## ХХХ ЮБИЛЕЙНАЯ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ



29-31 мая 2023

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, РОССИЯ

ПРИ ПОДДЕРЖКЕ:

- МЕЖДУНАРОДНОЙ ОБЩЕСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ «АКАДЕМИЯ НАВИГАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ» (АНУД)
- НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИТМО, РОССИЯ
- ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ ОБЩЕСТВА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ (IEEE – AESS)
- КИТАЙСКОГО ОБЩЕСТВА ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ТЕХНИКИ (CSIT)
- ЖУРНАЛА «ГИРОСКОПИЯ И НАВИГАЦИЯ», РОССИЯ

В настоящем издании опубликованы на русском языке пленарные и стендовые доклады участников конференции, поданные на русском языке.

Полностью все доклады представлены в материалах конференции на английском языке – «30th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems».

Тексты докладов публикуются в авторской редакции.

Главный редактор академик РАН В. Г. Пешехонов

ISBN 978-5-91995-096-7

© Государственный научный центр Российской Федерации АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2023

#### СОДЕРЖАНИЕ

#### ЗАСЕДАНИЕ І – ИНТЕГРИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

#### пленарные доклады

<b>В.С. Вязьмин, А.А. Голован</b> Скалярная и векторная бескарданная аэрогравиметрия на самолетах и БПЛА: методика проведения съемок и обработки данных	10
<b>Н.С. Гужва, Б. Али, К.С. Бакулев</b> , <b>Р.Н. Садеков</b> , <b>А.В. Шолохов</b> Оценка точности местоположения трамвая в условиях высотной застройки по данным визуально-геоинформационных систем	16
СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ	
<b>Н.Н. Василюк</b> Накопление смазанных изображений звёзд, полученных бесплатформенной астроинерциальной навигационной системой в дневных условиях	22
Д.И. Смольянов, А.А. Голован Задача навигации беспилотной колесной сельскохозяйственной техники с использованием БИНС, ГНСС и одометрии	27
<b>А.В. Прохорцов, О.С. Балабаев</b> Способ определения навигационных параметров автоматического горного комбайна	31
<b>А.В. Шурыгин</b> Математические модели и алгоритмы бортовой многопозиционной интегрированной инерциально-спутниковой системы определения движения	34
<b>М.Ю. Тхоренко, Е.В. Каршаков, И.А. Папуша</b> Коррекция грубых инерциальных навигационных систем при помощи магнитных измерений	37
<b>А.В. Чернодаров</b> , <b>В.Н. Коврегин, Г.М. Коврегина</b> Инерциально-спутниковая система микронавигации для радиолокатора с синтезированной апертурой и доплеровским каналом измерения траекторной скорости	40
<b>В.А. Смирнов, А.В. Прохорцов, Н.И. Бабухин</b> Алгоритм ориентации и навигации подвижного объекта на основе обработки изображений с нескольких оптических сенсоров	43
<b>Ц. И, М.С. Селезнева, К.А. Неусыпин, Ц. Чжэн</b> Применение алгоритма самоорганизации с резервированием трендов в навигации и картографировании автомобиля	45
<b>А.А. Пеньковский, М. Мохрат, Ж. Махмуд, С.А. Колюбин</b> Робастная визуально-инерциальная одометрия наземных роботов для работы в динамическом окружении	49
В.Г. Караулов, А.М. Грузликов, В.П. Золотаревич Рекуррентный алгоритм позиционирования и определения ориентации АНПА	54
<b>Н.В. Кузьмина, С.М. Тарасов, В.В. Цодокова</b> Алгоритмическая компенсация погрешностей автоматизированного астрономического универсала, обусловленных сбоями синхронизации данных	58

#### пленарные доклады

А.В. Соколов, О.А. Степанов, А.В. Моторин, А.А. Краснов Сопоставление фильтров Винера и Калмана при решении задачи обработки результатов морской гравиметрической съемки	62
<b>А.В. Брагин, Ю.В. Болотин</b> Новый алгоритм коррекции в автономной навигации пешехода	69
СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ	
<ul> <li>А.В. Астафьев, О.С. Астафьева</li> <li>Локализация радиоустройств внутри помещений на основе информации о состоянии канала связи с использованием ограниченной машины Больцмана.</li> </ul>	78
В.А. Петрухин, К.С. Лельков, А.И. Черноморский Локальная навигация колесного мобильного робота как носителя аппаратуры мониторинга дефектов воздушного судна на его стоянке	85
<b>Л.А. Мартынова</b> , <b>К.В. Ланцов, В.В. Ланцов, А.В. Корякин</b> Метод пеленгации малоразмерного робототехнического комплекса подвижным наблюдателем в условиях сложного рельефа	91
<b>В.И. Бабуров, Н.В. Иванцевич, В.В. Худошин</b> Особенности работы системы предупреждения столкновений воздушных судов при относительной навигации	95
<b>И.А. Копылов, Е.Г. Харин, В.А. Копелович, А.Ф. Якушев, Л.Л. Ловицкий, Э.Р. Степанова</b> Оценивание системы раннего предупреждения близости земли в летных испытаниях	100
А.Л. Толстой, С.Д. Петров, П.В. Мовсесян, И.В. Чекунов, Д.А. Трофимов Определение целочисленной фазовой неоднозначности при абсолютном определении координат по спутниковым радионавигационным измерениям	107
В.Б. Пудловский, А.П. Малышев, С.А. Серов, С.В. Черных, А.А. Фролов Синхронизация шкал времени локальной и глобальной навигационной спутниковой системы для «бесшовной» навигации в городе	111
В.И. Бабуров, Н.В. Васильева, Н.В. Иванцевич Анализ точности навигационных определений по двум спутниковым навигационным системам в условиях кренов потребителей	115
ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ	
С.Б. Беркович, Н.И. Котов, А.В. Шолохов, Р.Р. Бикмаев Распознавание места с использованием сиамской нейронной сети в задаче одновременной локализации построения карты при разреженном восприятии	118
<b>О.А. Степанов</b> , <b>В.А. Васильев</b> , <b>Ю.А. Литвиненко</b> , <b>А.М. Исаев</b> Учет априорной информации о траектории движения объекта при коррекции показаний навигационной системы по данным о геофизических полях	125
СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ	
<b>К.Б. Амелин, А.Р. Бестугин, И.А. Киршина, А.А. Рогова, О.И. Саута, П.А. Семенов</b> Характеристики спутниковой системы посадки летательного аппарата на подвижную платформу при стабилизации глиссады с использованием микроэлектромеханических датчиков	131
С.С. Смирнов, С.Д. Петров, И.В. Чекунов, Д.А. Трофимов Локальная радионавигационная система дальномерного типа	135

О.С. Амосов, С.Г. Амосова Дробные фильтры калмановского типа для оценивания состояния, параметров и порядка дробной динамической системы в задачах обработки навигационной информации	
Ю.Н. Адякин, В.А. Орлов, В.А. Борисов, А.П. Шведов, А.В. Ладонкин, Д.М. Малютин	
Система ориентации полезной нагрузки	
В.Н. Коврегин, Г.М. Коврегина Метод адаптивно-робастного всеракурсного наблюдения аэрообъекта при расширенном диапазоне скоростей сближения/удаления в радаре с квазинепрерывным ЛЧМ-излучением	146
В.Н. Коврегин, Г.М. Коврегина Метод наблюдения зависшего объекта на фоне земли в радарах с квазинепрерывным ЛЧМ-излучением	
<b>А.В. Небылов, В.А. Небылов</b> Разработка концепций конструирования тяжелых экранопланов в России и США	
<b>А.В. Прохорцов, В.А. Смирнов, О.В. Минина</b> Методы комплексирования данных в интегрированных навигационных системах по сигналам от ограниченного количества навигационных спутников	
С.В. Кравчук, А.Б. Петров, М.А. Шатский, И.В. Соловьев Автоматизация разработки функционального программного обеспечения интегрированных навигационных систем	
Д.Г. Грязин, Т.В. Падерина Опыт разработки системы коррекции магнитного компаса	
А.Н. Алексеев, Е.С. Земляный, К.А. Чеканов Решение позиционной задачи для автоматической посадки беспилотного летательного аппарата на взлётно-посадочную полосу с помощью технического зрения	
ЗАСЕДАНИЕ II – ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ДАТЧИКИ	
ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ	
А.Г. Кузнецов, А.В. Козлов, В.М. Железнов, А.В. Фомичев, А.В. Молчанов О гарантирующих допусках на систематические инструментальные погрешности датчиков первичной информации БИНС	171
Д.Б. Пазычев, К.С. Бакулев, Р.Н. Садеков Малогабаритная навигационная система для беспилотного летательного аппарата	
СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ	
Н.Б. Вавилова, А.А. Голован, А.В. Козлов, И.А. Папуша, В.А. Павлинов, М.А. Шафеев, А.Ю. Куликова, А.Ф. Ефимочкин, Т.В. Рашкина Результаты разработки и тестирования алгоритма авиационной курсовертикали на базе	10.4
микромеханических датчиков	184
С.В. Смирнов, А.И. Карачков, Ю.Г. Егоров, М.Н. Сильчук, Г.Ю. Киряченко, Г.С. Тараненко Обзор и сравнительный анализ алгоритмов компенсации методических погрешностей от некоммитативных явлений	197
от поломмутативных явлении	10/
Л.В. Водичева, Ю.В. Парышева, Я.С. Савельева Сравнительный анализ алгоритмов начальной выставки БИНС с помощью платформенной ИНС	

А.В. Чернодаров, П.С. Горшков, А.П. Патрикеев, Н.П. Старостин Исследование аварийного режима бесплатформенной инерциально-спутниковой навигационной системы БИНС-500НС по полетным данным	196
М.Е. Рулев, В.М. Ачильдиев, Ю.К. Грузевич, Н.А. Бедро Разработка модели погрешностей электросейсмокардиоблока	200
<b>Б.В. Климкович</b> Калибровка БИНС по разностям кажущегося ускорения	204
<b>П.А. Акимов</b> , <b>А.И. Матасов</b> Алгоритмы калибровки блока гироскопов как решения задач минимаксного оценивания	208
С.Ю. Перепелкина, А.А. Федотов, Повышение эффективности бесплатформенных инерциальных навигационных систем за счет использования типовых замкнутых угловых движений	212
<b>М.А. Белоусов, А.И. Кривошеев</b> Компенсация избыточного шума интенсивности источника излучения в показаниях волоконно-оптического гироскопа	216
А.О. Синельников, Я.А. Зубарев, Д.А. Терещенко Ускоренные испытания на сохраняемость кольцевых лазерных гироскопов	218
<b>А.О. Синельников, Н.В. Тихменев, А.А. Ушанов, С.И. Назаров</b> Взаимодействие виброподвеса кольцевого лазерного гироскопа с внешним механическим возмущением	221
<ul> <li>М.В. Чиркин, В.Ю. Мишин, А.Е. Серебряков, А.В. Молчанов, Ю.Р. Иваненко,</li> <li>Г.В. Давыдов</li> <li>Подавление случайной погрешности лазерного гироскопа без ошумления частотной подставки</li> </ul>	225
<ul> <li>Ю.Ю. Брославец, Е.А. Полукеев, Д.С. Редичкина, А.А. Фомичев, В.Г. Семенов, А.С. Назарова</li> <li>Подавление шумов при синхронизации мод в лазерном гироскопе на полупроводниковом оптическом усилителе и волоконном резонаторе с большой длиной</li> </ul>	229
<ul> <li>Ю.Ю. Брославец, Е.А. Полукеев, Д.С. Редичкина, А.А. Фомичев, В.Г. Семенов, А.С. Назарова</li> <li>Связь встречных волн через рассеяние на элементах непланарного симметричного резонатора в четырехчастотном зеемановском лазерном гироскопе</li> </ul>	233
Ю.Ю. Брославец, Е.А. Полукеев, Д.С. Редичкина, А.А. Фомичев, В.Г. Семенов, А.С. Назарова Факторы, влияющие на точность твердотельного лазерного гироскопа в режиме синхронизации мод	237
<b>А.Е. Морозов, М.А. Белоусов, Д.Ю. Зобачев</b> Методика определения задержек измерений сенсорных данных в навигационных системах	241
<b>Д.М. Калихман, Л.Я. Калихман, В.А. Туркин</b> Универсальная методика контроля параметров блоков чувствительных элементов БИНС с неортогональной ориентацией измерительных осей	244
<b>Ю.В. Ившина, Д.Ю. Зобачев, Т.А. Ульяновская</b> Исследование влияния геометрических погрешностей имитаторов движения на калибровку навигационных систем	249
П.Н. Николаев, А.С. Эспиноза Валлес, М.С. Щербаков Калибровка бортовых магнитометров наноспутника SamSat-ION	253

А.В. Фролов, П.А. Шаповалов, Ю.В. Михайлов	
Разработка методики проектирования и оптимизации жесткости несущей системы	257
оесплатформенной инерциальной навигационной системы	
Н.Д. Богданов, М.А. Белоусов	
Настраиваемая система амортизации блока чувствительных элементов	
А А Склипкин С.Е. Пеленяев	
К вопросу оптимизации конструкции пространственного интегрирующего волнового	
твердотельного гироскопа	
С.Е. Переляев А.В. Алехин	
Влияние неидентичности информационных каналов ВТГ в режиме свободной волны	
А В Черноларов, А П. Патрикеев, С.Е. Переляев	
Корреляционная обработка сигналов и структурно-параметрическая идентификация динамической	
модели ошибок волнового твердотельного гироскопа	
В.В. Матвеев, А.В. Каликанов, М.Г. Погорелов, В.В. Лихошерст, М.Л. Кирсанов.	
Д.С. Стрельцов	
Реализация режима свободной волны в кориолисовых вибрационных гироскопах с низкодобротными объемными резонаторами	272
В.Я. Распонов. С.В. Егоров	
Теория и практика разработки волнового твердотельного гироскопа	
с металлическим резонатором	
Влияние опорного напряжения на дрейф волнового твердотельного гироскопа	
с плоскими электродами	
Способ реализации автоколебательного контура в волновом твердотельном гироскопе	
С.1. Штек, м.А. жеглов, в.в. веляков, О.1. Андреасян, С.О. васецкии, П.С. Кузнепов	
Разработка чувствительного элемента микрооптоэлектромеханического акселерометра	
A.C. Papuraan M.H. Engrudaan	
А.с. завитаев, м.н. Евстифеев Анализ технологических факторов при проектировании ядерного магнитного гироскопа	
В.В. Чалков, Г.В. Безмен	
Спосооы повышения качества начальной настройки оптической схемы ядерного магнитного гироскопа.	
Н.С. Каранин, О.С.Юльметова	
Исследование температуры поверхности чувствительного элемента микромеханического	204
акселерометра при плазмохимическом травлении методом конечных элементов	294
П.А. Филатов, А.А. Фомичев, П.В. Ларионов, А.Б. Колчев, А.Б. Тарасенко	
Метод коррекции ошибок акселерометра типа Q-flex на основе метода опорных векторов	
А.В. Большакова, А.М. Боронахин, Е.Л. Бохман. Л.Ю. Ларионов. Л.Н. Полгорная.	
А.Н. Ткаченко, Р.В. Шалымов	
Применение вейвлет-преобразования при анализе показаний инерциальных датчиков,	
установленных на железнодорожном вагоне	
Д.М. Калихман, Е.А. Депутатова, С.В. Пчелинцева, В.О. Горбачев	
Универсальный прецизионный стенд с инерциальными чувствительными элементами	
и аэростатическим подвесом для контроля измерителей угловой скорости	

<b>Д.М. Малютин</b> , <b>Ю.Н. Адякин</b> , <b>В.А. Орлов</b> , <b>А.П. Шведов</b> Динамика канала управляемого индикаторного гиростабилизатора для измерения угловой скорости линии визирования объекта наблюдения	310
<b>В.А. Погорелов, Е.Г. Чуб</b> Автономная оценка стохастического вектора состояния некорректируемой гиростабилизированной платформы	314
ЗАСЕДАНИЕ III – СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ	
ПЛЕНАРНЫЙ ДОКЛАД	
<b>М.Ю. Беляев, П.А. Боровихин, А.М. Есаков, Д.Ю. Караваев, И.В. Рассказов</b> Новые методы управления при наведении научной аппаратуры на наблюдаемые объекты в эксперименте «Ураган» на МКС	319
СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ	
<b>А.Ю. Княжский, А.В. Небылов, В.А. Небылов</b> Метод осуществления посадки орбитального самолета на низколетящий аппарат с динамическим принципом поддержания	329
Цзинчжун Чжэн, М.С. Селезнева, К.А. Неусыпин, Жуйян Чжоу Адаптивный супертвист-скользящий режим управления ориентацией для беспилотных летательных аппаратов с подвижными массами	333
<b>Б.Р. Андриевский, Ю.С. Зайцева</b> Использование нелинейной коррекции для предотвращения цепочной неустойчивости при управлении высотой беспилотных летательных аппаратов	337
<b>Е.И. Сомов, С.А. Бутырин, Т.Е. Сомова</b> Автономное наведение и управление мини-спутниками в низкоорбитальной группировке при площадной сканирующей съемке	341
<b>Е.И. Сомов, С.А. Бутырин, С.Е. Сомов</b> Управление космическим роботом при сближении с мини-спутниками в низкоорбитальной группировке землеобзора	
<b>Е.В. Баринова, Н.А. Елисов, А.В. Крамлих, И.А. Ломака</b> Подход к управлению угловым движением низкоорбитального наноспутника с использованием аэродинамических поверхностей	350
<b>Е.В. Баринова, И.В. Белоконов, И.А. Тимбай</b> К вопросу прогнозирования падения высоты орбиты наноспутника формата CubeSat с учётом его движения относительно центра масс	354
<b>Г.М. Довгоброд, Д.С. Бахтин, К.А. Дворников</b> Гибридный алгоритм управления движением судна, исключающий насыщение контура управления	358
<b>И.В. Белоконов, М.С. Щербаков, С.А. Медведев</b> Выбор условий обеспечения продолжительной пассивной инспекции в близкой окрестности космического аппарата, двигающегося по высокоэллиптической орбите	361
<b>В.В. Любимов, И. Бакри</b> Синтез двухканального управления для стабилизации вращения малого асимметричного космического аппарата в атмосфере Mapca	365
<ul> <li>А.А. Галяев, А.С. Самохин, М.А. Самохина</li> <li>Исследование функционала уклоняющегося от обнаружения подвижного объекта</li> <li>в дискретной постановке</li> </ul>	370

А.С. Самохин, М.А. Самохина	
О построении траектории перелёта космического аппарата к Фобосу с совершением пертурбационного	272
маневра у луны на основе решения комоинации 4 задач ламоерта	
И.Д. Костин, А.М. Попов, Ю.В. Фадеева, Ф.А. Попов, В.А. Михайлов	
Алгоритм интегрального управления группировкой малых спутников	
Л.Г. Кострыгин, А.М. Попов, А.А. Шевчик	
Алгоритм адаптивного управления полетом БПЛА переменной массы	
ЗАСЕДАНИЕ IV – ВОПРОСЫ ТЕОРИИ	
ПЛЕНАРНЫЙ ДОКЛАД	
С.Е. Переляев, В.Ф. Журавлев Пространственный оснициятор Ван дер Поля. Технические придожения в гироскопии	384
СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ	
В.М. Котлов, С.Е. Переляев	
Вывод уравнений динамики движения кольцевого волнового твердотельного и маятникового гироскопов методом голономной механики	395
МА Басараб А Жиани Ф Комботт Б.С. Пушин	
Аналитическое моделирование и проектирование теплового акселерометра на основе обобщенной	
сферической модели	399
А.В. Мололенков, Я.Г. Сапунков, Т.В. Мололенкова	
Аналитический квазиоптимальный алгоритм программного управления угловым движением осесимметричного	
космического аппарата	403
И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков	
Бикватернионное решение задачи оптимального по быстродействию управления пространственным	
движением космического аппарата	407
Ю.Н. Челноков, А.В. Молоденков, М.Ю. Логинов	
Бикватернионное квазиоптимальное аналитическое решение задачи программного управления	411
пространственным движением космического аппарата	411
В.М. Никифоров, А.А. Гусев, К.А. Андреев, Д.В. Груненков, Е.С. Сумнительный,	
А.С. <b>Ширяев</b> , А.С. Аккуратова Приближенные решения задач динамики для приборов систем автоматического управления с применением	
матричного описания и матричных операторов	415
UR Папиора TR Якорлера AR Koliciko RA Koliciko	
Новая сдвиговая математическая модель колебаний пластинчатых пористых функционально градиентных	
акселерометров с присоединенной массой в температурном поле	419
ΜΑ Барулица Л.В. Кондратов Р. Романов F.В. Панкратова С.А. Галична	
Условия возникновения хаотических колебаний размерно-зависимых планарных компонентов	
МЭМС/НЭМС-датчиков	
КРУГЛЫЙ СТОЛ	
«Перспективы развития гироскопии»	
А.А. Унтилов, Е.В. Драницына, Д.А. Егоров	
Современное состояние и перспективы развития волоконно-оптических гироскопов	426
С. в. перелясв Современное состояние волновых твердотельных гироскопов. Перспективы развития	
в прикладной гироскопии	431

#### ЗАСЕДАНИЕ І – ИНТЕГРИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

## Скалярная и векторная бескарданная аэрогравиметрия на самолетах и БПЛА: методика проведения съемок и обработки данных

В.С. Вязьмин *МГУ имени М.В. Ломоносова* Москва, Россия v.vyazmin@navlab.ru

Аннотация-Представлены методики проведения аэрогравиметрических съемок и постобработки первичных данных бескарданного аэрогравиметра. Методики разработаны на основе обширного экспериментального материала ряда съемок, выполненных в 2020-2022 гг. с использованием современных бескарданных аэрогравиметров и различных носителей (самолетов и беспилотной техники). На основе обработки экспериментальных данных демонстрируется возможность достижения точности скалярной бескарданной аэрогравиметрии, востребованной в разведочной геофизике. На результатах съемки на беспилотном летательном аппарате показана возможность повышения пространственного разрешения аэрогравиметрических данных до 1 км. На примере одной из съемок также показана возможность решения задачи векторной аэрогравиметрии (с точностью до 2-3 мГал).

Ключевые слова—аэрогравиметрия, вектор силы тяжести, гравиметр, БИНС, ГНСС, постобработка.

#### I. Введение

Аэрогравиметрия является надежным и экономным по времени методом измерения силы тяжести с борта летательного аппарата в интересующем районе Земли. Для измерений в аэрогравиметрических съемках используют платформенные аэрогравиметры, в состав которых входит горизонтируемая гироплатформа [1]. Однако в последние годы нередко стали применяться также аэрогравиметры на основе бескарданных (бесплатформенных) инерциальных навигационных систем (БИНС), выделяющихся меньшими массогабаритными характеристиками и почти не имеющих технических ограничений для применения в сложных динамических условиях [2-4]. Так, масса современных бескарданных аэрогравиметров іМАК (ФРГ) (вместе с термокожухом) не превышает 20 кг, что в разы меньше массы платформенных комА.А. Голован *МГУ имени М.В. Ломоносова* Москва, Россия aagolovan@yandex.ru

плексов. За счет этого бескарданные аэрогравиметры могут устанавливаться на легкие носители, включая беспилотные летательные аппараты (БПЛА), позволяющие выполнять съемку при более низкой скорости полета [4-6]. Данное обстоятельство имеет важное значение для геолого-геофизических приложений, поскольку возникает возможность получения данных о гравитационном поле с более высокой детальностью.

Значительную трудность в бескарданной аэрогравиметрии составляет разработка адекватных алгоритмов постобработки первичных данных аэрогравиметра. Это объясняется высокой чувствительностью инерциальных датчиков (акселерометров, гироскопов) БИНС аэрогравиметра к возмущающим воздействиям во время движения носителя и наличием систематических инструментальных погрешностей инерциальных датчиков, снижающих точность измерений [1]. Тщательный учет этих погрешностей особенно важен при съемках с облетом рельефа, где полеты выполняются при интенсивном маневрировании самолета-носителя. В связи с этим в бескарданной аэрогравиметрии большое значение приобретают вопросы, связанные с калибровкой БИНС аэрогравиметра (как дополетной стендовой, так и периодической в полевых условиях) [4, 7-8].

К другим особенностям постобработки данных относится сложность определения линейного тренда в смещении нулевого сигнала вертикального акселерометра БИНС аэрогравиметра за время полета. Для этой цели должны решаться задачи начальной и конечной выставок БИНС на стоянках летательного аппарата до и после полета с целью определения оценок смещения нулевого сигнала вертикального акселерометра [3, 7, 9].

С вопросами калибровки тесно связана еще одна особенность постобработки, состоящая в усложнении моде-

ли ошибок вертикального канала аэрогравиметра, в состав которой должны включаться также остаточные погрешности калибровки. Это, в свою очередь, усложняет контроль точности получаемых оценок аномалии силы тяжести, требующий, в том числе, и расширения критериев оценки точности (так, одним из критериев, очевидно, должна быть и точность оценивания остаточных калибровочных параметров аэрогравиметра) [10].

Настоящий доклад посвящен разработанным авторами методикам проведения съемок и постобработки первичных данных бескарданного аэрогравиметра с учетом изложенных выше особенностей. Создание и развитие методик осуществлялось на основе обширного экспериментального материала, доступного авторам и включающего данные нескольких площадных съемок с современными бескарданными аэрогравиметрами (разных серий фирмы iMAR и прототипом, разработанным отечественным производителем) [4]. Большинство съемок (2020-2022 гг.) выполнено на самолетах (Ан-30, Ан-3T, Сеssna и др.), две съемки выполнены на БПЛА (данные предоставлены ГНПП «Аэрогеофизика», Москва).

В докладе представлено описание указанных методик и примеры обработки экспериментальных данных, демонстрирующие достигаемую разработанными алгоритмами точность – как в скалярной, так и в векторной бескарданной аэрогравиметрии. Отметим, что в последней до сих пор в мире не существует выработанного подхода к решению задачи (оцениванию вектора силы тяжести на траектории) [1]. Представленные в докладе результаты получены при помощи разработанного авторами алгоритма [11] на основе априорной пространственной модели поля силы тяжести в районе полета и демонстрируют точность оценивания компонент вектора силы тяжести на уровне 2-3 мГал.

В докладе также представлены результаты съемки на БПЛА, подтверждающие возможность получения гравиметрических данных с высоким пространственным разрешением.

#### II. МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕНИЯ СЪЕМОК И ПОСТОБРАБОТКИ ДАННЫХ БЕСКАРДАННОГО АЭРОГРАВИМЕТРА

Кратко опишем обе методики, следуя [4].

*Методика проведения съемок* состоит из следующих этапов:

- температурная калибровка БИНС аэрогравиметра ра на точном стенде с целью обновления калибровочной базы данных аэрогравиметра перед началом съемочного сезона;
- выполнение в каждом полете съемки статических калибровок БИНС аэрогравиметра (до и после полета) с целью определения смещений нулевых сигналов всех трех акселерометров и их линейных трендов за полет.

Методика постобработки первичных данных бескарданного аэрогравиметра, полученных за один полет, включает следующие этапы:

 экспресс-диагностика данных (проверка целостности, контроль температурных вариаций, насыщений вертикального акселерометра и пр.);

- начальная и конечная выставки БИНС аэрогравиметра, совмещенные с определением смещений нулевых сигналов акселерометров до и после полета [9];
- определение координат и относительных скоростей антенны бортового приемника глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) в стандартном и фазо-дифференциальном режимах [12];
- интеграция БИНС-ГНСС, проводимая для горизонтальных каналов БИНС [13];
- решение гравиметрической задачи в двух постановках – оценивание аномалии силы тяжести, оценивание вектора силы тяжести на траектории. Контроль точности оценок.

Добавим, что на заключительном (шестом) этапе постобработки данных перед их геологической интерпретацией выполняется построение карт аномалий (в свободном воздухе, в редукции Буге), включая процедуру уравнивания рядовых и опорных галсов, пространственную фильтрацию, пересчет на другую высоту и пр. Для этих целей существуют различные методы (см., например, [14-15] или предложенный авторами подход на основе сферического вейвлет-разложения [16]).

Остановимся подробнее на алгоритмах решения гравиметрической задачи (этап 5).

#### А. Оценивание аномалии силы тяжести на траектории и контроль точности оценок

Решение гравиметрической задачи (этап 5 методики постобработки) базируется на основном уравнении скалярной бескарданной аэрогравиметрии [1]:

$$\ddot{h} = \dot{V}_{Up} = g_{etv} - g_0 - \delta g + \mathbf{n}^T \mathbf{f}_z, \qquad (1)$$

где h – высота над референц-эллипсоидом,  $V_{Up}$  – относительная вертикальная скорость приведенной чувствительной массы блока акселерометров БИНС аэрогравиметра,  $g_{etv}$  – поправка Этвеша,  $g_0$  – абсолютное значение нормальной силы тяжести,  $\delta g$  – аномалия силы тяжести,  $\mathbf{f}_z$  – вектор удельной внешней силы, измеряемой акселерометрами, заданный проекциями на оси приборного трехгранника, жестко связанного с БИНС,  $\mathbf{n}$  – орт географической вертикали в приборных осях.

При решении (1) используются данные ГНСС (координаты и скорости) и измерения акселерометров. Для последних вводится модель измерений:

$$\mathbf{n}^{\prime T} \mathbf{f}_{z}^{\prime} = \mathbf{n}^{T} \mathbf{f}_{z} + k_{N} f_{E}^{\prime} - k_{E} f_{N}^{\prime} + \mathbf{n}^{T} \mathbf{q}_{f}, \qquad (2)$$

где **n**' – оценка алгоритмом интеграции,  $k_E$ ,  $k_N$  – остаточные угловые ошибки определения вертикали, недооцененные на этапе интеграции БИНС-ГНСС (предполагаются медленно меняющимися функциями времени),  $f'_E, f'_N$  – измерения «горизонтальных» акселерометров, **q**<sub>*l*</sub> – шум акселерометров. Отметим, что в (2) также входят другие систематические погрешности аэрогравиметра (ошибки синхронизации с ГНСС, поправка масштабного коэффициента вертикального акселерометра и др.), которые здесь для краткости изложения опущены. Введенные систематические погрешности далее будем называть калибровочными параметрами аэрогравиметра.

На основе (1)-(2) и данных ГНСС (измерений высоты или вертикальной скорости) задача скалярной бескарданной аэрогравиметрии может быть сформулирована в виде линейной задачи оптимального стохастического оценивания, решение которой определяется фильтром Калмана и сглаживанием [17] (см. другие возможные постановки, например, в [3], [18]).

Контроль точности оценок аномалии. Для проверки и контроля точности решения гравиметрической задачи в разработанной методике постобработки анализируется следующая информация:

- Значения оценок калибровочных параметров (сравниваются с номинальными или пороговыми значениями). Так, например, остаточные угловые ошибки определения вертикали k<sub>E</sub>, k<sub>N</sub> не должны превосходить по абсолютной величине 10 угл. сек. в случае кондиционных данных рассматриваемых аэрогравиметров.
- 2. Линейный тренд в смещении нулевого сигнала вертикального акселерометра за полет.
- Уровень невязок оценивания аномалии на галсах полета. Невязки определяются на основе модели корректирующих измерений в гравиметрическом фильтре и имеют размерность этих измерений (метры в случае измерений высоты или м/с в случае вертикальной скорости).
- 4. Межпрофильная корреляция оценок аномалии. Вводится гипотеза об одинаковом (ограниченном) частотном диапазоне оценок на нескольких параллельных галсах. Используется подход на основе детерминированной локальной гармонической модели поля в районе полета [16]. Путем сравнения оценок аномалии на галсах с построенной моделью могут быть выявлены систематические (длинноволновые) ошибки в оценках аномалии (вызванные, например, аппаратными неполадками, неточностями предполетной калибровки БИНС и пр.). Эта проверка важна на ранних этапах съемки, когда измерения на опорных галсах, как правило, еще отсутствуют.
- Корреляция оценок аномалии с профилем рельефа. Наличие цифровой модели рельефа местности в районе полетов может дать дополнительную информацию о качестве оценок аномалии.
- Сходимость с данными глобальных моделей гравитационного поля Земли высокого разрешения (EGM2008 или др.). Этот источник информации имеет ряд ограничений, связанных, вопервых, с более низким пространственным разрешением данных глобальных моделей по сравнению с аэрогравиметрическими данными (разрешение EGM2008 – примерно 10 км), вовторых – с точностью глобальных данных, неодинаковой для разных районов [19-20].
- Статистика по сходимости оценок аномалий на повторных галсах (при их наличии).

 Статистика по сходимости оценок аномалий в точках пересечения рядовых и опорных галсов [21].

#### В. Оценивание вектора силы тяжести

Гравиметрическая задача нами рассмотрена также в другой постановке – в виде задачи векторной аэрогравиметрии (оценивание вектора силы тяжести на траектории). Решение задачи, в силу ее сложности [1], потребовало введение априорной пространственной модели поля силы тяжести в районе полета [11]. При этом нами вводятся ограничения на траекторию полета, которая должна включать пять-шесть галсов (или более) длиной не менее 70 км с межгалсовым расстоянием несколько км.

Априорная модель поля основана на представлении возмущающего потенциала *T* в виде суммы [22]:

$$T = T_{ggm} + T_{res}, \tag{3}$$

где  $T_{ggm}$  – длинноволновая составляющая,  $T_{res}$  – остаточная составляющая, параметризуемая сферическими базисными скейлинг-функциями в районе полета [11, 16]. Длинноволновая составляющая (вплоть до длин волн примерно 130 км) определяется с высокой точностью по данным современных спутниковых глобальных моделей поля силы тяжести (основанных на измерениях миссий GRACE/GRACE-FO, GOCE и др.) [23]. Коэффициенты параметризации остаточной составляющей подлежат определению по измерениям аэрогравиметра (в связи чем возникают изложенные выше требования к траектории полета).

На основе (1)-(3) задача векторной аэрогравиметрии нами поставлена в виде задачи оптимального стохастического оценивания калибровочных параметров аэрогравиметра и коэффициентов параметризации остаточного возмущающего потенциала  $T_{res}$  в районе полета, которая решается при помощи фильтра Калмана в информационной форме [17]. Оценки компонент вектора силы тяжести определяются по оцененным коэффициентам параметризации на основе аналитических соотношений [16].

#### III. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАБОТКИ СЪЕМКИ НА АН-30

Ниже представлены примеры обработки первичных данных бескарданного аэрогравиметра в съемке на самолете Ан-30, выполненной в 2021 г. компанией ГНПП «Аэрогеофизика». Измерения проводились в режиме генерального огибания рельефа с перепадом высоты на галсах до 400 м. Средняя скорость полета на галсах – 70 м/с. На рис. 1а представлены результаты оценивания аномалии силы тяжести на галсах в семи полетах. Число галсов – 60, межгалсовое расстояние – 500 м. Частота среза гравиметрического фильтра – 0.01 Гц (эквивалентно разрешению в пространстве 3.5 км).

Для промежуточной оценки точности результатов анализировалась доступная информация, перечисленная выше в разделе ЗА. В частности, использовалась гипотеза о межпрофильной корреляции оценок аномалии на основе построения локальной гармонической модели поля [16] в районе полетов (рис. 16). Сопоставление оценок на галсах с моделью показало высокую сходимость – 1.3 мГал (СКО). Это значение обусловлено, в основном, сглаженностью модели поля в направлении поперек галсов (пространственное разрешение в обоих направлениях около 4 км). Кроме того, сопоставление с моделью подтвердило уходы среднего уровня (на 2-3 мГал) в оценках аномалии на трех галсах (вызваны нестабильностью температуры внутри БИНС). Отметим, что итоговая точность всей съемки (определявшаяся по сходимости в точках пересечения рядовых и опорных галсов) составила 1.4 мГал (СКО/√2) [5].

На рис. 2 приведен профиль оцененной гравиметрическим фильтром аномалии в одном из полетов съемки, демонстрирующий корреляцию с профилем рельефа (для высокочастотных составляющих) и данными глобальной модели поля XGM2019 [24] (для низкочастотных составляющих). Глобальная модель использовалась в разложении до степени и порядка 2190 (рис. 2, график для наглядности сдвинут по вертикальной оси).



Рис. 1. Съемка на Ан-30: а) результаты оценивания аномалии силы тяжести на галсах гравиметрическим фильтром; б) локальная гармоническая модель аномального поля силы тяжести, мГал



Рис. 2. Вверху – оценка аномалии гравиметрическим фильтром (красный цвет) и данные глобальной молели поля XGM2019 (черный цвет), мГал. Внизу – профиль рельефа, м

#### IV. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАБОТКИ СЪЕМКИ НА БПЛА

Ниже представлены результаты обработки одного из полетов съемки на БПЛА вертолетного типа (съемка выполнена ГНПП «Аэрогеофизика» в 2022 г.). Полет проходил по четырем повторным галсам на постоянной высоте 420 м на первых двух галсах и 340 м на двух других. Длина галсов – около 20 км. Скорость полета БПЛА – 90 км/ч. Бескарданный аэрогравиметр был помещен в дополнительный термокожух и прикреплен к корпусу БПЛА с его внешней стороны [4]. Внутри термокожуха аэрогравиметр устанавливался на амортизаторы.

Приведем некоторые этапы постобработки. После решения задач начальной и конечной выставок БИНС аэрогравиметра были рассчитаны результаты инерциального счисления в автономном (без ГНСС) режиме. Ошибки координат за время полета (около 2 ч) составили 700 м (за эталон взяты данные ГНСС), см. рис. За.



Рис. 3. Съемка на БПЛА: а) ошибки координат автономного инерциального счисления БИНС аэрогравиметра, м; б) оценки угловых ошибок по результатам интеграции БИНС-ГНСС, угл. мин

При помощи алгоритма интеграции БИНС-ГНСС (фильтр Калмана и сглаживание) оценены угловые ошибки определения вертикали (рис. 3б), составившие менее 10 угл. сек., оценка азимутальной ошибки виртуальной гироплатформы – менее 3 угл. мин. (рис. 3б). Алгоритмом также оценен ряд других параметров (состав фильтра приведен в [4]).

Перед вычислением аномалии был скомпенсирован линейный тренд в показаниях вертикального акселерометра, составивший около 2 мГал за полет. Оценки аномалии были рассчитаны с использованием гравиметрических фильтров с разными частотами среза (табл. 1).

Похожий полет на том же носителе и с тем же аппаратурным составом был выполнен в другой день и включал пролет по двум галсам (на высотах 420 м и 340 м) вдоль того же маршрута. На рис. 4 представлены оценки аномалии на всех шести галсах двух полетов при частоте среза фильтра 1/120 Гц (эквивалентно разрешению в пространстве 1.5 км). Сходимость оценок по шести повторным галсам составила от 0.40 до 0.78 мГал в зависимости от частоты среза фильтра.



