА МАЛЫМ УПРАВЛЕНИЕМ**

*В статье представлен алгоритм управления движением недостаточно управляемого судна по траектории с непрерывной ограниченной кривизной, основанный на методе линеаризации обратной связью. Алгоритм позволяет ограничить сигнал управления, при этом вектор состояния модели движения судна не приближается к точке сингулярности закона управления. Алгоритм управления выполняет возвращение судна на заданную траекторию-аттрактор при любом боковом отклонении судна от заданной траектории.*

**Ключевые слова:** закон управления, линеаризация обратной связью, траектории с непрерывной кривизной, траектория-аттрактор.

**Введение**

Области применения транспортных средств, перемещающихся по заданным траекториям, постоянно расширяются. Они используются для перевозки грузов, проведения обследований территорий и акваторий, выполнения работ в экстренных ситуациях. При этом крайне важно, чтобы транспортное средство перемещалось на плоскости. При управляемых перемещениях необходимо учитывать технические ограничения органов управления, воздействие окружающей среды, погрешности измерений элементов вектора состояния и время реакции системы управления. Для автоматизации управления движением транспортных устройств по заданным траекториям разработан значительный набор алгоритмов [1, 2], основанных на: пропорционально-интегрально-дифференциальном законе управления [3]; нечеткой логике; использовании эталонной модели; скользящем режиме; бэкстеппинге [4, 5, 6] и др.

Метод построения алгоритма управления по методу бэкстеппинга требует представления дифференциальных уравнений модели движения объекта в нижнетреугольной форме; характеризуется взрывным усложнением производных при увеличении порядка модели. На практике аналитическое вычисление производных заменяют численным дифференцированием, однако при этом для обеспечения устойчивости вычислений необходимо резко уменьшать шаг вычислений [21].

В алгоритмах управления движением, построенных по методу бэкстеппинга, обеспечивается стремление к нулю расстояния между выделенной точкой на объекте и точкой, перемещающейся по заданной траектории, при стремлении времени к бесконечности [5, 6]. Выделенную на объекте точку будем называть базовой, а соответствующую ей точку на заданной исполнительной траектории – виртуальной. Заданные траектории часто представляются в виде последовательности элементарных отрезков, называемых путевыми примитивами. Для формального описания задан-

ной траектории используется параметрическое представление путевых примитивов. Рассматриваемый подход имеет недостаток: если в качестве виртуальной использовать точку на заданной траектории, которая является ближайшей к текущему положению базовой точки, то при вычислении положения виртуальной точки возможно появление сингулярности [5, 7]. Чтобы это исключить, следует ограничивать допустимые положения базовой точки малой окрестностью заданной траектории или встроить оператор, обеспечивающий плавный возврат на заданную траекторию с использованием некоторой сигмоидной функции [5, 6]. В алгоритме управления с сигмоидной функцией возникают два дополнительных настраиваемых параметра.

Указанные особенности иногда могут вызывать затруднения при практическом использовании метода поэтапного синтеза для построения алгоритмов управления движением, что оправдывает создание других методов построения алгоритмов управления. Хорошо разработан метод линеаризации обратной связью, или линейных эквивалентов аффинных систем (transverse feedback linearization [8, 9, 10, 11, 12]), который обеспечивает направленное движение переменных состояния вдоль желаемых инвариантных многообразий – аттракторов [13]. В системах управления, построенных на основе этого метода, аттрактором является заданная траектория, т.е. инвариантным притягивающим множеством [8, 11]. По этой причине в качестве путевых примитивов могут использоваться одномерные многообразия, в частности аффинные многообразия (полиномы) в неявном представлении [14]. Метод линеаризации обратной связью и аффинных многообразий в неявном представлении имеет два преимущества:

- 1) отпадает необходимость в использовании расстояния от базовой до виртуальной точки на заданной траектории;
- 2) его применимость не зависит от возможности представления дифференциальных уравнений модели движения объекта в нижнетреугольной форме.

Метод линеаризации обратной связью не исключает использования параметрического представления заданной траектории, но в соответствии с *а)* и *б)* целесообразно применять одномерные аффинные многообразия для построения заданной траектории. В качестве путевых примитивов часто рассматривают прямые и окружности [11, 12], но составленные из них траектории имеют геометрическую непрерывность порядка 1 (обозначается  $G^1$  [15]). В данной работе для построения заданных траекторий с гладкостью  $G^2$  применяются путевые примитивы специального вида – непрерывные отрезки аффинных многообразий в неявном представлении.

Фактором, существенно снижающим эффективность систем автоматизированного управления движением, является ограниченная возможность исполнительного механизма по отработке расчетного сигнала управления. Если расчетный сигнал управления выходит за допустимый диапазон, то исполнительному сигналу присваивается нарушенное граничное значение, и после этого он поступает в исполнительный механизм для отработки. Частые выходы исполнительного сигнала управления на граничные значения приводят к повышенному расходу технического ресурса исполнительного механизма и могут вызывать автоколебания в контуре управления, следствием которых, в свою очередь, является рост механических нагрузок на объект управления в целом.

Распространенная причина выхода исполнительного сигнала управления на граничные величины – значительное отклонение от заданной траектории. В этом слу-

чае фактически происходит разрыв контура управления, и возникает необходимость в прерывании текущего алгоритма управления и решении задачи возврата в окрестность заданной траектории. Можно построить траекторию возврата на заданную с помощью дополнительного алгоритма, затем с помощью существующего алгоритма управления вернуться на заданную траекторию. Или разработать усовершенствованный алгоритм управления движением, резко уменьшающий количество выходов исполнительного сигнала управления на граничные значения. Иначе говоря, возврат на заданную траекторию можно не выделять как отдельную задачу.

Целесообразно в алгоритмы, построенные с помощью метода линеаризации обратной связью, встроить механизм, обеспечивающий плавный возврат на заданную траекторию без разрыва контура управления при выходе сигнала на граничные значения.

В настоящей статье рассматривается усовершенствованный алгоритм управления перемещением судна по заданной траектории с непрерывной кривизной, который обеспечивает нахождение исполнительного сигнала управления в заданных границах при произвольных боковых отклонениях и сохранении асимптотической сходимости фактической траектории к заданной. Предлагаемый алгоритм построен на основе метода линеаризации обратной связью [8, 9, 10].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим структуру системы автоматического управления путевым углом судна, представленную на рис. 1. Судно с такой системой управления является недостаточно управляемым, так как предполагается, что для управления двумя координатами центра масс судна и путевым углом могут быть использованы только переключки руля и постоянная по направлению относительно корпуса тяга винтов.