Рис. 4. Оценки аномалии силы тяжести на повторных галсах в съемке на БПЛА, мГал

#### V. РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕКТОРА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Оценивание компонент вектора силы тяжести было выполнено в одной из съемок с бескарданным аэрогравиметром на Ан-30 при помощи разработанного алгоритма на основе априорной пространственной модели поля (3). Длинноволновая составляющая потенциала  $T_{ggm}$ вычислялась по данным XGM2019 в разложении до степени и порядка 120 (эквивалентно минимальной длине волны около 330 км). Для остаточного потенциала  $T_{res}$ введена параметризация сферическими скейлингфункциями в районе полета (рис. 5). Количество коэффициентов параметризации – 315. Траектория полета включала пять галсов север-юг и два секущих галса.



Рис. 5. Траектория полета и область параметризации возмущающего потенциала базисными скейлинг-функциями

Коэффициенты параметризации оценивались при помощи фильтра Калмана в информационной форме (вектор состояния включал все 315 коэффициентов плюс калибровочные параметры аэрогравиметра). По ним были рассчитаны оценки компонент остаточного вектора возмущения силы тяжести (рис. 6-7).

На последнем шаге алгоритма каждой из остаточных компонент была возвращена длинноволновая составляющая (по данным той же глобальной модели).

Оценка точности результатов производилась на основе сравнения с данными XGM2019 в разложении до степени и порядка 2190 (эквивалентное разрешение в пространстве примерно 10 км). СКО разности оцененных горизонтальных компонент и данных глобальной модели – 2-3 мГал (табл. 2). При расчете статистики не учитывался первый (крайний справа на рис. 5) галс север-юг, на котором качество оценивания горизонтальных компонент было ниже, чем на остальных галсах.



Рис.6. Оценки северной (вверху) и восточной (внизу) компонент вектора возмущения силы тяжести на четырех галсах северг-юг (красный цвет) и данные глобальной модели XGM2019 (черный цвет), мГал.



Рис.7. Оценка вертикальной компоненты вектора возмущения силы тяжести (аномалии) на четырех галсах северг-юг (красный цвет) и данные глобальной модели XGM2019 (черный цвет), мГал.

Параметр	Частота среза гравиметрического фильтра			Частота среза грави		фильтра
	1/80 Гц	1/100 Гц	1/120 Гц	1/140 Гц		
Разрешение в пространстве [км]	1.00	1.25	1.50	1.75		
СКО [мГал]	0.79	0.58	0.46	0.40		

ТАБЛИЦА 1. СТАТИСТИКА ПО СХОДИМОСТИ ОЦЕНОК АНОМАЛИИ НА

ШЕСТИ ПОВТОРНЫХ ГАЛСАХ В СЪЕМКЕ НА БПЛА

ТАБЛИЦА 2. СТАТИСТИКА ПО СРАВНЕНИЮ ОЦЕНОК КОМПОНЕНТ ВЕКТ	OPA
СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ДАННЫХ МОДЕЛИ ХСМ2019 В СЪЕМКЕ НА АН-30	0

Папаметп	Компоненты вектора силы тяжести			Компоненты вектора силы	
параметр	Восточная	Северная	Вертикальная		
Среднее [мГал]	3.92	0.62	0.12		
СКО [мГал]	2.98	2.01	2.16		

#### VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены методики проведения съемок и постобработки данных бескарданного аэрогравиметра, проверенные на ряде съемок на самолетах разных серий. На основе обработки данных современных бескарданных аэрогравиметров показана возможность получения оценок аномалии силы тяжести с точностью необходимой для ряда геолого-геофизических приложений. Показана также возможность векторной аэрогравиметрии с точностью определения горизонтальных компонент 2-3 мГал.

Приведены результаты обработки одной из первых в мире аэрогравиметрических съемок на БПЛА, демонстрирующие возможность определения аномалий с точностью 0.4–0.8 мГал (в зависимости от частоты среза гравиметрического фильтра) и пространственным разрешением 1–1.8 км.

#### Литература

- [1] Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли. Под общ. ред. Пешехонова В.Г., науч. ред. Степанова О.А. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 390 с.
- [2] Пешехонов В.Г., Степанов О.А., Розенцвейн В.Г., Краснов А.А., Соколов А.В. Современное состояние разработок в области бесплатформенных инерциальных аэрогравиметров. Гироскопия и навигация. Т. 30. №4 (119), 2022. С. 3-35.
- [3] Jensen T.E., Olesen A.V., Forsberg R., Olsson P.-A., Josefsson Ö. New results from strapdown airborne gravimetry using temperature stabilisation. Remote Sens. 2019. 11, 2682, https://doi.org/10.3390/rs11222682.
- [4] Голован А.А., Вязьмин В.С. Методика проведения аэрогравиметрических съемок и обработки первичных данных бескарданного аэрогравиметра // Гироскопия и навигация. Том 31. №1 (120). 2023. С. 58–75.
- [5] Forsberg R., Jensen T. Kinematic gravimetry with strapdown inertial sensors from aircraft and drones – status and prospects. At: Gravity, Geoid, and Height Systems Symposium (GGHS-2022), September 12-14, 2022, Austin, Texas, USA. 2022. [Conference presentation]
- [6] Deurloo R., Bastos L., Bos M. On the use of UAVs for strapdown airborne gravimetry. In: Kenyon S., Pacino M., Marti U. (eds) Geodesy for Planet Earth. International Association of Geodesy Symposia, vol. 136. Springer, Berlin, Heidelberg. 2012. P. 255-261. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20338-1\_31
- [7] Becker D., Advanced calibration methods for strapdown airborne gravimetry, Ph.D. Thesis, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany, 2016.
- [8] Tarygin I.E., Kozlov A.V. Calibration of inertial measurement unit with simultaneous estimation of the temperature time-derivative variations. Mathematics in Engineering, Science and Aerospace, 2019, vol. 10, no. 4, pp. 715–723.

- [9] Вязьмин В.С., Голован А.А., Говоров А.Д. Начальная и конечная выставки бескарданного аэрогравиметра с определением смещений нулевых сигналов акселерометров // Гироскопия и навигация. Том 31. №1 (120). 2023. С. 76–88.
- [10] Bolotin Y.V., Fedorov A.V. Accuracy analysis of airborne gravimeter calibration using repeated flight paths // Moscow University Mechanics Bulletin. 2008. V. 63. P. 60–67.
- [11] Вязьмин В.С., Голован А.А., Болотин Ю.В. Новые алгоритмы бескарданной аэрогравиметрии: проверка на экспериментальных данных // Сб. материалов XXVIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам (МКИНС2021). СПб.: ЦНИИ Электроприбор, 2021. С. 48–55.
- [12] Golovan A.A., Vavilova N.B. Satellite navigation. Raw data processing for geophysical applications. J. Math. Sci., 2007. V. 146. P. 5920–5930. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0406-9.
- [13] Зорина О.А., Измайлов Е.А., Кухтевич С.Е., Портнов Б.И., Фомичев А.В., Вавилова Н.Б. и др. О расширении возможностей интеграции инерциальных и спутниковых навигационных систем для авиационных приложений. Гироскопия и навигация. 2017. № 2. С. 18-34.
- [14] Tscherning C.C. Geoid determination by 3D least-squares collocation. In: Sansò F, Sideris M (eds) Geoid determination. Lecture notes in earth system sciences, vol. 110. Springer, Berlin Heidelberg. 2013.
- [15] Forsberg R. A new covariance model for inertial gravimetry and gradiometry. J Geophys Res Solid Earth. 1987. V. 92(B2):1305– 1310. https://doi.org/10.1029/JB092iB02p01305
- [16] Вязьмин В.С. Локальное определение аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии с использованием сферического вейвлет-разложения. Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Москва, 2014. 107 с.
- [17] Kailath, T., Sayed, A. H., Hassibi, B. Linear estimation. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2000.
- [18] Степанов О.А., Кошаев Д.А., Моторин А.В. Идентификация параметров модели аномалии в задаче авиационной гравиметрии методами нелинейной фильтрации // Гироскопия и навигация. 2015. № 3 (90). С. 95–101.
- [19] Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). J Geophys Res Solid Earth. 2012. https://doi.org/10.1029/2011JB008916.
- [20] Конешов В.Н., Михайлов П.С., Железняк Л.К., Соловьев В.Н. Оценка перспективности и разрешающей способности ультравысокостепенных моделей гравитационного поля Земли // Геофизические исследования. 2021. № 1. С. 40–53.
- [21] Могилевский В.Е., Бровкин Г.И., Смирнов А.С., Прозорова Г.В. Оценка погрешности данных аэрогравиметрической съемки. Мониторинг. Наука и Технологии. Науки о Земле. 2018. Т. 36. №3. С. 6-17.
- [22] Klees R., Tenzer R., Prutkin I., Wittwer T. A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions. 2008. J. Geod. 82:457–471.
- [23] Kvas A., Brockmann J.M., Krauss S., Schubert T., Gruber T., Meyer U. et al. GOCO06s – a satellite-only global gravity field model. Earth System Science Data. 2021. V. 13(1). P. 99–118.
- [24] Zingerle P., Pail R., Gruber T., Oikonomidou X. The combined global gravity field model XGM2019e. J Geod. 2020. V. 94. P. 1-12. https://doi.org/10.1007/s00190-020-01398-0.

### Оценка точности местоположения трамвая в условиях высотной застройки по данным визуально-геоинформационных систем

H.С.Гужва *HИТV «МИСИС» Cognitive Technologies* Москва, Россия n.guzhva@cognitivepilot.com

> Р.Н.Садеков Cognitive Technologies НИТУ «МИСИС» Москва, Россия 0000-0001-6286-358X

Б. Али *HИTУ «МИСИС»* Москва, Россия bushrayehyaali@gmail.com

А.В.Шолохов *АНО «ИИФ»* Москва, Россия 0000-0002-7161-4056

Аннотация-В статье описывается подход к оценке точности определения координат местоположения трамвая, осуществляющего движение в городской среде. Трамвай должен определять координаты с субметровым уровнем точности. Поскольку определение координат GPS в условиях города не позволяет обеспечить такой уровень точности предлагается решение, основанное на использовании информации систем технического зрения. Используя подход, основанный на формировании ключевых точек, можно оценить перемещение объекта между изображениями, полученными в разных проездах с одной стороны, а с другой рассчитать это перемещение на основе данных бортовой системы навигации. Сравнение данных перемещений позволят оценить точность навигационной системы, установленной на объекте. В статье приводятся значения полученных уровней точности, а также описание тестов, используемых для проверки точности алгоритмов навигании.

Ключевые слова—средняя квадратическая погрешность, ключевые точки, нейросетевой детектор, онлайн тестирование, блочное тестирование, интеграционное тестирование, непрерывное развертывание, непрерывная доставка, беспилотный транспорт, городской каньон

#### I. Введение

Системы помощи водителя, устанавливаемые в настоящее время на трамваях производства ПК «Транспортные системы», «Уралтрансмаш» призваны обеспечить повышение безопасности передвижения городского транспорта по улицам г.Москвы и г.Санкт-Петербурга [1], [2]. Повышение безопасности движения городского транспорта осуществляется за счет реализации трех функций: контроль за соблюдением скорости движения трамвая на маршруте, контроль проезда перекрестков в соответствие с сигналом светофора и контроль «опасного сближения» / «наезда» на автомобили и пешеходов.

Качество решения данных задач существенно зависит от точности определения местоположения и скорости трамвая как в абсолютной, так и относительной системе координат. Наиболее жёсткие требования по точности предъявляются при прохождении трамваем стрелочных переводов, пешеходных переходов, перекрестков, остановке на стоп-линиях светофоров, а также движение под автоматическими системами переключения стрелок «Лира». Предельная погрешность позиционирования беспилотного трамвая в этих условиях не должна превышать одного метра.

К.С. Бакулев НИТУ «МИСИС»

Москва, Россия

kbakulev@gmail.com

В ходе натурных испытаний систем помощи водителя проверяется выполнение требований к точности определения местоположения. Для этого необходимо располагать координатами объекта, используемыми в качестве эталона и определёнными с высокой точностью - на порядок точнее проверяемой системы. Эталонные координаты подвижных объектов часто получают с помощью спутниковой навигационной аппаратуры (GPS). При этом точность достигает единиц сантиметров при благоприятных условиях – достаточном геометрическом факторе и наличии корректирующих поправок от базовой станции, что обеспечивает нахождение среднеквадратичных погрешностей (СКП) координат трамвая и других показателей точности. Для повышения надежности показателей организуется кратное повторное движение беспилотного трамвая по заданным маршрутам.

Такой подход прост, дёшев и не требует больших затрат времени. Однако в ходе проведения натурных испытаний трамвая выяснилось, что даже в режимах RTK крайне затруднительно нахождение эталонных координат с требуемой точностью. Получаемые от GPS данные сами нуждаются в дополнительной проверке на наличие отклонений. Предварительный анализ показал, что основными причинами возникновения больших погрешностей являются не только высотная застройка, но и искусственные помехи, создаваемые электрическими агрегатами трамвая. Невозможность использовать информацию GPS в качестве эталона в указанных условиях привела к поиску других подходов к оценке точности местоположения беспилотного трамвая.

#### II. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ ПОДХОДОВ

В качестве варианта может быть рассмотрен способ остановок трамвая в контрольных точках, координаты которых заблаговременно определены с высокой точностью. Этот вариант требует разработки и аттестации алгоритмов сглаживания (или уравнивания) навигационных данных для нахождения оценок СКП между контрольными точками. Однако в силу достаточно большого количества контрольных точек, невозможности постоянной остановки трамвая, поскольку испытания происходят в реальных условиях движения городского транспорта, такой подход не является оптимальным [3].

Оценка положения трамвая, учитывая возможность движения только по рельсам, может проводиться относительно заранее заданной траектории (маршрута) координаты которого известны по результатам геодезических или других высокоточных измерений [4], [5]. В этом случае координаты, выработанные навигационной системой трамвая, ортогонально проецируются на траекторию, а ошибка местоположения оценивается как длина перпендикуляра. Данный подход позволяет оценить только боковую составляющую погрешности определения местоположения относительно GPS данных, этого недостаточно для решения задачи, поскольку продольная составляющая ошибки также сильно влияет на качество решения сопутствующих задач (распознавания светофоров, соблюдения ограничений скорости) поэтому оценка ее величины крайне важна.

Существует и более дорогостоящий вариант построения навигационных систем, основанный на использовании лидаров [5], [6], который позволяет оценить точность на уровне сантиметров. Однако для построения высокоточных HD-карт требуется проведение большого объема заблаговременной работы, а оснащение каждого трамвая такими типами датчиков невозможно сугубо по экономическим причинам.

Наконец оценка точности навигации может быть осуществлена на основе информации систем технического зрения, которые широко распространены в настоящее время. При использовании систем технического зрения качество навигации можно оценить путем распознавания объектов дорожной инфраструктуры (например столбов, бордюров и др.), определения их координат и сравнения со значениями, полученными по результатам геодезической сьемки. Однако, во-первых, такой подход требует проведения большого объема дорогостоящих геодезических работ. Во-вторых, оценка точности по углам пеленга до объектов, например, столбов, требует решения задачи сегментации и правильной идентификации столбов среди многих других. В свою очередь высокое качество решения задачи сегментации требует наличия большого объема данных необходимого для обучения, что также является серьезным барьером к внедрению.

#### А. Идеи предлагаемых в работе подходов

Оценить точности навигации на основе информации технического зрения можно путем сравнения изображений, сделанных в разные моменты времени на основе технологий ключевых точек. В случае, если объект многократно осуществляет движение по одному и тому же маршруту, то используя ключевые точки на изображениях можно оценить перемещение объекта между кадрами не только в рамках одной видеопоследовательности, но и видеопоследовательностях, полученных в рамках другого заезда. Данный подход будет подробно изложен в разделе 3.

Еще одним способом оценки точности навигации может являться подход, основанный на сравнении проекции дороги в кадре с областью дороги выделенной по результатам сегментации, как показано на рисунках ниже.

На рисунке 1 представлена будущая траектория движения объекта с горизонтом в несколько десятков метров.



Рис. 1. Проекция пути в кадр при движении объекта

На рисунке 2 представлена проекция «будущей траектории» и ее сравнение с результатами сегментации. Данный подход несмотря на кажущуюся простоту, требует обеспечения высокой точности сегментации, которую можно получить только за счет решения задачи в динамике и использования накопительного эффекта. Кроме-то необходимо рассчитать и задать уровни перекрытий областей дорог для формирования событий превышения установленных допусков и др. Поэтому данный подход не будет подробно раскрываться в данной статье.



Рис. 2. Сравнение проекции в кадр с сегментированным нейронной сетью участком

Таким образом существующие решения в предметной области можно свести к решениям, представленным в таблице 1.

Датчик	Принцип определения местоположения	Эталонные данные
GPS	Прямое измерение	-
GPS-INS	Прямое измерение	-
Лидар	Сопоставление лидарных данных	Высокоточное об- лако точек
	Сопоставление ориенти- ров	Карта ориентиров
Камера	Сопоставление дорог	Карта дорог
	Сопоставление ключевых точек	_

ТАБЛИЦА І. Существующие подходы к оценке точности навигационной системы

#### III. Оценка точности на основе ключевых точек

#### А. Постановка задачи

Предположим, что имеется движущийся объект, который многократно перемещается по маршруту и в каждый момент времени *i* координаты его местоположения определяются вектором  $\mathbf{P}_i = [x_i, y_i, \alpha_i]$ , где  $x_i, y_i$  – координаты местоположения объекта и  $\alpha_i$  – ориентация объекта. Местоположение объекта определяется навигационной системой, точность которой необходимо оценить. Кроме того, на объекте установлена система технического зрения, которая в моменты времени *i* также формирует изображения  $\mathbf{I}_i$ .

Представим, что объект движется по маршруту *m* раз. Тогда исходя из определенных координат объекта  $\mathbf{P}_i$  можно сформировать группу изображений  $\mathbf{G}_k = {\{\mathbf{I}_{k,1}, \mathbf{I}_{k,2}, \dots, \mathbf{I}_{k,m}\}},$ на которых представлен один и тот же участок местности (с точностью до погрешностей навигационной системы). Пример изображений одной группы показан на рисунке 3, где  $j_1, j_2$  – индексы, характеризующие различные проезды, а на рисунке 4 показано положение камеры для изображений одной группы.



Рис. 3. Изображения одной группы, сделанные в разные моменты времени

Чтобы оценить точность навигационной системы, предлагается сравнить перемещение объекта по показаниям навигационной системы с перемещением объекта, полученным по информации системы технического зрения.



Рисунок 4. Положение камер для изображений одной группы

Перемещение и изменение угла между двумя точками, определенными навигационной системой в моменты времени  $j_1, j_2$  определяется по формуле

$$\Delta d_{kj_1j_2}^{NS} = \left\| \left[ x_{kj_1}^{NS}, y_{kj_1}^{NS} \right] - \left[ x_{kj_2}^{NS}, y_{kj_2}^{NS} \right] \right\|_2$$
(1)

$$\Delta \alpha_{kj_1j_2}^{NS} = \left| \alpha_{kj_1}^{NS} - \alpha_{kj_2}^{NS} \right| \tag{2}$$

С другой стороны, для того, чтобы найти перемещение по показаниям системы технического зрения, на изображениях  $\mathbf{I}_{kj_1}$ ,  $\mathbf{I}_{kj_2}$  одной группы необходимо найти общие ключевые точки, сопоставить их как показано на рисунке 5, и вычислить матрицу преобразования  $\mathbf{T}_{kj_1j_2} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$  следующего вида

$$\mathbf{\Gamma}_{kj_1j_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{kj_1j_2} & \mathbf{t}_{kj_1j_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$
(3)

где  $\mathbf{R}_{k_{j_1j_2}} \in \mathrm{SO}(3)$  – матрица поворота и  $\mathbf{t}_{k_{j_1j_2}} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  – вектор перевода.



Рис. 5. Ключевые точки и их сопоставление на двух изображениях

Вычисление матриц  $\mathbf{R}_{kj_1j_2}$ ,  $t_{kj_1j_2}$  производиться в соответствии со следующим алгоритмом:

- На изображении I<sub>kj1</sub>, I<sub>kj2</sub> находятся ключевые точки;
- Ключевые точки сравниваются между собой на основе вычисленных дескрипторов. Сравнение бинарных дескрипторов осуществляется на основе расстояния Хэмминга, а натуральных на основе нормы L2;
- Использовать метода RANSAC для вычисления матриц вращения и трансляции.

Вектор трансляции и вращения, оцененный по изображениям равен

$$\Delta d_{kj_1j_2}^{VS} = \left\| t_{kj_1j_2} \right\|_2 \tag{4}$$

$$\Delta \alpha_{kj_1j_2}^{VS} = f\left(\mathbf{R}_{kj_1j_2}\right) \tag{5}$$

В результате ошибка навигационной системы рассчитывается по формуле

$$e_{kj_1j_2}^{trans} = \Delta d_{kj_1j_2}^{NS} - \Delta d_{kj_1j_2}^{VS}$$
(6)

$$e_{kj_1j_2}^{rot} = \Delta \alpha_{kj_1j_2}^{NS} - \Delta \alpha_{kj_1j_2}^{VS}$$
(7)

На основе полученных ошибок можно рассчитать СКП для всех измерений в рамках каждой группы k и общую ошибку по всем группам, а также оценить среднюю величину данной ошибки *MAE*.

В. Описание используемых детекторов и дескрипторов точек

Как описано в предыдущем разделе, изображения в одной группе сравниваются друг с другом, путем извлечения ключевых точек и сравнения их дескрипторов. Традиционно в визуальной одометрии и SLAM подходах, процесс извлечения ключевых точек выполняется с помощью классических детекторов SIFT [7], SURF и ORB [8]. Однако в последнее время все больше работ используют для извлечения ключевых точек методы на основе глубокого обучения, такие как SuperPoint [8], [9], LIFT [9], [10], TILDE и другие. Метод SuperPoint единственный кто позволяет вычислять ключевые точки, и дескрипторы в одной сети в режиме реального времени.

В данной работе были использованы три различных детектора: SIFT, ORB и SuperPoint. Scale Invariant Feature Transform (SIFT) – это детектор ключевых точек, разработанный в 2004 году. Детектор SIFT основан на операторе Difference-of-Gaussians (DoG), где ключевые точки определяются путем нахождения локальных максимумов с помощью DoG при различных масштабах изображений.

Oriented FAST and Rotated BRIEF (ORB) представлен Rublee и др. в 2011 году. Это очень быстрый метод обнаружения ключевых точек, дескриптор которого является бинарным.

SuperPoint – нейросеть для обнаружения ключевых точек и извлечения дескрипторов, разработанная DeTone и др. в 2018 году. Она состоит из общего кодера и двух отдельных декодеров для генерации местоположений ключевых точек и соответствующего им 256-мерного дескриптора.

Для расчета матрицы преобразования между двумя позициями камеры необходимо, чтобы в паре изображений было три или более совпадающих ключевых точек, лежащих на дороге. Чтобы выбрать лучший детектор для этих целей, был рассчитан процент (А%) изображений, на которых есть ключевые точки на дороге и процент изображений (В%), для которого можно вычислить матрицу преобразования со всеми остальными изображениями в группе.

Дескрипторы ключевых точек, извлеченные с помощью SIFT и SuperPoint, были сопоставлены с использованием нормы L2, в то время как дескрипторы ключевых точек ORB были сопоставлены с использованием расстояния Хэмминга.

Детектор с наибольшими значениями был выбран в качестве основного для предложенной методики.

ТАБЛИЦА II.	. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА	РАБОТЫ ДЕТЕКТОРОВ
-------------	-------------------	-------------------

Показатели	SIFT	ORB	SuperPoint
A, %	99.76	65.17	100
В, %	88.77	58.46	97.03

В таблице II приведены описанные выше показатели. Видно, что с помощью ключевых точек, обнаруженных SuperPoint, удалось найти матрицу преобразования для всех изображений в группе. В результате детектор SuperPoint был выбран для использования в предложенной метрике. На рисунке 6 показаны результаты работы трех детекторов, примененные к одной паре изображений.



Рис. 6. Ключевые точки и соответствия между ними сделанные для разных детекторов

#### С. Эксперимент

Предложенная методика была применена к изображениям, полученным на двух маршрутах. Количество групп на первом маршруте 161 на втором 129 при этом количество изображений 798 и 678, соответственно. На рисунках 7 и 8 для некоторых групп показаны соответствующие значения СКП. Из анализа графиков видно, что СКП измерении пути находится в диапазоне от 0 до 1.4 метров, а средние значения соответственно равны 0.29 и 0.31.



Рис. 7. График СКП вычисленной для прямого маршрута



Рис. 8. График СКП вычисленной для обратного маршрута

Анализ результатов показал, что с использованием данного подхода эффективно оценивается путевая ошибка, а ошибку в измерении угла наиболее просто оценить с использование информации о репроекции дороги в кадр, на основе идеи, описанной выше.

#### IV. МЕХАНИЗМ РАЗРАБОТКИ И ТЕСТИРОВАНИЯ КОДА

Проект реализуется исходя из концепции непрерывной интеграции (CI), непрерывной доставки (CD) а также принципов MLOps. Принцип непрерывной интеграции заключается в постоянной сборке кода на разных платформах и проведения тестов в процессе разработки программного обеспечения. Принцип непрерывной доставки заключается в автоматическом обновлении и доставке релизной версии продукта до конечного потребителя в любое время. В данном проекте принцип MLOps приводится в контексте непрерывного получения обратной связи (данных) позволяющих оценить качество работы алгоритмов навигации и постоянно улучшать их для достижения высокого качества функционирования.

Общая схема механизма тестирования представлена на рисунке 9. Для ее реализации необходимо программные продукты позволяющее вести учет текущих задач, поставленных разработчику, система контроля версий для хранения кода, сборщик проекта позволяющий собирать код на разных целевых платформах, сервер для проведения тестов, отправки обновленного ПО адресату и получения телеметрических данных.



Рис. 9. Схема тестирования алгоритмов навигации

На первом этапе ставиться задача по доработке алгоритмов навигации в связи с внедрением новой функциональности или устранением обнаруженной ошибки. Разработанный программный код отправляется на ревью для визуального просмотра сторонними программистами и автоматически организуется сборка всего проекта на нескольких целевых платформах. После успешной сборки проекта проводится блочное тестирование отдельных функций, модулей и библиотек (unit test) проекта. Тестирование каждой единицы производится независимо друг от друга, а в качестве исходных данных используются синтетические данные призванные проверить работу и устойчивость алгоритмов на простейших сценариях, содержащих как позитивные, так и негативные примеры. Новые доработки не загружаются в систему контроля версий, если хотя бы один тест закончился неудовлетворительно.

В случае если изменения касались навигационных алгоритмов запускается процедура интеграционного тестирования (integration test). Суть интеграционных тестов заключается в количественной оценке алгоритмов навигации на точность, которую далее можно сравнить с точностью, полученной на более ранних версиях программного обеспечения. Оценка точности производиться на десятках стендов, выбранных таким образом, чтобы обеспечить различные условия движения трамваев (локации, маршруты, модели трамваев и другие условия). Оценка точности производится в соответствии с описанными выше методиками, в результате которых считаются метрические и классификационные показатели точности. По результатам интеграционных тестов принимается решение об успешности произведенных доработок и их включения в состав обновляемого программного обеспечения.

В ходе движения трамвая, с определенной последовательностью, формируются телеметрические данные, которые содержат изображения с камер и координаты местоположения трамвая. По этим данным производится вторичная оценка точности работы навигационной системы. Оценка точности производится с использованием online сервисов, специализирующихся на различных тестах, например проверки уровня и изменения дрейфа за интервал времени или оценки точности навигации по алгоритмам проекции модели дороги в кадр и сравнения ее с результатами сегментации. В случае, если установленные допуска не выполняются, то выдается сообщение о необходимости обращения внимания на данный случай и разработчик в ручном режиме выясняет суть и причины происходящего и при необходимости открывает задачу на устранение выявленной ошибки и далее весь технологический цикл повторяется.

Описанный выше механизм тестирования является частью процесса тестирования алгоритмов, разрабатываемых для системы помощи водителя трамваев ООО «Когнитив» в рамках проекта по оснащению трамваев производства ПК «Транспортные системы» системами помощи водителя ГУП «Горэлектротранс», г. Санкт-Петербург.

Файлы конфигурации CI и небольшой пример работы кода, описывающий процесс передачи данных gitlab в wandb.ai представлены в публичном репозитории <u>https://gitlab.com/nfrmtk/super point relative</u> navi.

#### V. Выводы

В статье описываются подходы к оценке точности координат трамвая. Поскольку оценка точности определения координат на основе данных GPS в условиях городской среды не обеспечивает субметровую точность, предлагается подход, основанный на использовании ключевых точек, извлекаемых из изображений при многократном проезде трамвая по маршруту, и позволяющий оценить точность координат. Приводятся графики СКП, полученные по натурным данным, а также подробно расписывается механизм тестирования навигационных алгоритмов с использованием unit, integration и online тестов.

#### Литература

- M. Lobanov and D. Sholomov, "Application of shared backbone DNNs in ADAS perception systems," Proc. SPIE 11605, Thirteenth International Conference on Machine Vision, 2021.
- [2]. Гужва Н.С., Лобанов М. Г., Прун В.Е., Садеков Р.Н., Постников В.В., Шоломов Д.Л. Использование 3d-сетей для «предсказания» моделей поведения транспортных средств в задаче беспилотного

движения трамвая. XXIX Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. Главный редактор В.Г. Пешехонов. 2022. С. 304-310.

- [3]. Шолохов А.В., Беркович С.Б., Котов Н.И., Садеков Р.Н Формирование траектории корреляционно-экстремальной навигационной системы по критерию минимума погрешностей координат. В сборнике: Юбилейная XXV Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. Главный редактор В.Г. Пешехонов. 2018. С. 175-177.
- [4]. M.A. Brubaker, A. Geiger, and R. Urtasun, Map-based probabilistic visual self-localization, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 38, no. 4, pp. 652–665, 1 April 2016, doi: 10.1109/TPAMI.2015.2453975.
- [5]. Степанов О.А., Васильев В.А. Торопов А.Б. Решение задачи навигации по геофизическим полям с учетом изменчивости погрешностей корректируемой навигационной системы, XXIX Санкт-Петербургская Международная конференция по интегри-

рованным навигационным системам. Сборник материалов. Главный редактор В.Г. Пешехонов. 2022. С.60-65.

- [6]. Бикмаев Р.Р., Золотов М.Д., Попов А.Н., Садеков Р.Н. Повышение точности сопровождения подвижных объектов с применением алгоритма комплексной обработки сигналов с монокулярной камеры и лидара. В сборнике: XXVI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. 2019. С. 39-42.
- [7]. D.G. Lowe, Distinctive image features from scale-invariant keypoints, International Journal of Computer Vision, vol. 50, no. 2, pp. 91–110, 2004.
- [8]. E. Rublee, V. Rabaud, K. Konolige, and G. Bradski, ORB: an efficient alternative to SIFT or SURF, International Conference on Computer Vision, 2011. doi: 10.1109/ICCV.2011.6126544
- [9]. D. DeTone, T. Malisiewicz, and A. Rabinovich, SuperPoint: selfsupervised interest point detection and description, 2018. arXiv:1712.07629v4.
- [10]. K.M. Yi, E. Trulls, V. Lepetit, and P. Fua, LIFT: learned invariant feature transform, 2016. arXiv:1603.09114v2.

## Накопление смазанных изображений звёзд, полученных бесплатформенной астроинерциальной навигационной системой в дневных условиях

Василюк Н.Н. ООО «НПК «Электрооптика» Москва, Россия ORCID: 0000-0003-2317-8066

Аннотация—Накопление смазанных изображений звёзд выполняется в два этапа. Сначала каждый накапливаемый кадр подвергается цифровой фильтрации, согласованной со смазом. Согласованная фильтрация локализует произвольное смазанное изображение звезды в одном, заранее известном пикселе. Синтез импульсной реакции согласованного фильтра выполняется с использованием измерений гироскопа, скреплённого с камерой. Затем профильтрованные кадры попиксельно складываются в аккумуляторе, без дополнительного преобразования поворота. Результаты моделирования, выполненные для накопления с «пиксельным» разрешением, показывают возможность обнаружения смазанных изображений относительно тусклых звёзд на фоне дневного неба.

Ключевые слова—астродатчик, астроинерциальная система, коррекция смаза, дневное наблюдение звёзд, накопление изображений.

#### I. Введение

Бесплатформенная астроинерциальная навигационная система (АИНС) состоит из инерциального измерительного модуля (ИИМ), цифровой камеры и вычислительного устройства, собранных в единую конструкцию. Вычислительное устройство определяет ориентацию АИНС относительно звёзд по изображениям созвездий, получаемым от камеры. Эта ориентация используется для коррекции нарастающих погрешностей инерциальной навигации. Для определения ориентации изображения отдельных звёзд сначала обнаруживаются в кадре, а затем – определяются их координаты внутри кадра.

Объектив цифровой камеры строит оптическое изображение отдельной звезды на поверхности матричного фотоприёмника (МФП) в виде пятна. Если АИНС неподвижна относительно звёзд, то и пятно неподвижно относительно МФП и все фотоприёмные ячейки МФП, накрытые пятном, получают неизменную долю звёздного света. В этом случае цифровым изображением пятна является почти симметричный кластер из нескольких смежных пикселей. Такое изображение звезды, полученное на фоне ночного ясного неба, относительно легко обнаруживается.

При вращении АИНС во время экспозиции, пятно движется по поверхности МФП, а цифровое изображение звезды смазывается и превращается из кластера в вытянутую полосу. Величина полезного сигнала в пикселе смазанного изображения уменьшается, что затрудняет его обнаружение. Поскольку изображение звезды оказывается протяжённым и зависящим от угловой скорости АИНС, возникает неоднозначность в определении его координат и момента времени, к которому они относятся.

Ситуация заметно ухудшается, если вращающаяся АИНС наблюдает звёзды на фоне дневного неба. Мощное фоновое излучение ограничивает время экспозиции кадра, уменьшая накопленную энергию полезного сигнала от звезды. Значения пикселей, содержащих изображение дневного неба, имеют пуассоновское распределение, то есть мощный оптический фон приводит к появлению мощного фонового шума в цифровом изображении. Таким образом, в дневных условиях имеются три фактора, затрудняющие обнаружение и измерение координат изображений звёзд: смаз изображения, малое время экспозиции и мощный фоновый шум [1].

Накопление (сложение) последовательности кадров, учитывающее поворот камеры в явном виде, является хорошо известным методом повышения вероятности обнаружения изображения звезды в фоновых шумах [2]. Простое накопление прекрасно работает для малой скорости вращения камеры относительно звёзд, когда смещение оптического изображения звезды за время экспозиции не превосходит характерного размера фотоприёмной ячейки МФП. Если это ограничение на угловую скорость камеры нарушается, отдельные кадры, перед накоплением, должны подвергаться дополнительной обработке, компенсирующей потери энергии сигнала в смазе [3].

В работе предлагается способ борьбы с мешающими факторами за счёт обработки последовательности кадров с использованием измерения ИИМ. Смаз и неоднозначность координат изображения звезды в отдельном кадре компенсируются за счёт согласованной фильтрации [4]. Уменьшение времени экспозиции отдельных кадров компенсируется за счёт накопления (сложения) нескольких последовательных кадров после согласованной фильтрации. В процессе накопления складываются сигналы от одной звезды, полученные в разных кадрах с малым временем экспозиции, то есть эффективное время экспозиции увеличивается. Среднеквадратичное отклонение фонового шума в накопленном кадре уменьшается за счёт усреднения независимых реализаций этого шума в исходных кадрах.

Изображение звезды считается обнаруженным, если накопленное значение в каком-то из пикселей превысит установленный порог [5]. Координатами обнаруженного изображения звезды считаются координаты цента фотоприёмной ячейки для этого пикселя в первом кадре, а моментом измерения этих координат – момент начала экспозиции первого кадра. Смещения изображения относительно цента фотоприёмной ячейки в работе не учитываются, т.е. определение координат изображения звезды выполняется с погрешностью порядка размера ячейки. Такие алгоритмы называются алгоритмами с «пиксельным» разрешением, чтобы отличать их от «субпиксельных» алгоритмов, учитывающих смещения.

#### II. МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЙ И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ АИНС

Фоточувствительная поверхность МФП представляет собой прямоугольную матрицу размером размером  $H \times W$ , где H – число строк, W – число столбцов. Матрица состоит из квадратных фотоприёмных ячеек с длиной стороны a. Положение отдельной ячейки в матрице задаётся парой целочисленных индексов ( $\hat{h}$ ,  $\hat{w}$ ), где  $\hat{h}$ =0...H – 1 – номер строки,  $\hat{w}$ =W – 1 – номер столбца. Значение (0, 0) соответствует ячейке, расположенной в левом верхнем угле матрицы. Оптическая ось объектива пересекает фоточувствительную поверхность в точке O.

Геометрическим изображением Z' называется центральная проекция звезды Z на плоскость МФП, полученная через центр проецирования S. Длина отрезка OS называется фокусным расстоянием объектива F. Оптическим изображением звезды называется непрерывная (по пространственным координатам) свёртка геометрического изображения с функцией рассеяния точки (ФРТ) объектива, которая имитирует его конечную разрешающую способность. Цифровым изображением называется результат пространственной дискретизации оптического изображения на фотоприёмных ячейках, подвергнутый уровневому квантованию внутри каждой ячейки. Цифровое изображение считываются из МФП и виде двумерной матрицы чисел размера *H*×*W*, элементы которой называются пикселями. Каждый пиксель, заданный индексами ( $\hat{h}$ ,  $\hat{w}$ ), получает свое значение из фотоприёмной ячейки, заданной той же парой индексов.

Положение геометрического изображения звезды на  $M\Phi\Pi$  задаётся парой действительных координат (*h*,*w*), где  $0 \le h < H$  – положение вдоль столбцов,  $0 \le w < W$  – положение вдоль строк. Эти координаты называются растровыми координатами. Начало (0, 0) растровых координат расположено в левом верхнем углу левой верхней фотоприёмной ячейки. Направления возрастания растровых координат совпадают с направлением возрастания одноимённых индексов. Положение точки О задаётся парой растровых координат (ho, wo). Целочисленные значения  $(\hat{h}, \hat{w})$  растровых координат указывают на левый верхний угол квадратной фотоприёмной ячейки с индексами  $(\hat{h}, \hat{w})$ . Точка с растровыми координатами (h, w) попадает в фотоприёмную ячейку с индексами  $\hat{h} = \text{floor}(h), \ \hat{w} = \text{floor}(w), \ \text{где floor}(...) - \phi$ ункция округления к -∞.