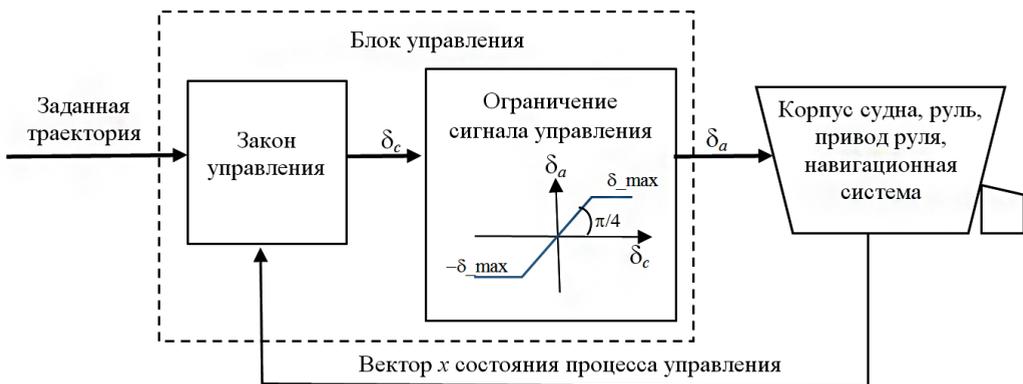


Рис. 1. Укрупненная структурная схема системы управления путевым углом судна

Закон управления (ЗУ) — это алгоритм вычисления расчетного сигнала управления  $\delta_c$ . Заданная траектория состоит из элементарных сегментов, называемых путевыми примитивами. Принимаем, что скорость перемещения судна постоянна на каждом путевом примитиве и обеспечивает управляемость с помощью рулевого устройства. Заданная траектория используется законом управления в качестве задающего сигнала.

ла. В [16] описан метод построения заданной траектории с непрерывной кривизной, удовлетворяющей заданному ограничению на абсолютную величину кривизны. При отсутствии отклонения от заданной траектории он обеспечивает ограниченность сигнала управления. Заданные траектории более близки к физически реализуемым, чем часто используемые непрерывные траектории, составленные из отрезков прямых и дуг окружностей.

Состав элементов вектора  $x$  состояния процесса управления определяется законом управления и принятой моделью динамики продольного движения судна. В настоящее время глобальные спутниковые навигационные системы и недорогие инерциальные датчики, как правило, позволяют непосредственно измерять все элементы вектора состояния судна, необходимые для работы алгоритма управления движением.

Система управления путевым углом судна работает следующим образом. На каждом цикле управления вектор состояния судна поступает на вход ЗУ, который вычисляет расчетный сигнал управления  $d_c$ . Рассмотрим функцию

$$sat_{x\_max}(x) = \begin{cases} x\_max & \text{при } x > x\_max \\ -x\_max & \text{при } x < -x\_max, \\ x & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

где  $x\_max$  – максимальная абсолютная величина выхода функции  $sat$ .

Расчетный сигнал управления поступает в блок его ограничения для расчета исполнительного сигнала  $\delta_a$ :

$$\delta_a = sat_{\delta\_max}(\delta_c),$$

где  $\delta\_max$  – абсолютная величина максимально допустимого отклонения руля от нейтрального положения, или, другими словами, граничная величина исполнительного сигнала управления,  $\delta_c$  – расчетный сигнал управления.

Далее исполнительный сигнал управления поступает в привод руля для отработки.

В разделах 2.3 и 2.4 описываются два варианта ЗУ: один – для вычисления  $\delta_c$  при перемещении по прямому отрезку, а другой – по полиномиальной дуге. Этот ЗУ будем называть пропорциональным. Он использует заданные траектории с непрерывной кривизной и может обеспечить асимптотическую сходимость траектории объекта управления к заданной и движение по ней как по инвариантному одномерному многообразию. Т.е. движение по одномерному многообразию может выполняться в любом направлении. Если для заданной траектории выполняется ограничение на абсолютную величину кривизны, то для объекта, перемещающегося по этой заданной траектории, будет выполняться ограничение на величину сигнала управления [16] и будет существовать возможность обеспечить запас по сигналу управления для парирования внешних возмущений. Кроме того, отпадает необходимость в обеспечении перемещения виртуальной точки по заданной траектории, как это делается в [5, 6].

Объект может оказаться на достаточно большом удалении от заданной траектории вследствие внешних возмущающих воздействий или из-за погрешности определения начального положения. В этом случае расчетный сигнал управления может превысить граничную величину исполнительного сигнала управления. Как отмечалось выше, в контуре управления могут возникнуть автоколебания. Под их дей-

ствием объект может подойти к заданной траектории на расстояние, на котором они прекращаются. При этом путевой угол объекта может иметь величину, обеспечивающую дальнейшее движение как по заданной траектории в заданном направлении, так и в обратном направлении.

Задачей настоящей работы является построение усовершенствованного ЗУ на основе пропорционального, который позволит исключить выход исполнительного сигнала управления на граничные значения при любом боковом отклонении судна от заданной траектории.

## 2. Пропорциональный закон управления

Заданная траектория – это одномерное многообразие, которое составляется из путевых примитивов двух видов: прямого отрезка и симметричной полиномиальной дуги.

Для пропорционального ЗУ заданная траектория является задающим сигналом. Модель движения судна с помощью метода линеаризации обратной связью преобразуется в систему линейных дифференциальных уравнений, и заданная траектория становится аттрактором при положительных коэффициентах обратной связи в ЗУ.

### 2.1 Модель движения судна

В этом разделе описывается модель перемещения судна с тремя степенями свободы: две координаты центра масс  $x_1, x_2$  в декартовой системе координат  $x_1 O x_2$  на горизонтальной плоскости П и угол между направлением на север и путевым углом судна  $x_3$ . Путевой угол судна – это направление вектора скорости судна. Ось  $Ox_1$  направлена на восток,  $Ox_2$  – на север. Для всех углов, кроме угла перекладки руля, положительное направление – по часовой стрелке, а для угла перекладки руля – против.

Модель движения судна (1) состоит из кинематической модели (первые три уравнения) и модели динамики судна (последнее уравнение). Модель движения является не полностью управляемой, так как объектом с тремя степенями свободы можно управлять только с помощью двух переменных – угла перекладки руля и продольной скорости:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v \sin x_3, \\ \dot{x}_2 &= v \cos x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \theta_1 x_4 + \theta_2 x_4^3 + b \delta, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $x_1, x_2$  – декартовы координаты центра масс судна в плоскости П;

$x_3$  – путевой угол судна;

$v$  – продольная скорость объекта ( $v > 0$ );

$x_4$  – угловая скорость поворота корпуса судна в плоскости П;

$q_1, q_2, b$  – коэффициенты модели Норрбина динамики судна;

$\delta$  – угол перекладки руля.

В нашем случае кинематическая модель – это модель перемещения с постоянной скоростью материальной точки в плоскости П. В качестве модели динамики судна

используется модель Норрбина [17], которая учитывает большие отклонения руля, позволяет моделировать перемещение судна по криволинейным траекториям и описывает связь между производной по времени от угловой скорости судна  $x_4$  в горизонтальной плоскости и углом перекладки руля  $\delta$ .