С камерой связана система координат *CF* (Camera Frame) с началом в точке *O*. Ось  $\vec{z}^{CF}$  лежит на оптической оси камеры и направлена в пространство предметов, оси  $\vec{x}^{CF}$ ,  $\vec{y}^{CF}$  направлены, соответственно, вдоль столбцов и строк МФП в строну возрастания  $\hat{h}$  и  $\hat{w}$ . Эти оси образуют в плоскости МФП векторную систему координат, в которой положение точки задаётся двумерным вектором с координатами  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_x \quad \xi_y]^T$ , отложен-

ным из точки *O*. Векторные  $\xi$  и растровые (*h*, *w*) координаты изображающей точки *Z*' связаны между собой соотношениями

$$\boldsymbol{\xi} = a [h - h_0 \quad w - w_0]^{\mathsf{T}}, [h \quad w]^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\xi} / a + [h_0 \quad w_0]^{\mathsf{T}},$$

Единичный направляющий вектор  $\vec{s}$  звезды Z задаётся в CF столбцом координат  $\mathbf{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T$ , выраженным через векторные координаты её изображения Z':

$$\mathbf{s} = \frac{\left[-\boldsymbol{\xi}^{\mathsf{T}} \quad F\right]^{\mathsf{T}}}{\left(\boldsymbol{\xi}_{x}^{2} + \boldsymbol{\xi}_{y}^{2} + F^{2}\right)^{1/2}}, \quad \boldsymbol{\xi} = -\frac{F}{s_{z}} \begin{bmatrix} s_{x} \\ s_{y} \end{bmatrix}$$

Экспозиция очередного кадра начинается в момент времени  $t_{Ek} = t_{E0} + kT_F$ , где  $k = 0, 1, \ldots$  - номер кадра,  $T_F$  – межкадровый период,  $t_{E0}$  - момент начала экспозиции кадра с номером 0. Время экспозиции  $T_E \leq T_F$  постоянно, кадр с номером k экспонируется внутри временного отрезка [ $t_{Ek}, t_{Ek}+T_E$ ]. Оси чувствительности ИИМ сонаправлены с одноимёнными осями *CF*. То есть, ИИМ измеряет проекции  $\omega_m = [\omega_{xm} \omega_{ym} \omega_{zm}]^T = \omega(t_{lm})$  вектора  $\vec{\omega}(t)$  угловой скорости камеры на *CF* в дискретные моменты времени  $t_{lm}=t_{l0}+mT_l$ , где  $m = 0, 1, \ldots$  – номер измерения,  $t_{l0}$  – момент начального измерения,  $T_l < T_E/2$  – постоянный период измерения ИИМ.

Если камера поворачивается во время экспозиции, то геометрическое изображение звезды движется по траектории  $\xi(t)$ , называемой траекторией смаза. Эта траектория описывается системой дифференциальных уравнений для векторных координат [4]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_x \\ \dot{\xi}_y \end{bmatrix} = -\frac{1}{F} \begin{bmatrix} \xi_x \xi_y & -(F^2 + \xi_x^2) & -\xi_y F \\ F^2 + \xi_y^2 & -\xi_x \xi_y & \xi_x F \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} .$$

Начальные условия  $\xi(t_{Ek}) = [\xi_x(t_{Ek}) \ \xi_y(t_{Ek})]^T$  определяются по положению геометрического изображения звезды в начале экспозиции кадра k. Цифровое изображение звезды, смазанное вдоль траектории  $\xi(t)$ , описывается ядром смаза  $H(\hat{h},\hat{w};\hat{p},\hat{q})$ , где  $(\hat{p},\hat{q})$  - индексы фотоприёмной ячейки, содержащей начальную точку  $\xi(t_{Ek})$  траектории смаза;  $(\hat{h}, \hat{w})$  - индексы пикселей, в которых вычисляется значение ядра смаза. Для любых  $(\hat{p},\hat{q})$ выполняется условие нормировки  $\sum_{\hat{h}=0}^{H-1} \sum_{\hat{w}=0}^{W-1} H(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q}) = 1$ . Семейства траекторий смаза  $\boldsymbol{\xi}(t)$  и ядер смаза  $H(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q})$  получаются для каждого кадра k как результат решения «специальной задачи» инерциальной навигации на временном отрезке  $[t_{Ek}, t_{Ek}+T_E]$  [4].

#### III. НАКОПЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КАДРОВ

#### А. Вычисление ориентации кадра

Размер накапливаемой последовательности – *К* кадров с номерами *k*=0...*K*-1. Накопление выполняется в

плоскости начального кадра с k=0, все последующие кадры проектируются на эту плоскость. Моментом времени обнаружения звезды является момент  $t_{E0}$ . Ориентация кадра k описывается инерциальной системой координат  $CF_k$ , которая совпадает с ориентацией CF в момент времени  $t_{Ek}$ , т.е.  $CF_k=CF(t_{Ek})$ . Пусть в момент времени  $t_{E0}$  некоторый направляющий вектор  $\vec{s}$  задаётся относительно  $CF_0$  координатами  $\mathbf{s}_0$ . Тогда координаты этого же вектора в  $CF_k$  вычисляются в виде  $\mathbf{s}_k = \mathbf{S}_k^0 \mathbf{s}_0$ ,

$$\mathbf{S}_{k}^{0} = \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_{k}^{1row})^{\mathsf{T}} & (\mathbf{s}_{k}^{2row})^{\mathsf{T}} & (\mathbf{s}_{k}^{2row})^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \ \mathbf{S}_{0}^{0} = \mathbf{I}_{3}$$

где  $\mathbf{S}_{k}^{0}$  - ортогональная матрица преобразования координат вектора из  $CF_{0}$  в  $CF_{k}$ ;  $\mathbf{s}_{k}^{1row}$ ,  $\mathbf{s}_{k}^{2row}$ ,  $\mathbf{s}_{k}^{2row}$  - первая, вторая и третья строки матрицы  $\mathbf{S}_{k}^{0}$ . Момент  $t_{I0}$  начального измерения ИИМ выбирается из условия  $t_{I0} \leq t_{E0} < t_{II}$ , а количество M измерений ИИМ определяется по моменту начала экспозиции последнего кадра с номером K-1:  $t_{IM-2} \leq t_{EK-1} < t_{IM-1}$ . Таком образом, каждый момент  $t_{Ek}$  располагается между двумя последовательными моментами:  $t_{Im_{k}-1} \leq t_{Ek} < t_{Im_{k}}$ .

Ориентация камеры в момент времени *t* вычисляется в форме кватерниона  $\mathbf{q}(t)$ . Кватернион  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{m-1} \circ \Delta \mathbf{q}_m(\tau)$  в момент времени  $t \in [t_{im-1}, t_{im}]$  вычисляется через приращение  $\Delta \mathbf{q}_m(\tau)$  за время  $\tau = t - t_{im-1} \in [0, T_i]$ , где  $\mathbf{q}_{m-1} = \mathbf{q}(t_{im-1})$  [6]:

$$\begin{split} \Delta \breve{q}_{0m}(\tau) &= 1 - \frac{\Theta_m^2}{8} \frac{\tau^2}{T_I^2} - \frac{\Theta_m \cdot \Delta \Theta_m}{4} \left( \frac{\tau^3}{T_I^3} - \frac{\tau^2}{T_I^2} \right), \\ \begin{bmatrix} \Delta \breve{q}_{1m}(\tau) \\ \Delta \breve{q}_{2m}(\tau) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \Theta_m \left( \frac{\tau}{T_I} - \frac{\Theta_m^2}{24} \frac{\tau^3}{T_I^3} \right) + \frac{\Theta_m \times \Delta \Theta_m}{24} \frac{\tau^3}{T_I^3} + \\ &+ \frac{\Delta \Theta_m}{4} \left( \frac{\tau^2}{T_I^2} - \frac{\tau}{T_I} \right), \\ \Theta_m &= 0, 5(\omega_m + \omega_{m-1})T_I, \quad \Delta \Theta_m = (\omega_m - \omega_{m-1})T_I, \end{split}$$

где  $\Delta \breve{\mathbf{q}}_m(\tau) = [\Delta \breve{q}_{0m}(\tau) \ \Delta \breve{q}_{1m}(\tau) \ \Delta \breve{q}_{2m}(\tau) \ \Delta \breve{q}_{3m}(\tau)]^{\mathsf{T}}$  - ненормированное приращение  $\Delta \mathbf{q}_m(\tau)$ . Для  $\tau = T_I$ :

$$\Delta \bar{q}_{0m} = 1 - \frac{\Theta_m^2}{8}, \quad \begin{bmatrix} \Delta \bar{q}_{1m} \\ \Delta \bar{q}_{2m} \\ \Delta \bar{q}_{3m} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Theta_m \left( 1 - \frac{\Theta_m^2}{24} \right) + \frac{\Theta_m \times \Delta \Theta_m}{24}.$$

Начальное значение  $\mathbf{q}_0 \equiv \mathbf{q}(t_{I0})$  назначается из условия  $\mathbf{S}_0^0 = \mathbf{I}_3$ , то есть  $\mathbf{q}(t_{E0}) = [1\ 0\ 0\ 0]^{\mathsf{T}}$ . При таком выборе значение  $\mathbf{q}_0$  не важно, а  $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{q}(t_{I1})$  вычисляется в виде:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{\breve{q}}_1 / \| \mathbf{\breve{q}}_1 \|, \ \mathbf{\breve{q}}_1 = \Delta \mathbf{\widetilde{q}}_1 (t_{E0} - t_{I0}) \circ \Delta \mathbf{\breve{q}}_1,$$

где знак «~» обозначает комплексное сопряжение кватерниона. Все остальные значения  $\mathbf{q}_m \equiv \mathbf{q}(t_{lm})$  в моменты  $t_{lm}$ ,  $m \ge 2$  вычисляются по обычному алгоритму интегрирования кватерниона ориентации:

$$\mathbf{q}_{m} = \breve{\mathbf{q}}_{m} / \| \breve{\mathbf{q}}_{1} \|, \ \breve{\mathbf{q}}_{m} = \mathbf{q}_{m-1} \circ \Delta \breve{\mathbf{q}}_{m}$$

Теперь можно вычислить кватернион  $\mathbf{f}_k \equiv \mathbf{q}(t_{Ek})$  ориентации камеры в момент начала экспозиции кадра *k*:

$$\mathbf{f}_{k} = \breve{\mathbf{f}}_{k} / \|\breve{\mathbf{f}}_{k}\|, \ \breve{\mathbf{f}}_{k} = \mathbf{q}_{m_{k}-1} \circ \Delta \breve{\mathbf{q}}_{m_{k}} \left( t_{\ni k} - t_{m_{k}-1} \right).$$

Матрица  $S_k^0$  получается из кватерниона  $f_k$  по обычным формулам преобразования представлений ориентации.

#### В. Согласованная фильтрация с накоплением

В момент начала накопления положение звезды внутри кадра k=0 неизвестно. Для накопления с «пиксельным» разрешением предполагается, что геометрическое изображение звезды в момент  $t_{E0}$  может оказаться в центре любой фотоприёмной ячейки с индексами  $(\hat{h}_0, \hat{w}_0)$ . Векторные координаты этого изображения в кадре 0

$$\boldsymbol{\xi}_{0}(\hat{h}_{0},\hat{w}_{0}) = a[\hat{h}_{0}+0,5-h_{O} \ \hat{w}_{0}+0,5-w_{O}]^{\mathsf{T}}.$$

В кадре k геометрическое изображение этой же звезды окажется в пикселе  $(\hat{h}_k(\hat{h}_0, \hat{w}_0), \hat{w}_k(\hat{h}_0, \hat{w}_0))$ 

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_k(\hat{h}_0, \hat{w}_0) \\ \hat{w}_k(\hat{h}_0, \hat{w}_0) \end{bmatrix} = \text{floor} \left[ \begin{bmatrix} h_0 \\ w_0 \end{bmatrix} - \frac{F}{a} \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{s}_k^{1row} \\ \mathbf{s}_k^{2row} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\xi}_0(\hat{h}_0, \hat{w}_0) \\ F \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}_k^{3row} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\xi}_0(\hat{h}_0, \hat{w}_0) \\ F \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right].$$

Далее, для сокращения записи, индексы исходного пикселя будут опускаться, т.е. запись  $(\hat{h}_k(\hat{h}_0, \hat{w}_0), \hat{w}_k(\hat{h}_0, \hat{w}_0))$  будет сокращённо записываться как  $(\hat{h}_k, \hat{w}_k)$ . В каждом кадре k для каждого пикселя  $(\hat{h}_k, \hat{w}_k)$  синтезируется согласованное ядро смаза  $H(\hat{p}, \hat{q}; \hat{h}_k \hat{w}_k)$ , начинающееся в центре пикселя. При помощи этого ядра рассчитывается значение корреляционной функции

$$\hat{I}_k(\hat{h}_k, \hat{w}_k) = \sum_{\hat{p}=0}^{H-1} \sum_{\hat{q}=0}^{W-1} H(\hat{p}, \hat{q}; \hat{h}_k, \hat{w}_k) I_k(\hat{p}, \hat{q}),$$

где  $\{I_k(\hat{p}, \hat{q})\}_{\hat{p}, \hat{q}=0}^{H-1, W-1}$  - матрица цифрового изображения, полученная в кадре k.

Аккумулятор  $\{A(\hat{h}, \hat{w})\}_{\hat{h}, \hat{w}=0}^{H-1, W-1}$  для накопления профильтрованных изображений инициализируется результатами согласованной фильтрации кадра 0:  $A_0(\hat{h}_0, \hat{w}_0) = \hat{I}_0(\hat{h}_0, \hat{w}_0)$ , где  $A_k(\hat{h}_0, \hat{w}_0)$  - содержимое аккумулятора после обработки кадра k=0,1,...K-1. Каждый пиксель  $(\hat{h}_0, \hat{w}_0)$  однозначно указывает на пиксель  $(\hat{h}_k, \hat{w}_k)$ , обратное не верно. Поэтому, для добавления очередного профильтрованного кадра в аккумулятор, не требуется явного преобразования поворота:

$$A_k(\hat{h}_0, \hat{w}_0) = A_{k-1}(\hat{h}_0, \hat{w}_0) + \hat{I}_k(\hat{h}_k, \hat{w}_k) .$$

После накопления *K* последовательных кадров аккумулятор нормируется для получения накопленного изображения  $U(\hat{h}_0, \hat{w}_0) = A_{K-1}(\hat{h}_0, \hat{w}_0) / K$ .

#### IV. МОДЕЛИРОВАНИЕ НАКОПЛЕНИЯ

Моделирование проводится для K=40 кадров при угловой скорости  $\boldsymbol{\omega} = [0, 31 \quad 0, 95 \quad 0]^{\mathsf{T}} \circ / \mathsf{сек}$ ,  $|\boldsymbol{\omega}| \approx 1 \circ / \mathsf{сек}$ . Время экспозиции одного кадра  $T_E = 5$  мсек, период измерений ИИМ  $T_I = 200$  Гц. Длительность межкадрового интервала  $T_F = 20$  мсек, что даёт длительность интервала накопления  $(K-1)T_F = 0,8$  сек. В модели наблюдается звезда с видимой звёздной величиной  $m_I$ =4 спектрального класса A0V (спектральный класс Веги). Наблюдение выполняется в дневное время на высоте 10 км. Вопросы расчёта настроек камеры для выбранных условий наблюдения в работе не рассматриваются.

Смазанное изображение звезды, без фоновой подставки и шума, показано на рис.1. Красными прямоугольниками выделены ярчайшие пиксели изображения, линия - траектория смаза, жирная точка - начало траектории. Это же изображение в шумах дневного фона показано на рис.2. Если определить отношение сигнал/шум (С/Ш) как отношение полезного сигнала к СКО шума в ярчайшем пикселе, то этому изображению соответствует С/Ш=0,5. Смазанное изображение звезды совершенно неразличимо в шумах и ярчайший пиксель ярчайший пиксель кадра ему не принадлежит. На рис.3. показано накопленное изображение, в котором ярчайший пиксель совпадает с пикселем, содержащим начальную точку траектории смаза. Отношение сигнал/шум в этом пикселе C/III = 4,4, что даёт достаточно высокую вероятность обнаружения изображения звезды с привязкой к моменту начала экспозиции.



Рис. 1. Смазанное цифровое изображение звезды без фоновой подставки и шума



Рис. 2. Смазанное изображение звезды, наблюдаемое на фоне дневного неба на высоте 10 км



Рис. 3. Результат накоплений К=40 кадров со смазанным изображением звезды в фоновых шумах

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В докладе рассматривается подход к накоплению изображений с предварительной обработкой, основанной на анализе внутренней структуры смазанного изображения звёзд. В предлагаемом подходе накопление строится в два этапа. На первом этапе каждый кадр подвергается цифровой фильтрации, согласованной со смазом. Результатом фильтрации является новый кадр, каждый пиксель которого содержит значение корреляционной функции между исходным кадром и ядром смаза, начинающимся в этом пикселе. Если в пикселе исходного кадра начинается смазанное изображение звезды, то в этом же пикселе профильтрованного кадра появляется корреляционный максимум. В противном случае профильтрованный пиксель будет содержать сглаженную реализацию фонового шума, или результат перекрёстной корреляции между ядром смаза и смазанным изображением звезды, начавшимся в другом пикселе.

Второй этап сводится к простому попиксельному сложению профильтрованных кадров. Поворот здесь учитывается в неявном виде. Вместо явного, «слепого» перепроецирования текущего кадра на первый, сначала рассчитывается (с использованием измерений гироскопов) пиксель текущего кадра, в который попадает геометрическое изображении звезды из пикселя первого кадра. Затем к этому пикселю первого кадра прибавляется результат согласованной фильтрации смаза в рассчитанном пикселе последующего кадра.

Если в каком-либо пикселе первого кадра, в момент начала экспозиции, присутствовало геометрическое изображение звезды, то в этом же пикселе накопленного изображения возникнет локальный максимум. Положение этого максимума не зависит от траектории поворота камеры на временном интервале накопления кадров. Наличие накопленного максимума позволяет обнаружить изображение звезды, однозначно измерить её координаты в плоскости первого кадра и однозначно привязать эти координаты к моменту начала экспозиции первого кадра. Поскольку все координаты обнаруженных звёзд привязаны к первому кадру, измерение ориентации по накопленному кадру выполняется с задержкой, равной длительности интервала накопления.

Для определения ориентации, вместе с распознаванием обнаруженного созвездия, современным астродатчикам требуется не менее четырёх звёзд [7]. Если расстояния между геометрическим изображениями звёзд на матрице больше длин их траекторий смазов (для разных изображений эти траектории различны), то накопленные изображения звёзд однозначно обнаруживаются и идентифицируются. В противном случае возникает наложение смазанных изображений звёзд. Ядро смаза обладает плохими кореляционными свойствами, поэтому наложенные изображения близких звёзд плохо разделяется при согласованной фильтрации и могут сливаться при накоплении.

#### Литература

- Barbot L., Ferrari M., Montel J., et al. Towards a Daytime and Lowaltitude Stellar Positioning System: Challenges and First Results // Proceedings of the 2022 International Technical Meeting of The Institute of Navigation. – Long Beach, California, January 2022. – P. 1371-1379. DOI: 10.33012/2022.18263.
- [2] S. C. Loke Astronomical Image Acquisition Using an Improved Track and Accumulate Method // IEEE Access. – 2017. – Vol. 5. – P. 9691-9698. – DOI: 10.1109/ACCESS.2017.2700162.
- [3] Аванесов Г.А., Бессонов Р.В., Ваваев В.А. и др. Бесплатформенная астроинерциальная навигационная система авиационного применения // Механика, управление и информатика (см. в книгах). – 2011. – № 2. – С. 13-35. – EDN OJSJNB.
- [4] Василюк Н.Н. Расчет траекторий смазов в цифровом изображении как специальная задача инерциальной навигации // Гироскопия и навигация. – 2023 – Том 31. – №1(120). – С. 120-141. – EDN JPQLTC.
- [5] Иванов В.А., Киричук В.С., Косых В.П., В. В. Синельщиков В.В. Особенности обнаружения точечных объектов в изображениях, формируемых матричным приёмником // Автометрия. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 10-19. – DOI 10.15372/AUT20160202. – EDN VZTSVZ.
- [6] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука. – 1973. – 320 с.
- [7] Барке В.В., Венкстерн А.А., Котцов В.А., и др. Быстрый алгоритм идентификации кадра звездного датчика по звездным конфигурациям, не требующий перебора. Вариант бортовой реализации // Гироскопия и навигация. – 2021. – Том 29. – №3 (114). –. С. 80-95. – DOI 10.17285/0869-7035.0072. – EDN AUAILJ.

## Задача навигации беспилотной колесной сельскохозяйственной техники с использованием БИНС, ГНСС и одометрии

Д.И. Смольянов Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, AO «Когнитив», Москва, Россия danil.smolyanov@yandex.ru

Аннотация—Работа посвящена описанию разработки, тестирования и внедрения алгоритмов навигации для беспилотной колесной сельскохозяйственной техники, когда аппаратный состав ее навигационного комплекса состоит из низкоточной бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), построенной на микроэлектромеханических датчиках (МЭМС), приемника сигналов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) и данных одометрии – одометра и датчиков поворота руля или рамы.

В задачах функционирования беспилотной сельскохозяйственной техники важнейшая роль отведена задаче навигации. Для обработки большинства культур требуется надежное позиционное решение с точностью до нескольких сантиметров. Высокая точность важна также для снижения затрат топлива и обеспечения безопасной для человека работы сельскохозяйственной техники. Надежность навигационного решения заключается в устойчивости решения к выбросам и кратковременным пропаданием информации ГНСС.

В работе рассматривается два типа компоновки техники, отличающиеся конструктивно: классическая и шарнирно-сочлененная. Классическая компоновка подразумевает четыре колеса, два из которых поворотные, при этом неважно какие из колес поворотные, передние или задние. Шарнирно-сочлененная компоновка подразумевает две полурамы, соединенные шарниром, на каждой из которых установлены по два колеса, неповоротных по отношению к соответствующей полураме. Поворот при такой компоновке осуществляется за счет изменения угла между полурамами.

Ключевые слова—ИНС, МЭМС, одометрия, беспилотная техника, сельскохозяйственная техника.

#### I. Введение

АО «Когнитив» занимается разработкой и производством систем управления движением сельскохозяйственной техники с высоким уровнем автономности. В задачах функционирования беспилотной техники важнейшая роль отведена задаче навигации. Высокая точность навигации важна для обработки большинства сельскохозяйственных культур, снижения затрат топлива и обеспечения безопасной для человека работы [1]. Кроме того, навигационное решение должно быть надежным, что заключается в устойчивости решения к выбросам и кратковременным пропаданиями информации ГНСС в условиях грубой БИНС.

#### II. Постановка задачи

#### А. Аппаратный комплекс

Навигационный аппаратный комплекс системы включает низкоточную БИНС, одноантенный приемник сигналов ГНСС (далее просто ГНСС), одометр и датчик поворота руля или рамы. Допускается случай, когда А.А. Голован Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия aagolovan@yandex.ru

показания одометра недоступны по техническим причинам. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

БИНС построена на МЭМС датчиках, с дрейфами датчиков угловых скоростей (ДУС) порядка 1000 °/час и смещениями нулей акселерометров порядка 0.1 м/с/с. БИНС, вместе с антенной ГНСС, располагается на крыше транспортного средства (ТС). Помимо этого, система включает стереокамеру, установленную на крыше ТС, но использование стереокамеры для навигации пока выходит за рамки нашей работы.

ГНСС может использоваться как в высокоточном режиме дифференциальной коррекции (RTK, Real Time Kinematic), так и без него.

Рассматриваемая колесная сельскохозяйственная техника включает в себя тракторы и комбайны. Большинство тракторов и комбайнов имеют классическую компоновку, т. е. две колесных оси: переднюю и заднюю, одна из которых является поворотной относительно жесткого корпуса. Для большинства тракторов поворотная ось - передняя, для большинства комбайнов задняя. Отдельному рассмотрению подлежат тракторы с шарнирно-сочлененной компоновкой, которая подразумевает две полурамы, соединенные шарниром. На каждой из полурам установлена колесная ось, неповоротная по отношению к соответствующей полураме. Поворот ТС при такой компоновке осуществляется за счет изменения угла между полурамами. Примером такой компоновки может служить трактор Кировец-К7М производства АО «Петербургский тракторный завод».



Рис. 1. Кировец К-7М с системой Cognitive Agro Pilot

Датчик угла поворота руля или рамы, основанный на эффекте Холла, закрепляется на поворотной оси и соединен с одним из поворотных колес, в случае классической компоновки, или на шарнире, в случае шарнирно-сочлененной компоновки.

#### В. Задача навигации и оценивания

В первую очередь необходимо получить навигационное решение - координаты, вектор скорости и углы ориентации ТС за счет интеграции показаний инерциальных датчиков БИНС, данных ГНСС и одометра. Навигационное решение должно быть устойчиво к кратковременным отключениям и выбросам решения ГНСС в условии грубой БИНС. Использован традиционный подход к решению этой задачи, когда при помощи показаний инерциальных датчиков реализуются алгоритмы счисления БИНС в осях опорного географического трехгранника с тем или иным способом устойчивого моделирования вертикального канала БИНС. Далее решается задача коррекции БИНС при помощи данных ГНСС. Задача коррекции решается с применением обратных связей (замкнутый вариант) по оценкам соответствующего фильтра Калмана. Методически задача коррекции сводится к решению задачи оценивания (для иллюстрации в непрерывном времени) вида

$$\dot{y} = Ay + q_z z = Hy + r, \tag{1}$$

где y – вектор состояния, A – матрица, соответствующая принятой модели линейных уравнений ошибок БИНС и линейных моделей инструментальных погрешностей одометра и угла поворота колес/рамы, q, r – векторные случайные процессы типа белого шума заданной интенсивности, z – вектор измерения, формируемый при помощи данных ГНСС и одометра, H – соответствующая матрица измерений.

Отметим, что для задачи автоматического управления необходима оценка угла поворота колес. Предполагается линейная модель ошибок угла поворота колес  $\delta$  от показаний датчика  $\delta'$ , которая включает смещение нуля  $k_0^{\delta}$ , масштабный коэффициент  $k_1^{\delta}$  и случайную ошибку  $\Delta \delta^s$ :

$$\delta' = \delta + k_0^{\delta} + k_1^{\delta} \delta + \Delta \delta_s \quad . \tag{2}$$

Эти два коэффициента, предполагаемые постоянными, также необходимо оценить в задаче оценивания. Помимо угла поворота, необходимо найти оценку угловой скорости TC. Для этого используются как показания ДУС, скорректированные на оценку дрейфов, так и угол поворота колес с учетом кинематической модели движения TC. Задача автоматического управления выходит за рамки данной работы.

Обратим внимание, что в случае классической компоновки техники, датчик угла поворота колес связан только с одним из поворотных колес. Поэтому следует учитывать принцип Аккермана [6], который заключается в том, что, при повороте, внутреннее поворотное колесо поворачивается на больший угол, по сравнению с внешним, т. к. движется по окружности меньшего радиуса.

Для решения задачи навигации используется линейный фильтр Калмана (ФК) в обратных связях с 18мерным вектором состояния

$$y_1 = (\Delta x^T, \delta V^T, \alpha_1, \alpha_2, \beta_3, k^v, \varkappa_1, \varkappa_3, \nu_0^T, \Delta f_0^T)^T, \quad (3)$$

где  $\Delta x^{T}$  – вектор позиционных ошибок БИНС,  $\delta V^{T}$  – вектор динамических скоростных ошибок БИНС,  $\alpha_{1}, \alpha_{2}$  – угловые ошибки построения приборной вертикали,  $\beta_{3}$  – азимутальная угловая ошибка,  $k^{\nu}$  – масштабный коэффициент одометра,  $\varkappa_{1}, \varkappa_{3}$  – угловые параметры несоосности «измерительной» оси одометра с осями БИНС,  $\nu_{0}$  – вектор дрейфов ДУС,  $\Delta f_{0}$  – вектор нулей акселерометров.

Для оценивания коэффициентов угла поворота колес используется дополнительный линейный ФК в обратных связях с вектором состояния

$$y_{2} = (\Delta x_{1}, \Delta x_{2}, \Delta \psi, k_{0}^{\delta}, k_{1}^{\delta}), \qquad (4)$$

где  $\Delta \psi$  – ошибка угла курса.

#### III. Кинематические модели

Рассматриваемые модели постулируют расположение курсовой точки. Курсовая точка — это точка, вектор скорости которой направлен вдоль продольной оси TC при отсутствии проскальзывания. Это свойство используется при формировании сигналов скоростной коррекции при пропадании сигналов ГНСС, подробнее мы обсудим это ниже. Кроме того, этот факт можно использовать для коррекции курса, т. к. путевой угол этой точки практически совпадает с углом курса.

#### А. Велосипедная модель

Велосипедная кинематическая модель [2, 3] хорошо аппроксимирует движение TC с классической компоновкой при отсутствии бокового проскальзывания.



Рис. 2. Велосипедная модель

В велосипедной модели два колеса на одной оси заменяются одним мнимым колесом как на поворотной, так и на неповоротной оси, а корпус TC заменяется жестким стержнем. Боковое проскальзывание отсутствует.

Велосипедная модель постулирует расположение курсовой точки в центре неповоротной оси.

#### В. Шарнирно-сочлененная модель

Шарнирно-сочлененная кинематическая модель [4, 5] хорошо аппроксимирует движение TC с шарнирносочлененной компоновкой при отсутствии бокового проскальзывания.



Рис. 3. Шарнирно-сочлененная модель

В шарнирно-сочлененной модели полурамы и оси заменяется жесткими стержнями. На каждой полураме по два колеса, которые не могут поворачиваться относительно соответствующей полурамы. Боковое проскальзывание отсутствует.

Шарнирно-сочлененная модель, постулирует две курсовые точки, в центрах передней и задней оси. Далее мы будем говорить только о передней курсовой точке.

#### IV. Скоростная коррекция

#### А. Коррекция при помощи измерений одометра

Рассматривается модель ошибок измерения скорости одометром, которая включает масштабный коэффициент  $k^{\nu}$  и параметры несоосности  $\varkappa_1, \varkappa_3$  «измерительной» оси одометра с осями БИНС [7]:

$$V_{s}' = V_{z} + V' (-\varkappa_{3}, k^{\nu}, \varkappa_{1})^{T} + \Delta V_{s}^{s}, \qquad (5)$$

где  $V_s' = (0, V', 0)^T$  – вектор скоростного измерения одометра в связанных с телом осях Ms,  $V_z$  – истинный вектор скорости в приборных осях БИНС Mz,  $\Delta V_s^s$  – случайная составляющая ошибки.

Эти коэффициенты предполагаются постоянными и включаются в вектор состояния задачи оценивания (3).

Предполагается, что скорость одометра относится к курсовой точке. Поэтому, при использовании скоростной коррекции, следует учитывать разнесение курсовой точки и приведенного центра БИНС. Вектор измерения в связанных осях *Ms* принимает следующий вид

$$z_s = A_{sx}\tilde{V}_x - V_s' - \hat{\omega}_s \Delta R_s , \qquad (6)$$

где  $A_{sx}$  – матрица перехода из географического трехгранника Mx в связанные оси Ms,  $\tilde{V}_x$  – текущая оценка вектора скорости приведенного центра БИНС в осях Mx,  $\hat{\omega}_s$  – кососимметрическая матрица, построенная на векторе угловой скорости  $\omega_s$  в осях Ms,  $\Delta R_s$  – вектор, соединяющий приведенный центр БИНС с курсовой точкой. В качестве угловой скорости используются показания ДУС, поправленные на оценку дрейфов.

Этот вектор скоростного измерения связан с компонентами вектора состояния (3) следующим образом

$$z_{s} = A_{sx}\delta V + A_{sx}\hat{\beta}\tilde{V}_{x} - V'(-\varkappa_{3},k^{\nu},\varkappa_{1})^{T}$$

$$- \hat{\omega}_{s}\Delta R_{s} + \Delta V_{s}^{s},$$

$$-\hat{\omega}_{s}\Delta R_{s} + \Delta V_{s}^{s},$$

$$(7)$$

где  $\hat{\beta}$  – кососимметрическая матрица, построенная на векторе  $\beta = (\alpha_1 + \frac{\Delta x_2}{R_N}, \alpha_2 - \frac{\Delta x_1}{R_E}, \beta_3), R_E$  и  $R_N$  – долготный и широтный радиусы кривизны навигационного эллипсоида, соответственно.

Такая коррекция, помимо прочего и как показала практика, позволяет навигационному решению дольше оставаться работоспособным при пропадании сигналов ГНСС, по сравнению с автономным решением БИНС и особенно при использовании низкоточной МЭМС.

#### В. ZUPT-коррекция в движении

Здесь под ZUPT (Zero Velocity Update Technology) понимается коррекция по нулевым компонентам скорости курсовой точки.

Напомним, что вектор скорости курсовой точки направлен вдоль продольной оси TC, т.е.  $V_s^p = (0, V^p, 0)^T$ . Сформируем вектор мнимого измерения скорости (боковая и «вертикальная» скорости в связанных осях равны нулю)

$$z_s = A_{sx}\tilde{V}_x - V_s^p - \hat{\omega}_s \Delta R_s.$$
<sup>(8)</sup>

Этот вектор скоростного измерения связан с компонентами вектора состояния (3) следующим образом

$$z_s = A_{sx}\delta V + A_{sx}\hat{\beta}\tilde{V}_x - \hat{\omega}_s \Delta R_s.$$
<sup>(9)</sup>

Видно, что приведенные в этом подразделе формулы измерений похожи на формулы из предыдущего подраздела при условии  $\varkappa_1 = \varkappa_3 = k^v = 0$ . Однако, здесь мы не знаем истинную скорость  $V^p$  курсовой точки, поэтому для коррекции используем только первую и третью компоненты приведенных векторных уравнений. В этом и заключается коррекция по нулевым компонентам вектора скорости  $V_s^p$  курсовой точки.

Заметим, что такая коррекция не требует никаких дополнительных датчиков и при этом (как показала практика) дает существенное улучшение работоспособности навигационного алгоритма при пропадании сигналов ГНСС. Такая коррекция может применяться на колесной технике, на которой по тем или иным причинам недоступны измерения одометра.

#### V. РАЗВИТИЕ ЗАДАЧИ

Система автономного управления Cognitive Agro Pilot также включает стереокамеру, устанавливающуюся на крыше трактора или комбайна. В связи с этим планируется привлечь визуальную одометрию для задачи навигации. Предполагается, что данные визуальной одометрии помогут навигационному решению дольше оставаться работоспособным при пропадании сигналов ГНСС.

#### VI. Заключение

Упомянутые выше алгоритмы и модели реализованы и работают на большом количестве сельскохозяйственной техники, включая комбайны и тракторы. Задача автоматического управления во многом опирается на решение задачи навигации. Для точного решения задачи автоматического управления важную роль играет не только позиционное решение, но и угол поворота колес или рамы. Для оценки коэффициентов датчика угла поворота используются соответствующая кинематическая модель, а также полное решение задачи навигации.

Кинематические модели также постулируют важную гипотезу о расположении и свойствах курсовой точки. Это используется в задаче оценивания при коррекции по данным одометра, что, помимо прочего, позволяет навигационному решению дольше оставаться работоспособным при пропадании сигнала ГНСС.

Если данные одометра не доступны по тем или иным причинам, используется ZUPT-коррекция в движении, которая основана на той же самой гипотезе о курсовой точке. Причем такая коррекция работает немногим хуже предыдущей.

#### Литература

- Тормагов Т.А., Генералов А.А., Шавин М.Ю., Рапопорт Л Б. Задачи управления движением автономных колесных роботов в точном земледелии // Гироскопия и навигация. Том 30. №1 (116), 2022. С. 39-60. DOI 10.17285/0869-7035.0083
- [2] Polack, Philip & Altché, Florent & Novel, Brigitte & de La Fortelle, Arnaud. (2017). The kinematic bicycle model: A consistent model for planning feasible trajectories for autonomous vehicles? 812-818. 10.1109/IVS.2017.7995816.
- [3] Min, Haigen & Wu, & Cheng, & Zhao. (2019). Kinematic and Dynamic Vehicle Model-Assisted Global Positioning Method for Autonomous Vehicles with Low-Cost GPS/Camera/In-Vehicle Sensors. Sensors. 19. 5430. 10.3390/s19245430.
- [4] Nayl, Thaker. (2013). Modeling, control and path planning for an articulated vehicle.
- [5] Delrobaei, Mehdi & McIsaac, Kenneth. (2011). Design and Steering Control of a Center-Articulated Mobile Robot Module. Journal of Robotics. 2011. 10.1155/2011/621879.
- [6] Zhao, Jing-Shan & Liu, Zhi-Jing & Dai, Jian. (2013). Design of an Ackermann Type Steering Mechanism. Journal of Mechanical Engineering Science. 227. 10.1177/0954406213475980.
- [7] Никитин И.В. Задача навигации наземного объекта на основе данных БИНС и одометра (диссертация). 2016.

# Способ определения навигационных параметров автоматического горного комбайна

А.В. Прохорцов ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» Тула, Россия ProxAV@rambler.ru

Аннотация—рассмотрен способ определения навигационных параметров горного комбайна при помощи фазовых интерферометрических и Доплеровских измерений.

Ключевые слова—параметры навигации, горный комбайн, фазовые измерения, бесплатформенная инерциальная навигационная система.

#### I. Введение

Горные комбайны используются при разработке пород и полезных ископаемых: каменного угля, марганца, соли каменной, боксита, металлических рудных пород и т.д., в том числе в местах с вредными факторами и опасными условиями труда. Поэтому одним из направлений модернизации горных комбайнов является их полная автоматизация и возможность работы автономно, без участия человека.

В этом случае, такой горный комбайн должен быть оснащен навигационной системой, предназначенной для определения навигационных параметров (координат местонахождения горного комбайна и проекций скорости его движения).

Классическим способом является установка на горном комбайне высокоточной бесплатформенной навигационной системы, однако это на наш взгляд не всегда целесообразно, так как такая БИНС имеет высокую стоимость и т.к. горный комбайн работает непрерывно в течении нескольких часов, а порой и суток, то такая БИНС будет имеет накапливающуюся со временем погрешность, что приводит к необходимости ее коррекции.

Другим вариантом – является оснащение горного комбайна приемной аппаратурой спутниковых навигационных систем. Однако такая спутниковая система не всегда будет принимать сигналы от навигационных спутников, например когда горный комбайн работает в глубоких карьерах или ведется добыча ископаемых закрытым способом.

#### II. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Предлагается способ определения навигационных параметров горного комбайна по сигналам трех разнесенных радиомаяков, установленных в карьере. В основе способа определения навигационных параметров лежат фазовые интерферометрические измерения. Суть данного способа заключается в измерении разности фаз несущей частоты для сигналов, принимаемых от разнесённых радиомаяков на одну антенну, установленную на горном комбайне. В этих разностях, обусловленных неодинаковом расстоянии до баз радиомаяков, содержится информация об угле между направлением на приёмную антенну и прямой, определяющей вектор-базу пар О.С. Балабаев ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» Тула, Россия olezhkabalabaev@gmail.com

наземных радиомаяков. Такой набор входных данных определяет стандартную геометрическую фигуру – треугольную пирамиду – рис. 1.