Угловая скорость судна – это производная от курса. Курс судна равен сумме путевого угла и угла дрейфа. В модели Норрбина принимается, что угол дрейфа равен нулю. На практике ненулевая производная угла дрейфа становится паразитной динамикой, которая парируется ЗУ.

Пусть  $x$  – вектор состояния модели движения судна (1)  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ , где  $T$  обозначает транспонирование. В векторной нотации получается компактное выражение для модели движения (1):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\delta, \quad (2)$$

где  $x \in R^4$ ;

$$f(x) = (vsinx_3, vcosx_3, x_4, \theta_1x_4 + \theta_2x_4^3);$$

$$g(x) = (0 \ 0 \ 0 \ b)^T;$$

$\delta$  – сигнал управления.

Очевидно, что модель движения (1), (2) – гладкая. Далее даются определения путевых примитивов, которые будут использоваться как функции выходной переменной [10] для модели движения судна при выводе ЗУ.

## 2.2 Путевые примитивы

Рассмотрим примитивы двух видов [16]:

- прямой отрезок  $\gamma_L$ , который задается нормальным уравнением прямой в неявном представлении, конечной точкой предыдущего примитива и конечной точкой этого отрезка;
- симметричную полиномиальную дугу  $\gamma_S$ , задаваемую полиномом 6 степени в базе Бернштейна [16] в неявном представлении, у которой в граничных точках кривизна равна нулю и максимальная кривизна не превышает заданное ограничение.

Если в начале траектории находится прямой отрезок, то для пропорционального ЗУ его начало находится в бесконечно удаленной точке. Задача ЗУ – привести судно в конечную точку текущего путевого примитива.

Для применения метода линеаризации обратной связью в соответствии с [10, 11], каждому путевому примитиву нужно поставить в соответствие функцию  $\alpha_i : \{x\} \rightarrow R$  так, чтобы проекция  $\alpha_i^{-1}(0)$  на плоскость  $\Pi$  совпадала с  $\gamma_i$ , где  $i \in \{L, S\}$  и  $0$  – регулярное значение функций  $\alpha_i(x)$ . Функции  $\alpha_i$  будут использоваться как функции выходной переменной в системе уравнений, описывающих систему автоматического управления путевым углом судна.

Рассмотрим нормальное уравнение прямой линии

$$-x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = d,$$

где  $\varphi$  – угол между осью  $Ox_2$  и единичным вектором, лежащим на этой прямой и направленным по движению судна, отсчитанный от оси  $Ox_2$ ;

$d$  – расстояние от начала координат до прямой;

$x_1, x_2$  – координаты центра масс судна в плоскости  $\Pi$  в системе координат  $x_1Ox_2$ .

Функция выходной переменной для прямого отрезка задается выражением

$$\alpha_L(x) = -x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi - d, \quad (3)$$

где  $x \in R^4$  – вектор состояния модели движения судна.

Для задания симметричной полиномиальной дуги используется выражение

$$rP_6(y_1/r) - y_2 = 0,$$

где  $(y_1, y_2)^T$  – координаты центра масс судна в плоскости  $\Pi$  в декартовой системе координат  $y_1 O y_2$ ;  $r$  – расстояние между крайними точками симметричной полиномиальной дуги,  $P_6(u)$  – полином 6 степени в базисе Бернштейна со скалярными коэффициентами.

Система координат  $y_1 O y_2$  выбирается так, что начальная точка  $p_0$  симметричной полиномиальной дуги совпадает с началом координат  $y_1 O y_2$  и конечная точка  $p_1$  лежит на оси  $O y_1$ , т.е. начальная точка имеет координаты  $(0, 0)^T$ , а конечная –  $(r, 0)^T$ .

Полином  $P_6(w)$  в базисных полиномах Бернштейна имеет следующее представление:

$$P_6(u) = aB_0^6(u) + bB_1^6(u) + cB_2^6(u) + dB_3^6(u) + cB_4^6(u) + bB_5^6(u) + aB_6^6(u),$$

где  $B_i^6(u) = C_6^i u^i (1-u)^{6-i}$ ;

$C_6^i$  – коэффициенты бинома Ньютона;

$b, c, d$  – скалярные коэффициенты;

$u \in [0, 1]$  – скалярный параметр.

В системе координат  $y_1 O y_2$  углы отсчитываются от оси  $O y_1$ , положительное направление – против часовой стрелки. В системе координат  $y_1 O y_2$  полином  $P_6(w)$  имеет следующие коэффициенты:

- начальная точка  $(0, 0)^T$  и конечная точка  $(1, 0)^T$  дают  $a = 0$ ;
- если  $u$  – направление касательной в начальной точке, то  $b = \frac{tg \psi}{6}$ ;
- так как кривизна в граничных точках равна нулю, то  $c = 2b$ ;
- $d$  определяется решением задачи поиска минимума максимальной кривизны путевого примитива.

Функция выхода для симметричной полиномиальной дуги [4] задается выражением

$$\begin{aligned} \alpha_S(y) &= rP_6(y_1/r) - y_2, \\ y &= (y_1, y_2, y_3, y_4)^T, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $y \in R^4$  – вектор состояния модели движения судна. Очевидно, что функции  $\alpha_L(x)$  и  $\alpha_S(y)$  не зависят от путевого угла и угловой скорости.

### 2.3 Закон управления для прямого отрезка

Рассмотрим модель перемещения объекта по прямому отрезку:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\delta, \\ Y &= \alpha_L(x). \end{aligned} \quad (5)$$

С помощью метода линеаризации обратной связью доказано, что относительная степень системы (5) равна 3 при выполнении условия

$$\varphi - x_3 \neq n \frac{\pi}{2}, \quad (6)$$

где  $n$  – целое число,

и построен закон управления

$$\delta_L(x) = \frac{x_4^2 \sin(\varphi - x_3) - \frac{k_1 \alpha_L(x)}{v} - k_2 \sin(\varphi - x_3) - k_3 x_4 \cos(\varphi - x_3)}{b \cos(\varphi - x_3)} - \frac{1}{b} (\theta_1 x_4 + \theta_2 x_4^3). \quad (7)$$

ЗУ (7) должен применяться при выполнении условия (6). В окрестности точки сингулярности, в которой условие (6) нарушено, можно обнулить  $\delta_L$ .