Рис. 1. Схема расположения радиомаяков в горном карьере

При помощи этих измерений, определённых для трёх пар приёмная антенна – пара радиомаяков, и других стандартных выражений записывается система нелинейных уравнений относительно неизвестных координат, основанная на стандартных геометрических соображений – рис. 2.



Рис. 2. К определению навигационных параметров антенны горного комбайна при помощи системы радиомаяков

Данная система нелинейных уравнений составляется следующим образом. Разности фаз сигналов, принимаемых антенной горного комбайна от пар наземных радиомаяков, связаны с углами между направлениями на эту антенну (данным направлением является отрезок, соединяющий середину вектора-базы пар наземных радиомаяков и фазовый центр антенны) и векторами-баз пар радиомаяков через длину излучаемой волны и рас-

Работа выполнена в рамках научно-исследовательского гранта Правительства Тульской области №ДС/139.

стояния между маяками. Остальные уравнения составляются на основании стандартного выражения для расстояния между двумя точками для соответствующих параметров треугольной пирамиды. Таким образом, была получена система из девяти нелинейных уравнений относительно неизвестных координат горного комбайна X, Y, Z.

$$\begin{cases} a = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - X\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - Y\right)^2 + \left(\frac{z_1 + z_2}{2} - Z\right)^2} \\ b = \sqrt{\left(\frac{x_2 + x_3}{2} - X\right)^2 + \left(\frac{y_2 + y_3}{2} - Y\right)^2 + \left(\frac{z_2 + z_3}{2} - Z\right)^2} \\ c = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_3}{2} - X\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_3}{2} - Y\right)^2 + \left(\frac{z_1 + z_3}{2} - Z\right)^2} \\ n_1^2 = \left(\frac{d_{12}}{2}\right)^2 + a^2 - d_{12} \cdot a \cdot \cos \beta_1 \\ n_2^2 = \left(\frac{d_{23}}{2}\right)^2 + b^2 - d_{23} \cdot b \cdot \cos \beta_2 \\ n_3^2 = \left(\frac{d_{13}}{2}\right)^2 + c^2 - d_{13} \cdot c \cdot \cos \beta_3 \\ n_1 = \sqrt{(x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2 + (z_1 - Z)^2} \\ n_2 = \sqrt{(x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2 + (z_2 - Z)^2} \\ n_3 = \sqrt{(x_3 - X)^2 + (y_3 - Y)^2 + (z_3 - Z)^2} \end{cases}$$

где a, b, c – векторы-направления на соответствующие базы радиомаяков,  $n_1, n_2, n_3$  – расстояния между антенной горного комбайна и соответствующим радиомаяком,  $d_{12}, d_{23}, d_{13}$  – расстояния между парами радиомаяков,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  – углы между вектором-базы радиомаяков и вектором-направлением на антенну горного комбайна, соединяющий середины баз и приёмника.

Углы  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  определяются из следующих выражений:

$$\cos \beta_1 = \frac{\Delta \varphi_{12} \cdot \lambda}{2\pi d_{12}}$$
$$\cos \beta_2 = \frac{\Delta \varphi_{23} \cdot \lambda}{2\pi d_{23}},$$
$$\cos \beta_3 = \frac{\Delta \varphi_{13} \cdot \lambda}{2\pi d_{13}}$$

где  $\Delta \varphi_{12}, \Delta \varphi_{23}, \Delta \varphi_{13}$  – разности фаз, регистрируемые антенной от соответствующих пар радиомаяков,  $\lambda$  – длина волны излучаемых импульсов.

Полученная система нелинейных уравнений относительно неизвестных координат антенны, установленной на горном комбайне, имеет девять неизвестных. Известно, что подобные системы уравнений имеют достаточно громоздкие аналитические выражения, а иногда и вовсе не представляется возможности их вывести при более высоких степенях. Однако, для обеспечения возможности применения результатов на определённом вычислителя с целью решения навигационной задачи был разработан вычислительный итерационный алгоритм определения навигационных параметров с заданной точностью при помощи приведения исходной системы нелинейных уравнений к общему рациональному виду (путём стандартных преобразований и многочисленных замен переменных), при котором возможно численное решение системы относительно неизвестных. В предлагаемом способе использовался метод Ньютона.

$$\begin{cases} f_1 X^2 + f_2 Y^2 + f_3 Z^2 + c_1 - Xb_1 - Yb_2 - Zb_3 - \\ -2a_1 Xp_1 - 2a_1 Yp_2 - 2a_1 Zp_3 - 2XYp_1 p_2 - \\ -2XZp_1 p_3 - 2YZp_2 p_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_4 X^2 + f_5 Y^2 + f_6 Z^2 + c_2 - Xb_4 - Yb_5 - Zb_6 - \\ -2a_2 Xp_4 - 2a_2 Yp_5 - 2a_2 Zp_6 - 2XYp_4 p_5 - \\ -2XZp_6 p_4 - 2YZp_6 p_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_7 X^2 + f_8 Y^2 + f_9 Z^2 + c_3 - Xb_7 - Yb_8 - Zb_9 - \\ -2a_3 Xp_7 - 2a_3 Yp_8 - 2a_3 Zp_9 - 2XYp_7 p_8 - \\ -2XZp_7 p_9 - 2YZp_8 p_9 = 0 \end{cases}$$

где  $f_1 - f_9$ ,  $c_1 - c_3$ ,  $b_1 - b_9$ ,  $a_1 - a_3$ ,  $p_1 - p_9$  – коэффициенты, вычисляемые заранее относительно расположения радиомаяков.

Определение проекций линейной скорости осуществляется за счёт использования информации об углах между направлением на антенну и вектор-базы пар радиомаяков и частоте  $f_{di}$  принимаемого сигнала, которая измеряется на горном комбайне за счёт эффекта Доплера:

$$f_{di} = 2 \frac{v_{di}}{\lambda},$$

Проекции абсолютной линейной скорости  $v_x, v_y, v_z$  – определяются при помощи радиально-скоростного (доплеровского) метода при помощи следующего выражения, записанного для момента времени t:

$$v_{di} = \frac{(x - x_i)v_x + (y - y_i)v_y + (z - z_i)v_z}{r_{di}},$$

Для описываемого случая, когда система состоит из 3 радиомаяков, запишем систему уравнений относительно неизвестных проекций линейной абсолютной скорости объекта на оси координат:

$$\begin{cases} v_{d1} = \frac{(x - x_1)v_x + (y - y_1)v_y + (z - z_1)v_z}{r_{d1}} \\ v_{d2} = \frac{(x - x_2)v_x + (y - y_2)v_y + (z - z_2)v_z}{r_{d2}}, \\ v_{d3} = \frac{(x - x_3)v_x + (y - y_3)v_y + (z - z_3)v_z}{r_{d3}} \end{cases}$$

Для оценки работоспособности предложенных методов определения координат и скорости горного комбайна по сигналам трёх разнесённых радиомаяков, разработана математическая модель и её программная реализация на языке Mathcad. И проведено математическое моделирование. Для оценки точности методов определения координат и скорости горного комбайна математическое моделирование проводилось при следующих условиях. Погрешность в измерении разностей фаз приходящих сигналов на антенну горного комбайна задана в виде мультипликативной погрешности – 0,001% и аддитивной погрешности 0,0001°. Погрешность измерения частоты Доплера задана в виде мультипликативной погрешности – 0,001 Гц. При этом погрешность определения координат горного комбайна предложенным методом составила 5.10<sup>-2</sup> м, а погрешность определения его скорости предложенным методом составляет 2.10<sup>-2</sup> м/с.

#### III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты исследования подтвердили работоспособность и эффективность предложенных методов определения навигационных параметров горного комбайна. Точность определения зависит от точности приёмника, используемого для регистрации разностей фаз приходящих сигналов, и от количества итераций, необходимых для решения системы уравнений. Были определены основные технические требования к системе радиомаяков и приёмной антенне.

Таким образом, предложенный способ определения навигационных параметров позволяет определять координаты и проекции скорости горного комбайна при помощи системы радиомаяков и приёмной антенны, что даёт возможность использовать эту информацию в автоматизированной системе управления горным комбайном с высокой точностью.

#### Литература

- [1] Захарин М.И., Захарин Ф.М. Кинематика инерциальных систем навигации. М.: Машиностроение, 1968. 236 с.
- [2] Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / Под ред. В.С. Шебшаевич. 2-е изд., перераб. И доп. М.: Радио и связь, 1993. 408 с.
- [3] Харисов В.Н. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС / Под ред. В.Н. Харисова, А.И. Перова, В.А. Болдина. М.:ИПРЖР, 1998. 400 с.

## Математические модели и алгоритмы бортовой многопозиционной интегрированной инерциально-спутниковой системы определения движения

А.В. Шурыгин Сектор управления и навигации Институт Автоматики и процессов управления ДВО РАН Владивосток, Россия show.vars@yandex.ru

Аннотация-В докладе изложены проблемы усвоения навигационной информации, доставляемой разнесёнными в пространстве бортовыми датчиками спутникового позиционирования подвижного объекта (технологической платформы) и совмещёнными с ними 3D-ньютонометрами. Основные математические конструкции следуют парадигме «состояние – измерение» и ориентированы на решение обратных задач определения движения ПО как твёрдого тела. В качестве базовой системы координат выбрана эллипсоидальная система и, дополнительно, иные координатные системы, обуславливающие решения. Представлены алгоритмы вычисления кинематических параметров и пространственной ориентации ПО, характеристик каузальности движения — сил и моментов. Предложено численное решение проблемы векторной гравиметрии. Разработан оригинальный цифровой макет системы усвоения интегрированной спутниковой и инерциальной навигационной информации.

Ключевые слова—математическая модель, некорректная задача, обратная задача, инерциальная информация, спутниковое позиционирование, интегрированная система, комплекс программ, язык программирования julia.

#### I. Введение

Современная методология теории и практики систем наблюдения и управления движущимися объектами существенно ориентирована на глубокие математически формализованные представления этой предметной области. В свете именно таких представлений и следует рассматривать содержание и перспективы исследований, далее излагаемых по проблеме комплементарности двух различных по физической природе видов информации о движении, а именно — инерциальной, доставляемом 3Dдатчиками кажущегося ускорения (3D-ньютонометрами [1,2]) и позиционной — от навигационных спутниковых системам (НСС), типа ГЛОНАСС [3]. Должное теоретическое обоснование таких систем позволило также расширить и обобщить функциональное назначение конечного программного комплекса. Такое расширение снимает ограничения в практиках использования программного продукта.

Основные парадигмы предлагаемых математически формализованных конструкций: калмановская парадигма – «состояние-измерение», наблюдаемость, управляемость, устойчивость (по Ляпунову); парадигма разрешимости по Ж. Адамару обратных задач в условиях конечной точности измерений и вычислений; парадигма бортового мультипозиционирования; парадигма универсального программного комплекса – кроссплатформенность и два режима функционирования (имитационной и реального времени).

Целеполагающая онтология исследования, результаты которого изложены в настоящем докладе, характеризуется следующими компонентами: объект исследования — мультиагентная бортовая система интегрирования спутниковой и инерциальной информации, доставляемой датчиками указанных выше типов; предмет исследования — аналитические модели, численные методы и многофункциональные алгоритмы интегрированной навигационной системы; гипотеза (концептуальная парадигма) — технология численного решения математически некорректной обратной задачи многократного дифференцирования функции (траектории движения) при дискретно-темпоральном измерении её значений; концепция мультиагентности как средства достижения многофункциональности; цель исследования — разработка математического, алгоритмического и программного обеспечения для многофункциональных интегрированных спутниково-инерциальных систем многоцелевого назначения.

Обращаясь к историческому аспекту, необходимо отметить, что идея мультиагентности далеко не нова. Ограничимся ссылкой на публикации [4, 5], в которых рассмотрены бортовые системы спутникового позиционирования для оценки параметров пространственной ориентации авиационных и морских объектов.

#### II. Основные математические представления

Совокупность физических объектов представлена Землёй в качестве планеты Солнечной системы, подвижным объектом как твёрдым телом, далее называемым технологической платформой (ТП), и многоагентной информационной системой, отождествляемой с n+1 датчиками векторов сил негравитационной природы (3D-ньютонометры) и совмещённых с ними датчиками позиционирования навигационной спутниковой системы (например, ГЛОНАСС/GPS), известным образом размещённых на ТП.

В качестве формы (фигуры) Земли выбирается эллипсоид вращения А. Клеро с параметрами Ф. Н. Красовского. Оставаясь в рамках представлений о мире И. Ньютона [1], вводится известная совокупность систем координат [2]: геоцентрические, прямоугольные, сферические, эллипсоидальная, подвижные ориентированные географически прямоугольные координатные триэдры и свободно ориентированный жёстко связанный с ТП приборный триэдр, в осях которого задаются векторы места – элементов мультиагентной системы.

Актуализируется задача реконструкции кинематических параметров траектории — координат, скоростей и их производных, и реализуется процедура решения задачи [6]. Математическая модель решения задач оценки значений траекторных параметров и их производных рассматривается как совокупность моделей частных обратных задач вида «состояния-измерения», где каждая из частных моделей ассоциируется с образом функции времени  $\eta(t)$ , аппроксимируемой моделью «состояний» вида  $\eta(t) = \eta_1, \dot{\eta}_1 = \eta_2, \dot{\eta}_2 = \eta_3, \dots, \eta_n = 0$ , по её темпорально измеряемым с инструментальными погрешностями значениями  $\eta(t_k), k = 0, 1, 2, ...; t_{k+1} = t_k + \tau, \tau =$ const так, что каждая частная модель «состояний» - это система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с простейшей одноклеточной жордановой (с нулевыми диагональными элементами) матрицей связи, имеющей индекс нильпотентости равный *n*. При численном решении сформулированной обратной задачи требуется обращение к дискретной модификации модели. Особенность матрицы связи позволяет получить дискретное представление по отношению к исходной модели тем точнее, чем меньше временной шаг дискретизации т. Однако, уменьшение т неизбежно приводит к ухудшению разрешимости обратной задачи (по Адамару) в условиях конечной точности измерений и вычислений. В качестве решения этой проблемы предлагается несколько оригинальных процедур преобразования переменных, успешно приводящих дискретное представление к формам, независящим от шага дискретизации т.

Преодоление проблемы разрешимости задачи при достаточно больших значениях *n* и малых т позволило эффективно реализовать нейросетевой алгоритм динамического псевдообращения калмановского типа с ядерным механизмом настройки. Механизм настройки на каждом шаге отождествляется с решением экстремальной задачи поиска минимума функции (квадратичного критерия) [6]. Наряду с этим реализован метод наименьших квадратов (МНК) в скользящем окне. Такой подход менее эффективен на сложных траекториях или при высоких погрешностях измерений, однако относительно малая вычислительная сложность в некоторых случаях оправдывает выбор.

После решения задачи оценки кинематических параметров материальной точки, рассматривается задача динамики, в которой точка наделяется массой, т. е. материализуется, а её траектория движения обретает свойство причинности (казуальности) и является решением уравнения Ньютона. Каждая из n + 1 точек, входящих в бортовую мультиагентную систему, участвует в двух движениях — относительном (к твёрдой Земле) и переносном, обусловленным собственным вращением Земли. Таким образом, определяется вектор  $\mathbf{V}^i = (V_1^i, V_2^i, V_3^i)^{\mathrm{T}}$ абсолютной линейной скорости и соответствующий ему тензор вращения  $\mathbf{\Omega}^i = (\Omega_{ms}^i)$ , а уравнения Ньютона принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{V}^{i} + \mathbf{\Omega}^{i}\mathbf{V}^{i} = \mathbf{f}^{i} + \mathbf{g}^{i} = \mathbf{F}^{i}, i = \overline{0, n}, \qquad (1)$$

где  $\mathbf{f}^i$  – вектор удельных сил негравитационной природы;  $\mathbf{g}^i$  – напряженность гравитационного поля.

В рассматриваемом случае, когда значения всех переменных определены, можно говорить и об определении всех сил — как инерции, описываемых в левых частях уравнения (1), так и действующих, обуславливающих траекторию движения ТП. Решение траекторной задачи для каждой отдельно взятой точки, позволяет, оценить (вычислить) равнодействующие удельных сил, обуславливающих каузальность каждой траектории. Дальнейшая интерпретация этого факта связана с успешным решением как задачи пространственной ориентации ТП, так и задачи подвижной векторной гравиметрии [7,8,9]. Рассмотрены частные случаи этих двух задач при различном числе ньютонометров и точек бортового позиционирования ГЛОНАСС [10].

#### III. ЦИФРОВОЙ МАКЕТ

Для программной реализации выбрана платформа разработки «Julia». Основным критерием выбора являлась классификация одноименного языка программирования «Julia» как язык общего назначения. Такое же требование следует из обозначенной парадигме исследования — универсального программного обеспечения, которая на практике определяет особенности конструирования и применения рассматриваемого программного комплекса. Такой комплекс должен включать не только средства лабораторного или «настольного» исследования, но и возможность применения его в других процессах, включая непосредственное бортовое функционирование в реальном времени.

Естественным образом, в первую очередь программная реализация была необходима для верификации модельных представлений и проверки гипотезы о состоятельности итогового решения. В последствии, вся программная реализация разрабатывалась с учетом перспективы более широкого применения всего программного комплекса. Тем более, что это является, вообще говоря, конечной целью. На данный момент разработанный программный пакет, как минимум, позволяет производить серии вычислительных экспериментов для верификации модельных представлений и проектировать конкретные траекторные задачи. Предшествующие исследования на эту тему вместе с вычислительными экспериментами при использовании оригинального программного комплекса [9,10] позволяют удостовериться в состоятельности итогового решения. Поскольку работа по разработке моделей, алгоритмов и их реализации непосредственно на языке программировании с последующими численными испытаниями велись практически одновременно, дополняя и корректируя друг друга, то это позволило уже на этапе рассмотрения полной системы иметь уверенность в работоспособности каждой из её частей. Этот факт подталкивает рассматривать программный комплекс более широко в возможностях его применения.

Основное содержимое программного пакета — набор структур данных и алгоритмов, описывающие состояние и работу каждой подсистемы. Решение же конкретной навигационной задачи сводится к описанию общего состояния (информационного ресурса) и секвенциальной (последовательной) по своей форме цепочки команд генерации и обработки входной измеряемой информации.

На основе полученного программного пакета в рамках обозначенной парадигмы об универсальности, была реализована первая (базовая) версия цифрового макета системы усвоения интегрированной спутниковой и инерциальной навигационной информации при бортовом мультиагентном характере её происхождения. Макет также реализован на языке программирования «Julia» и включает в себя: имитатор траекторий и пространственных движений объектов как твёрдых тел различного целевого назначения и симулятор заданных характеристик погрешностей измерений всех кинематических параметров; блок цифровой обработки информации, обеспечивающий оценки всех кинематических и динамических параметров движения; блок решения прикладных задач проектирования и исследования возможных движений объектов; блок сбора и сериализации массива входных, выходных и промежуточных данных в формате HDF5.

Имитатор представляет собой генератор входных данных для блока обработки и позволяет спроектировать любую необходимую траекторию движения объекта в виде потока виртуальных измерений глобальной навигационной спутниковой системы и инерциальных датчиков. Блок цифровой обработки, с учётом используемой системой координат входного потока измерений, производит оценку всех доступных кинематических и динамических параметров движения, вплоть до параметров задач векторной гравиметрии и гравитационной градиентометрии. Блок решения прикладных задач является связующим и управляет потоками данных. Цифровой макет допускает наличия одновременно нескольких экземпляров имитатора и блока обработки. Блок сбора и сериализации позволяет накапливать и сохранять полное состояние всей системы в каждый дискретный момент времени. Формат HDF5 выбран как один из самых производительных и доступных форматов используемый в научной среде. В программном пакете предусмотрен ряд функций автоматического формирования структуры состояния систем, задания атрибутов и сохранения данных. Открытость формата данных позволяет использовать полученные оценки в любых других необходимых пакетах для дальнейшей обработки, включая в продвинутых средствах визуализации.

#### IV. Заключение

Разработанная версия цифрового макета системы усвоения интегрированной спутниковой и инерциальной навигационной информации позволяет решать задачи планирования и исследования маршрутных заданий как на искусственных (имитируемых), так и на реальных данных. Предлагаемый программный интерфейс призван обеспечить оперативную модификацию и адаптацию цифрового макета для применения его в конкретных процессах и задачах управления и навигации.

#### Литература

- [1] Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Едиториал УРСС, 2018, 320 с.
- [2] Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967, 648 с.
- [3] Перов А.И., Харисов В. Н. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования. М.: Радиотехника, 2010, 800 с..
- [4] Бабич О.А. Вычисление углового положения самолёта по сигналам со спутниковой радионавигационной системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 4. С. 152-162.
- [5] Девятисильный А. С., Крыжко И. Б. Исследование модели навигационных определений с помощью спутниковой системы типа ГЛОНАСС // Космические исследования. М.: Наука. 1999. Т. 37. № 3. С. 261-266..
- [6] Девятисильный А. С., Шурыгин А. В. Моделирование системы определения движения технологической платформы по данным позиционирования ГЛОНАСС и измерениям ньютонометров // Письма в журнал технической физики. 2019. № 18. С. 17-20.
- [7] Пешехонов В. Г., Степанов О. А., Розенцвейн В. Г., Краснов А. А., Соколов А. В., Современное состояние разработок в области бесплатформенных инерциальных аэрогравиметров // Гироскопия и навигация. 2022. Том 30. № 4 (119). С. 3-35.
- [8] Kreye, Ch., Hein, G.W., Zimmermann B. Evaluation of Airborne Vector Gravimetry Using GNSS and SDINS Observations, Observation of the Earh System from Space, Springer, Berlin/Heidelberg, 2006, pp. 447-461
- [9] Девятисильный А.С., Шурыгин А.В. Математическая модель спутниково-инерциальной подвижной вычислительной гравиметрии // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. №22(1). С. 43-47.
- [10] Девятисильный А.С., Шурыгин А.В. Математические модели и алгоритмы бортовой мультиагентной интегрированной системы определения движения // Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. № 6. С. 317-326.
# Коррекция грубых инерциальных навигационных систем при помощи магнитных измерений

M.Ю. Тхоренко ИПУ РАН Москва, Россия tkhorenkom@mail.ru

E.B. Каршаков ИПУ РАН Москва, Россия karshakov@ipu.ru И.А. Папуша ИПУ РАН Москва, Россия ipapusha@yandex.ru

Аннотация—В статье рассматривается использование векторных измерений магнитного поля Земли для коррекции грубых инерциальных навигационных систем, построенных на основе микроэлектромеханических чувствительных элементов. Для навигации короткоживущих подвижных объектов, движущихся на большой высоте над Землей, в качестве карты поля предлагается использовать глобальные геомагнитные модели. В работе приводятся результаты моделирования одного из вариантов такой навигационной системы, использующий грубые инерциальные датчики, феррозондовый магнитометр и глобальную модель магнитного поля ЕММ2017.

#### Ключевые слова—интегрированная навигационная система, магнитная навигация, ЕММ2017.

#### I. Введение

В последнее десятилетие в специализированной литературе сравнительно часто появляются работы, связанные с использованием измерений различных физических полей Земли, в т.ч. геомагнитного поля, для коррекции инерциальных навигационных систем (ИНС) [1] - [7]. На первый взгляд, физические поля как источник корректирующей информации являются прекрасной альтернативой ставшему уже традиционным комплексированию ИНС и спутниковых навигационных систем (СНС) для случаев, когда уверенный прием сигналов СНС невозможен в силу тех или иных причин. Действительно, например измерения магнитного поля обладают целым рядом важных практических преимущества, таких как потенциально высокая достижимая точность [8], сложность создания искусственных помех для скольконибудь протяженных областей пространства, высокая стабильность магнитного карт во времени (вдали от индустриальных зон). Вместе с тем, использование магнитного поля ставит перед создателями такой системы целый ряд практических трудностей. В частности, для достижения высокой точности навигации необходимо иметь детальную модель аномального магнитного поля, что требует предварительного картирования обширных участков земной поверхности. Кроме того, естественное магнитное поле включает в себя быстро меняющуюся вариационную составляющую, подавление которой представляет отдельную сложную проблему [7]; неучет этой составляющей приводит к серьезному снижению точности навигационного решения [9]. Дополнительные сложности представляет компенсация девиации магнитометра, связанная с намагничением корпуса подвижного объекта [10], [11], а также учет влияния бытовых и индустриальных помех, что особенно важно при навигации в городах и густо населенной местности.

В то же время, существует целый ряд задач, в которых требуется коррекция бесплатформенных ИНС (БИНС) сравнительно низкой точности на основе микроэлектромеханических (МЭМС) датчиков, установленных на борту короткоживущих подвижных объектов. В данной работе мы рассмотрим одну из таких задач, особенностью которой является движение объекта на большей части траектории на большой высоте над землей (20 - 30 км). Подход, основанный на использовании карт аномального магнитного поля для таких классов объектов неприменим в связи с тем, что амплитуда магнитных аномалий на данных высотах имеет очень малую величину. Вместе с тем, имеются глобальные модели магнитного поля Земли, подходящие для работы на таких высотах. В настоящей работе мы предлагаем алгоритм, основанный на использовании глобальных моделей для коррекции БИНС.

#### II. ГЛОБАЛЬНАЯ МАГНИТНАЯ МОДЕЛЬ EMM2017

Как известно, магнитное поле Земли является суммой нескольких составляющих [12]: глобальной или нормальной составляющей, в основном генерируемой процессами, протекающими в ядре Земли (магнитогидродинамическое динамо), аномальным полем, источником которого является неравномерное намагничение горных пород, и вариационной составляющей, в основном связанной с изменением состояния ионосферы. Большинство моделей нормального поля используют подход, заключающийся в следующем [13], [14]. Потенциал магнитного поля в сферической системе координат задается в виде разложения:

$$V(r,\theta,\phi,t) = a \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \times g_{nm}(t) \cos m\phi + h_{nm}(t) \sin m\phi P_{n}^{m}(\cos\theta),$$
(1)

где  $\theta$  - ко-широта,  $\varphi$  - долгота, r - расстояние от центра Земли, a - известная константа, t - время,  $P_n^m(\cos\theta)$  \_ присоединенные функции Лежандра, нормированные по Шмидту. Тогда компоненты вектора магнитной индукции в проекции на оси прямоугольной системы координат *Охуz*, где ось *Ох* направлена на север, ось *Оу* - на восток, *Оz* - вниз по направлению геоцентрической вертикали, можно представить как:

$$B_{x} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, B_{y} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}, B_{z} = \frac{\partial V}{\partial r}$$

Отметим, что совершенно аналогично из (1) могут быть вычислены пространственные производные потенциала более высокого порядка. Коэффициенты  $g_{nm}$ ,  $h_{nm}$  зависят от времени линейно:

$$g_{nm}(t) = g_{nm}(T_0) + g_{nm}(T_0)(t - T_0),$$
  

$$h_{nm}(t) = h_{nm}(T_0) + h_{nm}(T_0)(t - T_0).$$

Таким образом, модель полностью задается набором коэффициентов  $g_{nm}(T_0), \dot{g}_{nm}(T_0), h_{nm}(T_0), \dot{h}_{nm}(T_0)$ 

и начальным моментом времени  $T_0$ . Степень модели N отражает детальность представления данных: например, для модели IGRF12 [15] с N = 13, характерная длина волны составляет порядка 3000 км, а для модели EMM2015 [16] с N = 720 - порядка 56 км. Модель EMM2017 [17] является дальнейшем развитием EMM2015 с увеличением N до 790, что дает характерную длину волны порядка 51 км.

#### III. Коррекция с помощью магнитных измерений

Наш подход к использованию корректирующих магнитных измерений заключается в сведении задачи коррекции к линейной задаче оптимального оценивания и применения для решения последней фильтра Калмана [18], [19]. Уравнение динамики может быть представлено в виде [20]:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{q}_k, \qquad (2)$$

где  $F_k$  – матрица динамики,  $q_k$  – шумовая составляющая,  $x_k$  – вектор состояния:

$$\boldsymbol{x}_{k} = \left(\Delta \boldsymbol{x}_{k}^{T}, \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{v}_{k}^{T}, \boldsymbol{\beta}_{k}^{T}, \Delta \boldsymbol{w}_{k}^{T}, \Delta \boldsymbol{f}_{k}^{T}\right)^{T}$$

Здесь  $\Delta x_k$  – ошибки координат,  $\delta v_k$  – динамические ошибки скоростей,  $\beta_k$  – угол малого поворота,  $\Delta w_k$ ,  $\Delta f_k$  – ошибки датчиков угловых скоростей и акселерометров соответственно [21].

В свою очередь, уравнение измерений может быть записано в форме [9]:

$$\boldsymbol{z}_{k} = \boldsymbol{H}_{k} \boldsymbol{x}_{k} + \boldsymbol{r}_{k}, \qquad (3)$$

где  $H_k$  – матрица измерений,  $r_k$  – вектор шума в измерениях магнитометров,  $z_k$  – вектор измерений, имеющий вид:

$$z_k = B_k^{mod} - B_k^{mes},$$

где  $B_k^{mod}$  – индукция магнитного поля, вычисленная в данной точке по магнитной модели,  $B_k^{mes}$  – значение магнитной индукции, доставляемое измерителями.

Применение стандартного метода калмановской фильтрации к задаче в постановке (2), (3) позволяет получать как оценки навигационных ошибок, так и оценки инструментальных погрешностей чувствительных элементов, с последующей коррекцией БИНС по этим оценкам.

#### IV. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для проверки работоспособности описанного выше алгоритма, нами было проведено численное моделирование. В ходе него предполагалось, что подвижный объект движется вдоль сгенерированной программно траектории. Данная траектория строилась таким образом, чтобы включать в себя длительные участки полета на высотах от 20 до 30 км над поверхностью Земли. Общая длина траектории превышала 600 км, время движения по этой траектории было более 10 мин. Движения происходило в средних широтах, при этом начальная точка и направление полета выбирались таким образом, чтобы на траектории имелись два участка: в середине траектории со средними градиентами порядка 4 нТ/км, а в конце - порядка 7 нТ/км. Предполагалось, что БИНС построена на основе МЭМС-датчиков со следующими характеристиками: уход датчиков угловых скоростей 2°/час, ошибка акселерометров 0.005g. В качестве магнитного измерителя использовался феррозондовый магнитометр с точностью 5 нТ. Коррекция осуществлялась с частотой 1 Гц.

Результаты моделирования в виде горизонтальной и вертикальной составляющей ошибок определения координат в различных точках траектории приведены в табл. 1. Видно, что ошибка определения горизонтальных и вертикальной координаты в середине траектории (время полета примерно 5 мин) больше, чем ошибка в этих же величинах в конце траектории (для времени более 10 мин), что, на наш взгляд, объясняется более высокими средними градиентами вблизи конечного участка полета. Еще одной особенностью использования магнитных измерений в качестве корректирующей информации, не нашедшей своего отражения в табл. 1, является быстрое улучшение курсовой ошибки в самом начале траектории, что связано с использованием для коррекции векторных измерений, позволяющих дополнительно оценить ориентацию.

 TABLE I.
 Результаты моделирования

Составляющая	Ошибки, м				
ошибки	Середина траекто- рии	Конец траектории			
горизонтальная	290	180			
вертикальная	190	120			

#### V. Выводы

Таким образом, нами показано, что предлагаемый в настоящей статье алгоритм комплексирования БИНС с магнитными измерениями работоспособен и может применять в задачах, где не требуется достижения высокой точности навигационного решения. Привлекательной особенностью рассматриваемого алгоритма является использование глобальной модели магнитного поля Земли, что позволяет обойтись без предварительного картирования районов коррекции навигационной системы. Заметим также, что в настоящее время имеются глобальные магнитные модели аномального поля, например [22], позволяющие осуществлять коррекцию на низких высотах и достигать более высокой точности с использованием в целом аналогичного подхода.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Y. Huang et al, Theoretical research on full attitude determination using geomagnetic gradient tensor, Journal of Navigation, vol. 68, pp. 951-961, 2015.
- [2] T. Getscher and P. Frontera, Magnetic gradient tensor framework for attitude-free position estimation, International Technical Meeting of the Institute of Navigation, pp. 495-507, 2019.
- [3] T.N. Lee and A.J. Canciani, MagSLAM: Aerial simultaneous localization and mapping using Earth's magnetic field, Navigation, vol. 67, pp. 95-107, 2020.
- [4] О.А. Степанов, А.Б. Торопов, Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям // Гироскопия и навигация, № 3(90), с. 102–125, 2015.
- [5] О.А. Степанов, А.Б. Торопов, Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Часть 2. Современные тенденции развития // Гироскопия и навигация, №4 (91), с. 147-159, 2015.

- [6] E.V. Karshakov, M.Yu. Tkhorenko, and B.V. Pavlov, Aeromagnetic gradiometry and its application in navigation, Automation and Remote Control, pp. 897–910, 2018.
- [7] Каршаков Е.В., Павлов Б.В., Тхоренко М.Ю., Папуша И.А. Перспективные системы навигации летательных аппаратов с использованием измерений потенциальных физических полей // Гироскопия и навигация. Том 29. №1 (112), 2021. С. 32-51.
- [8] Тхоренко М.Ю., Каршаков Е.В. Estimating the Potential Accuracy of Magnetic Navigation Based on Magnetic Survey Data / Proceedings of the 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS-2022). Saint Petersburg: IEEE, 2022. C. 1-3.
- [9] Тхоренко М.Ю., Павлов Б.В., Каршаков Е.В., Волковицкий А.К. Интеграция бесплатформенной инерциальной навигационной системы с современными измерителями параметров аномального магнитного поля Земли // XXV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, сборник материалов. СПб: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2018. С. 26–29
- [10] G. Noriega, Performance measures in aeromagnetic compensation. The Leading Edge 2011;30 (10): 1122–1127.
- [11] G. Noriega, Aeromagnetic Compensation in Gradiometry— Performance, Model Stability, and Robustness, IEEE Geosci. Remote Sens. Lett., 2015, vol. 12, no. 1, pp. 117–121.
- [12] G. Backus, R. Parker and C. Constable. Foundations of geomagnetism. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [13] JF. Oehler, D. Rouxel, and MF. Lequentrec-Lalancette, Comparison of global geomagnetic field models and evaluation using marine da-

tasets in the north-eastern Atlantic Ocean and western Mediterranean Sea, Earth Planets Space 70, 99, 2018.

- [14] E. Thébault et al, The magnetic field of the Earth's lithosphere, Space Sci Rev 155:95–127, 2010.
- [15] E. Thébault et al, International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation, Earth Planets Space 67:79, 2015.
- [16] A.P. Chulliat et al, 2015: Enhanced Magnetic Model 2015. 1. NOAA National Centers for Environmental Information, https://doi.org/10.7289/V56971HV. Accessed [30.04.2023].
- [17] Enhanced Magnetic Model 2017 (EMM2017), https://www.ncei.noaa.gov/products/enhanced-magnetic-model. Accessed [30.04.2023].
- [18] J.S. Meditch, Stochastic Optimal Linear Estimation and Control, McGraw-Hill, 1969.
- [19] В.В. Александров, С.С. Лемак и Н.А. Парусников, Лекции по механике управляемых систем. М.: МАКС Пресс, 2012, 240 с.
- [20] А.А. Голован, Н.А. Парусников, Математические основы навигационных систем. Часть І. Математические модели инерциальной навигации. Изд-во Московского университета, 2010. 128 с.
- [21] А.А. Голован, Н.А. Парусников, Математические основы навигационных систем. Часть II. Приложение методов оптимального оценивания к задачам навигации. М.: МАКС Пресс, 2012. 172 с.
- [22] B. Meyer, R. Saltus and A. Chulliat. 2017: EMAG2v3: Earth Magnetic Anomaly Grid (2-arc-minute resolution). Version 3. NOAA National Centers for Environmental Information. https://doi.org/10.7289/V5H70CVX. Accessed [30.04.2023].

# Инерциально-спутниковая система микронавигации для радиолокатора с синтезированной апертурой и доплеровским каналом измерения траекторной скорости

А.В. Чернодаров Научно-производственное объединение «НаукаСофт» Университет МАИ, Москва, Россия e-mail: chernod@mail.ru В.Н. Коврегин Государственный университет аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия e-mail: kovregin@mail.ru

Аннотация—Рассматривается технология оценки и компенсации траекторных нестабильностей радиолокатора с синтезированной апертурой антенны (РСА) с помощью интегрированной системы микронавигации. Такая система включает, кроме инерциально-спутникового модуля, доплеровский измеритель скорости и угла сноса. Интеграция указанных измерителей позволяет оценивать не только позиционные, но угловые нестабильности фазового центр антенны РСА. Приводятся результаты математического моделирования, подтверждающие целесообразность применения предлагаемой технологии для повышения разрешающей способности РСА в условиях турбулентной атмосферы.

Ключевые слова—радиолокатор с синтезированной апертурой антенны, траекторные нестабильности, инерциальная навигационная система, спутниковая навигационная система, доплеровский измеритель скорости, обобщенный фильтр Калмана.

#### I. Введение

В настоящее время актуальной остается задача повышения разрешающей способности радиолокационных систем (РЛС) при обзоре больших участков земной поверхности с борта летательного аппарата (ЛА) [1]. Решение такой задачи путем аппаратурного увеличения размера антенны не всегда представляется возможным из-за ограничений на массу и габариты бортового оборудования ЛА. Поэтому реализуют аналитическое расширение диаграммы направленности путем «склейки» изображений, получаемых бортовой РЛС на траектории полета ЛА. При таком синтезе апертуры антенны РЛС возникает необходимость компенсации искажений изображения из-за траекторных нестабильностей, связанных с отклонением ЛА от прямолинейного полета. Траекторные нестабильности на интервале обзора могут определяться с помощью инерциально-спутниковой системы микронавигации, размещенной вблизи фазового центра антенны (ФЦА). Для компенсации указанных нестабильностей их оценки преобразуются в поправки к сигналам радиолокатора с синтезированной апертурой антенны (РСА) [2]. Однако инерциально-спутниковая микронавигация не в полной мере обеспечивает точность определения колебаний ЛА по углам ориентации. Поэтому возникает необходимость кроме инерциальноспутниковых применять дополнительные средства микронавигации для РСА. Такими могут быть, например, следующие средства, позволяющие повысить точность определения угловых колебаний ЛА:

Г.М. Коврегина Государственный университет аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия e-mail: g\_kovregina@mail.ru

- доплеровский измеритель скорости и угла сноса (ДИСС), определяющий проекции вектора траекторной скорости на оси связанной с ЛА системы координат;
- РСА, в котором реализован доплеровский режим измерения траекторной скорости в направлении диаграммы направленности.

Цель работы – исследовать потенциальные возможности комбинированной инерциально-спутниковой системы микронавигации РСА с доплеровским каналом измерений траекторной скорости.

Достижение цели опирается на применение комбинированных инерциально-спутниковых и инерциальнодоплеровских наблюдений для оценки с помощью обобщенного фильтра Калмана (ОФК) [3] ошибок определения параметров микронавигации, в том числе углов ориентации.