#### 2.4 Закон управления для симметричной полиномиальной дуги

Рассмотрим модель перемещения объекта по симметричной полиномиальной дуге:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\delta, \\ Y &= \alpha_s(x). \end{aligned} \quad (8)$$

С помощью метода линеаризации обратной связью было доказано, что относительная степень системы (8) равна 3 при выполнении условия

$$\begin{aligned} \beta - y_3 &\neq n \frac{\pi}{2} \text{ и } \beta \neq n \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} \beta &= P_6'(y_1 / r), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\beta$  – угол касательной к функции  $rP_6(y_1/r)$ ,  $n$  – целое число, и получен закон управления

$$\begin{aligned} \delta_s(y) &= \frac{\cos \beta \left( \frac{1}{r^2} P_6'''(y_1/r) \cos^2 y_3 - \frac{3}{r} P_6''(y_1/r) y_4 \sin y_3 \cos y_3 - y_4^2 \sin(\beta - y_3) \right)}{b \cos(\beta - y_3)} - \\ &\frac{\frac{k_1 \alpha_s(y)}{v} + k_2 \sin(\beta - y_3) + k_3 \left( \frac{1}{r} P_6''(y_1/r) \cos^2 y_3 \cos \beta - y_4 \cos(\beta - y_3) \right)}{b \cos(\beta - y_3)} - \frac{1}{b} (\theta_1 y_4 + \theta_2 y_4^3). \end{aligned} \quad (10)$$

Когда система координат задачи  $x_1 O x_2$  не совпадает с локальной системой координат  $y_1 O y_2$ , предназначенной для задания полинома  $P_6(y_1/r)$ , то для вычисления сигнала управления необходимо фазовый вектор  $x$ , связанный с системой координат задачи, преобразовать в фазовый вектор  $y$  в локальной системе координат по формулам (11). Величина сигнала управления инвариантна относительно линейного преобразования системы координат  $x_1 O x_2$  в систему  $y_1 O y_2$ :

$$y_4 = x_4, y_3 = \pi/2 - (x_3 + \gamma),$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - p_0 \right), \quad (11)$$

где  $p_0$  – координаты начальной точки симметричной полиномиальной дуги в системе координат  $x_1 O x_2$ ;  $\gamma$  – угол между осью  $O x_1$  и вектором  $p_1 - p_0$  (положительное направление – против часовой стрелки).

ЗУ (10) должен применяться при выполнении условия (9). В окрестности точки сингулярности, в которой условие (9) нарушено, можно обнулить  $\delta_s$ .

В этих ЗУ коэффициенты  $k_i$  являются аналогами коэффициентов ПИД-регулятора, а именно:  $k_2$  – аналог коэффициента при пропорциональном слагаемом,  $k_3$  – аналог коэффициента при дифференциальном слагаемом,  $k_1$  – аналог коэффициента при интегральном слагаемом. При настройке коэффициентов  $k_i$  могут применяться методы настройки коэффициентов ПИД-регулятора. Величины коэффициентов  $k_i$  в ЗУ (7) и (10) могут быть различными.

### 3. Усовершенствованный закон управления

При применении метода линеаризации обратной связью для построения ЗУ формируется диффеоморфизм, который преобразует систему координат исходной нелинейной системы в систему координат эквивалентной по динамике бокового отклонения линейной системы [10]. Для вариантов перемещения по прямому отрезку и по полиномиальной дуге линейные системы одинаковы и имеют управляемое каноническое представление системы с одним входом [18]. По этой причине далее можно говорить об одной системе. Относительная степень эквивалентной линейной системы равна 3 [10]. Линейная система описывает динамику бокового отклонения и не связана с движением объекта вдоль заданной траектории, вследствие чего пространство линейной системы имеет размерность 3. Движение объекта вдоль заданной траектории является нуль-динамикой [10].

В системе координат линейной системы линейная модель будет иметь матрицу замкнутой системы [10] с теми же коэффициентами обратной связи  $\{k_1, k_2, k_3\}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица  $A$  имеет порядок 3, то характеристический полином – степень 2. Полиномы второй степени с действительными коэффициентами имеют корни с отрицательными действительными частями, если коэффициенты больше нуля. Следовательно, линейная система будет иметь асимптотическое решение [18]. Тогда законы управления (7) и (10) обеспечивают асимптотическую устойчивость решений систем (5) и (8), когда  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ ,  $k_3 > 0$ .

Рассмотрим диапазоны возможных значений слагаемых в законах управления (7) и (10). Путьевой угол судна  $x_3$  находится в диапазоне от  $-180^\circ$  до  $180^\circ$ . На эксплуатационных режимах угловая скорость  $x_4$  имеет ограниченную величину. Очевидно,

что при выполнении условий (6) и (9) только функции выходных переменных  $\alpha_L(x)$  и  $\alpha_S(x)$  могут принимать произвольные величины. К неограниченному росту абсолютной величины  $\delta_c$  может приводить слагаемое  $k_1 \alpha_i(x)$ , где  $i \in \{L, S\}$ . Поскольку  $k_1$  может иметь любую положительную величину, то, выбрав достаточно малую величину для  $k_1$ , можно обеспечить  $|\delta_c| < \delta_{\max}$ . Траектория объекта будет асимптотически приближаться к текущему путевому примитиву, но скорость приближения будет уменьшаться, и потребуются увеличение  $k_1$ . Вместо сложной процедуры ступенчатого изменения  $k_1$  предлагается для расчета  $\delta_c$  использовать модифицированные функции  $\tilde{\alpha}_i(x) = \text{sat}_{dm\_i}(\alpha_i(x))$ , где  $i \in \{L, S\}$ . Тогда  $\delta_c$  будет принимать ограниченные значения. Зная величины коэффициентов  $\{k_1, k_2, k_3\}$  и граничные значения для  $x_3, x_4$ , можно подобрать такие величины констант  $dm\_L$  и  $dm\_S$ , что в режиме автоматического управления путевым углом абсолютная величина  $\delta_c$  не будет превышать заданную максимальную величину  $\delta_{\max}$ .

В ЗУ  $\delta_L(x), \delta_S(y)$  функции  $\alpha_i(x)$ , где  $i \in \{L, S\}$ , можно заменить на  $\tilde{\alpha}_i(x)$ , тогда эти новые ЗУ будут обозначаться как  $\tilde{\delta}_L(x), \tilde{\delta}_S(y)$ .

Таким образом, алгоритм управления движением по заданной траектории с ЗУ  $\tilde{\delta}_L(x), \tilde{\delta}_S(y)$  является усовершенствованной версией алгоритма автоматического управления путевым углом с исключением выхода исполнительного сигнала управления на граничные значения при любом боковом отклонении судна от заданной траектории. Область притяжения заданной траектории при использовании усовершенствованного алгоритма совпадает с плоскостью П.

#### 4. Результат моделирования

Для подтверждения эффективности усовершенствованного алгоритма моделировалась работа контура управления, состоящего из блока управления и модели динамики судна как объекта управления. В алгоритме блока управления может использоваться пропорциональный или усовершенствованный ЗУ.

Все примеры носят иллюстративный характер и не являются результатом разработки конкретных технических систем.

Для объекта управления принята модель динамики судна (12), предложенная Р.Я. Першицем [19]:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega, \\ \dot{\beta} = -q_{21}\beta - r_{21}\omega - s_{21}\delta - h|\beta|\beta, \\ \dot{\omega} = -q_{31}\beta - r_{31}\omega - s_{32}\delta, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\phi$  – курс судна,

$\omega$  – угловая скорость корпуса судна в горизонтальной плоскости,

$\beta$  – угол дрейфа,

$\delta$  – угол перекладки руля,

$q_{21}, r_{21}, s_{21}, h, q_{31}, r_{31}, s_{31}$  – коэффициенты, зависящие от гидродинамики судна.

Уравнения Р.Я. Першица учитывают  $s$ -образность диаграммы управляемости судна, что обеспечивает достаточно точное моделирование его движения по криволинейной траектории.

В расчетах использовались приведенные ниже коэффициенты из [20], которые получены из данных телеметрии пассажирского судна на скорости 4 м/с:

$$\begin{aligned} q_{21} = -0,044, r_{21} = 0,029, s_{21} = -0,002, h = 0,056, \\ q_{31} = -0,185, r_{31} = 0,14, s_{31} = -0,0018. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как в ЗУ используется модель движения судна Норрбина [17], то по модели Р.Я. Першица (12) с коэффициентами (13) с помощью метода наименьших квадратов была построена модель Норрбина (14), которая аппроксимирует (12):

$$\dot{\omega} = b\delta + \theta_1\omega + \theta_2\omega^3, \quad (14)$$

где  $b = 0,0018$ ,  $q_1 = -0,00593$ ,  $q_2 = -0,017$ . Результат аппроксимации модели (12) моделью (14) представлен на рис. 2.

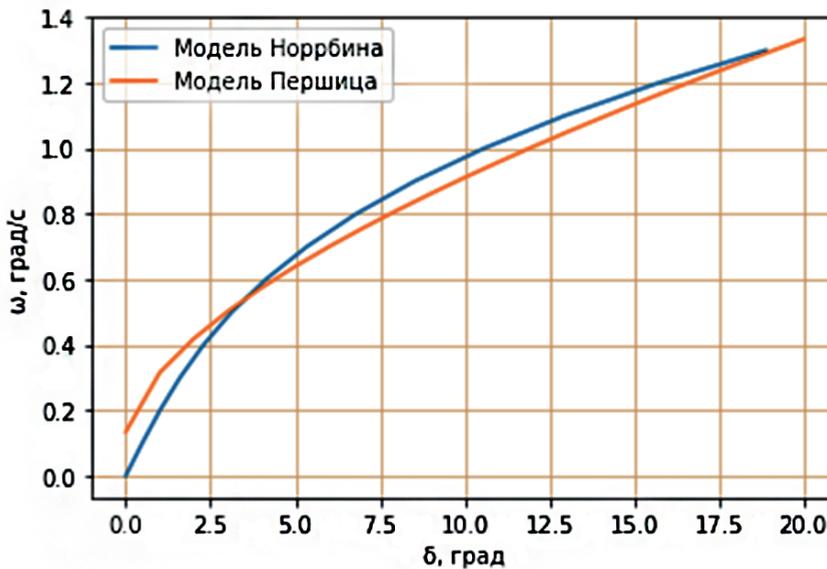


Рис. 2. Диаграммы управляемости моделей (12) и (14) в первом квадранте

Для законов управления (7) и (10) были приняты коэффициенты  $k_1 = 0,0001$ ,  $k_2 = 0,005$ ,  $k_3 = 0,2$ , обеспечивающие приемлемое качество управления при ступенчатом изменении заданного путевого угла.

Было выполнено моделирование автоматического управления движением судна по заданной траектории, состоящей из трех путевых примитивов (рис. 3). Заданная траектория содержит два прямых путевых примитива с индексами 0 и 2, которые соединены криволинейным полиномиальным примитивом с индексом 1. Начало заданной траектории находится в точке с координатами (0, 0) в местной декартовой системе координат.

При начальном положении судна  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = 25$  м и начальной точке заданной траектории  $x = 0$ ,  $y = 0$  результаты моделирования для пропорционального ЗУ представлены на рис. 3 и 4. Исполнительный угол перекаладки руля  $\delta_a$  не выходит на границы заданного диапазона  $\pm 25^\circ$ . Среднее квадратическое боковое отклонение судна составило 3,46 м, среднее квадратическое отклонение руля –  $1,89^\circ$ , средняя

квадратическая скорость перекладки руля –  $0,612^\circ/\text{с}$ . Все варианты моделирования выполнялись для скорости 4 м/с.

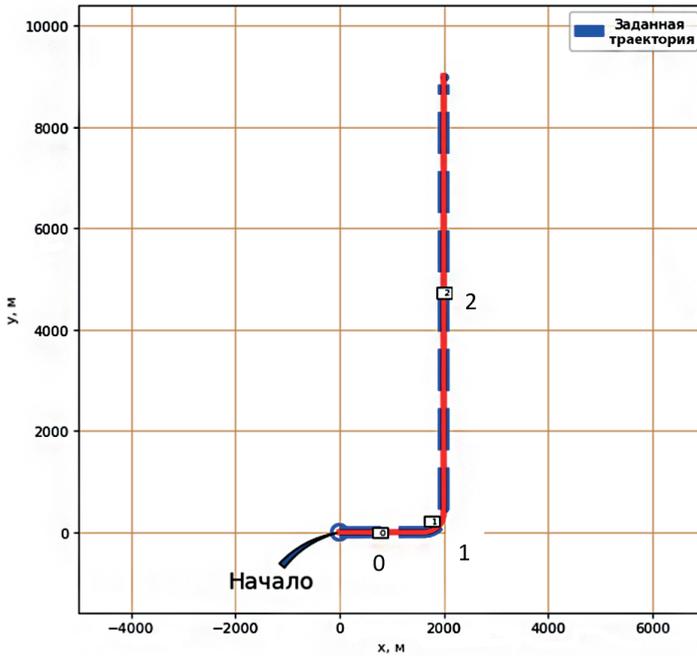


Рис. 3. Траектория перемещения судна под действием пропорционального ЗУ (сплошная линия), пунктирной линией отмечена заданная траектория

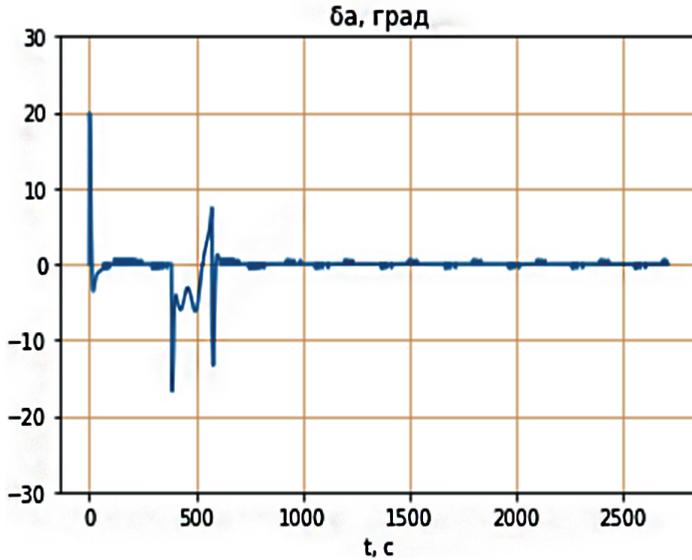


Рис. 4. Перекладки руля под действием пропорционального ЗУ

На рис. 5 и 6 показаны траектории перемещения судна и перекладки руля соответственно под действием пропорционального ЗУ при большом отклонении начального положения судна от начальной точки заданной траектории. Начальное положение судна:  $x_0 = 0, y_0 = -1500$  м. В законе управления в окрестности точки  $x$ , в которой не выполняется (6) или (9), принимается  $\delta_c = 0$  для исключения сингулярности.