#### II. ИНТЕГРИРОВАННАЯ СИСТЕМА МИКРОНАВИГАЦИИ ДЛЯ РАДИОЛОКАТОРА С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ АНТЕННЫ

Требования к точностным характеристикам системы микронавигации для PCA вытекают из взаимосвязи ошибок определения дальности D до объекта и разности фаз  $\Delta \phi$  излучаемого и принимаемого сигналов. Разность фаз определяется задержкой сигнала  $\tau$ , которая связана с измеренной дальностью следующими соотношениями [2]

$$\Delta \varphi = \omega_0 \tau = 2\pi f_0 \tau = 2\pi c \tau / \lambda;$$
  

$$D = c \tau / 2 = \lambda \Delta \varphi / (4\pi), \qquad (1)$$

где *с* – скорость распространения радиоволн;  $\lambda$  – длина волны электромагнитного излучения;  $\omega_0 = 2\pi f_0$  – несущая частота.

Из соотношения (1) видно, что для сантиметрового диапазона длин волн и миллиметровых изменений дальности из-за траекторных нестабильностей изменения разности фаз могут достигать десятков градусов. Поэтому позиционные ошибки определения траекторных нестабильностей на интервале синтезирования апертуры должны быть на уровне миллиметров-единиц сантиметров. В работе [4] показана возможность получения необходимых точностей позиционирования PCA с помощью инерциально-спутниковой системы микронавигации на интервалах синтезирования апертуры в несколько секунд. В то же время при построении РСА необходимо учитывать и угловые нестабильности ФЦА относительно прямолинейной траектории полета.

Можно показать, что радиальная фазовая поправка зависит от точности определения углов ориентации ЛА. При наличии радиальной скорости до объекта  $V_D = \dot{D}$  фаза принимаемого сигнала имеет вид [2]

$$\begin{split} \varphi &= \omega_0 [t - \tau(t)] = 2\pi f_0 (t - \frac{2D_0}{c} \pm \frac{2V_D t}{c}) = \\ &= 2\pi (f_0 + f)t - \varphi_0, \end{split} \tag{2}$$

где t – время формирования кадра PCA;

 $\phi_0 = \frac{4\pi f_0}{c} D_0 = \frac{4\pi}{\lambda} D_0 -$ опорная фаза излучения с

длиной волны  $\lambda$ ;  $D_0 = D(t_0)$ ;  $f = \pm 2V_D / \lambda$  – доплеровское смещение частоты. Знак смещения определяется направлением движения ФЦА.

Таким образом, в процессе синтезирования апертуры необходимо определять поправки к фазе  $\Delta \phi = 4\pi t \Delta D / \lambda$ , обусловленные эволюциями ЛА относительно опорной траектории, где  $\Delta D = D(t) - D(t_0)$  – поправка к измеренной дальности до объекта.

С учетом указанных особенностей навигационного обеспечения PCA может быть сформирован следующий алгоритм определения траекторных нестабильностей ФЦА, включающий этапы начальной выставки и микронавигации.

1. В начальный момент синтезирования апертуры антенны определяются начальные значения проекций  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  опорного радиуса-вектора «ФЦА-объект»  $D_0$  на оси системы координат *охуг*, связанной с инерциальным измерительным модулем (ИИМ)

$$x_0 = D_0 \cos \beta_0 \cos \alpha_0; \ z_0 = -D_0 \cos \beta_0 \sin \alpha_0;$$

 $y_0 = D_0 \sin \beta_0$ , где  $\alpha_0, \beta_0$  – азимут и угол места объекта в связанной системе координат *охуг*.

Полагается, что ИИМ размещается около ФЦА. Полагается также, что взаимная ориентация систем координат, связанных с ЛА и ИИМ, известна.

2. Запоминаются начальные значения геодезической широты  $B_0$ , долготы  $L_0$  и высоты  $h_0$  над земным эллипсоидом, а также углов истинного курса  $\Psi_0$ , тангажа  $\vartheta_0$  и крена  $\gamma_0$  ЛА относительно сопровождающего трехгранника геодезической системы координат *оЕNH*.

Текущие значения углов ориентации определяются по элементам матрицы направляющих косинусов (МНК)  $C_3(t)$ , характеризующей взаимную ориентацию трехгранников *охуг и оЕNH*. МНК  $C_3(t)$  определяется из решения уравнения Пуассона [5]

 $\dot{C}_3 = \Pi_0 C_3 - C_3 \Pi_1, \tag{3}$ 

$$\Pi_{0} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\Theta}_{z} & -\dot{\Theta}_{y} \\ -\dot{\Theta}_{z} & 0 & \dot{\Theta}_{x} \\ \dot{\Theta}_{y} & -\dot{\Theta}_{x} & 0 \end{bmatrix}; \ \Pi_{1} = \begin{bmatrix} 0 : (\omega_{H} + \Omega_{H}) : -(\omega_{N} + \Omega_{N}) \\ -(\omega_{H} + \Omega_{H}) : 0 : \omega_{E} \\ (\omega_{N} + \Omega_{N}) : -\omega_{E} : 0 \end{bmatrix};$$

 $\dot{\Theta}_x, \dot{\Theta}_y, \dot{\Theta}_z$  – сигналы датчиков угловых скоростей (ДУС);  $\bar{\Omega}_{ENH} = [0 : \Omega \cos \phi : \Omega \sin \phi]^T$  – вектор угловой скорости вращения Земли. Угловые скорости облета Земли  $\omega_E, \omega_N, \omega_H$  определяются по проекциям  $V_E, V_N, V_H$  вектора относительной скорости  $\bar{V}$  из решения основного уравнения инерциальной навигации [5].

На этапе синтезирования апертуры антенны РСА определяются следующие параметры.

1. Текущие позиционные нестабильности ФЦА (1) в проекциях на оси опорного трехгранника *оENH* 

$$\Delta E = (L - L_0)R \cos B; \ \Delta N = (B - B_0)R; \ \Delta H = R - R_0$$

где *R* – величина радиус-вектора местоположения ФЦА.

2. Текущие нестабильности ФЦА по углам ориентации

$$\Delta \psi = \psi - \psi_0; \ \Delta \vartheta = \vartheta - \vartheta_0; \ \Delta \gamma = \gamma - \gamma_0.$$

3. МНК для приращений углов ориентации  $\Delta C_3 (\Delta \psi, \Delta \vartheta, \Delta \gamma)$ .

4. Текущие позиционные нестабильности ФЦА в связанной системе координат

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \Delta C_3 \begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta N \\ \Delta H \end{bmatrix}.$$

5. Текущие поправки к измеренной дальности до объекта

$$\Delta D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Можно видеть, что точность определения поправки к измеренной дальности до объекта зависит не только от позиционных, но и от угловых нестабильностей.

Следует отметить, что ошибки позиционирования ФЦА оцениваются, как правило, с использованием инерциально-спутниковых наблюдений

$$Z_{K(i)} = [B_i L_i h_i]_{\Phi \amalg A}^{\mathrm{T}} - [B_i L_i h_i]_{\Gamma \mathrm{HCC}}^{\mathrm{T}}; \qquad (3)$$

$$Z_{V(i)} = [V_E V_N V_H]_{\Phi \amalg A(i)}^{\mathrm{T}} - [V_E V_N V_H]_{\Gamma \mathrm{HCC}(i)}^{\mathrm{T}}.$$
 (4)

Однако традиционные инерциально-спутниковые наблюдения не обеспечивают наблюдаемость ошибок ориентации ФЦА на интервале синтезирования апертуры. Для повышения наблюдаемости нестабильностей ФЦА по углам ориентации предлагается дополнительно использовать инерциально-доплеровские наблюдения

$$Z_{V(i)} = C_3 [V_E V_N V_H]_{\Phi \amalg A(i)}^{\rm T} - [V_x V_y V_z]_{\Xi \amalg CC(i)}^{\rm T}.$$
 (5)

#### III. Анализ Результатов Исследований

Исследование представленных алгоритмов микронавигации выполнено путем математического моделирования, позволяющего определить потенциальные возможности рассматриваемых подходов. Использованная методика моделирования основана на решении обратной задачи инерциальной навигации [6]. Такая методика позволяет по имитируемой траектории и соответствующим ей параметрам полета ЛА формировать сигналы идеальных и реальных датчиков первичной информации бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС). По указанным сигналам решаются уравнения идеальной и реальной БИНС, а также формируются сигналы глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС) и ДИСС.

Базовый вектор состояния БИНС включает: ошибки счисления составляющих вектора относительной скорости, ошибки счисления МНК ориентации, угловые дрейфы ДУС, смещения сигналов акселерометров, ошибки счисления широты, долготы и высоты относительно земного эллипсоида.

Некоторые результаты моделирования представлены на рисунках 1 – 3. На рисунке 1 показана моделируемая траектория полета в плане.



Рис. 1 Моделируемая траектория полета в плане

На рисунке 2 показана круговая ошибка определения углов ориентации ФЦА на интервале синтезирования 10с при обработке инерциально-спутниковых наблюдений (3), (4) с помощью ОФК. Аналогичная ошибка при обработке дополнительно инерциально – доплеровских наблюдений (5) показана на рисунке 3, где



0.05



Рис. 2. Ошибка ориентации ФЦА для БИНС+ГНСС

 $\psi_{2}, \vartheta_{2}, \gamma_{3}$  – эталонные значения углов ориентации, сформированные идеальной БИНС.

Дисперсии ошибок измерений траекторной скорости для ГНСС и ДИСС 0.5 м/с. Частота обработки наблюдений 1Гц.



Рис. 3. Ошибка ориентации ФЦА для ИНС+ГНСС+ДИСС

Можно видеть, что дополнение системы микронавигации доплеровским каналом измерений скорости позволило уменьшить ошибки определения углов ориентации ФЦА в 1.8-2 раза.

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При компенсации траекторных нестабильностей в сигналах РСА необходимо учитывать, как позиционные, так и угловые отклонения ЛА от прямолинейного полета. Оценка таких отклонений на интервале синтезировании апертуры антенны РСА может быть реализована по информации БИНС, дискретно корректируемой от ГНСС и ДИСС. Режим инерциально-спутниковой микронавигации с доплеровским каналом измерения траекторной скорости может быть дополнением к процедуре автофокусировки [2] РСА.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Кулакова, В.И. Система микронавигации для поддержки радиолокатора с синтезированной апертурой на борту малогабаритного БПЛА / В.И. Кулакова, С.А. Ноздрин, А.Ю. Сохарев, Д.В. Царик // Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27. №4. С. 130-146.
- [2] Антипов, В.Н. Авиационные системы радиовидения / В.Н. Антипов, А.Ю. Викентьев, Е.Е. Колтышев и др., под ред. Г.С. Кондратенкова. М.: Радиотехника, 2015. 648с.
- [3] Maybeck, P.S., Stochastic Models, Estimation and Control. N.Y., Academic Press, 1982, vol. 2.
- [4] Чернодаров, А.В. Использование инерциально-спутниковой навигационной системы для определения параметров движения фазового центра антенны радиолокатора / А.В. Чернодаров, А.П. Патрикеев, В.Н. Коврегин, Г.М. Коврегина // XXIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2016. С. 266 - 274.
- [5] Savage, P.G. Strapdown Analytics. Maple Plan, Minnesota, Strapdown Associates Inc., 2007, Part 1.
- [6] Чернодаров, А.В. Тестовый контроль программно-аппаратного модуля БИНС на основе решения обратной задачи инерциальной навигации / А.В. Чернодаров, Н.П. Старостин // XXXIII конференция памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. 15-ая мультиконференция по проблемам управления. СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2022. С. 41 - 43.

# Алгоритм ориентации и навигации подвижного объекта на основе обработки изображений с нескольких оптических сенсоров

В.А. Смирнов ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» Тула, Россия veld071@rambler.ru

А.В. Прохорцов ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» Тула, Россия ProxAV@rambler.ru Н.И. Бабухин ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» Тула, Россия nikolai.babuxin@gmail.com

Аннотация—Рассматривается алгоритм определения координат подвижного объекта на основе обработки данных с нескольких оптических сенсоров. Изменение углового положения определяется на основе сравнения данных оптических сенсоров в текущий и предыдущий моменты времени. Особенностью алгоритма является использование для определения положения подвижного объекта трех и более разнесенных камер.

Ключевые слова—комплексирование, оптическая система, навигационная система, SLAM.

#### I. Введение

Современные подвижные объекты требуют все более точных и помехозащищенных алгоритмов определения параметров ориентации и навигации. Одним из направлений являются системы ориентации и навигации, основанные на применении оптических сенсоров. Хотя указанное направление активно развивается и определению координат подвижных объектов с помощью изображений видеокамер посвящено значительное число работ, большинство алгоритмов рассчитано на системы монокулярного или стереоскопического зрения. Рассмотрение только монокулярных или стереоскопических систем обусловлено ограничением производительности микропроцессорных систем, выполняющих обработку изображений, но в настоящее время развитие микропроцессорных систем обеспечивает возможность обработки данных с многих оптических сенсоров. В работе представлен один из алгоритмов определения координат подвижного объекта.

#### II. Алгоритм построения траектории движения



Рис. 1. Функциональная схема алгоритма.

Работа алгоритма основана на определении координат наблюдаемых опорных точек в связанной системе координат на основе их координат в системе изображения. Поскольку координаты опорных точек в базовой системе координат не меняются, то по их значениям в связанной системе координат несложно рассчитать координаты подвижного объекта в базовой системе.



Рис. 2. Детектирование общей точки

Определение положения ПО включает несколько основных шагов.

1. Захват кадров. На этом этапе выполняется захват изображений с нескольких камер в один момент времени. Для этого в системе необходимо использовать камеры с высокой частотой кадров, а также возможность синхронизации.

2. Поиск опорных точек. На этом этапе выполняется поиск и захват опорных точек на изображении от каждой камеры соответствующие одной и той-же точке местности. Так как для работы системы требуется высокое быстродействие, используется известный алгоритм быстрого детектирования ORB. Выходом алгоритма является массив опорных точек.

3. Сопоставление опорных точек, полученных с разных камер. Данный этап выполняется для калибровки оптической системы перед началом построения траектории. На этом этапе массивы опорных точек от различных камер сопоставляются между собой на основе популярного алгоритма КLT (Канады–Лукаса–Томази). Данный алгоритм прост в реализации и не предъявляет высоких требований к производительности.

 Сопоставление опорных точек между кадрами.
 На этом этапе выполняется сопоставление опорных точек между кадрами в текущий и предыдущий моменты времени, так же с применением алгоритма KLT.

5. Вычисление матрицы направляющих косинусов. Вычисляются матрицы направляющих косинусов для каждой камеры  $A_i$  относительно системы координат, связанной с подвижным объектом, на котором установлены камеры (они определяются по относительному повороту камер). Если одна из камер точно ориентирована по осям подвижного объекта и установлена в его центре масс, то для этой камеры матрица направляющих косинусов примет вид.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычисляются преобразованные значения координат

$$\begin{bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \\ z_i^* \end{bmatrix} = A_i^T \begin{vmatrix} \frac{1}{f_{xi}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_{yi}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ 1 \end{bmatrix}$$

где  $f_{xi}$ ,  $f_{yi}$  – фокусное расстояние объектива камеры *i* по осям *OX* и *OY*.

Матрица направляющих косинусов определяется единожды в момент калибровки системы.

6. Восстановление позиции подвижного объекта. Шестом этапе выполняется расчет координат подвижного объекта в базовой системе координат.

Так как система уравнений для нахождения матрицы является переопределённой, ее решение осуществляется методом псевдообращения матриц. Псевдообратная матрица вычисляется с помощью сингулярного разложения. Из вычисленной матрицы преобразования координат определяется поворот и смещение оптической системы.

Для поиска вектора смещения подвижного объекта решается система линейных уравнений:

$$H_c \overline{d} = \overline{b}$$

где  $\overline{d} = [x, y, z]^T$  – вектор переноса (координат),  $H_c$  – матрица коэффициентов при переменных уравнения,  $\overline{b}$  – матрица-столбец коэффициентов правых частей системы уравнений.

7. Финальная фильтрация полученной траектории движения для отсеивания аномальных точек. Последним этапом вычислений является фильтрация выбросов при определении координат подвижного объекта. Для этого в системе используется фильтр Калмана.

#### III. ИСПЫТАНИЕ АЛГОРИТМА

Для испытания алгоритма были использованы три и четыре связанных между собой камеры «рыбий глаз». Оптическая система была сконфигурирована таким образом, чтобы между кадрами цифровых камер была единая область пересечения обзора. Это необходимо для сопоставления опорных точек и вычисления матрицы преобразования. Так же система камер была предварительно откалибрована в соответствии с расположением оптических сенсоров.

В качестве вычислительной системы использовался персональный компьютер с процессором Intel core 15 и видеоускорителем Nvidia gtx1060. Для проверки возможности использования алгоритма в портативных системах были проведены испытания на одноплатном компьютере Nvidia jetson nano. Алгоритм реализован на языке программирования C++ с использованием библиотек OpenCV и Eigen. Полученная траектория была оценена с помощью среднеквадратического отклонения относительно реального движения. Также проведено сравнение с монокулярной оптической системой.



Рис. 2: а – траектория многокамерной одометрии, б – траектория монокулярной одометрии, в – реальная траектория

Для оценки был выбран достаточно сложный участок движения в замкнутом помещении, тем не менее экспериментальные исследования показали, что использование изображений с трех и более камер может обеспечивать повышение точности определения координат по сравнению с монокулярными и бинокулярными системами.

#### IV. Заключение

Данный способ определения координат подвижного объекта отличается простотой в расширении на произвольное число камер и опорных точек изображения, что гарантирует высокую точность расчета приращений координат.

#### Литература

- Ethan Rublee, Vincent Rabaud, Kurt Konolige, Gary Bradski, ORB: an efficient alternative to SIFT or SURF, Computer Vision (ICCV), IEEE International Conference on. IEEE, pp. 2564–2571, 2011.
- [2] Paul G. Savage. Strapdown analytics. Part 1 // Strapdown associates, Inc Maple Plain, Minnesota, 2000, 817 pp.
- [3] Емельянцев Г.И., Степанов А.П. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / под общей редакцией акад. РАН В.Г. Пешехонова. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. 394 с.
- [4] Хорн Б. К. П. Зрение роботов. Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 487 с.
- [5] Джеррард А., Бёрч Дж. М. Введение в матричную оптику / Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 342 с.
- [6] OpenCV: http://opencv.org
- [7] Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов/ Пер. с англ. М.: Наука., 1986.-232 с.
- [8] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 1994. 544 с.
- [9] Lucas B.D. An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision / B.D. Lucas, T. Kanade, Proceedings of the 7th international joint conference on Artificial intelligence. 1981. Vol. 2. P. 674–679.
- [10] Али Б., Садеков Р.Н., Цодокова В.В. Алгоритмы навигации беспилотных летательных аппаратов с использованием систем технического зрения Гироскопия и навигация. 2022. Т. 30. №4 (119). С. 87-105.

# Применение алгоритма самоорганизации с резервированием трендов в навигации и картографировании автомобиля

Ц. И *МГТУ им. Н.Э. Баумана* Москва, Россия yijianfeng3639@gmail.com

К.А. Неусыпин *МГТУ им. Н.Э. Баумана* Москва, Россия neysipin@mail.ru

Аннотация-В данной статье предложен алгоритм самоорганизации с резервированием трендов для разработки системы навигации и картографирования автомобиля. Система навигации и картографирования автомобиля обладает интеллектуальной компонентой, так называемой акцептором действия. В акцепторе действия для построения прогнозирующей модели погрешностей навигации использован предложенный алгоритм самоорганизации, в котором использован ансамбля критериев селекции. Лидарные системы и инерциальные навигационные системы использованы в качестве базовых измерительных систем. При отсутствии навигационных информаций из других датчиков с помощью построенной прогнозирующей модели осуществлена коррекция погрешности навигации автомобиля. В конце обработки данных использован фильтр Калмана для получения оптимальной оценки погрешности навигации.

Ключевые слова—алгоритм самоорганизации, ансамбль критериев селекции, акцептор действия, лидарная одометрия и картографирование, инерциальная навигационная система, автомобиль.

#### I. Введение

При вождении интеллектуальных транспортных средств для обеспечения навигационных информаций обычно используется комбинация систем лазерных сканеров, инерциальных навигационных систем (ИНС), спутниковых навигационных систем (СНС), и др. Важным условием является предоставление точных навигационных информаций для транспортных средств при реализации интеллектуального вождения или беспилотного вождения.

Из практики известно, что движение автомобиля с переменной скоростью приводит к искажению информаций об облаках точек, полученных при лазерном сканировании; длительное движение автомобиля приводит к накоплению ошибок в инерциальной навигационной системе; спутниковая навигационная система нельзя использована в подземных автостоянках, туннелях и других местах, где невозможно принять сигнал спутниковой навигационной системы.

В данной статье разработка системы навигации и картографирования основана на системе лидарной одометрии и картографирования (СЛОК), и ИНС. С помощью метода лидарной одометрии и картографирования получаются информации о местоположении и ориентации автомобиля в процессе вождения, также о облаках точек окружающей среды, используемых для построения карты [1–3]. М.С. Селезнева МГТУ им. Н.Э. Баумана Москва, Россия m.s.selezneva@mail.ru

Ц. Чжэн *МГТУ им. Н.Э. Баумана* Москва, Россия j.z.zheng@yandex.ru

Цель данной статьи представляет собой применение алгоритма самоорганизации с резервированием трендов для коррекции ошибок, генерируемых каждой навигационной системой в процессе вождения транспортного средства, чтобы повысили точность навигации и картографирования.

#### II. СИСТЕМА НАВИГАЦИИ И КАРТОГРАФИРОВАНИЯ АВТОМОБИЛЯ С ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

Интеллектуальная система навигации и картографирования автомобиля (ИСНК) разработана на теории функциональных системы П.К. Анохина [4–6]. Это система обладает специфическим узловым механизмом – акцептором действия, который представляет собой интеллектуальную компоненту. Акцептор действия включает алгоритм построения прогнозирующей модели исследуемых параметров ИСНК, алгоритмы прогноза и сравнения текущих измерений с прогнозом.

В ИСНК использованы СЛОК и ИНС в качестве базовых измерительных систем. СНС, система одометрии колеса, система визуальной одометрии и другие измерительные системы примерены в качестве дополнительных датчиков информации с целью повышения точности выходной информации. Структура ИСНК представлена на рис. 1.



Рис. 1. Структура ИСНК автомобиля с интеллектуальной компонентой



Рис. 2. Схема процесса метода лидарной одометрии и картографирования

На рис. 1. введены следующие обозначения: СЛОК – система лидарной одометрии и картографирования; Z – измерительные данные; БО – блок оценивания;  $\theta$ ,  $\Theta$  – истинная информация состояния автомобиля; x – по-грешности ИНС;  $\hat{x}$  – оценки погрешности ИНС;  $\hat{x}$  – ошибка оценивания;  $\hat{x}$  – прогноз погрешностей ИНС; БКС – блок комплексирования и сравнения; АПМ – алго-

ритм построения модели; АП – алгоритм прогноза; БК – блок комплексирования.

СЛОК – это популярный метод одновременной локализации и картографирования, который представляет собой вычислительную задачу построения или обновления карты неизвестной среды при одновременном отслеживании местоположения автомобиля в ней. Разработка СЛОК основана на концепциях вычислительной геометрии и компьютерного зрения. Данная система использована в навигации автомобиля, картографировании автомобиля и одометрии для виртуальной или дополненной реальности. Схема процесса метода лидарной одометрии и картографирования представлена на рис. 2.

В БКС определяется наилучший состав ИСНК с помощью критерия степени наблюдаемости, формируются измерения для алгоритмов оценивания и алгоритма построения прогнозирующей модели. В БКС проводится сравнение прогноза с результатами действия.

В БКС заново определяются степени наблюдаемости переменных состояний и наилучшей структуры ИСНК при изменении среды функционирования автомобиля. В этом случае необходимо сформировать математическую модель в АПМ для прогнозирования погрешностей ИНС. Для построения прогнозирующей модели использован алгоритм самоорганизации, например, Метод Группового Учета Аргументов (МГУА) [7].

Чтобы получить наиболее достоверные информации в БКС применяется численный критерий степени наблюдаемости, который включается в ансамбль критериев селекции. Степень наблюдаемости представляет собой качественную характеристику наблюдаемых компонент вектора состояния.

В дискретной форме уравнение погрешностей ИНС имеет вид:

$$x_{k} = Fx_{k-1} + W_{k-1}, \qquad (1)$$
  

$$\Gamma A \mathfrak{e} \quad x_{k} = \begin{bmatrix} \delta S_{k} \\ \delta V_{k} \\ \delta \theta_{k} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & -gT \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ \omega_{b} \end{bmatrix},$$

 $x_{k}$  – вектор состояния объекта; F – фундаментальная матрица системы;  $W_{k-1}$  – вектор входного возмущения;  $\delta S_{k}$  – погрешность в определении положения автомобиля;  $\delta V_{k}$  – погрешность в определении скорости автомобиля;  $\delta \theta_{k}$  – погрешность в определении ориентации автомобиля; g – ускорение силы тяжести; T – период дискретизации; B – смещение нуля акселерометра;  $\omega_{b}$  – смещение нуля гиростабилизированной платформы.

Уравнение измерений имеет вид:

$$z_k = H_k x_k + v_k. aga{2}$$

Численный критерий степени наблюдаемости имеет вид [8, 9]:

$$\lambda_k^i = \frac{M\left[\left(x_k^i\right)^2\right]}{M\left[\left(y_k^i\right)^2\right]\sum_{j=1}^l \varsigma_{ij}^2},$$
(3)

где  $M\left[\left(x_{k}^{i}\right)^{2}\right]$  – дисперсия произвольной *i*-ой компоненты вектора состояния;  $M\left[\left(y_{k}^{i}\right)^{2}\right]$  – дисперсия формируемого измеряемого вектора состояния *y*;  $\zeta_{ij}$  – *i*-я строка матрицы  $S_{k}^{-1}$ .

Матрица  $S_k$  имеет вид:

$$S_{k} = \begin{bmatrix} H \\ HA_{k,k-1} \\ HA_{k,k+1}A_{k,k-1} \\ \dots \end{bmatrix}.$$
 (4)

Приведенный измерительный шум имеет вид:

$$v_k^{*i} = \varsigma_1^i v_1 + \varsigma_2^i v_2 + \dots + \varsigma_l^i v_l.$$
 (5)

Дисперсия приведенного измерительного шума имеет вид:

$$r_{k}^{*i} = M\left[\left(v_{k}^{*i}\right)^{2}\right] = \left[\varsigma_{1}^{i2} + \varsigma_{2}^{i2} + \dots + \varsigma_{l}^{i2}\right]r_{k}, \qquad (6)$$

здесь  $r_k = M \left[ v_k^2 \right]$  – дисперсия исходного измерительного шума  $v_k$ .

В БО адаптивная модификация фильтра Калмана использована в качестве алгоритма оценивания чтобы оценить вектор состояния [9]. Затем осуществлена коррекция погрешностей ИНС

В БК осуществлено комплексирование навигационных информаций из ИНС и СЛОК, на выходе ИСНК получены скорректированные информации местоположения, при этом получена более точная карта парковки.

#### III. АЛГОРИТМ САМООРГАНИЗАЦИИ С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ ТРЕНДОВ

Известно, что одним из недостатков автономных ИНС, установленных на автомобиле, является накопление погрешностей определения навигационных параметров с течением времени. Обычно коррекция автономных ИНС проводится с помощью использования навигационных информаций из внешних датчиков. Однако для коррекции автономных ИНС, СНС не способны предоставлять навигационных информаций при движении автомобиля на подземной стоянке, визуальные датчики не способны предоставлять точных информаций в темных средах. В вышеуказанных случаях для коррекции погрешностей ИНС необходимо сформировать математическую модель с помощью использования алгоритма самоорганизации.

Алгоритм самоорганизации представляет собой систему эвристической самоорганизации с многорядной или иерархической структурой. В каждом ряду этой системы используются пороговые самоотборы полезных информаций, итак, оптимальная математическая модель получается в последней ряде системы.

В данной статье в качестве алгоритма самоорганизации использован МГУА, который следует правилу порогового самоотбора [10]. Алгоритм самоорганизации основан на гипотезе селекции моделей с помощью использования ансамбля критериев. Модель алгоритма самоорганизации имеет вид:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{N} a_{i} \mu_{ni}(f_{i}x) , \qquad (7)$$

где N – число базисных функций в модели;  $\mu_{ni}$  – базисные функции из набора базисных функций  $F_n$ .

Использование в алгоритме для селекции моделей критериев степени наблюдаемости позволяет получить модели с улучшенными качественными характеристиками.

В процессе построения прогнозирующей модели могут появляться значительные изменения условий функционирования автомобиля. Это приводит к увеличению объема вычислений, времени получения модели оптимальной сложности. Во избежание данных проблем использован алгоритм самоорганизации с резервированием трендов [11].

Тренды с различными базисными функциями резервируются и используются при усложнении модели на более поздних рядах селекции для разнообразия функционального базиса.

Обычно при построении прогнозирующей модели погрешностей ИНС исходный базис содержит линейную и гармоническую функции, их комбинация используется на первых рядах селекции модели. Затем при скрещивании моделей гармоническая функция избрана как наиболее эффективная, причина того заключается в том, что исследуемый процесс имеет явно синусоидальный характер.

Поэтому в дальнейшем используется только гармоническая функция, которая избрана как доминирующая в процессе построения модели. При обновлении измерительной выборки, на которой строится модель, характер исследуемого процесса может существенно измениться. При этом эффект старения измерений и эффект инбридинга будут влиять на точность построения модели. Высокоспециализированная модель с однородным базисом нуждается в значительном количестве рядов селекции для получения модели оптимальной сложности. Сокращение количества рядов селекции может достигнуто путем использования для усложнения модели резервированных трендов. Итак, в процессе селекции резервируются тренды с различными базисными функциями, и узкоспециализированные модели усложняются трендами с другими базисными функциями.

Резервирование трендов помогает снизить влияние этих эффектов. Резервирование трендов с высокой степенью управляемости и использование их в процессе селекции помогает строить простые модели, которые в дальнейшем могут быть использованы для эффективного управления динамическими объектами.

Функциональная схема алгоритма самоорганизации с резервированием трендов показана на рис. 3. На рис. 3 введены следующие обозначения: *F* – базисные функции; *АКС* – ансамбль критериев селекции; *C* – способ скрещивания моделей.



Рис. 3. Функциональная схема алгоритма самоорганизации с резервированием трендов

Алгоритм модифицированных трендов имеет вид:

$$\hat{x}_{k} = \hat{x}_{k-1} + c_{k-1}, \qquad (8)$$

где  $\hat{x}_k$  – прогноз погрешности ИНС;  $c_{k-1}$  – функция, характеризующая кругизну тренда.

Прогнозирующая модель в классическом алгоритме самоорганизации имеет вид:

$$c_{k-1} = \sum_{i=1}^{N} a_{i} \mu_{ni}(f_{i}x), \qquad (9)$$

здесь N – число базисных функций в модели;  $\mu_{ni}$  – базисные функции из набора базисных функций  $F_n$ .

Для селекции модифицированных трендов используются общие критерии, образующие ансамбль критериев селекции. Разделим выборку из N точек на два части: A – обучающая последовательность, на которой строятся модели, а B – проверочная последовательность.

Среднеквадратическая ошибка, рассчитанная на последовательности *B*, называется критерием регулярности:

$$CR^{2}(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_{B}} (y_{i} - q_{i})^{2}}{\sum_{i=1}^{N_{B}} y_{i}^{2}},$$
(10)

здесь  $y_i$  – значения последовательности B, а  $q_i$  – значения, прогнозируемые с помощью модели.

Критерий минимального смещения имеет следующий вид:

$$MB^{2}(b) = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha N} (q_{i}^{A} - q_{i}^{B})^{2}}{\alpha \sum_{i=1}^{N_{B}} y_{i}^{2}},$$
(11)

здесь  $\alpha$  – коэффициент экстраполяции, а A и B – две части входной последовательности. По данному критерию выбраны наименее чувствительные модели к изменению входной выборки.

Критерий сходимости пошагового интегрирования конечно-разностных моделей имеет вид:

$$IC = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - q_i)^2}{\sum_{i=1}^{N} y_i^2},$$
(12)

здесь *IC* – это ошибка пошагового интегрирования на интервале интерполяции.

Помимо вышеуказанных трех критериев, ансамбль критериев селекции также включает критерий баланса, критерий простоты модели и т.д.

В ИСНК используется не один из вышеуказанных критериев, а ансамбль критериев, который имеет следующий вид:

$$SoC = r_{cr}CR^2 + r_{mb}MB^2 + r_{ic}IC , \qquad (13)$$

здесь SoC – суммарный критерий селекции моделей;  $r_{cr}$ ,  $r_{mb}$ ,  $r_{ic}$  – весовые коэффициенты, которые определяются из практических соображений.

Таким образом, использование алгоритма самоорганизации с резервированием трендов позволяет строить простые и высокоточные прогнозирующие модели погрешности ИНС для коррекции ИСНК.

#### **IV.** Эксперименты

В данной статье эксперименты реализованы посредством моделирования в МАТLАВ. При моделировании блок «Simulation 3D vehicle with ground following» используется для имитации движения автомобиля по указанному маршруту, а лидар используется для записи информации об облаках точек по пути. Скорость автомобиля – 2,48 м/с. Полученные результаты моделирования представлены в следующем.

Сравнение реальной траектории автомобиля, траектории, полученной алгоритмом СЛОК, и оптимизированной траектории, полученной системой ИСНК представлено на рис. 4. Из рис. 4 видно, что траектория, полученная системой ИСНК, имеет более высокую степень совпадения с реальной траекторией.

Трехмерная карта парковки, оптимизированная системой ИСНК, представлена на рис. 5. По сравнению с трехмерной картой, полученной алгоритмом СЛОК, очевидно, оптимизированная трехмерная карта парковки обладает более высокой точностью.



Рис. 4. Сравнение траектории, полученной алгоритмом СЛОК, и оптимизированной траектории, полученной системой ИСНК



Рис. 5. Трехмерная карта парковки, оптимизированная системой ИСНК

На основе оптимизированной трехмерной карты парковки возможно идентифицировать транспортные средства и пустые парковочные места с помощью алгоритма идентификации облаках точек, построить траекторию парковки для автоматической парковки автомобиля.

Результаты моделирования доказывают, что система ИСНК может предоставить достаточно точные предварительные картографические информации для последующего процесса автоматической парковки.

#### Заключение

Алгоритм самоорганизации с резервированием трендов способен построить модель погрешности навигации автомобиля с помощью ансамбля критериев селекции. На основе модели погрешности реализована коррекция погрешности навигации автомобиля в режиме реального времени, построена трехмерная карта окружения автомобиля.

Таким образом, представленная ИСНК способна значительно повысить точность позиционирования и картографирования автомобиля.

#### Литература

- [1] Zhang J., and Singh S., LOAM: Lidar odometry and mapping in realtime, *Proceedings of Robotics: Science and Systems*, 2014.
- [2] Zhang J., and Singh S., Low-drift and real-time lidar odometry and mapping, Autonomous Robots, 2017, vol. 41(2): 401-416.
- [3] Shan T., and Englot B., "LeGO-LOAM: Lightweight and groundoptimized lidar odometry and mapping on variable terrain", 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Madrid, Spain, October 2018.
- [4] Неусыпин К.А. Системный синтез систем управления с интеллектуальной компонентой // Автоматизация и современные технологии. 2007. № 3. С. 35–39.
- [5] Селезнева М.С., Неусыпин К.А. Разработка измерительного комплекса с интеллектуальной компонентой // Измерительная техника. 2016. № 9. С. 10–14.
- [6] Анохин П.К. Биология и нейрофизиология условного рефлекса. М.: Медицина, 1968. 325 с.
- [7] Ивахненко А.Г., Мюллер Й.А. Самоорганизация прогнозирующих моделей. Киев, Техника, 1985. 223 с.
- [8] Неусыпин К.А. Современные системы и методы наведения, навигации и управления летательными аппаратами. М.: МГОУ. 2009. 500 с.
- [9] Неусыпин К.А., Фам С.Ф. Алгоритмические методы повышения точности навигационных систем ЛА. Издательство Мир, Ханой, 2009. 126 с.
- [10] Селезнева М.С. Навигационный комплекс с повышенными характеристиками наблюдаемости и управляемости // Авиакосмическое приборостроение. 2016. №6. С. 18-24.
- [11] Неусыпин К.А. Разработка модифицированных алгоритмов самоорганизации для коррекции навигационной информации // Автоматизация и современные технологии. 2009. № 1. С. 37-39.

# Робастная визуально-инерциальная одометрия наземных роботов для работы в динамическом окружении

А.А. Пеньковский Факультет систем управления и робототехники Университет ИТМО Санкт-Петербург, Россия <u>aapenkovskiy@itmo.ru</u>

Ж. Махмуд Факультет систем управления и робототехники Университет ИТМО Санкт-Петербург, Россия jaafar.a.mahmoud@itmo.ru

Аннотация-В данной статье представлен новый подход к повышению робастности визуально-инерциальной одометрии для наземных мобильных роботов в динамических средах. Предложенный подход является расширением визуально-инерциальной стандартной навигационной системы формулировкой задачи оценивания состояния в форме взвешенных наименьших квадратов с применением чередующейся фактор-граф оптимизации. В дополнение, на основе семантической априорной информации об окружении вводится модель надёжности визуальных маркеров. Робастность предложенного подхода валидирована тестированием на реальных наборах данных. Результаты экспериментальной апробации демонстрируют стабильное и точное оценивание состояния в высокодинамичных средах.

Ключевые слова—визуальная одометрия, робастность, наземные роботы, динамические среды, семантическая сегментация.

#### I. Введение

Визуальная одновременная локализация и картирование (SLAM) является критически важной технологией для таких сфер, как автономное вождение, робототехника и виртуальная реальность. Данная технология обеспечивает оценивание положения агента, построение карты окружения, а также высокоуровневое понимание окружающей среды. Однако в реальных условиях функционирования присутствуют динамические объекты, такие как движущиеся автомобили и люди, что является вызовом для систем визуального SLAM и оказывает влияние на их точность и надёжность. Данные объекты приводят к ошибкам в оценивании движения агента и как следствие ведут к неточному построению карты и сбою системы. Следовательно, повышение робастности систем визуального SLAM по отношению к динамическим объектам является важным для обеспечения работоспособности и надёжности данных систем. В последних исследованиях фокус внимания сосредоточен на разработке систем робастного визуального SLAM по отношению к динамическим объектам путём интеграции различных сенсоров, таких как инерциальные измерительные блоки. Вместе с тем, подходы машинного обучения, такие как глубокие нейронные сети, применяются для расширения робастности систем визуального SLAM к динамическим объектам.