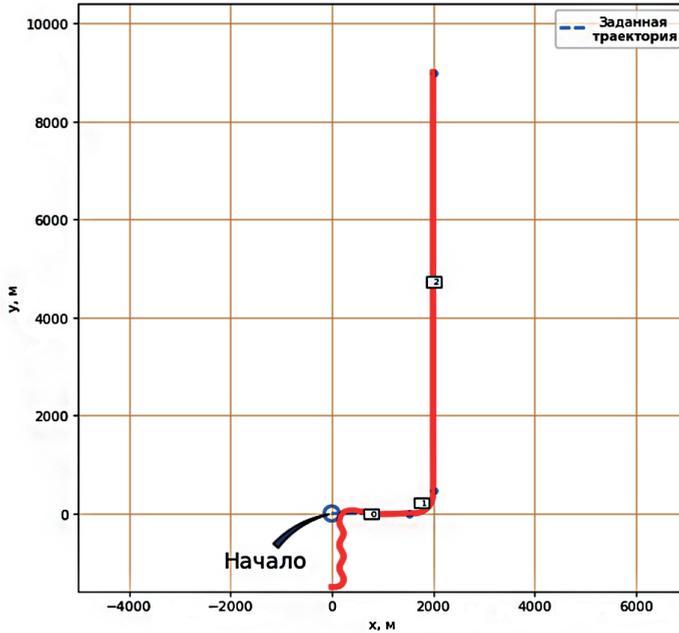


Рис. 5. Траектория перемещения судна под действием пропорционального ЗУ при отклонении  $-1500$  м начального положения судна от начальной точки заданной траектории

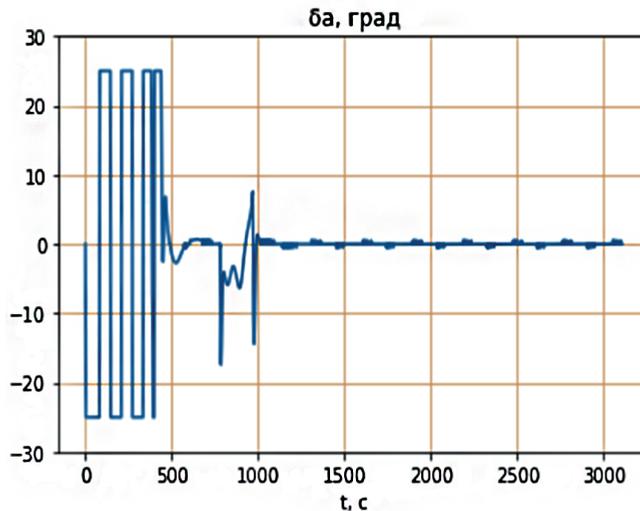


Рис. 6. Траектория перекадки руля под действием пропорционального ЗУ при отклонении  $-1500$  м начального положения судна от начальной точки заданной траектории

Пример движения в обратном направлении под действием пропорционального ЗУ представлен на рис. 7 и 8. Начальное положение судна:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -1400$  м. В ЗУ в окрестности точки  $x$ , в которой не выполняется (6) или (9), принимается  $\delta_c = 0$  для исключения сингулярности.

Рис. 5 и 7 показывают, что закон управления, построенный по методу линеаризации обратной связи, работающий в условиях ограничения на сигнал управления, может приводить к автоколебаниям и движению в обратном направлении при  $\delta_c = 0$

в окрестности точек сингулярности. Если при попадании в окрестность точки сингулярности отказаться от обнуления  $\delta_e$ , то придется остановить процесс управления.

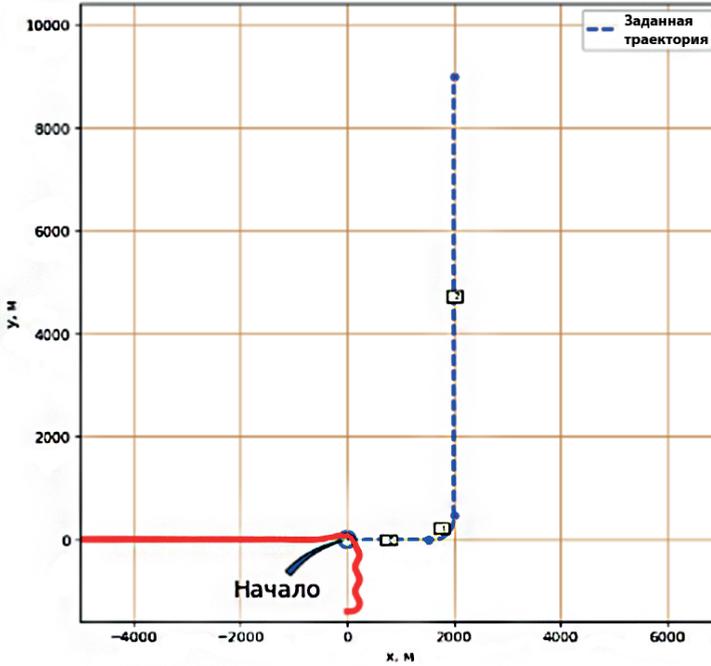


Рис. 7. Траектория перемещения судна под действием пропорционального ЗУ при отклонении  $-1400$  м начального положения судна от начальной точки заданной траектории

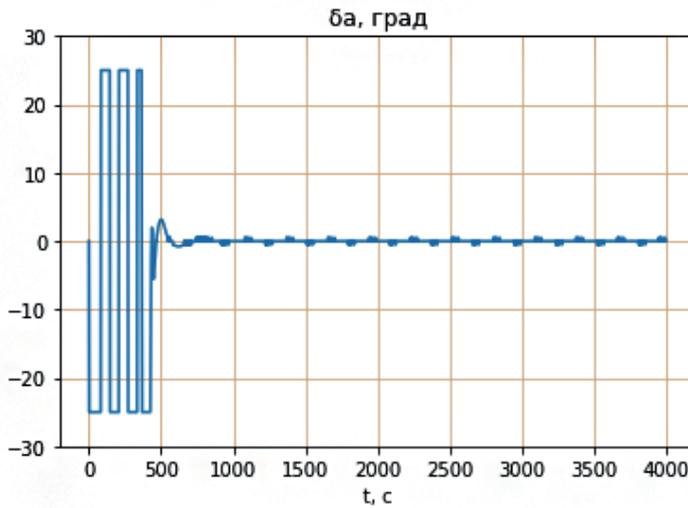


Рис. 8. Траектория переключки руля под действием пропорционального ЗУ при отклонении  $-1400$  м начального положения судна от начальной точки заданной траектории

На рис. 9 и 10 показаны траектории перемещения судна и переключки руля соответственно под действием усовершенствованного ЗУ, в котором приняты ограничения  $dm_L = 25$  м,  $dm_S = 7$  м на функции выходных переменных  $\alpha_L(x)$  и  $\alpha_S(x)$  соответственно. Начальное положение судна:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1500$  м.

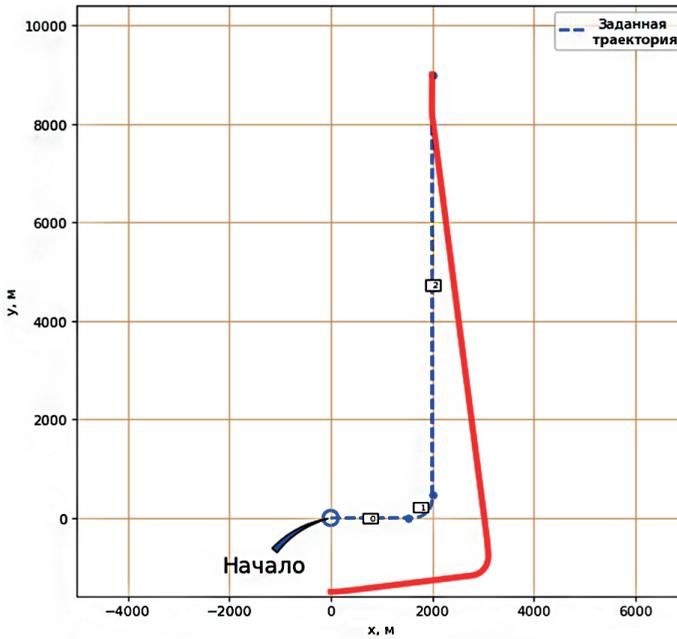


Рис. 9. Траектория перемещения судна под действием усовершенствованного ЗУ при отклонении  $-1500$  м начального положения судна от начальной точки заданной траектории

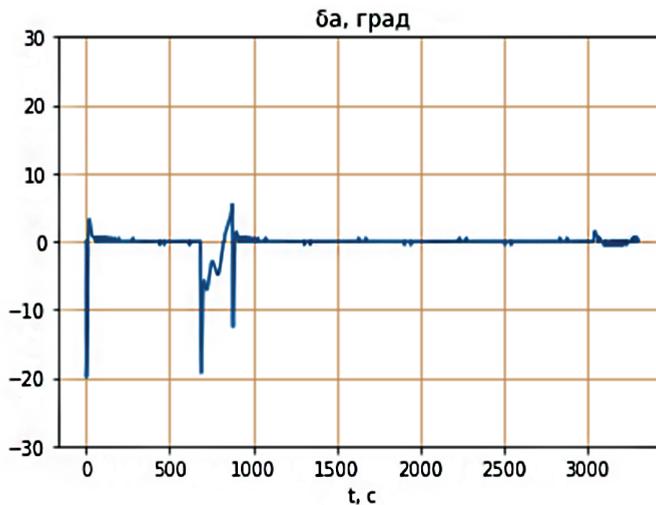


Рис. 10. Траектория перекадки руля под действием усовершенствованного ЗУ при отклонении  $-1500$  м начального положения судна от начальной точки заданной траектории

На рис. 11 и 12 показаны траектории перемещения судна и перекадки руля соответственно под действием усовершенствованного ЗУ, в котором приняты ограничения  $dm_L = 40$  м,  $dm_S = 7$  м на функции выходных переменных  $\alpha_L(x)$  и  $\alpha_S(x)$  соответственно. Начальное положение судна:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1500$  м.

В варианте с  $dm_L = 40$  м (рис. 11, 12) выход на заданную траекторию происходит приблизительно на  $3000$  м ближе, чем в варианте с  $dm_L = 25$  м (рис. 9, 10), хотя в варианте с  $dm_L = 40$  м происходит один выход исполнительного сигнала управления на граничную величину угла перекадки руля в  $25^\circ$ .

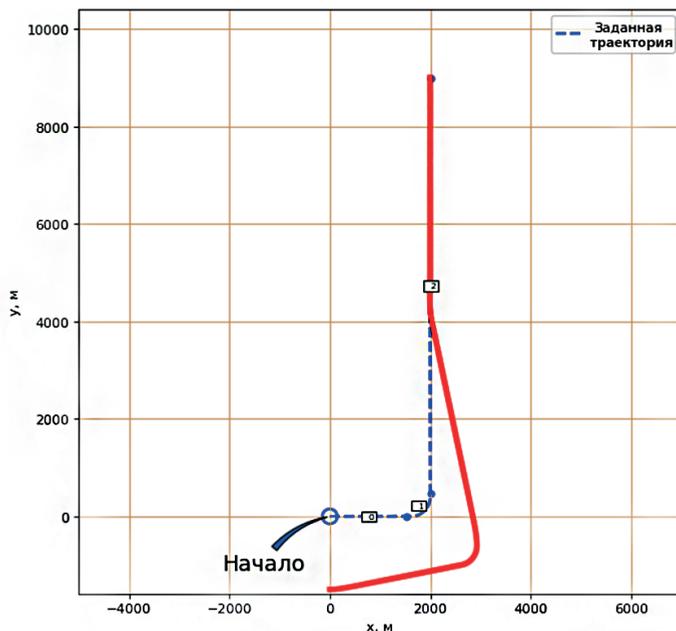


Рис. 11. Траектория перемещения судна под действием усовершенствованного ЗУ при отклонении  $-1500$  м начального положения судна от начальной точки заданной траектории