М. Мохрат Факультет систем управления и робототехники Университет ИТМО Санкт-Петербург, Россия <u>mmohrat@itmo.ru</u>

С.А. Колюбин Факультет систем управления и робототехники Университет ИТМО Санкт-Петербург, Россия <u>s.kolyubin@itmo.ru</u>

#### II. Обзор литературы

Повышение робастности систем визуального SLAM в динамических средах является популярным направлением исследований в эпоху развития нейронных сетей, которые обеспечивают лучшее семантическое понимание окружения. Существующие работы в данной области могут быть классифицированы на два типа.

#### А. Методы на основе семантической сегментации

Данные методы используют семантическую сегментацию входных изображений. В частности, DynaSLAM [1] применяет RGB-D датчики и Mask R-CNN [2] для детектирования потенциально подвижных объектов, вместе с подходом на базе мультиобзорных геометрических ограничений. Однако использование RGB-D датчиков ограничено их высокой стоимостью. Как следствие, были предложены другие подходы, такие как DS-SLAM [3] и OFM-SLAM [4], не полагающиеся на RGB-D датчики. Вместо этого, в них используется семантическая сегментация в сочетании с проверками на состоятельность движения или эпиполярными ограничениями. Однако точность и время вывода моделей семантической сегментации зачастую являются компромиссом. Более того, маски, генерируемые моделями семантической сегментации подвержены ошибкам и проблемам обобщаемости, что приводит к проблемам визуального слежения.



Рис. 1. Архитектура системы

#### Б. Методы на основе детектирования объектов

Данные методы используют модели детектирования объектов, такие как YOLO, с постобработкой. DRE-SLAM [5] сегментирует данные глубины от RGB-D датчиков с применением кластеризации по методу К средних в ограничивающей рамке, генерируемой моделью YOLO. Detect-SLAM [6] использует детектор объектов на базе глубокой нейронной сети с распространением вероятностей подвижности оптических признаков. Обычно данные методы быстрее, однако подвержены ошибкам детектирования. Вместе с тем, множество надёжных точек удаляются по причине широких ограничивающих рамок вокруг динамических объектов.

#### III. Методология

Задача визуально-инерциальной одометрии состоит в оценивании положения робототехнического объекта (далее - агент), сенсорная установка которого включает в себя камеру и инерциальный измерительный блок. При получении изображения в момент времени k выполняется извлечение ключевых точек, составляющих набор измерений камеры  $z_k$ . Вместе с тем, к моменту времени k относительно кадра k-1 агент принимает данные *U*<sub>k</sub> инерциального блока, включающие линейные ускорения и угловые скорости. Классическая постановка задачи визуально-инерциальной одометрии является задачей поиска оптимального вектора состояния агента X<sub>k</sub> (положение и ориентация в 3D-пространстве), минимизирующего функционал, составленный на основе невязок по измерениям камеры и инерциального измерительного блока:

$$x_{k} = \arg\min(\sum_{k \in K} C_{I}^{(k)} + \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} C_{V}^{(k,j)}), (0.1)$$

где  $C_I^{(k)}$  – невязка по индивидуальному накопленному набору измерений инерциального блока между k-1 и k кадрами;  $C_V^{(k,j)}$  – невязка по измерению j камеры для кадра k.

Для повышения робастности в динамических средах алгоритм оптимизации расширен добавлением предлагаемой методологии исключения выбросов, которая представлена в разделах III-А и III-Б. Архитектура системы представлена на Рис. 1.

#### *А.* Устранение выбросов с применением модели надёжности

Как упомянуто в разделе II, большинство передовых алгоритмов визуальной одометрии, которые повышают робастность в сценах с динамическими объектами, зависят от качества моделей семантической сегментации, которые представляют собой нейросетевые алгоритмы обработки изображений, выходными данными которых выступают метки классов объектов на входном изображении. Однако, высококачественные модели семантической сегментации не могут быть развёрнуты на мобильных роботах с низкими вычислительными ресурсами. В то же время, модели, которые обеспечивают менее высокое качество семантической сегментации, подвержены ошибкам, что приводит к пропуску части визуальных ориентиров в алгоритме устранения выбросов.

Следовательно, в предлагаемой технике устранения выбросов каждому визуальному ориентиру присваивается модель надёжности данного ориентира, характеризующая вероятность его подвижности. Каждый раз, когда появляется новый визуальный ориентир, его надёжность выставляется в семантическую априорную вероятность, которая присваивается на основе семантической метки класса. Семантическая априорная вероятность для метки класса характеризует вероятность подвижности объекта соответствующего класса и задаётся на основе экспертных соображений заранее. В процессе слежения за точкой в потоке изображений, надёжность *R* обновляется согласно выражению:

$$R = 1 - \eta \cdot z \left( \lambda_1 \cdot \overline{R} + \lambda_2 \left( 1 - \overline{R} \right) \right) = 1 - \eta \cdot bel, \quad (0.2)$$

где *z* является семантической априорной вероятностью;  $\overline{R}$  является предыдущей надёжностью;  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются постоянными скорости обновления;  $\eta$  является компонентой нормализации, которая выставляется на основе текущей семантической вероятности *bel* и обновляется посредством выражения:

$$\eta^{-1} = bel + \lambda_3 \cdot z + \lambda_4 (1 - z), \qquad (0.3)$$

Модель обновления надёжности (0.2) выбрана для корректировки заданной априорной вероятности z в потоке изображений. Смысл вероятностной формулировки заключается в обработке потенциально ложных выходных данных алгоритма семантической сегментации, что позволяет использовать алгоритмы, обладающие менее высоким качеством сегментации. Выражение (0.3) выбрано эмпирически с целью придания инерционности процессу понижения значения вероятности при отслеживании точки в потоке изображений и более резкого возрастания вероятности (в зависимости от получаемого значения z). Таким образом, ложные срабатывания алгоритма сегментации о высокой вероятности статичности объекта привносят значительно меньший вклад относительно ложных срабатываний о низкой вероятности.

Скорости обновления  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  выставлены для повышения робастности по отношению к ошибочным семантическим данным. Скорости выбраны так, чтобы, при присвоении точке с низкой надёжностью семантической априорной вероятности, соответствующей статическим объектам (таким как стены и полы), надёжность повышается медленно. Напротив, если точка получает семантическую априорную вероятность, соответствующую потенциально подвижному объекту, его надёжность повышается быстро. Таким образом, влияние ошибочных семантических априорных вероятностей, которые обычно генерируются легковесными моделями сегментации изображений, сокращается.

В оптимизационной задаче надёжность визуального ориентира применяется для корректного выбора весов для каждой визуальной невязки. Когда надёжность визуального ориентира ниже 0.25, соответствующий вес выставляется непосредственно в надёжность. Иначе, веса обновляются с использованием алгоритма, который представлен в следующем разделе.

#### Б. Устранение выбросов с применением постепенной релаксации выпуклости

В области компьютерного зрения широко используются техники робастного оценивания [8]. Данные техни-

ки основаны на применении робастного ядра к каждой визуальной невязке. В визуальной одометрии для этих целей зачастую используют функции потерь Хубера для устранения выбросов в процессе слежения за визуальными маркерами. Однако функция Хубера чувствительна к большим ошибкам, появляющимся в окружении с подвижными объектами.

В предлагаемой методологии индивидуальная визуальная невязка представляется в форме:

$$C_{V}^{(k,j)} = \omega_{l} \cdot \left\| \hat{z}_{l}^{c_{j}} - \pi \left( T_{l_{j}}^{C_{j}} \cdot T_{W}^{I_{j}} \cdot p_{l}^{W} \right) \right\|^{2} = \omega_{l} \cdot \left\| e_{jk} \right\|^{2}, \quad (0.4)$$

где  $\hat{z}_{l}^{c_{j}}$  является положением l-й ключевой точки на плоскости изображения;  $\pi(\cdot)$  является моделью проецирования камеры, которая отображает 3D точку  $p_{l}^{W}$  в глобальной системе координат W на плоскость изображения с использованием j-го положения одометрии  $T_{W}^{I_{j}}$  и внешнего преобразования  $T_{I_{j}}^{C_{j}}$  из инерциальной системы координат  $I_{j}$  в систему координат камеры  $C_{j}$ ;  $\omega_{l}$  является весовым коэффициентом, определяемым выражением (0.5);  $\|\cdot\|^{2}$  - L2-норма.

Целевой минимизируемый функционал (0.1) в задаче визуально-инерциального оценивания состояния формируется путём комбинирования инерциальных и визуальных невязок для каждого измерения. Однако поскольку в результате наличия весовых коэффициентов визуальная невязка (0.4) в общем случае невыпукла, в зависимости от начальных условий алгоритм оптимизации может сойтись в локальный минимум, что приводит к неточной оценке состояния.

Поэтому в предлагаемом подходе устранения выбросов используются визуальные невязки  $C_V^{(k,j)}$  и применяется постепенная релаксация невыпуклости (GNC) [9] к задаче визуально-инерциального оценивания состояния. Обновление веса основано на функции потерь Баррона [10] и определяется в замкнутой форме следующим образом:

$$\omega_{l} = \frac{1}{\mu \cdot c^{2}} \left( \frac{2 \left\| \boldsymbol{e}_{jk} \right\|^{2}}{\mu \cdot c^{2} \cdot |\boldsymbol{\alpha} - 2|} + 1 \right)^{\alpha/2 - 1}$$
(0.5)

где  $\alpha$  является параметром формы, *С* является параметром ширины,  $\mu$  является параметром контроля для GNC. Общая форма функции Баррона зафиксирована, а параметр  $\mu$  настраивается в ходе чередующейся оптимизации, которая проходит циклично в две стадии. На первой стадии выполняется минимизация целевого функционала (0.1) при фиксированных значениях весовых коэффициентов, составляющих каждую индивидуальную визуальную невязку (0.4). На второй стадии согласно выражению (0.5) значения весовых коэффициентов обновляются. По завершении второй стадии, начиная

с  $\mu = 6$  параметр контроля  $\mu$  обновляется по правилу  $\mu = \mu / \sqrt{2}$ , восстанавливая невыпуклую форму визуальной невязки на последнем цикле оптимизации. Форма функции Баррона выбрана как  $\alpha = -2$  для резкого сокращения весов высоких невязок.

#### IV. Эксперименты

Для валидации робастности предлагаемого подхода проведены эксперименты, разделённые на две части. По метрике точности оценивания положения, которой выступает накопленная ошибка оценивания линейного перемещения, предложенный подход сравнивается с системой VINS-Fusion [7], которая для устранения выбросов использует стандартную функцию Хубера. Также, предлагаемый подход сравнивается с расширением VINS-Fusion удалением динамических точек на основе семантических масок. Результаты экспериментов представлены в последующих разделах

#### *А.* Апробация в высокодинамичной среде на переносном устройстве

В этой части предлагаемый подход устранения выбросов валидируется на трёх сложных последовательностях, собранных в окружении метро. Сцены являются высокодинамичными ввиду высокого потока людей и подходящими для тестов робастности. Примеры изображений представлены на рис. 2. В качестве сенсорной установки используется камера Zed2 с внутренним инерциальным модулем. Частота изображений выставлена в 15 Гц, в то время как данные инерциального блока принимаются с частотой 200 Гц. Поскольку в этой части целью является валидация робастности в высокодинамичных средах, для расчёта накопленной ошибки используется ARUCO маркер. В начале и завершении каждой последовательности ARUCO маркер находится в поле зрения камеры. Предполагается, что возможные ошибки детектирования ARUCO маркера находятся в пределах нескольких миллиметров, и как следствие в данном эксперименте ими можно пренебречь. Для подсчёта накопленной ошибки  $e_{drift}$ , метрика выведена следующим образом:

$$\boldsymbol{e}_{drift} = \left\| \left[ T_{drift} \right]_{xyz} \right\|^2, \qquad (0.6)$$

$$T_{drift} = \left(T_I^C \cdot T_W^{I_e} \cdot T_{I_s}^W \cdot T_C^I\right)^{-1} T_A^{C_e} \cdot T_{C_s}^A, \qquad (0.7)$$

где  $T_s^e$  представляет собой однородное преобразование из стартового положения *s* в конечное положение *e*; *A* является системой координат ARUCO маркера; *C* является системой координат камеры; *I* является инерциальной системой координат; *W* является глобальной системой координат.

Экспериментальные результаты для каждой последовательности сведены в таблицу 1.

ТАБЛИЦА I.	РЕЗУЛЬТАТЫ АПРОБАЦИИ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ С
	НОСИМОГО УСТРОЙСТВА

	Накопленная ошибка линейного перемещения, м							
Наборы данных	VINS- Fusion (Huber)	VINS- Fusion (Huber) VINS-Fusion (Semantic)		Ours (GNC + reliability)				
metro1	Сбой	0.35	0.17	0.06				
metro2	0.20	0.37	0.26	0.10				
metro3	0.10	0.99	0.17	0.05				
metro4	2.90	1.37	0.44	0.10				

Как можно видеть из таблицы 1, стандартный VINS-Fusion без семантической фильтрации показывает в основном нестабильную работоспособность. Хотя VINS-Fusion демонстрирует конкурентные результаты на metro2. Причина состоит в том, что большинство ненадёжных визуальных ориентиров могут отсеиваться на этапе слежения за признаками с использованием RANSAC и фильтрации по статусу оценивания оптического потока в случае, если объекты перемещаются достаточно быстро и число точек на подвижных объектах, отслеживаемых в потоке изображений, невелико. VINS-Fusion с дополнительной семантической фильтрацией работает более стабильно на metro1 и metro3. Как видно, метод устранения выбросов без применения семантических априорных вероятностей показывает лучшую работоспособность, чем VINS-Fusion с семантической фильтрацией. Наконец, комбинирование GNC с обновлением вероятности демонстрирует лучшую точность оценивания движения, что валидирует робастность предлагаемого подхода в высокодинамичных средах.



Рис. 2. Примеры изображений с последовательностей metro

#### Б. Апробация на наземных роботах в офисной среде

Здесь представлены результаты экспериментальной апробации предлагаемого решения на последовательностях, собранных на робототехнических мобильных платформах. Собраны четыре последовательности с использованием всенаправленного робота KUKA youBot и сервисного колёсного робота с дифференциальным приводом. Как и в предыдущей части, используется камера Zed2 с внутренним инерциальным блоком, прикреплённая к головной части роботов. Сцены содержат несколько людей, периодически возникающих в поле зрения камеры. Примеры изображений представлены на рис. 3.

В качестве эталонной траектории использована траектория, сгенерированная алгоритмом Cartographer [12], который комплексирует сканы 2D лидара и показания колёсной одометрии и выполняет офлайн глобальную оптимизацию траектории движения. Траектории VINS выравнены с эталонной путём применения Sim(3) выравнивания Умеямы. Для измерения глобальной состоятельности траекторий применяется метрика ATE, а в качестве метрики точности используется RMSE от ATE.

Результаты данной части экспериментальной апробации представлены в таблице 2. Монокулярноинерциальный режим обозначен как М-И, стереоинерциальный режим обозначен как С-И.

ТАБЛИЦА II. РЕЗУЛЬТАТЫ АПРОБАЦИИ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ С НАЗЕМНЫХ РОБОТОВ

	RMSE, M						
Наборы дан- ных	VINS-Fusion (Huber)	Ours (GNC only)	Ours (GNC + reliability)				
youbot-1 (М-И)	0.40	0.39	0.40				
youbot-2 (М-И)	0.45	0.34	0.34				
courier-1 (С-И)	0.46	0.15	0.17				
courier-2 (С-И)	0.26	0.19	0.17				

Как видно из таблицы 2, предлагаемый подход демонстрирует лучшую работоспособность на наземных мобильных роботах с использованием как монокулярно-, так и стерео-инерциального режима по сравнению со стандартным VINS-Fusion. Преимущество использования надёжности визуальных ориентиров не так значительно, как в первом эксперименте. Отсюда следует, что в сценах с меньшей динамикой всё ещё достаточно использования устранения выбросов без дополнительных семантических априорных вероятностей, в то время как в высокодинамической среде добавления семантической информации может существенно улучшить работоспособность.



Рис. 3. Примеры изображений с последовательностей courier

#### V. Выводы

В данной работе представлен подход к повышению робастности визуально-инерциальной одометрии в динамических средах для наземных мобильных роботов с использованием априорной семантической информации о сцене для создания вероятностной модели движения окружающих объектов наряду с расширенной структурой нелинейной оптимизации. Предлагаемая система демонстрирует стабильное и точное оценивание состояния при тестировании в высокодинамичных средах.

#### ЛИТЕРАТУРА

 Bescos, B., Fácil, J., Civera, J., & Neira, J. (2018). DynaSLAM: Tracking, Mapping, and Inpainting in Dynamic Scenes. IEEE Robotics and Automation Letters, 3(4), 4076-4083.

- [2] He, K., Gkioxari, G., Dollár, P., & Girshick, R. (2017). Mask R-CNN. In 2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV) (pp. 2980-2988).
- [3] Yu, C., Liu, Z., Liu, X.J., Xie, F., Yang, Y., Wei, Q., & Fei, Q. (2018). DS-SLAM: A Semantic Visual SLAM towards Dynamic Environments. In 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (pp. 1168-1174).
- [4] Xiongwei Zhao, Tao Zuo, & Xinyu Hu (2021). OFM-SLAM: A Visual Semantic SLAM for Dynamic Indoor Environments. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 1-16.
- [5] Li, F., Chen, W., Xu, W., Huang, L., Li, D., Cai, S., Yang, M., Xiong, X., Liu, Y., & Li, W. (2020). A Mobile Robot Visual SLAM System With Enhanced Semantics Segmentation. IEEE Access, 8, 25442-25458.
- [6] Zhong, F., Wang, S., Zhang, Z., Chen, C., & Wang, Y. (2018). Detect-SLAM: Making Object Detection and SLAM Mutually Beneficial. In 2018 IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision (WACV) (pp. 1001-1010).

- [7] Tong Qin, Jie Pan, Shaozu Cao, & Shaojie Shen (2019). A General Optimization-based Framework for Local Odometry Estimation with Multiple Sensors. ArXiv, abs/1901.03638.
- [8] Black, M., & Rangarajan, A. (1996). On the unification of line processes, outlier rejection, and robust statistics with applications in early vision. International Journal of Computer Vision, 19(1), 57-92.
- [9] A. Blake and A. Zisserman, Visual reconstruction. MIT Press, 1987.
- [10] Barron, J. (2019). A General and Adaptive Robust Loss Function. In 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) (pp. 4326-4334).
- [11] Frank Dellaert, & Michael Kaess (2017). Factor Graphs for Robot Perception. Found. Trends Robotics, 6, 1-139.
- [12] Hess, W., Kohler, D., Rapp, H., & Andor, D. (2016). Real-time loop closure in 2D LIDAR SLAM. In 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA) (pp. 1271-1278).

# Рекуррентный алгоритм позиционирования и определения ориентации АНПА

В.Г. Караулов *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»*, г. Санкт-Петербург, Россия vladkar0707@gmail.com А.М. Грузликов *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»,* г. Санкт-Петербург, Россия agruzlikov@yandex.ru В.П. Золотаревич *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»*, Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург, Россия zolotarevich@yandex.ru

Аннотация-Работа посвящена задаче определения координат и углов ориентации автономного необитаемого подводного аппарата в интересах приведения аппарата к стационарной подводной станции с использованием высокочастотной гидроакустической системы ближнего радиуса действия. Приведение предполагает маневрирование аппарата и его приближение к подводной станции, что сопряжено с формированием трёх зон с различной акустической видимостью излучателей станции приёмными элементами аппарата. В работе приводится математическая постановка задачи навигации, решение которой сводится к использованию рекуррентного алгоритма с формированием системы алгебраических уравнений, где в качестве неизвестных выступают координаты и углы ориентации аппарата, а в качестве исходных параметров используется значение времени обнаружения фронта сигналов приемными элементами АНПА. Решение системы алгебраических уравнений становиться возможным при ограничении области определения искомых переменных, т.е. при задании окрестности текущего местоположения и углов ориентации АНПА. Формирование окрестности возможно с использованием метода машинного обучения – обучение с учителем, где для формирования обучающей выборки использовать модель приёма сигналов антеннами АНПА от маяков станции на заданной координатной сетке – углов ориентации. В работе приводятся результаты решения задачи с использованием алгоритмов на основе метода К-ближайших соседей, дерева решений, нейронной сети и случайного леса.

Ключевые слова—автономный необитаемый подводный аппарат, гидроакустическая навигационная система, навигация, рекуррентные алгоритмы, обучение с учителем.

#### I. Введение

Работа посвящена задаче определения координат и углов ориентации автономного необитаемого подводного аппарата (АНПА) в интересах решения задачи приведения аппарата к подводной базовой станции.

Известны методы решения задачи определения координат и углов ориентации АНПА, например, с использованием маяков – ответчиков [1-2], или систем технического зрения [3-4]. В первом методе, поскольку приведение аппарата подразумевает маневрирование на коротких дистанциях от базовой станции, время запроса от аппарата и получение ответа от маяка подводной станции становится критичным и не позволяет обеспечить безопасность аппарата с учётом времени работы подруливающих механизмов и инерции аппарата. При использовании второго метода, технического зрения, помехи, вызванные замутнением воды на дне водоёма, потребуют либо использование дополнительных технических средств, например, системы подсветки, очистки и т.д., либо не обеспечат заданные точности по позиционированию АНПА.

Используемый авторами подход предполагает решение задачи позиционирования и определения углов ориентации с использованием акустических методов навигации и размещение излучателей только на подводной базе [5-6]. Гидроакустическая система АНПА имеет в своем составе приёмные антенны, которые размещаются под килем аппарата в кормовой и носовой части, а также излучатели, устанавливаемые по краям базы и осуществляющие ненаправленное излучение сигнала. Следует отметить, что излучаемые сигналы – это тональные сигналы одной частоты, излучение которых разнесено по времени таким образом, чтобы по периоду обнаружения сигнала можно было однозначно идентифицировать источник излучения.

Задача навигации предполагает маневрирование аппарата и его приближение к подводной станции, что сопряжено с формированием трёх зон с различной акустической видимостью излучателей станции приёмными элементами аппарата. Можно выделить следующие зоны:

- зона 1 в зоне видимости каждой антенны находятся все четыре излучателя;
- зона 2 в зоне видимости каждой антенны находятся три излучателя;
- зона 3 в зоне видимости каждой антенны находятся по одному излучателю.

#### II. Постановка задачи

А. Постановка задачи позиционирования и определения углов ориентации АНПА для первой зоны

Требуется определить относительные координаты центра x, y, z и углы ориентации  $\alpha, \beta, \gamma$  АНПА по измерениям времени получения фронта сигнала приёмным элементом АНПА от гидроакустических излучателей подводной станции. Будем считать, что решаемая задача является квазистатической, в том смысле, что за время ожидания полного периода излучения сигналов от маков АНПА практически не двигается.

Для оценки времени получения фронта сигнала от маяка станции выполняются следующие действия:

- Обнаружение сигнала с использованием корреляционного фильтра. Обозначим t̂<sub>i</sub> за оценку времени получения фронта сигнала на входе i приёмника (i ∈ 1:10),
- Соотнесение обнаруженного сигнала с источником излучения, т.е. проведение идентификации маяка (по временной диаграмме последовательности излучений). Обозначим t̂<sup>j</sup><sub>i</sub> за оценку времени получения сигнала t̂<sub>i</sub> с учётом идентификации маяка (i ∈ 1:10, j ∈ 1:4). При этом коорди-

Работы проводились при поддержке гранта РНФ №23-19-00626.

наты маяка ( $x^{j}$ ,  $y^{j}$ ,  $z^{j}$ ) и последовательность времён излучения маяков считаются известными.

Определим расстояние от точки излучения до точки приёма для первой зоны (видимость всех излучателей) по времени распространения сигнала:

$$r_i^j = (\hat{t}_i^j - (t + T^{1,j}))c,$$

где  $r_i^J$  – расстояние, заданное по разнице времени излучения и приёма сигнала,  $i = 1 \dots 10$  – индекс приёмных элементов АНПА,  $j = 1 \dots 4$  – индекс излучателей,  $\hat{t}_i^j$  – оценка времени приёма сигнала, t – время излучение 1-м маяком,  $T^{1,j}$  – смещение времени излучения между 1 и j маяком (соответствует временной диаграмме последовательности излучения), с – скорость звука в среде.

Определим расстояние от точки излучения до точки приёма для первой зоны, исходя из положения аппарата:

$$d_i^{j} = \sqrt{(x + \Delta x_i - x^{j})^2 + (y + \Delta y_i - y^{j})^2 + (z + \Delta z_i - z^{j})^2},$$

где  $d_i^j$  – расстояние по координатам излучателя и приёмного элемента, (x, y, z) – координаты центра АНПА,  $(x^j, y^j, z^j)$  – координаты *j*–го маяка,  $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$  – смещение *i*–го приёмного элемента относительно центра АНПА с учётом углов ориентации аппарата. При этом:

$$\begin{split} M_x(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \\ M_y(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \\ M_z(\gamma) &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ (\Delta x_i \quad \Delta y_i \quad \Delta z_i)^T &= M_x(\alpha) M_y(\beta) M_z(\gamma) (x_i \quad y_i \quad z_i)^T, \end{split}$$

где  $(x_i, y_i, z_i)$  – смещение *i*-го приёмного элемента относительно центра АНПА,  $(\alpha, \beta, \gamma)$  – углы ориентации АНПА,  $M_x(\alpha), M_y(\beta), M_z(\gamma)$  – матрицы поворота относительно осей координат.

Решение задачи в первой зоне состоит в нахождении оценок  $\hat{\theta}_1 = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{t}, \hat{c})$  относительных координат и углов ориентации АНПА, а также времени излучения сигнала первым маяком и скорости звука в воде по полученным измерениям путем минимизации следующей функции:

$$\hat{\theta}_{1} = \min_{\theta} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{4} (r_{i}^{j} - d_{i}^{j})^{2}$$
(1)

#### В. Постановка задачи позиционирования и определения углов ориентации АНПА для второй зоны

Решение задачи во второй зоне состоит в нахождении оценок  $\hat{\theta}_2 = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{t}, \hat{c})$ , с учетом изменения видимости маяков – приёмными элементами:

$$\hat{\theta}_2 = \min_{\theta} \sum_{i,j \in \{(1...5,1), (1...5,3...4), (6...10,2...4)\}} (r_i^j - d_i^j)_{\alpha,\beta,\gamma \in \{\hat{\theta}_i\}}^2$$

#### С. Постановка задачи позиционирования и определения углов ориентации АНПА для третьей зоны

Решение задачи в третьей зоне состоит в нахождении оценок  $\hat{\theta}_3 = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , с учетом изменения акустической видимости маяков – приёмными элементами аппарата:

$$\hat{\theta}_{3} = \min_{\theta} \sum_{i,j \in \{(1...5,1),(6...10,2)\}} (r_{i}^{j} - d_{i}^{j})^{2}_{\alpha,\beta,\gamma,t,c \in \{\hat{\theta}_{i} \cup \hat{\theta}_{2}\}}$$

#### III. Описание алгоритма решения задачи позиционирования и определения углов ориентации АНПА для первой зоны

Рассмотрим вопрос решения (1). Стоит отметить, что данная функция является многоэкстремальной, и применение традиционных численных методов на всей области определения координат и углов ориентации аппарата (даже с учётом естественных ограничений по дистанции распространения сигнала, по крену и дифференту подводного аппарата) является вычислительно затратным. Как следствие, рассмотрим двухэтапную рекуррентную процедуру поиска решения. На первом этапе – определим окрестность области определения  $\theta$ , а на втором этапе найдём численные оценки координат и углов ориентации.

Для первого этапа, воспользуемся методами машинного обучения с учителем, где обучающая выборка будет формироваться исходя из геометрической модели – заданные координаты маяков подводной базовой станции и координат приёмных элементов АНПА на заданной координатной сетке и таблице углов ориентации.

Пусть обучающая выборка строится по следующему правилу:

- (t<sup>j</sup><sub>a</sub> t<sup>j</sup><sub>b</sub>)<sub>j∈1...4</sub> разница времён приёма сигнала, между парами максимально разнесенных приёмных элементов (a, b) при фиксированном маяке;
- $(t_i^a t_i^b T^{a,b})_{i \in 1...10}$  разница времён приёма сигнала между парами маяков (a, b) на фиксированном приёмном элементе и смещением по времени излучения сигнала маяками (при фиксированном значении  $T^{a,b}$ ).

Рассмотрим основные методы машинного обучения с учителем для задачи регрессии, которые будут использоваться для решения поставленной задачи.

#### А. Метод К-ближайших соседей (k-NN)

Это метрический алгоритм, суть которого заключается в нахождении ближайших в выбранной метрике соседей с последующим взятием среднего из них значения [7]. Основным вопросом является правильный выбор количества соседей, так как при маленьком значении *k* алгоритм будет иметь большую чувствительность к шумам и возникает эффект переобучения, а при большом значении алгоритм становится слишком грубым и перестает отражать локальные особенности набора данных. Также не менее важен выбор правильной метрики для измерения расстояния.

#### В. Дерево решений

Этот алгоритм представляет из себя иерархическую древовидную структуру, состоящую из решающих правил «Если ..., то ...» [8]. Правила автоматически генерируются в процессе обучения.

Само дерево решений состоит из двух типов элементов – узлов, в которых находятся решающие правила, и листьев, в которых находится метка определенного класса.

#### С. Случайный лес

Этот алгоритм является ансамблевым методом, что означает обучение нескольких моделей и объединение их для решения одной задачи. Так в данном алгоритме используется ансамбль решающих деревьев, которые обучаются независимо [9]. Окончательное решение формируется на основании большинства голосов от каждого из деревьев.

#### D. Многослойный персептрон

Это нейронная сеть прямого распространения, состоящая как минимум из трех слоев: входного, скрытого и выходного [10]. Каждый узел кроме входного обладает нелинейной функцией активации. При обучении многослойного персептрона используется метод обучения с учителем и алгоритм обратного распространения ошибки.

#### IV. РЕЗУЛЬТАТЫ АПРОБАЦИИ НА МОДЕЛЬНЫХ И НАТУРНЫХ ДАННЫХ

По результатам имитационного моделирования движения АНПА (рис. 1) были получены оценки среднеквадратического отклонения (СКО) курсового угла аппарата при использовании различных методов машинного обучения с разными гиперпараметрами (см. таблица 1).



Рис. 1. Имитация маневрирования АНПА относительно подводной базы

ТАБЛИЦА 1.СКО ОЦЕНКИ КУРСОВОГО УГЛА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Метод	СКО γ,°
Метод k-NN (k – 12, метрика – Евклидова)	4.15
Метод k-NN (k – 13, метрика – Манхэттенская)	4.92
Метод k-NN (k – 12, метрика – Минковского)	4.15
Метод k-NN (k – 7, метрика – Чебышева)	2.83
Дерево решений (глубина дерева – 33)	7.09
Случайный лес (количество деревьев – 21)	3.76
Многослойный персептрон (число скрытых слоев – 140)	5.48

Также была произведена апробация алгоритма по результатам натурного эксперимента, результаты приведены в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2. СКО ОЦЕНКИ КУРСОВОГО УГЛА В РЕЗУЛЬТАТЕ НАТУРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Метод	<b>CKO γ,°</b>
Метод k-NN (k – 37, метрика – Евклидова)	10.23
Метод k-NN (k – 24, метрика – Манхэттенская)	2.42
Метод k-NN (k – 37, метрика – Минковского)	10.23
Метод k-NN (k – 15, метрика – Чебышева)	23.58
Дерево решений (глубина дерева – 44)	8.83
Случайный лес (количество деревьев – 14)	5.22
Многослойный персептрон (число скрытых слоев – 140)	7.48

Из полученных результатов следует, что метод Кближайших соседей имеет наилучший результат, с точки зрения минимального значения СКО оценки курсового угла, как по результатам моделирования, так и в результате натурного эксперимента.

Поэтому для первого этапа был выбран метод Кближайших соседей с количеством соседей 24 и манхэттенской метрикой (метрика L1). Для решения системы алгебраических уравнений на втором этапе был выбран алгоритм Левенберга-Марквардта, как более быстрый по сравнению с алгоритмом доверительной области.

В результате был реализован рекуррентный двухэтапный алгоритм позиционирования и определения углов ориентации и построены зависимости СКО оценки координат центра АНПА от высоты относительно подводной станции (рис. 2).



Рис. 2. Зависимость СКО оценки координат от высоты при вертикальном спуске по центру донной станции при разных скоростях погружения (V1>V2>V3)

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен рекуррентный алгоритм определения позиционирования и углов ориентации АНПА относительно подводной станции. Работа алгоритма определяется исходя из местоположения аппарата, выделяются три зоны видимости. При нахождении аппарата в первой зоне, предложен и исследован двухэтапный алгоритм. На первом этапе определяются окрестности координат и углов ориентации с использованием методов машинного обучения. В результате моделирования и натурного эксперимента было получено, что наилучшая точность у метода k-NN при использовании манхэттенской метрики. На втором этапе осуществляется решение системы алгебраических уравнений с ограничением по области определений искомых переменных. Работа алгоритма во второй и третьей зонах предполагают использование оценок, полученных при нахождении аппарата в первой зоне.

#### Литература

- F. Maurelli, S. Krupinski, X. Xiang, and Y. Petillot, 'AUV localisation: a review of passive and active techniques', International Journal of Intelligent Robotics and Applications, vol. 6, 06 2022.
- [2] J. Neira et al., 'Review on Unmanned Underwater Robotics, Structure Designs, Materials, Sensors, Actuators, and Navigation Control', J. Robot., vol. 2021, Jan. 2021.
- [3] G. Vallicrosa, J. Bosch, N. Palomeras, P. Ridao, M. Carreras, and N. Gracias, 'Autonomous homing and docking for AUVs using Range-Only Localization and Light Beacons', IFAC-PapersOnLine, vol. 49, no. 23, pp. 54–60, 2016.

- [4] S. Fan, C. Liu, B. Li, Y. Xu, and W. Xu, 'AUV docking based on USBL navigation and vision guidance', Journal of Marine Science and Technology, vol. 24, no. 3, pp. 673–685, Sep. 2019.
- [5] A. M. Gruzlikov, 'Short and Ultra-Short Baseline Navigation of the AUV for Bringing It to the Bottom Docking Device', in 2022 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), 2022, pp. 1–3.
- [6] D. A. Koshaev, 'AUV Relative Position and Attitude Determination Using Acoustic Beacons', Gyroscopy and Navigation, vol. 13, no. 4, pp. 262–275, Dec. 2022.
- [7] O. Kramer, 'K-Nearest Neighbors', in Dimensionality Reduction with Unsupervised Nearest Neighbors, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 13–23.
- [8] J. Fürnkranz, 'Decision Tree', in Encyclopedia of Machine Learning, C. Sammut and G. I. Webb, Eds. Boston, MA: Springer US, 2010, pp. 263–267.
- [9] T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman, 'Random Forests', in The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction, New York, NY: Springer New York, 2009, pp. 587–604.
- [10] M. Kordos and M. Blachnik, 'Instance Selection with Neural Networks for Regression Problems', in Artificial Neural Networks and Machine Learning -- ICANN 2012, 2012, pp. 263–270.

# Алгоритмическая компенсация погрешностей автоматизированного астрономического универсала, обусловленных сбоями синхронизации данных

Н.В. Кузьмина Отдел гравиинерциальных и оптоэлектронных комплексов АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» Санкт-Петербург, Россия nkuzmina@eprib.ru С.М. Тарасов Отдел гравиинерциальных и оптоэлектронных комплексов АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» Санкт-Петербург, Россия sergione@list.ru

Аннотация—В работе приведено описание разработанного алгоритма обнаружения и компенсации погрешностей автоматизированного астрономического универсала, обусловленных сбоями синхронизации данных со шкалой всемирного времени UTC, при определении астрономических долгот и азимутов вблизи плоскости меридиана в северном и южном направлениях.

Ключевые слова—астрономический азимут, астрономические координаты, автоматизированный астрономический универсал, погрешность, синхронизация данных.

#### I. Введение

Автоматизированный астрономический универсал (ААУ) представляет собой оптико-электронный прибор, предназначенный для высокоточного и оперативного решения следующих задач в полевых условиях (рис. 1) [1]:

- определения астрономических координат места по наблюдению звезд в околозенитной области;
- определения астрономических азимутов наземных ориентиров, расположенных вблизи плоскости горизонта, по наблюдению звезд около меридиана на высоте h=40°.



Рис. 1. Автоматизированный астрономический универсал

В верхней части прибора располагается оптикоэлектронный блок, состоящий из объектива и телевизионной аппаратуры. Конструкция прибора обеспечивает повороты оптико-электронного блока в вертикальной и В.В. Цодокова Отдел гравиинерциальных и оптоэлектронных комплексов АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» Санкт-Петербург, Россия tsodokova.vv@gmail.com

горизонтальной плоскостях посредством приводов вертикального (ПВН) и горизонтального наведения (ПГН).

В нижней части прибора располагается приемник сигналов спутниковых навигационных систем (ПССНС), блок обработки и управления и система горизонтирования, состоящая из шаговых двигателей и прецизионных датчиков наклона.

Определение значений всемирного координированного времени (UTC), а также формирование сигналов синхронизации (далее – сигналы PPS) производится посредством ПССНС. По сигналам PPS оптикоэлектронным блоком производится регистрация кадров с изображениями звезд, при этом с каждым сигналом PPS в блок обработки и управления передаются значения времени UTC.

Однако, в результате сбоев в работе аппаратуры (телевизионной, спутниковой) или нарушения логики работы программного обеспечения ААУ может возникнуть сбой синхронизации (ошибочная временная привязка зарегистрированного кадра к шкале времени UTC), что приведет к появлению систематической составляющей погрешности определения времени регистрации кадра  $\Delta T = 1$  с. Случайная составляющая этой погрешности в настоящей работе не учитывается, так как в ААУ она пренебрежимо мала (5 мкс) [2].

Погрешность определения времени регистрации кадра, в первую очередь, повлияет на точность вычисления Гринвичского звездного времени и в итоге приведет к появлению систематических составляющих погрешностей определения астрономических долгот и азимутов [2, 3], не позволяющих обеспечить требуемые точностные характеристики ААУ.

В работе представлен алгоритм обнаружения и компенсации погрешностей ААУ при определении астрономических координат и азимутов, обусловленных сбоями синхронизации данных со шкалой всемирного времени UTC, основанный на использовании:

- результатов определений азимута в диаметрально противоположных направлениях визирной оси ААУ, разность которых контролируется по показаниям датчика угла, установленного в ПГН ААУ;
- опорных значений составляющей уклонения отвесной линии (УОЛ) в плоскости первого верти-

кала в заданной системе координат, снятых с карт УОЛ или рассчитанных другим методом (например, [4]).