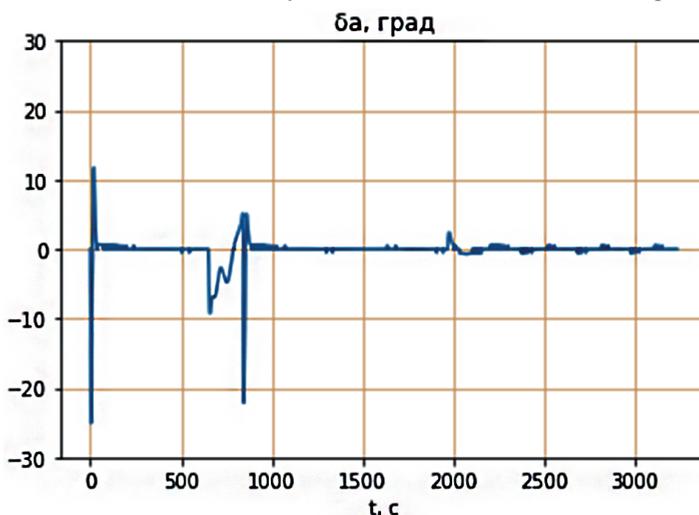


Рис. 12. Перекладки руля под действием усовершенствованного ЗУ при отклонении  $-1500$  м начального положения судна от начальной точки заданной траектории

На рис. 6 видно появление вредных автоколебаний в начале процесса управления. Сравнение рис. 6 и 10 показывает, что при использовании пропорционального ЗУ произошло 8 выходов исполнительного сигнала управления на граничные значения, а при использовании усовершенствованного – ни одного.

Результаты моделирования позволяют предложить гипотезу: если в законе управления существует слагаемое  $kf(x(t))$  и для обеспечения устойчивости должно выполняться условие  $k > 0$ , то на конечном интервале времени слагаемое  $kf(x(t))$  можно заменить на произвольную гладкую функцию  $F(t)$ , удовлетворяющую условию  $F(x(t)) / f(x(t)) > 0$ , при этом устойчивость управления сохраняется.

## Заключение

Если использовать ЗУ, построенные по методу линеаризации обратной связью, в алгоритме управления движением объекта по заданной траектории с непрерывной ограниченной кривизной, то при наличии ограничения на величину сигнала управления и большом боковом отклонении вектор состояния модели движения судна может приближаться к точке сингулярности ЗУ. В этом случае необходимо переходить к другому алгоритму управления. При любом боковом отклонении усовершенствованный ЗУ может обеспечить или полное отсутствие выхода расчетного сигнала управления на граничную величину исполнительного сигнала управления, или уменьшение количества таких выходов. При этом работоспособность алгоритма управления сохраняется.

Использование усовершенствованного ЗУ особенно полезно для систем автоматического управления безкипажными судами. Такие суда в настоящее время, как правило, имеют небольшое водоизмещение, и во многих случаях воздействие ветра и волн является для них непреодолимым. Как только это воздействие прекращается, усовершенствованный ЗУ сразу начинает эффективно парировать боковое отклонение без переключения на специальный алгоритм.

Выводы подтверждаются результатами моделирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Fossen, T.I.**, A Survey on Nonlinear Ship Control: From Theory to Practice, *IFAC Manoeuvring and Control of Marine Craft*, Aalborg, Denmark, 2000.
2. **Le Wang et al.**, State-of-the-Art Research on Motion Control of Maritime Autonomous Surface Ships, *Journal of Marine Science and Engineering*. Published: 1 December 2019.
3. **Astrom, K., Murray, R.**, *Feedback systems. An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 2008.
4. **Krstic, M., Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P.**, *Nonlinear and adaptive control design*, John Wiley & Sons, inc., New York, 1995.
5. **Lapierre, L., Soeteanto, D., Pascoal, A.**, Nonlinear Path Following with Applications to the Control of Autonomous Underwater Vehicles, *Proceedings of the 42nd IEEE CDC*, Maui, Hawaii, USA, 2003.
6. **Довгоброд Г.М.** Разработка адаптивного алгоритма управления движением судна по криволинейной траектории с помощью метода попятного синтеза управления // *Гироскопия и навигация*. 2011. №4. С.22–31.
7. **Пелевин А.Е.** Стабилизация движения судна на криволинейной траектории // *Гироскопия и навигация*. 2002. №2. С. 3–11.
8. **Isidori, A.**, *Nonlinear control systems*, 5d edition, Berlin: Springer-Verlag, 1995.
9. **Shankar Sastry**, *Nonlinear Systems Analysis, Stability, and Control*. New York: Springer, 1999.
10. **Мирошник И.В.** Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. СПб: Питер, 2006.
11. **Nielsen, C. and Maggiore, M.**, Maneuver regulation via transverse feedback linearization: Theory and examples, *Proceedings of the IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, Stuttgart, Germany, September 2004.
12. **Капитанюк Ю.А., Чепинский С.А.** Управление мобильным роботом по заданной кусочно-гладкой траектории // *Гироскопия и навигация*. 2013. №2. С. 42–52.
13. **Колесников А.А.** Синергетическая теория управления. Таганрог: ТРТУ. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.
14. **Кокс Д., Литтл Дж., О’Ши Д.** Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: «Мир». 2000.
15. **Piazzì, A., Guarino Lo Bianco, C., and Romano, M.**, Smooth Path Generation for Wheeled Mobile Robots Using  $\eta_3$ -Splines, *Motion Control*, Federico Casolo (Ed.), 2010. URL: <http://www.intechopen.com/books/motion-control/smooth-path-generation-for-wheeledmobile-robots-using-eta3-splines/>.

16. Довгоброд Г.М. Формирование заданной траектории повышенной гладкости для метода согласованного управления // Гирокоспия и навигация. 2016. №3. С. 143–151. DOI 10.17285/0869-7035.2016.24.3.143-15.
17. Lt Cdr Swarup Das, Dr SE Talole. Evolution of Ship's Mathematical Model from Control Point of View// <https://www.researchgate.net/publication/321012489>.
18. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, Физматлит, 1976.
19. Першиц Р.Л. Управляемость и управление судном. Л.: Судостроение, 1983.
20. Поселенов Е.Н. Обоснование и разработка адаптивного алгоритма управления движением водозмещающего речного судна на мелководье. Диссертация. Нижний Новгород: Волжская государственная академия водного транспорта, 2010.
21. Cayero, J., Cuguero, J., and Morcego, B., Backstepping with virtual filtered command: Application to a 2D autonomous Vehicle.[julen.cayero at upc.edu. http://upcommons.upc.edu/handle/2117/25003](http://upcommons.upc.edu/handle/2117/25003).

---

**Dovgobrod, G.M.** (CSRI Kurs JSC, Moscow, Russia)

Stabilization of the Ship Motion by Restricted Control, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2020, vol. 28, no. 4 (111), pp. 106–123.

**Abstract.** The article presents an algorithm for controlling the motion of an insufficiently controlled ship along a trajectory with a continuous bounded curvature, based on the feedback linearization method. The algorithm allows restricting the control signal, while the state vector of the ship motion model does not approach the singularity point of the control law. The control algorithm returns the ship to the specified trajectory-attractor at any lateral deviation of the ship from the specified trajectory.

**Key words:** control law, transverse feedback linearization, trajectories with continuous curvature, trajectory-attractor.

Материал поступил 27.06.2020