#### II. Влияние погрешностей синхронизации на точность определения астрономических долгот и азимутов

Принцип определения астрономических координат места установки ААУ (широты  $\phi$  и долготы  $\lambda$ ) основан на наблюдении звезд в околозенитной области по аналогии с автоматизированным зенитным телескопом [5 - 8]:

$$\varphi = \delta_Z, \ \lambda = \alpha_Z - \theta, \tag{1}$$

где  $\alpha_Z$ ,  $\delta_Z$  – экваториальные координаты (прямое восхождение и склонение) точки зенита;  $\theta$  – Гринвичское звездное время.

Погрешность определения астрономической долготы  $\Delta\lambda$ , обусловленная сбоем синхронизации, вычисляется по формуле

$$\Delta \lambda = -\Delta \theta_{\lambda} = -\omega \Delta T_{\lambda}, \qquad (2)$$

где  $\Delta \theta_{\lambda}$  – погрешность расчета  $\theta$  при определении долготы;  $\omega \approx 15$ "/с – угловая скорость вращения Земли;  $\Delta T_{\lambda}$  – погрешность  $\Delta T$  при определении долготы.

Астрономический азимут A визирной оси AAУ определяется по наблюдению звезд вблизи плоскости меридиана на высоте  $h = 40^{\circ}$  [1] в соответствии с выражением

$$A = \arctan\left(\frac{\sin(S-\alpha)}{\sin\varphi\cos(S-\alpha) - \cos\varphi tg\,\delta}\right),\tag{3}$$

где  $S = \theta + \lambda$  – местное звездное время;

 α, δ – экваториальные координаты точки, соответствующей пересечению визирной осью ААУ небесной сферы.

Погрешность определения азимута  $\Delta A$ , обусловленная сбоем синхронизации, а также погрешностью  $\Delta \lambda$ , может быть выражена в виде [9]

$$\Delta A = \frac{\cos q \cos \delta}{\cos h} (\Delta \theta_A + \Delta \lambda) = \frac{\cos q \cos \delta}{\cos h} \omega (\Delta T_A - \Delta T_\lambda), \quad (4)$$

где h – высота визирной оси;  $\Delta \theta_A$  – погрешность вычисления  $\theta$  при определении азимута;  $\Delta T_A$  – погрешность  $\Delta T$  при определении азимута; q – параллактический угол [9].

В табл. 1 представлены значения погрешностей  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta A_0$  (погрешность  $\Delta A$  при наблюдении звезд к северу от зенита) и  $\Delta A_{180}$  (погрешность  $\Delta A$  при наблюдении звезд к югу от зенита) в зависимости от значений  $\Delta T_{\lambda}$  и  $\Delta T_A$  на широте  $\varphi = 60^{\circ}$ .

 TABLE I.
 Погрешности определения астрономических координат и азимутов

$\Delta T_{\lambda}$ , c	$\Delta T_A$ , c	Δλ, угл.с	ΔА₀, угл.с	∆А <sub>180</sub> , угл.с
1	0	-15	-6,72	-19,27
0	1	0	6,72	19,27
1	1	-15	0	0

#### III. ОБНАРУЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ДАННЫХ

Как видно из табл. 1, при  $\Delta T_{\lambda} = 1$  с,  $\Delta T_{A} = 0$  или  $\Delta T_{A} = 1$  с,  $\Delta T_{\lambda} = 0$  значения погрешностей определения азимутов  $\Delta A_{0}$  и  $\Delta A_{180}$  будут существенно различны. Использование этой информации положено в основу принципа обнаружения погрешностей определения астрономических азимутов, обусловленных сбоями синхронизации, который заключается в сопоставлении разности азимутов визирной оси ААУ до  $(A_{0})$  и после  $(A_{180})$  поворота ПГН на 180°

$$\Delta A^{\mu_{3M.}} = A_{180} - A_0 \tag{5}$$

с опорным значением  $\Delta A^{\text{опор.}}$  (рис. 2), которое вычисляется по показаниям датчика угла ПГН до ( $\beta_0$ ) и после ( $\beta_{180}$ ) поворота

$$\Delta A^{\text{onop.}} = A_{180}^{\text{HCT.}} - A_0^{\text{HCT.}} = \beta_{180} - \beta_0, \qquad (6)$$

где  $A_0^{\text{ист.}}$ ,  $A_{180}^{\text{ист.}}$  – истинные значения азимутов визирной оси AAV до и после поворота.



Рис. 2. К описанию принципа определения погрешностей синхронизации

Значение  $\Delta A^{\text{изм.}}$  существенно отличается от  $\Delta A^{\text{опор}}$  при наличии погрешностей  $\Delta T_{\lambda} = 1$  с ( $\Delta T_{A} = 0$ ) или  $\Delta T_{A} = 1$  с ( $\Delta T_{\lambda} = 0$ ).

Измеренные азимуты визирной оси  $A_0$  и  $A_{180}$  могут быть представлены в виде следующих выражений

$$A_{0} = A_{0}^{\text{HCT.}} + \frac{\cos q_{0} \cos \delta_{0}}{\cos h_{0}} \omega (\Delta T_{A} - \Delta T_{\lambda}),$$
(7)  
$$A_{180} = A_{180}^{\text{HCT.}} + \frac{\cos q_{180} \cos \delta_{180}}{\cos h_{180}} \omega (\Delta T_{A} - \Delta T_{\lambda}),$$

где  $q_0$ ,  $\delta_0$ ,  $h_0$  – параллактический угол, склонение и высота визирной оси, рассчитываемые по наблюдениям звезд до поворота;

 $q_{180}$ ,  $\delta_{180}$ ,  $h_{180}$  — параллактический угол, склонение и высота визирной оси, рассчитываемые по наблюдениям звезд после поворота.

Для обнаружения погрешностей определения астрономических азимутов вычисляется параметр  $E_1 \approx (\Delta T_A - \Delta T_\lambda)$  с использованием следующего выражения

$$E_{1} = \frac{(\Delta A^{\text{H3M.}} - \Delta A^{\text{onop.}})\cos h_{0}\cos h_{180}\omega^{-1}}{\cos q_{180}\cos \delta_{180}\cos h_{0} - \cos q_{0}\cos \delta_{0}\cos h_{180}}.$$
 (8)

При условии, что  $h_0 \approx h_{180}$ , а наблюдения проводятся вблизи плоскости меридиана, когда соз  $q_0 \approx \cos q_{180} \approx 1$ , выражение (8) можно представить в следующем виде

$$E_1 = \frac{(\Delta A^{\text{H3M.}} - \Delta A^{\text{onop.}}) \cos h \, \omega^{-1}}{\cos \delta_{180} - \cos \delta_0}.$$
 (9)

Из табл. 1 и (4) видно, что если  $round(E_1) = \pm 1$  с, где round(...) - функция округления до целого числа; астро-

номические азимуты визирной оси ААУ определены с погрешностями, обусловленными сбоями синхронизации данных.

Для компенсации указанных погрешностей достаточно обеспечить выполнения условия  $\Delta T_A = \Delta T_\lambda$  (см. таблицу 1 и (4)), то есть необходимо ввести поправку в местное звездное время *S*:

$$S^* = S - round(E_1) \cdot \omega, \tag{10}$$

и заново рассчитать астрономические азимуты  $A_0$  и  $A_{180}$  по (3) с использованием нового значения  $S^*$ .

Обнаружение погрешности определения астрономической долготы  $\Delta\lambda$ , обусловленной сбоями синхронизации данных, предлагается производить путем сравнения значений составляющей УОЛ в плоскости первого вертикала: определенного астрономо-геодезическим методом  $\eta$  и опорного  $\eta^{\text{опор}}$  в заданной системе координат, снятого с карт УОЛ или рассчитанного другим методом, например [4].

В соответствии с основным выражением астрономогеодезического метода составляющая УОЛ в плоскости первого вертикала η вычисляется следующим образом [5]

$$\eta = (\lambda - L)\cos\phi, \tag{11}$$

где *L* – геодезическая долгота в заданной системе координат (например, WGS-84).

Для обнаружения погрешности определения астрономической долготы вычисляется параметр  $E_2$  ( $E_2 \approx \Delta T_{\lambda} = \Delta T_A$ )

$$E_2 = (\eta - \eta^{\text{onop.}})\omega^{-1} \sec \varphi, \qquad (12)$$

и если  $round(E_2) = \pm 1$  с, астрономическая долгота места определена с погрешностью, обусловленной сбоями синхронизации данных.

Для компенсации указанной погрешности в значение астрономической долготы необходимо ввести соответствующую поправку, при этом итоговое значение  $\lambda^{\mu n or}$  рассчитывается в соответствии с выражением

$$\lambda^{\text{итог}} = \lambda + round(E_2) \cdot \omega. \tag{13}$$

#### IV. Условия обнаружения погрешностей синхронизации данных

Определим условия, необходимые для обнаружения (с вероятностью P = 0,95) и компенсации погрешностей ААУ, обусловленных сбоями синхронизации данных.

Дифференцированием (9) получаем выражение для вычисления среднеквадратического отклонения (СКО) погрешности определения параметра *E*<sub>1</sub>:

$$\sigma_{E1} = \frac{\sqrt{2(\sigma_A^2 + \sigma_\beta^2)\cos^2(h) + (\sigma_h^2 C^2 + \sigma_\delta^2 D^2)}}{(\cos \delta_{180} - \cos \delta_0)\omega},$$
 (14)

где  $\sigma_A$ ,  $\sigma_h$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\sigma_\delta$  – СКО погрешностей определения параметров *A*, *h*,  $\beta$ ,  $\delta$ , соответственно; *C*, *D* – параметры, рассчитываемые по формулам:

$$D = \frac{(\Delta A^{\text{HSM.}} - \Delta A^{\text{onop.}}) \sin(h);}{(\cos \delta_{180} - \cos \delta_0)^2}.$$
 (15)

Дифференцируя (12) с учетом (11), получаем выражение для вычисления СКО погрешности определения параметра *E*<sub>2</sub>:

$$\sigma_{E2} = \omega^{-1} \sec \varphi \sqrt{(\sigma_{\lambda}^2 + \sigma_{L}^2) \cos^2(\varphi) + \sigma_{\eta \text{onop.}}^2 + \sigma_{\varphi}^2(\eta^{\text{onop.}})^2 \text{tg}^2(\varphi)}, (16)$$

где  $\sigma_{\phi}$ ,  $\sigma_{\lambda}$ ,  $\sigma_{L}$ ,  $\sigma_{\eta \circ n \circ p}$ . – СКО погрешностей определения параметров  $\phi$ ,  $\lambda$ , L и  $\eta^{\circ n \circ p}$ , соответственно.

Для обнаружения (с вероятностью P = 0.95) и компенсации погрешностей ААУ, обусловленных сбоями синхронизации данных, необходимо обеспечить выполнение следующих условий:

$$\sigma_{E1} < 0.25 \text{ c}, \quad \sigma_{E2} < 0.25 \text{ c}.$$
 (17)

На рис. 3 показаны зависимости  $\sigma_{E1}$  и  $\sigma_{E2}$  от широты места  $\varphi$  при  $\sigma_A = \sigma_h = \sigma_\beta = 0,5"$ ,  $\sigma_{\varphi} = \sigma_{\delta} = 0,3"$ ,  $\sigma_{\lambda} = 0,3"$ ·sec $\varphi$ ,  $\sigma_L = 0,06"$ ·sec $\varphi$  и  $\sigma_{\text{попор.}} = 1"$  [4].



Рис. 3. Зависимости СКО погрешностей определения параметров  $E_1$  и  $E_2$ от широты места ф

Как видно из графика, значение  $\sigma_{E1}$  превышает допустимый порог 0,25 с вблизи экватора ( $\phi < 9^{\circ}$ ) и полюсов ( $\phi > 81^{\circ}$ ), что обусловлено тем, что разность  $\cos(\delta_{180}) - \cos(\delta_0)$ , находящаяся в знаменателе (14), при приближении к экватору и полюсам стремится к 0.

СКО  $\sigma_{E2}$  увеличивается вместе с широтой  $\phi$  и превышает допустимый порог 0,25 с при  $\phi > 75^{\circ}$ .

Следует отметить, что все параметры, входящие в (14)–(16), за исключением  $\sigma_{\eta \circ n \circ p.}$ , могут быть оценены в процессе работы ААУ по полученным данным астрономических наблюдений.

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен и описан алгоритм обнаружения и компенсации погрешностей автоматизированного астрономического универсала, обусловленных сбоями синхронизации данных со шкалой всемирного времени UTC. Обнаружение и компенсацию погрешности определения азимута предложено осуществлять по разности астрономических наблюдений, полученных в двух диаметрально противоположных направлениях визирной оси (к северу и к югу от зенита), а долготы – с использованием опорного значения составляющей уклонения отвесной линии в плоскости первого вертикала, снятого со специальных карт или рассчитанного гравиметрическим методом.

Сформулированы условия, необходимые для успешного обнаружения и компенсации погрешностей ААУ, обусловленных сбоями синхронизации данных, с использованием предложенного алгоритма, а также определен диапазон широт, в котором эти условия могут быть выполнены.

#### Литература

- Тарасов С.М. Исследование влияния инструментальной погрешности автоматизированного астроуниверсала в задаче определения азимута наземного ориентира // Гироскопия и навигация. Том 29. №2 (113), 2021. С. 97-109.
- [2] Цодокова В.В., Гайворонский С.В., Кузьмина Н.В. Исследование влияния синхронизации данных автоматизированного зенитного телескопа на точность определения астрономических координат // Седьмая всероссийская конференция «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение» (КВНО-2017). 17-21 апреля 2017 г., Санкт-Петербург: тезисы докладов. СПб.: ИПА РАН, 2017. С. 92-93.
- [3] Брумберг В.А., Глебова Н.И., Лукашова М.В. и др. Расширенное объяснение к «Астрономическому ежегоднику» // Труды ИПА РАН. СПб., 2004. – Вып. 10. – 488 с.
- [4] Косарев Н.С., Канушин В.Ф., Кафтан В.И. и др. О результатах сравнения определения уклонения отвесной линии на территории западной Сибири // Гироскопия и навигация. Том 25. № 4 (99), 2017. С 72-83.

- [5] Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли / ред. В.Г. Пешехонов, О.А. Степанов. Санкт-Петербург: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 390 с.
- [6] Gaivoronskii S., Kuzmina N., Staroseltsev L., Tsodokova V. Automated zenith telescope for obtaining the Earths gravitational field parameters // В сборнике: Proceedings of the 4th IAG Symposium on Terrestrial Gravimetry: Static and Mobile Measurements. SPb: Concern CSRI Elektropribor, 2016. P. 250-258.
- [7] С.В. Гайворонский, Н. В. Кузьмина, В. В. Цодокова Автоматизированный зенитный телескоп для решения астрономогеодезических задач // Навигация по гравитационному полю Земли и ее метрологическое обеспечение. Доклады научнотехнической конференции. 2017. С. 197-205.
- [8] Цодокова В.В., Гайворонский С.В., Тарасов С.М., Русин Е.В. Определение астрономических координат автоматизированным зенитным телескопом // XVI конференция молодых ученых «Навигация и управление движением». СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2014. С. 269276.
- [9] Блажко С.Н. Курс практической астрономии. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979,с.393-408.

# Сопоставление фильтров Винера и Калмана при решении задачи обработки результатов морской гравиметрической съемки

А.В. Соколов *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»* Санкт-Петербург, Россия https://orcid.org/0000-0002-6423-1591

А.В. Моторин Университет ИТМО, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» Санкт-Петербург, Россия https://orcid.org/ 0000-0002-2093-5079

Аннотация—Проводится сопоставление стационарных фильтров, решающих задачу оценивания в реальном времени, и сглаживающих фильтров Винера, построенных в том числе с использованием метода локальной аппроксимации спектральных плотностей для оцениваемых сигнала и помех измерения, с нестационарными фильтрами и сглаживающими фильтрами Калмана, используемыми при решении задачи обработки результатов морской гравиметрической съемки. Приводятся результаты сопоставления оценок аномалии силы тяжести, полученных различными фильтрами с использованием модельных и реальных данных. Обсуждаются достоинства и недостатки сопоставляемых алгоритмов.

#### Ключевые слова—фильтр Винера, фильтр Калмана, сглаживание, аномалия силы тяжести.

#### I. Введение

Одна из основных задач, возникающих при обработке результатов гравиметрической съемки на подвижном объекте, направленной на определение аномалий силы тяжести (АСТ), заключается в разделении инерционной и гравитационной составляющих измеряемого гравиметром кажущегося ускорения [1, 2]. Строгую математическую постановку такой задачи можно сформулировать в рамках теории байесовского оценивания, если задаться стохастическими моделями АСТ, вертикального движения носителя и погрешностей используемых измерителей, представленных в виде формирующих фильтров (ФФ) во временной области. Для ее решения, исходя из критерия минимизации дисперсии ошибки оценивания, может быть использован либо оптимальный фильтр Калмана (ФК), либо соответствующий ему оптимальный сглаживающий ФК [3, 4]. Напомним, что в задаче фильтрации, решаемой с помощью ФК в режиме реального времени, используются только накопленные к текущему моменту времени измерения. При решении же задачи сглаживания, получаемом в режиме постобработки, при вычислении оценки в каждой точке измеряемого галса привлекается весь накопленный на галсе набор измерений [3, 4]. Говоря о ФК, необходимо иметь в виду, что свойство его оптимальности следует соотносить с теми моделями для сигналов (АСТ и вертикального движения) и погрешностей их измерений, применительно к которым этот фильтр синтезирован. Это порождает определенные сложности при настройке и использова-

Исследование выполнено за счет гранта РНФ № 23-19-00626, https://rscf.ru/project/23-19-00626/. О.А. Степанов Университет ИТМО, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» Санкт-Петербург, Россия https://orcid.org/0000-0003-3640-3760

А.А. Краснов *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»* Санкт-Петербург, Россия https://orcid.org/0000-0003-0298-2418

нии ФК, для преодоления которых успешно используются методы многоальтернативной фильтрации, обеспечивающие решение задачи идентификации моделей [5-7]. Следует также заметить, что ФК представляет собой нестационарный алгоритм даже при стационарном характере моделей, на которые он настроен. Однако по завершению переходного режима коэффициент усиления в ФК перестает меняться и ФК становится стационарным. Этот фильтр обеспечивает минимизацию дисперсии ошибки оценивания на бесконечном времени и является оптимальным стационарным фильтром для тех моделей, которые использованы при синтезе нестационарного ФК. Очевидно, что в случае если коэффициент усиления в фильтре зафиксирован с момента начала работы, то оптимальный стационарный фильтр будет проигрывать в точности ФК, в котором коэффициент усиления меняется. Оптимальный стационарный фильтр при задании стохастических моделей для АСТ и вертикального движения в виде их спектральных плотностей (СП) может быть синтезирован и с применением винеровского (частотного) подхода. В этом случае говорят об оптимальном фильтре Винера (ФВ) и оптимальном сглаживающем ФВ. Так же как и в случае с ФК, свойство оптимальности ФВ следует соотносить с теми моделям, для которых он строится. Очевидно, что при одинаковых моделях ФК в установившемся режиме и ФВ будут между собой совпадать. В отличие от ФК, задаваемого во временной области с помощью дифференциального уравнения, ФВ и сглаживающие ФВ описываются с помощью передаточных функций (ПФ). Для достаточно сложных моделей процесс получения ПФ не является тривиальным, и здесь широкое применение получил инженерный подход, основанный на методе локальных аппроксимаций СП, предложенный в работах Челпанова И.Б. и Несенюка Л.П. [11, 12], и развитый на его основе частотно-временной подход к построению алгоритмов фильтрации и сглаживания [13].

При обработке данных морской гравиметрической съемки на практике также применяются стационарные фильтры, задаваемые в виде ПФ и полученные из различных, в том числе эвристических, соображений [8–10]. Стохастические модели АСТ и вертикального движения для таких фильтров, как правило, не задаются, и, таким образом, не определено, по отношению к каким моделям эти фильтры являются оптимальными. Вместе с тем при построении стационарных фильтров достаточно эффек-

тивно привлекаются такие понятия, как частота среза, полоса пропускания, пространственное разрешение [8– 10]. Смысл же этих понятий применительно к ФК четко не определен. Отмеченные обстоятельства затрудняют установление взаимосвязи и отличий свойств ФК и ФВ и соответствующих им сглаживающих фильтров, используемых при решении задачи обработки результатов морской гравиметрической съемки.

Установлению этих взаимосвязей и посвящен настоящий доклад.

Структура работы следующая. После введения во второй части работы описываются используемые модели АСТ и вертикального движения, а также приводится связанная с ними математическая модель измерений демпфированного гравиметра. В третьей части с помощью этих моделей формулируются и решаются задачи фильтрации и сглаживания сначала во временной области с позиций калмановского (временного) подхода без применения упрощений, а затем с позиций винеровского (частотного) подхода, с применением метода локальной аппроксимации. В четвертой части анализируются особенности и отличия полученных в результате ФК и ФВ и обсуждается их взаимосвязь со стационарными фильтрами, применяемыми на практике при обработке результатов гравиметрической съемки. В пятой части приводятся результаты оценивания АСТ с помощью описанных фильтров с использованием модельных и реальных данных результатов морской гравиметрической съемки. В заключении обсуждаются достоинства и недостатки сопоставляемых фильтров.

#### II. МОДЕЛИ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА, ПОМЕХ И ГРАВИМТЕРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

При построении оптимальных фильтров необходимо задаться стохастическими моделями для полезного сигнала и помехи. Применение адекватных моделей и определение их параметров являются ключевыми при построении ФК и сглаживающего ФК [3, 4]. В задаче обработки гравиметрической съемки полезным сигналом является АСТ, а основной помехой – вертикальные ускорения носителя. Приведем далее используемые в настоящей работе модели АСТ и вертикального движения носителя, а также модель измерений демпфированного гравиметра.

#### А. Модель АСТ

Для описания АСТ будем использовать модель Джордана [14]. В пространстве состояний эта модель может быть представлена виде

$$\begin{split} \dot{x}_{1} &= -\beta x_{1} + x_{2}, \\ \dot{x}_{2} &= -\beta x_{2} + x_{3}, \\ \dot{x}_{3} &= -\beta x_{3} + w_{ga}, \\ g_{a} &= -\beta \zeta x_{1} + x_{2}, \end{split}$$
 (1)

где  $\beta = V \sigma_{dga} / \sqrt{2} \sigma_{ga}$ , V – скорость движения,  $\sigma_{ga}$  – среднеквадратическое отклонение (СКО) АСТ;  $\sigma_{dga}$  – СКО производной АСТ по длине траектории;  $w_{ga}$  – порождающий белый шум интенсивности  $10\beta^3\sigma_{ga}^2$ ,  $\zeta = (\sqrt{5}-1)/\sqrt{5}$ . Соответствующая этой модели СП АСТ задается в виде

$$S_{ga}\left(\omega\right) = \frac{2\beta^{3}\sigma_{ga}^{2}\left(5\omega^{2} + \beta^{2}\right)}{\left(\omega^{2} + \beta^{2}\right)^{3}}.$$
(2)

#### В. Модель вертикального движения носителя

Для описания вертикальных ускорений, скоростей и перемещений объекта будем использовать модель [15]

$$\dot{x}_4 = x_5, 
\dot{x}_5 = x_6, 
\dot{x}_6 = -a_3 x_4 - a_2 x_5 - a_1 x_6 + w_h,$$
(3)

где  $\Delta h = x_4$  — вертикальное перемещение над усредненным уровнем моря в районе съемки с СКО, равным  $\sigma_{\Delta h}$ ;  $\dot{h} = -x_5$ ,  $\ddot{h} = -x_6$ , — вертикальная скорость и ускорение. Входящие в (3) коэффициенты определяются как  $a_3 = (\lambda^2 + \mu^2)\gamma$ ,  $a_2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\mu\gamma$ ,  $a_1 = 2\mu + \gamma$ , где  $\lambda = 2\pi/T$ , T — преобладающий период качки;  $\mu = 1/\tau$ ,  $\tau$  интервал корреляции;  $\gamma$  — заданный коэффициент. Интенсивность порождающего белого шума  $w_h$  задается величиной  $2\sigma_{\Delta h}^2 a_3 (a_1a_2 - a_3)/a_1$ . СКО вертикальных перемещений  $\sigma_{\Delta h}$  и СКО вертикальных ускорений  $\sigma_{\ddot{h}}$  связаны соотношением  $\sigma_{\ddot{h}} = \sigma_{\Delta h} \sqrt{(a_2a_3)/a_1}$ . Соответствующая этой модели СП вертикальных ускорений задается в виде

$$S_{j_{h}}(\omega) = \frac{2\sigma_{j_{h}}^{2}}{\pi a_{2}} \frac{\omega^{4}(a_{1}a_{2}-a_{3})}{\omega^{6}+(a_{1}-2a_{2})\omega^{4}+(a_{2}^{2}-2a_{3}a_{1})\omega^{2}+a_{3}^{2}}.$$
 (4)

#### С. Измерения демпфированного гравиметра

Чувствительный элемент демпфированного гравиметра представляет собой упругий маятник, взвешенный в демпфирующей жидкости [1, 9]. Вследствие этого его измерения у могут быть записаны в виде

$$\dot{x}_{\gamma} = -\frac{1}{T_g} x_{\gamma} + \frac{1}{T_g} (g_a + \ddot{h}) + \frac{1}{T_g} \Delta g ,$$
 (5)

$$y = x_7 + v_g, \tag{6}$$

где  $x_7$  – приращения силы тяжести относительно опорного пункта,  $T_g$  – постоянная времени гравиметра,  $v_g$  – белошумная инструментальная погрешность гравиметра интенсивности  $r^2$ ,  $\Delta g$  – сумма детерминированных поправок за эффект Этвеша, эффект Гаррисона, орбитальный эффект, эффект демпфирования и разности нормального значения силы тяжести и ее значения на опорном пункте, вычисляемых отдельно по известным соотношениям [1, 9].

Пренебрегая погрешностью гравиметра, а также заранее учитывая детерминированные поправки и применяя процедуру восстановления сигнала, измерения гравиметра можем представить в простом виде [1, 9]:

$$y^* = g_a + \ddot{h} . \tag{7}$$

Привлекательность модели измерений (7) состоит в ее простоте, за счет которой, как будет показано далее, мож-

но поставить и решить задачу винеровской фильтрации и получить достаточно простые соотношения для ФВ.

#### III. Постановка и решение задачи оценивания АСТ

Как предполагалось, будем рассматривать две задачи оценивания АСТ – задачу фильтрации, т.е. задачу оценивания в реальном времени, и задачу сглаживания на закрепленном интервале, т.е. задачу получения оценок АСТ по результатам гравиметрической съемки, когда доступны все измерения. Рассмотрим две постановки задачи – винеровскую и калмановскую [1, 3, 4, 13, 16].

#### А. Калмановская постановка задачи и оптимальный фильтр Калмана

Калмановская постановка задачи сводится к оцениванию вектора состояния

$$\begin{split} \dot{x}_{1} &= -\beta x_{1} + x_{2}, \\ \dot{x}_{2} &= -\beta x_{2} + x_{3}, \\ \dot{x}_{3} &= -\beta x_{3} + w_{ga}, \\ \dot{x}_{4} &= x_{5}, \\ \dot{x}_{6} &= x_{6}, \\ \dot{x}_{6} &= -a_{3} x_{4} - a_{2} x_{5} - a_{1} x_{6} + w_{h}, \\ \dot{x}_{7} &= -\frac{1}{T_{g}} x_{7} - \frac{1}{T_{g}} (\beta \zeta x_{1} - x_{2} + x_{6}) - \frac{1}{T_{g}} \Delta g + \frac{1}{T_{g}} w_{\Delta} \end{split}$$
(8)

по измерениям (6).

В (8)  $x_{1-7}$  соответствуют моделям (1), (3), (5) а  $w_{\Delta}$  – белошумная погрешность вычисления поправок  $\Delta g$ , которая также может быть учтена в этой постановке и основной вклад в которую вносит погрешность вычисления поправки Этвеша по данным СНС.

Нетрудно с использованием известных соотношений реализовать оптимальный ФК для решения задачи фильтрации, сформировав необходимые для этого матрицы, соответствующие уравнению (8) и модели измерений (6) и проведя их дискретизацию [1, 3, 4]. Для получения сглаженной оценки АСТ может быть применена известная рекуррентная процедура [16], обрабатывающая оценки для всех компонент вектора состояния в обратном времени.

#### В. Винеровская постановка задачи и фильтр Винера

При решении задачи в рамках винеровской постановки будем полагать, что измерения гравиметра описываются моделью (7), то есть представляют собой сумму некоррелированных сигнала (АСТ) и помехи (вертикальных ускорений) со спектральными плотностями (2) и (4) соответственно. В результате можно получить соответствующие передаточные функции ФВ и сглаживающего ФВ. Точное решение с использованием СП (2) и (4) является достаточно трудоемким ввиду высокого порядка и сложности этих СП. Приближенное решение, однако, может быть получено с помощью метода локальной аппроксимации (МЛА) СП [11, 13]. Согласно этому методу СП АСТ и вертикальных ускорений могут быть аппроксимированы в виде

$$S_{ga}(\omega) \approx r_{\varepsilon}^2 \frac{\omega_c^4}{\omega^4},$$
 (9)

$$S_{\tilde{h}}(\omega) \approx r_{\varepsilon}^2 \frac{\omega^4}{\omega_c^4},$$
 (10)

где  $r_{\varepsilon}^2$ ,  $\omega_c^4$  – значение СП и частоты точки пересечения аппроксимаций СП сигнала и помехи, рис. 1.



Рис. 1 Квадратные корни из СП АСТ и вертикальных ускорений (сплошные линии) и их аппроксимации (пунктирные линии)

Нетрудно показать [13], что сглаживающий ФВ для решения задачи оценивания АСТ может быть реализован с использованием ПФ фильтра Баттерворта 4-го порядка:

$$H_{y}^{g_{a}}(p) = \frac{1}{p^{4} + \alpha_{B}\omega_{c}p^{3} + 0.5\alpha_{B}^{2}\omega_{c}^{2}p^{2} + \alpha_{B}\omega_{c}^{3}p + \omega_{c}^{4}}, \quad (11)$$

где  $\omega_c$  соответствует точке пересечения сигнала и помехи рис. 1. При этом для вычисления сглаженной оценки АСТ достаточно обработать измерения кажущегося ускорения (7) с помощью ФВ с ПФ (11) в прямом времени и полученные в результате оценки – в обратном времени.

В свою очередь, ПФ ФВ для решения задачи фильтрации АСТ в реальном времени получается с помощью процедур сепарации и факторизации и имеет вид:

$$H_{y}^{g_{a}}(p) = \frac{\alpha_{B}\omega_{c}^{3}p + \omega_{c}^{4}}{p^{4} + \alpha_{B}\omega_{c}p^{3} + 0.5\alpha_{B}^{2}\omega_{c}^{2}p^{2} + \alpha_{B}\omega_{c}^{3}p + \omega_{c}^{4}}.$$
 (12)

Обратим внимание на то, что приведенная ПФ отличается от ПФ (11). Таким образом, использование фильтра с ПФ (12) для решения задачи сглаживания путем обработки сигналов в прямом и обратном времени не обеспечивает оптимальное решение задачи сглаживания АСТ, полученное с помощью МЛА для моделей (3), (4). И наоборот, оценка, найденная с помощью фильтра (11), не будет соответствовать оптимальному решению задачи фильтрации АСТ для указанных моделей в реальном времени.

Следует иметь в виду, что ФВ и сглаживающий ФВ, полученные с использованием МЛА, будут субоптимальными по отношению к алгоритмам, соответствующим калмановской постановке задачи оценивания вектора состояния (8) по измерениям (6) в установившемся режиме. Это объясняется тем, что при его построении применялась аппроксимация СП сигнала и помехи, не учитывались белошумная погрешность гравиметра и погрешность вычисления поправок. Интерес представляет теоретическое и практическое исследование отличий этих оценок, приводимое далее в работе.

#### IV. Сопоставление фильтров Винера и Калмана с точки зрения частотных харатеристик

Ранее уже отмечалось, что для одинаковых моделей решения ФК и ФВ в установившемся режиме совпадают. Пользуясь этим фактом, получим ПФ ФВ для полных моделей АСТ и вертикального движения, найдя ПФ ФК в установившемся режиме. Опираясь на [3], можем показать, что эта ПФ имеет вид

$$W_{v}^{x}(p) = \left(pE - F + K_{\infty}H\right)^{-1}K_{\infty}, \qquad (13)$$

где  $K_{\infty} = r^{-2} P_{\infty} H^{T}$ , а матрица  $P_{\infty}$  удовлетворяет уравнению Риккати:

$$FP_{\infty} + P_{\infty}F^{T} + GQG^{T} - r^{-2}P_{\infty}H^{T}HP_{\infty} = 0, \quad (14)$$

в котором Q – матрица интенсивностей порождающих шумов в (8), F, G, H – матрицы, соответствующие постановке задачи оценивания вектора состояния (8) по измерениям (6).

Введем матрицу  $D = \begin{bmatrix} -\beta \zeta & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , такую что  $g_a = Dx$ . Тогда искомая ПФ может быть записана как

$$W_{v}^{g_{a}}(p) = D(pE - F + K_{\infty}H)^{-1}K_{\infty}, \qquad (15)$$

а ФК в установившемся режиме может быть представлен в виде стационарного фильтра:

$$\dot{\hat{x}} = \left(F - K_{\infty}H\right)\hat{x} + K_{\infty}y,$$

$$\hat{g}_{\alpha} = Dx.$$
(16)

Проблема получения такой ПФ в явном виде состоит в необходимости решения уравнения Риккати (14). Однако эта ПФ может быть получена численными методами. Соответствующая ей амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) приведена на рис. 2 в сравнении с ПФ ФВ (12). Рассматривая эти АЧХ на качественном уровне, можем заключить, что оба фильтра являются фильтрами нижних частот и в полосе пропускания АЧХ ФВ и ФК практически совпадают. Кроме того, по АЧХ можно определить частоту среза фильтров, которая характеризует пространственное разрешение морской гравиметрической съемки. Полагая, что частота среза – это частота, ниже которой мощность сигнала на выходе фильтра уменьшается в два раза по сравнению с мощностью в полосе пропускания [17], получим, что АЧХ на частоте среза имеет спад до уровня  $\log_{10}2 \approx 0,707$  (или приблизительно -3 дБ) относительно уровня в полосе пропускания. Заметим, что частота среза для ФВ (12) зависит только от  $\omega_c$  – частоты точки пересечения СП сигнала и помехи. В силу близости ПФ установившегося ФК и ФВ частоту среза и соответствующую ей полосу пропускания можно определить исходя из точки пересечения СП АСТ и вертикальных ускорений рис. 1 и тем самым определить пространственное разрешение для конкретных стохастических моделей. Различия АЧХ ФК и ФВ в полосе подавления (рис. 2) обусловлены различиями в СП помехи.



Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики ФК и ФВ

Что касается переходных процессов, то очевидно, что ФК будет иметь менее протяженные во времени переходные процессы, чем ФВ. В связи с этим интерес может представлять построение упрощенного ФК для упрощенных моделей АСТ (9) и вертикальных ускорений (10). Такой ФК можно получить с применением частотно-временного подхода [13]. Введем для упрощенной модели АСТ ФФ в виде [3, 13]

$$g_1 = g_2,$$
  

$$\dot{g}_2 = w,$$
  

$$g_2 = g_1,$$
  
(17)

где w – порождающий белый шум интенсивности  $r_e^2 \omega_e^4$ . Обратим внимание, что ввести непосредственно модель в виде ФФ для такой помехи, строго говоря, не представляется возможным, так как с точки зрения классической теории белый шум не является дифференцируемым процессом. Однако рассматриваемую постановку задачи можно сформулировать с использованием понятия условной СП [3, 11–13]. Дважды проинтегрировав измерения, эту задачу сведем к эквивалентной (с точки зрения получаемого решения) постановке задачи оценивания вектора состояния

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
  
 $\dot{x}_2 = g_1,$   
 $\dot{g}_1 = g_2,$   
 $\dot{g}_2 = w$ 
(18)

по измерениям

$$\tilde{y} = x_1 + v , \qquad (19)$$

где  $\tilde{y}$  – второй интеграл от измерений (7), v – белый шум измерений с интенсивностью  $r_{\varepsilon}^{2}/\omega_{c}^{4}$ . Формально такие измерения являются измерениями высоты. Однако в [13] показано, что решение задачи оценивания АСТ, описываемой ФФ (18) по измерениям (19), эквивалентно решению задачи оценивания АСТ (9) по измерениям (7) на фоне помехи с СП (10) с точки зрения точности оценивания АСТ в установившемся режиме. С помощью общих результатов из [13] нетрудно показать, что ПФ ФК (18), (19) в установившемся режиме совпадает с (12). Принимая во внимание отмеченное обстоятельство, получим соотношения для расчетной СКП оценивания АСТ для ФВ (12) [13]

$$\sigma_f(g_a) = r_{\varepsilon} \sqrt{\frac{\omega_c}{\left(1, 5 - \sqrt{2}\right)\sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \approx 2,51 r_{\varepsilon} \sqrt{\omega_c} \quad (20)$$

и сглаживающего ФВ (11)

$$\sigma_s(g_a) = \frac{r_{\varepsilon}}{2} \sqrt{\frac{\omega_c}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \approx 0.37 r_{\varepsilon} \sqrt{\omega_c} , \quad (21)$$

построенных для упрощенных моделей (9), (10). Таким образом, получены соотношения, связывающие ФК и ФВ для упрощенных моделей. Что касается решения задачи сглаживания, получить аналитические выражения для сравнения алгоритмов достаточно сложно, вследствие чего сглаживающие ФК и ФВ сравниваются далее на примерах моделирования и обработки реальных данных.

### V. Сопоставление фильтров Винера и Калмана на модельных и реальных данных

Для сравнения ФК и ФВ проведено моделирование при различных значениях среднеквадратических отклонений (СКО) вертикальных ускорений и СКО изменчивости АСТ. Расчет выполнялся при характерных для морского объекта значениях периода T = 5 c и нерегулярности  $\mu = 0.05 \text{ c}^{-1}$  вертикальных ускорений, скорости V = 10 узл., белошумной среднеквадратической погрешности (СКП) гравиметра  $\sigma_g = 0,1$  мГал и СКП вычисления поправок  $\sigma_{w\Delta} = 0,5$  мГал. На рис. 3, 4 приведены характерные графики оценок и соответствующих им погрешностей оценивания АСТ с использованием ФК и ФВ, а на рис. 5, 6 - с использованием сглаживающего ФК и ФВ. Для СКП оценивания ФВ рассчитывались действительные (д) и расчетные (р) значения. Для ФК и сглаживающего ФК, настроенных на полные модели, они совпадают. Для ФВ и сглаживающего ФВ расчетные значения СКП вычислялись согласно соотношениям (20), (21), а действительные - по полученной реализации погрешностей оценивания.



Рис. 3. Оценки АСТ ФК и ФВ



Рис. 4. Погрешности оценивания АСТ ФК и ФВ



Рис. 5. Оценки АСТ сглаживающих ФК и ФВ



Рис. 6. Погрешности оценивания АСТ сглаживающего ФК и ФВ

СКП оценивания АСТ приведены в табл. 1, 2 для различных СКО вертикальных ускорений, указанных в первой колонке.

ТАБЛИЦА 1. СРАВНЕНИЕ СКП ОЦЕНИВАНИЯ АСТ СГЛАЖИВАЮЩЕГО ФК И ФВ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

	1 мГал/км			2 мГал/км			3 мГал/км		
	ФК	$\Phi B$ $(p)^a$	$\begin{array}{c} \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{(\partial)}^{b} \end{array}$	ФК	$\Phi B$ $(p)^a$	$\begin{array}{c} \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{(\partial)}^{b} \end{array}$	ФК	$\Phi B$ $(p)^a$	$\begin{array}{c} \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{(\partial)}^{b} \end{array}$
2 Гал	0,05	0,03	0,05	0,07	0,05	0,07	0,13	0,10	0,14
5 Гал	0,06	0,04	0,06	0,10	0,07	0,10	0,18	0,14	0,19
10 Гал	0,07	0,05	0,07	0,12	0,10	0,13	0,23	0,19	0,24
20 Гал	0,09	0,07	0.09	0,16	0,13	0,17	0,30	0,24	0,32

<sup>а.</sup> р – расчетные значения

д –действительные значения

	1 мГал/км		2 мГал/км			3 мГал/км			
	ФК	ФВ (p)	ФВ (д)	ФК	ФВ (p)	ФВ (д) <sup>б</sup>	ФК	ФВ (p)	ФВ (д)
2 Гал	0,22	0,19	0,40	0,41	0,36	0,41	0,74	0,69	0,83
5 Гал	0,31	0,27	0,48	0,57	0,51	0,82	1,05	0,98	1,15
10 Гал	0,42	0,35	0,52	0,74	0,66	1,14	1,36	1,27	1,56
20 Гал	0,52	0,45	0,60	0,96	0,86	1,43	1,54	1,66	1,70

ТАБЛИЦА 2. СРАВНЕНИЕ СКП ОЦЕНИВАНИЯ АСТ ФК И ФВ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

Из представленных результатов следует, что расчетная СКП оценивания АСТ сглаживающего ФВ на 10-20% ниже СКП ФК, в то время как действительная СКП сглаживающего ФВ превышает СКП сглаживания ФК не более чем на 8%. Расчетная СКП фильтрации АСТ ФВ также на 10-20% ниже СКП ФК, а действительная СКП может превышать СКП ФК до 30%. Большие отличия возникают при сильно аномальном поле и существенных вертикальных ускорениях. Таким образом, различия в точности оценивания АСТ ФК и ФВ, построенного с использованием метода локальной аппроксимации, в установившемся режиме незначительны. В то же время расчет СКП согласно соотношениям (20), (21) в ряде случаев может дать существенно заниженные результаты.

Для сравнения ФК и ФВ на реальных данных было выбрано четыре пары возвратных (пройденных в двух направлениях) галсов, с различной изменчивостью АСТ и СКО вертикальных ускорений, пройденных в разных акваториях Мирового Океана. Измерения АСТ выполнялись с использованием гиростабилизированного гравиметра «Чекан-АМ». СКО изменчивости АСТ для галсов 1-4 составляло около 1 мГал/км. При этом возвратные галсы 1, 2 сняты в хорошую погоду с СКО вертикальных ускорений около 10 Гал, а возвратные галсы 3, 4 при существенном волнении с СКО вертикальных ускорений около 40 Гал. Для галсов 5-8 значение СКО изменчивости АСТ составляло порядка 3 мГал/км. При этом также пара галсов 5, 6 была снята в хорошую погоду с СКО вертикальных ускорений около 10 Гал, а другая пара галсов 7, 8 – при наличии волнения с СКО вертикальных ускорений около 25 Гал. На рис. 7 приведен пример оценок АСТ на галсе 1, полученных с использованием ФК и ФВ, а на рис. 8 пример сглаженных оценок АСТ с использованием сглаживающих ФК и ФВ. Профили на рис. 7, 8 для наглядности смещены относительно друг друга.



Рис. 7. Оценки АСТ ФК и ФВ



Рис. 8. Оценки АСТ сглаживающих ФК и ФВ

На рис. 9, 10 приведены разности оценок ACT на возвратных галсах 1, 2, полученных с использованием сглаживающих и обычных ФК и ФВ.



Рис. 9. Разность оценок АСТ на возвратных галсах ФК и ФВ



Рис. 10. Разность оценок ACT на возвратных галсах сглаживающих  $\Phi K$  и  $\Phi B$ 

Из рис. 7–10 наглядно видна разница в переходных процессах ФК и ФВ, а также разница в точности оценивания фильтрации и сглаживания. Для сравнения точностей оценивания АСТ ФК и ФВ для каждой пары возвратных галсов 1–2, 3–4, 5–6, 7–8 по их разности оценок АСТ в установившемся режиме рассчитывались действительные (д) СКП. Эти СКП приведены в табл. 3 наряду с расчётными значениями (р) СКП. Расчетные значения СКП АСТ для ФК брались из ковариационного канала, а для ФВ рассчитывались по соотношениям (20), (21).

Гал	Сглаживание				Фильтрация			
сы	ФК (р)	ФК (д)	ФВ (p)	ФВ (д)	ФК (р)	ФК (д)	ФВ (p)	ФВ (д)
1-2	0,04	0,02	0,02	0,02	0,20	0,14	0,16	0,15
3-4	0,08	0,07	0,06	0,10	0,51	0,36	0,43	0,53
5-6	0,12	0,34	0,09	0,41	0,78	0,73	0,63	0,90
7-8	0,26	0,80	0,20	0,84	1,44	1,56	1,20	1,74

ТАБЛИЦА З. СРАВНЕНИЕ СКП АСТ ФК И ФВ

Из представленных результатов следует, что ФК и ФВ имеют близкие действительные СКП оценивания, что хорошо согласуется с результатами моделирования. Однако расчетные и действительные СКП оценивания ФК и ФВ хорошо согласуются только для галсов с малой изменчивостью АСТ. Для галсов с большой изменчивостью видна существенная (до 0,6 мГал) разница между расчетной и действительной СКП. Этот факт говорит о целесообразности уточнения модели погрешностей измерений при значительном уровне вертикальных ускорений.

#### VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено сопоставление фильтров Калмана и Винера, используемых при решении задачи обработки результатов морской гравиметрической съемки. С этой целью, опираясь на результаты предыдущих исследований, приведена калмановская постановка задачи во временной области, учитывающая выбранные модели для АСТ, вертикального движения и свойства демпфированного гравиметра. Описаны соответствующий им оптимальный ФК и сглаживающий ФК для оценивания АСТ.

Задача оценивания АСТ сформулирована и в рамках частотного (винеровского) подхода. На основе метода локальной аппроксимации СП синтезированы соответствующие стационарные реализуемые ФВ и сглаживающий ФВ, являющиеся оптимальными в установившемся режиме для упрощенных моделей АСТ и вертикального движения.

В рамках частотно-временного подхода проанализированы взаимосвязь и отличия передаточных функций синтезированных ФВ и ФК в установившемся режиме, что позволило, с одной стороны, обсудить соответствие между различными фильтрами, а с другой – сопоставить точность и пространственное разрешение оценок АСТ, полученных при их использовании. Все это в совокупности создает предпосылки для синтеза более простых, но достаточно эффективных субоптимальных фильтров для обработки гравиметрической съемки.

Результаты, полученные при обработке реальных данных, в целом совпадают с результатами моделирования, что подтверждает адекватность принятых моделей и их аппроксимаций. С их использованием определены различия в точности оценивания АСТ для оптимального ФК в установившемся режиме и ФВ, полученного с использованием метода локальной аппроксимации и соответствующих им сглаживающих фильтров. Отмечены два основных преимущества фильтров, основанных на калмановском подходе: существенное, до 30%, сокращение переходных процессов и возможность расчета текущей характеристики точности, что в конечном счете повышает производительность съемочных работ. Отмечена целесообразность уточнения модели погрешностей измерения при значительных вертикальных ускорениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Peshekhonov V. G., Stepanov O.A., Avgustov L.I., et al., Sovremennyye metody i sredstva izmereniya parametrov gravitatsionnogo polya Zemli (Modern methods and equipment for Earth gravity field investigation) (in Russian). Saint-Petersburg, Russia: CSRI Elektropribor, 2017.
- [2] O. A. Stepanov, D. A. Koshaev, A. V. Motorin, A. A. Krasnov, and A. V. Sokolov, "Algorithms for Integrated Processing of Marine Gravimeter Data and GNSS Measurements," IFAC-PapersOnLine, vol. 53, no. 2, pp. 500–505, 2020.
- [3] О. А. Степанов, Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Часть 1. Введение в теорию оценивания, 3rd ed. Санкт-Петербург: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017.
- [4] S. Sarkka, Bayesian Filtering and Smoothing. Cambridge University Press, 2013. doi: 10.1017/CBO9781139344203.
- [5] A. V. Motorin and A. S. Nosov, "Accuracy and sensitivity analysis for marine gravimetry algorithms in dependence of survey conditions," in Proceedings of the 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, ElCon-Rus 2019, 2019. doi: 10.1109/ElConRus.2019.8656640.
- [6] Motorin, A.V., Stepanov, O.A. Designing an error model for navigation sensors using the Bayesian approach. IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems, 2015, 2015-October, crp. 54–58.
- [7] A. Motorin, O. Stepanov, A. Sokolov, and A. Krasnov, "Identification of the Model Parameters for a Damped Gravimeter," in 2021 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), 2021, pp. 1–4.
- [8] А. А. Краснов and А. В. Соколов, "Современный комплекс программно-математического обеспечения мобильного гравиметра «Чекан-АМ»," Гироскопия и навигация, vol. 89, no. 2, 2015.
- [9] Sokolov, A. V. Improving the Accuracy of Marine Gravimeters / A. V. Sokolov, A. A. Krasnov, L. K. Zheleznyak // Gyroscopy and Navigation. – 2019. – Vol. 10. – No 3. – P. 155-160. – DOI 10.1134/S2075108719030088.
- [10] Bolotin Y. V. and Yurist S. S., Suboptimal smoothing filter for the marine gravimeter GT-2M, Gyroscopy Navigation, 2011, Vol. 2, no.3, pp. 152-155.
- [11] Челпанов, И.Б. Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах - Москва : Наука, 1967. - 392 с.
- [12] И. Б. Челпанов, Л. П. Несенюк, Брагинский М. В. Расчет характеристик навигационных приборов. - Ленинград : Судостроение, 1978. - 264 с.
- [13] О. А. Степанов, А. В. Лопарев, И. Б. Челпанов, Частотновременной подход к решению задач обработки навигационной информации, Автомат. и теле-мех., 2014, выпуск 6, 132–153
- [14] H. E. Rauch, F. Tung, and C. T. Striebel, "Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems," The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, vol. 8, no. 3, pp. 1445–1450, 1965.
- [15] Jordan, S. K. (1972). Self-consistent Statistical Models for Gravity Anomaly and Undulation of the Geoid. Journal of Geophysical Research, 77/(20), 2156–2202.
- [16] С. С. Ривкин, Определение линейных скоростей и ускорений качки корабля инерциальным методом. Ленинград: ЦНИИ "Румб," 1980.
- [17] А. Б. Сергиенко, Цифровая обработка сигналов, 3rd ed. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011.

# Новый алгоритм коррекции в автономной навигации пешехода

А.В. Брагин

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова Москва, Россия avb9676@yandex.ru

Аннотация-Описывается алгоритм коррекции в задаче навигации пешехода с применением инерциальных измерительных блоков, прикрепленных к стопам человека. Новизна заключается в адаптации ковариаций навигационного алгоритма в зависимости от некоторых диагностических параметров, вычисляемых в процессе анализа траектории пешехода. Для работы алгоритма необходимо наличие двух инерциальных блоков, прикрепленных к разным стопам. Навигационное решение корректируется по информации о расстоянии между стопами, а также информации о прямолинейности движения. Последняя и используется для получения параметров, использующихся для изменения ковариаций. Алгоритм был проверен на реальных данных и показал более высокую точность, чем известные алгоритмы, корректирующие навигационное решение только по расстоянию между стопами или только по информации о прямолинейности движения.

Ключевые слова—БИНС, ИИБ, стопа, пешеходная навигация, ковариации, алгоритм коррекции.

#### I. Введение

Навигация пешехода – относительно молодая отрасль навигации. Ее стали выделять, когда возникли специализированные устройства и алгоритмы, предназначенные именно для определения местоположения пешехода, например [1], [2]. Обычно навигацию пешехода рассматривают в условиях, когда недоступны сигналы спутниковых навигационных систем, поскольку навигация по СНС одинакова для пешехода и любого другого объекта.

Исторически применение систем навигации пешехода, не требующих внешней информации, виделось в первую очередь военным [3], поскольку в условиях боевых действий пропадание сигналов спутниковых систем реально. Однако возможны и другие варианты применения, требующие автономного определения местоположения человека. Один из них – навигация внутри помещений.

Задача отслеживания перемещений человека в помещении может решаться по-разному, автономно и с помощью предустановленной инфраструктуры. В настоящее время существуют коммерческие системы, обеспечивающие навигацию на складах, на парковках, на производстве. Как правило, эти системы используют инфраструктуру [4]. В здании размещаются специальные устройства, излучающие какие-либо сигналы (вариантов множество: Wi-Fi, Bluetooth, UWB). Эти сигналы принимаются устройствами пользователей и используются для определения их местоположения. При этом возможны разные принципы: измерение времени распространения сигнала (ToA), измерение интенсивности сигнала (RSSI). Такие системы при должной настройке обеспечивают хорошую и не ухудшающуюся со временем точность. Платой за это является необходимость первоначального развертывания и последующего содержания системы.

Ю.В. Болотин

Mexанико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова Москва, Россия ybolotin@yandex.ru

В некоторых приложениях невозможно развернуть инфраструктуру заранее, например, в случае проведения поисково-спасательных работ. В таких ситуациях необходимы методы автономного определения местоположения. Традиционно автономные системы навигации базируются на инерциальных датчиках. В последние 20 лет широкое распространение получили микромеханические инерциальные измерительные блоки (МЭМС ИИБ). Они компактны, дешевы и имеют низкое энергопотребление. Все это делает возможным создание бескарданных инерциальных навигационных систем (БИНС) на основе МЭМС, которые могут быть интегрированы в экипировку человека (будь то пожарный или военный). Главная проблема МЭМС датчиков - низкая точность, не позволяющая получать навигационное решение в чисто автономном режиме с осмысленными точностями.

В пешеходной навигации эта проблема решается установкой инерциальных датчиков на стопы [5]. Это позволяет корректировать навигационное решение по нулевой скорости в моменты, когда стопа с установленной на ней БИНС находится в фазе опоры. В этом случае многое зависит от качества обнаружения фазы опоры, этот вопрос очень подробно исследован в литературе. Предложено множество детекторов [6], [7], [8].

Особенностью коррекции по нулевой скорости является ненаблюдаемость угла курса. [9]. Это может приводить к значительным ошибкам в определении местоположения. Для уменьшения влияния ошибки курса в литературе было предложено несколько методов, из которых выделим два: коррекцию по расстоянию между стопами [10-13] и коррекцию по информации о прямолинейности движения [14-17]. Особенность этих методов в том, что они не используют внешнюю информацию, а основаны лишь на эвристических гипотезах.

Первый метод требует двух БИНС на разных стопах. Идея заключается в коррекции навигационного решения каждой БИНС по информации о том, что расстояние между ними не может превышать некоторой константы [10]. В разное время предлагались разные подходы к использованию этой информации: байесовские методы [12], метод максимального правдоподобия [11], [13]. Мы применяли в этой задаче расширенный фильтр Калмана (РФК). При использовании РФК в процессе коррекции по расстоянию между стопами оценивается не только разность координат БИНС, но и разность их курсов [18] (относительная ошибка курса каждой БИНС). Коррекция фактически приводит к тому, что расчетные координаты каждой БИНС притягиваются к точке с координатами, равными среднему между координатами двух независимых БИНС. Также уменьшаются отличия между углами курса левой и правой БИНС.

Центральной идеей работы является учет отличия точностей двух БИНС при их совместной обработке посред-

ством коррекции решений по расстоянию между стопами. Для учета различных точностей БИНС необходимо какимто образом получить их оценки. Это предлагается делать, основываясь на идеях другого алгоритма коррекции.

Второй метод уменьшения ошибки курса основан на идее о том, что при движении пешехода по прямой изменение курса может быть следствием нарастания ошибок датчиков. Типовая ситуация – пешеход идет по прямому коридору в здании. При этом, если курс пешехода меняется, мы уверены, что это ошибка и, зная «курс стены», можем скорректировать курс пешехода. Именно такой подход был предложен в [14]. Авторы вычисляли по спутниковому снимку здания направления стен здания, в котором происходила навигация, устанавливали каким-то образом начальный курс пешехода, а затем при обнаружении прямолинейной ходьбы искали, вдоль какой стены идет пешеход и корректировали его курс по информации о «курсе стены». Налицо неавтономность навигации, поскольку используется карта.

В [15] был предложен более широкий взгляд на идею коррекции по прямолинейности движения. Авторы предлагали выбирать 4 или 8 «доминантных направлений» в навигационной системе координат. При обнаружении прямолинейного движения определялось ближайшее к нему доминантное направление и измерение курса формировалось как разность направления движения и доминантного направления. При этом фактически траектория пешехода «притягивалась» к доминантным направлениям. Если направления движения пешехода были действительно близки к ним, коррекция уменьшала ошибку курса. В противном случае возникали систематические ошибки. Естественно, что независимо от достоверности информации о «курсе стены» как о курсе пешехода на работу алгоритма влияет качество алгоритма детектирования прямолинейного движения. Поэтому было предложено несколько модификаций детекторов прямолинейного движения [16], [17]. Они были направлены на увеличение надежности детекторов с тем, чтобы избежать систематических ошибок при неверном принятии гипотезы о прямолинейности движения. Тем не менее, при неверном детектировании стены алгоритм теряет работоспособность. В англоязычной литературе такие алгоритмы называют HDE – heuristic drift elimination.

В настоящей работе предлагается использовать информацию о прямолинейности движения для вычисления мер ошибок БИНС. Меры ошибок двух БИНС будут сравниваться и ковариации системы, демонстрирующей большую меру ошибки, будут увеличиваться. Тем самым при коррекции по расстоянию между стопами эта БИНС будет корректироваться в большей степени.

Поскольку <u>будет увеличиваться матрица ковариаций</u> системы, можно говорить о некотором сходстве нашего подхода с известной модификацией фильтра Калмана, называемой адаптивным ФК [19].

Работоспособность предложенного алгоритма проверена на реальных данных. Выяснено, что он дает большую точность, чем стандартный алгоритм DUPTкоррекции как в случае простых, так и в случае сложных траекторий, а также более надежен чем HDE в случае сложных траекторий, хоть и уступает ему в точности на простых траекториях. Статья организована следующим образом. Раздел II содержит обозначения и понятия, необходимые для дальнейшего изложения, а также описание базового алгоритма навигации пешехода, служившего основой для алгоритмов коррекции. Раздел III описывает алгоритм HDE, раздел IV посвящен алгоритму коррекции по расстоянию между стопами, в V разделе описывается предлагаемый алгоритм. В VI разделе приводятся и обсуждаются результаты обработки реальных данных. VII раздел – заключение.

#### II. БАЗОВЫЙ АЛГОРИТМ НАВИГАЦИИ

#### А. Определения

ИИБ, как правило, содержит три однокомпонентных акселерометра и три однокомпонентных датчика угловой скорости (ДУС). Они измеряют удельную силу, действующую на приведенную чувствительную массу M и угловую скорость корпуса БИНС, соответственно. Положение стопы пешехода отождествляется с положением точки M. С началом траектории отождествляется точка O. Для дальнейшего изложения необходимо ввести системы координат, использующиеся в задаче:

- On<sub>1</sub>n<sub>2</sub>n<sub>3</sub> навигационная система координат (н.с.к.), связанная с Землей. Ось On<sub>3</sub> направлена вверх. Пусть p<sub>n</sub>, v<sub>n</sub> – координаты и скорости точки M в н.с.к. Здесь и далее нижние индексы у векторов обозначают их принадлежность к системе координат;
- Ms<sub>1</sub>s<sub>2</sub>s<sub>3</sub> приборная система координат (п.с.к.), связана с корпусом БИНС. Оси Ms<sub>1</sub>, Ms<sub>2</sub>, Ms<sub>3</sub> соответствуют осям чувствительности акселерометров. Ориентация п.с.к. относительно н.с.к. задается матрицей C<sub>ns</sub>. Вектор угловой скорости п.с.к. относительно н.с.к. в осях п.с.к. обозначим ω<sub>s</sub>;
- M's' = M's'<sub>1</sub>s'<sub>2</sub>s'<sub>3</sub> модель приборной с.к. (м.с.к.) Ориентация м.с.к. относительно приборной определяется вектором малого поворота β<sub>s</sub>. Угловую скорость м.с.к. относительно н.с.к. в осях м.с.к. обозначим ω'<sub>s</sub>. Координаты и скорости M' в н.с.к. обозначим p'<sub>n</sub> v'<sub>n</sub> <u>соответственно</u>;
- Mz = Mz<sub>1</sub>z<sub>2</sub>z<sub>3</sub> так называемая виртуальная гироплатформа [20]. Эта с.к. близка к опорной. Ориентация виртуальной гироплатформы относительно н.с.к. задается вектором малого поворота β<sub>n</sub>. Ориентация приборной с.к. относительно виртуальной гироплатформы задается матрицей C<sub>ns'</sub>.

Для наглядности поместим начала всех с.к. в точку О. Системы координат связаны следующим образом:



Обозначим через  $f_s$  удельную силу, действующую на чувствительную массу ИИБ и через  $\omega_s$  – абсолютную

угловую скорость корпуса ИИБ. Измерения акселерометров и ДУС можно записать следующим образом:

$$f'_{s} = f_{s} + \Delta f_{s}, \quad \omega'_{s} = \omega_{s} + \Delta \omega_{s}$$

Здесь  $\Delta f_s$  и  $\Delta \omega_s$  – погрешности измерений акселерометров и ДУС соответственно. Они считаются белыми шумами. Постоянные смещения не учитываются, поскольку смещения ДУС можно списать в момент неподвижности БИНС, а смещения акселерометров в МЭМС датчиках меняются незначительно и считаются откалиброванными.

#### В. Уравнения инерциальной навигации и уравнения ошибок

Состояние БИНС описывается координатами, скоростями и матрицей ориентации. Они подчиняются уравнениям движения, которые в пешеходной навигации упрощают [21], [22]. Упрощения следующие:

- Навигационная система координат считается инерциальной (не учитывается вращение Земли)
- Земля считается плоской (сила тяжести считается постоянной в н.с.к.)

$$\dot{p}_n = v_n, \dot{v}_n = C_{ns} f_s + g_n,$$
(1)  
 
$$\dot{C}_{ns} = \hat{\omega}_s C_{ns},$$

Здесь  $\hat{\omega}_s$  – кососимметрическая матрица, соответствующая вектору  $\omega_s$ ,  $g_n = (0,0,-g)^T$  – вектор удельной силы тяжести.

В вычислителе интегрируются модельные уравнения, структурно повторяющие опорные. У них в правых частях стоят измерения датчиков, а не истинные значения удельных сил и угловых скоростей:

$$\dot{p}'_n = v'_n, \dot{v}'_n = C_{ns'}f'_s + g_n, \dot{C}_{ns'} = \hat{\omega}'_s C_{ns'}.$$

$$(2)$$

Решение модельных уравнений дает прогноз траектории. Для ее коррекции используется расширенный фильтр Калмана (РФК), работающий с уравнениями ошибок БИНС [22]:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{p}_n &= \Delta v_n, \\ \Delta \dot{v}_n &= f'_n \times \beta_n + \Delta f_n, \\ \dot{\beta}_n &= -\Delta \omega_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $\Delta p_n, \Delta v_n$  – ошибки координат и скоростей, определяемые следующим образом:

$$\Delta p_n = p'_n - p_n, \quad \Delta v_n = v'_n - v_n,$$

а  $\beta_n$  — вектор малого поворота между навигационной с.к. и виртуальной гироплатформой:  $C_{ns} = (I + \hat{\beta}_n)C_{ns'}$ .

С точки зрения состоятельности РФК при применении коррекции по нулевой скорости и по расстоянию между стопами лучше записывать уравнения ошибок в так называемых динамических ошибках  $\delta p_n, \delta v_n$  [18]. Они вводятся следующим образом [20]:

$$\delta p_n = \Delta p_n - p'_n \times \beta_n, \delta v_n = \Delta v_n - v'_n \times \beta_n.$$
(4)

Для иллюстрации идеи динамических ошибок и нужна виртуальная гироплатформа:

$$\begin{aligned} \Delta p_n &= p'_n - p_z + p_z - p_n \\ &= \underbrace{p'_n - p_z}_{\delta p_n} + \left(I + \hat{\beta}_n\right) p_n - p_n = \delta p_n + p_n \times \beta_n \\ \Delta v_n &= v'_n - v_z + v_z - v_n \\ &= \underbrace{v'_n - v_z}_{\delta v_n} + \left(I + \hat{\beta}_n\right) v_n - v_n = \delta v_n + v_n \times \beta_n \end{aligned}$$

В динамических ошибках (3) примет вид:

$$\begin{split} \delta \dot{p}_n &= \delta v_n - p_n \times \Delta \omega_n, \\ \delta \dot{v}_n &= -g_n \times \beta_n - v_n \times \Delta \omega_n + \Delta f_n, \\ \dot{\beta}_n &= -\Delta \omega_n. \end{split}$$
(5)

Ниже будут использоваться динамические ошибки.

#### С. Коррекция по нулевой скорости

Отрезок времени, в течении которого нога человека в процессе ходьбы неподвижна относительно Земли, называется фазой опоры. В фазе опоры скорость стопы v близка к нулю, что можно использовать как измерение для РФК (в англоязычной литературе такой способ коррекции называется Zero velocity UPdaTe – ZUPT).

Необходимо обнаруживать фазу опоры. Для этого обычно используются детекторы движения, анализирующие показания акселерометров и гироскопов в скользящем окне. Мы использовали детектор движения, предложенный в [6].

Когда фаза опоры обнаружена, формируется измерение нулевой скорости [20]. Показано [18], что уравнение измерений нужно писать в приборной с.к. Условие нулевой скорости:  $Z_s = v_s - r_s = 0$ .  $r_s$  – ошибка, связанная с отличием скорости стопы от нуля. Измерение нулевой скорости в терминах ошибок:

$$z_{s} = v_{s'}' - Z_{s} = v_{s'}' - v_{s} + r_{s} = \delta v_{s} + r_{s}.$$
(6)

Спроектировав уравнение (6) в навигационную с.к., получим следующее:

$$z_n = \delta v_n + r_n = H^{ZUPT} x + r_n.$$

Здесь x – вектор состояния,

$$H^{ZUPT} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \delta p_n^T & \delta v_n^T & \beta_n^T \end{pmatrix}^T,$$

 $0_3$  – нулевая матрица размера  $3 \times 3$ ,  $I_3$  – единичная матрица размера  $3 \times 3$ .

Отметим, что смещения нулевых сигналов акселерометров и гироскопов не включены в вектор ошибок *x*. Их оценивание не гарантирует прироста точности навигации, поскольку ошибки, вызванные изменением инструментальных погрешностей в случае пешеходной навигации обычно меньше ошибок модели коррекции по нулевой скорости [23].

#### III. АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ ПО ИНФОРМАЦИИ О ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

Различные алгоритмы типа HDE представлены в [14-17]. Здесь опишем общие для всех них шаги.

Коррекция навигационного решения по информации о прямолинейности движения может применяться к одной БИНС. Алгоритм состоит из нескольких шагов.

Первый шаг – анализ траектории, из которого мы устанавливаем, движется ли пешеход по прямой. Многие авторы предлагали разнообразные «детекторы прямолинейного движения». Входом для них служили координаты следовых точек (следовая точка – координаты БИНС в фазе опоры), а выходом – бинарный признак SLP – straight line path. Простейшие детекторы анализировали пару соседних следовых точек [14], [15], более сложные – большее число (обычно анализировалось скользящее окно из 5-6 следовых точек) [16], [17]. Когда *SLP* = 1, то есть пешеход идет прямо, приходит время второго шага.

Второй шаг – определение доминантного направления, ближайшего к направлению движения пешехода. Доминантные направления – это каким-то образом выбранные направления в опорной системе координат. После выбора доминантного направления следует третий шаг.

Третий шаг – формирование измерения курса и коррекция навигационного решения. Разные авторы поразному подходят к этой процедуре. В простейшем случае формируется измерение курса как разность между направлением движения пешехода и выбранным доминантным направлением [14]. Другие авторы [17] вводили два уровня прямолинейного движения: прямолинейное движение вдоль доминантного направления и простое прямолинейное движение. В первом случае формировалось измерение курса, во втором – смещения нулевых сигналов ДУС.

Общей чертой всех этих алгоритмов является чувствительность к выполнению гипотезы о том, что прямолинейное движение соответствует движению вдоль доминантных направлений. Длительное движение по прямой, далекой от доминантного направления приведет, к значительным искажениям траектории [16].

#### IV. Алгоритм коррекции по расстоянгию между стопами

Различные подходы к коррекции по расстоянию между стопами описаны в [10-13]. Мы использовали подход с РФК, поскольку он позволяет применять наш формализм исследования состоятельности [18] и в целом прост в использовании. Ниже будет описан именно он.

Коррекция по расстоянию между стопами (будем для краткости называть ее DUPT – Distance UPdaTe) требует двух БИНС, расположенных на разных стопах пешехода. Для ее описания нам понадобятся новые обозначения. Параметры, относящиеся к левой и правой БИНС будем помечать верхними индексами l и r.

DUPT состоит из нескольких этапов. Первый этап – проверка условия:

$$\|p_n^l - p_n^r\| \ge d . \tag{6}$$

Здесь ||. || – норма вектора, *d* – константа обозначающая максимальную длину шага.

Если условие (6) выполнено, формируется измерение для уравнений ошибок следующего вида:

$$z = Z' - Z = || p_n'^l - p_n'^r || - d + r^{DUPT} = H^{DUPT} x^{lr} + r^{DUPT}.$$

Здесь  $x^{lr} = \begin{pmatrix} x^{lT} & x^{rT} \end{pmatrix}^{T}$  – объединенный вектор

ошибок,  $r^{DUPT}$  – шум измерения. Матрица измерений имеет следующий вид:

$$H^{DUPT} = \begin{bmatrix} D^l & D^r \end{bmatrix}, \quad D^l = -D^r$$
$$D^l = \frac{1}{d'} \begin{bmatrix} (p_n'^l - p_n'^r)^T & 0_{1\times 3} & (p_n'^r \times p_n'^l)^T \end{bmatrix}$$

Видно, что в силу структуры матрицы измерений апостериорная оценка вектора ошибок  $\tilde{x}^{lr}$  будет обладать следующим свойством:

$$\tilde{x}^l \approx -\tilde{x}^r \,. \tag{7}$$

На рис. 1 схематично представлена схема алгоритма DUPT-коррекции.



Рис. 1. Принцип DUPT: когда оценка расстояния между стопами превышает заданное d, проводится псевдоизмерение  $|| p^l - p^r || = d$ 

#### V. АЛГОРИТМ АДАПТИВНОЙ КОРРЕКЦИИ

#### А. Предпосылки

Свойство (7) вектора ошибок, получаемого в результате DUPT-коррекции, оправдано лишь в случае равноточности определения ориентации двух БИНС, однако в реальности такая ситуация наблюдается нечасто.

Типовая ситуация изображена на рис. 2. Черные пунктирные линии обозначают стены коридора, по которому ходил испытуемый. Пунктирные линии красного и синего цвета – это навигационные решения левой и правой БИНС при коррекции только по нулевой скорости. Видно, что траектория левой БИНС сильнее «загибается», что говорит о большей скорости нарастания ошибки курса. Сплошные линии синего и красного цвета – навигационные решения левой и правой БИНС в случае применения ZUPT и DUPT-коррекции. Видно, что обе траектории проходят ровно посередине между независимыми решениями. Это следствие структуры матрицы измерений. Результат DUPT-коррекции для эксперимента,
показанного выше, в целом положительный. Ошибка курса оказалась значительно меньше, чем у менее точной БИНС и немного меньше, чем у более точной БИНС.



Рис. 2. Траектории двух БИНС при различных способах коррекции. Красный и синий пунктир – независимая обработка двух БИНС, красная и синяя сплошные – совместная обработка двух БИНС при помощи DUPT-коррекции, голубая и малиновая сплошные – предложенный алгоритм. Черный пунктир – контуры коридора

Однако очевидно, что результат мог быть лучше, если бы нам удалось учесть то обстоятельство, что ошибка курса левой БИНС растет быстрее. Для этого необходимо каким-то образом оценить скорость нарастания ошибки ориентации каждого БИНС и ввести эту информацию в РФК, реализующий DUPT-коррекцию. Фактически это означает адаптацию параметров РФК в зависимости от меры скорости нарастания ошибки БИНС. В связи с этим возникает два вопроса.

Первый вопрос. Каким образом оценить меру скорости нарастания ошибки БИНС? Ясно, что в отсутствие внешней информации получить откуда-либо достоверную информацию о ней невозможно. В этих условиях можно воспользоваться идеями алгоритма коррекции по прямолинейному движению, описанному в разделе III. За меру скорости нарастания ошибки ориентации можно принять какую-нибудь функцию от измерений HDE. Для этого необходимо проделать все шаги алгоритма HDE, кроме коррекции. На рис.3 приведены меры ошибок ориентации, вычисленные как накапливающиеся суммы модулей измерений HDE в эксперименте, который показан на рис.2. Видно, что они отражают реальность и позволяют обнаружить большую скорость изменения ошибки ориентации левой БИНС по сравнению с правой. Таким образом ясно, что инструментарий HDE может быть использован для получения меры скорости нарастания ошибки ориентации БИНС.

Второй вопрос. Как ввести вычисленные меры в алгоритм оценивания? Подходящим математическим аппаратом для этого видится адаптивный фильтр Калмана. Идея адаптации ФК не нова [24]. Однако классический подход – оценка матриц шумов измерений и шумов динамики при помощи невязок (или инноваций) непригоден в нашем случае. Причина в том, что измерения, невязки которых используются, непосредственно обрабатываются ФК. Мы же не собираемся обрабатывать измерения HDE непосредственно, а лишь хотим использовать их как диагностические параметры. Более поздние работы (например, [25]) предъявляют специфические требования к системе. Например, независимость вектора состояния от настроечных параметров. Из дальнейшего будет ясно, что это требование невыполнимо в нашем случае.



Рис. 3. Меры скорости роста ошибки ориентации для левой (красная) и правой БИНС (синяя) из эксперимента, приведенного на рис. 1

Наш подход похож на адаптивный ФК в том смысле, что мы адаптируем матрицу ковариаций системы. А именно, мы увеличиваем ее для БИНС, мера скорости нарастания ошибки ориентации которой будет больше. Это приводит к тому, что соотношение (7) нарушается. В эксперименте, для которого показаны траектории на рис.2 и меры ошибок на рис.3, возникнет следующая ситуация:  $\|\tilde{\Delta}p^{l}\| \ge \|\tilde{\Delta}p^{r}\|$ , то есть в моменты коррекции по расстоянию между стопами менее точная (исходя из наших оценок мер скорости нарастания ошибки ориентации) БИНС будет корректироваться «сильнее». Этому случаю соответствуют сплошная малиновая и голубая линии на рис.2. Видно, что они практически совпадают с пунктиром, обозначающим стены. Ошибку местоположения оказалась меньше, чем в случае обыкновенной DUPT-коррекции. Ниже будет описан алгоритм, дающий такой результат.

#### В. Алгоритм

Для формализации идей, описанных выше, будет использоваться механизм проверки гипотез. Необходимо два уровня проверки гипотез. На первом уровне для каждой БИНС выясняется, движется она прямолинейно или нет. Затем на основе этого решается, движется ли пешеход прямо. Если да, переходим на второй уровень. На втором уровне выясняется, для какой БИНС будут увеличены ковариации.

Рассмотрим первый уровень.

- H<sub>0</sub><sup>l(r)</sup> : Движение левой (правой) БИНС непрямолинейное
- H<sup>l(r)</sup> : Движение левой (правой) БИНС прямолинейное

Для определения прямолинейности анализируется скользящее окно из n следовых точке. Обозначим его  $\Delta_n$ . Следовая точка – это координаты БИНС в фазе опоры. В скользящем окне вычисляются следующие характеристики:

$$\sigma(\psi^{step}) = \frac{1}{n-1} \sum_{k \in \Delta_n} (\psi_k^{step} - \overline{\psi}^{step})^2,$$
  

$$M(\psi^{step}) = \max_{k \in \Delta_n} (\psi_k^{step} - \overline{\psi}^{step}),$$
  

$$\overline{\psi}^{step} = \frac{1}{n} \sum_{k \in \Delta_n} \psi_k^{step}$$
  

$$\psi_k^{step} = \operatorname{arctg} \frac{p_{n2}(t_k) - p_{n2}(t_{k-1})}{p_{n1}(t_k) - p_{n1}(t_{k-1})}$$

Здесь  $\Psi_k^{step}$  обозначает курс *k*-го шага, то есть направление вектора, соединяющего соседние следовые точки. Принятие гипотезы о прямолинейном движении БИНС происходит следующим образом:

$$\mathcal{H}_0^{l(r)} : \sigma(\psi^{step}) > c_1 \lor M(\psi^{step}) > c_2 \mathcal{H}_1^{l(r)} : \sigma(\psi^{step}) < c_1 \land M(\psi^{step}) < c_2$$

Здесь  $c_1, c_2$  – настроечные параметры детектора. Во всех известных авторам работах по HDE рассматривалась одна БИНС и вопроса о том, как соотносится прямолинейное движение БИНС и пешехода, не возникало. В нашем случае БИНС две и теоретически возможна ситуация, когда одновременно будут приняты, например, гипотезы  $\mathcal{H}_0^l$  и  $\mathcal{H}_1^r$ . Нас интересует прямолинейно ли движение пешехода, поэтому будем проверять следующие гипотезы:

 $\mathcal{H}_0^{lr}$  : Движение пешехода непрямолинейное  $\mathcal{H}_l^{lr}$  : Движение пешехода прямолинейное

Формализовать их предлагается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{0}^{\ lr} &: \mathcal{H}_{0}^{\ l} \lor \mathcal{H}_{0}^{\ r} \\ \mathcal{H}_{1}^{\ lr} &: \mathcal{H}_{1}^{\ l} \land \mathcal{H}_{1}^{\ r} \end{aligned}$$

Мы считаем движение пешехода прямолинейным, когда для обоих БИНС принята гипотеза о прямолинейности движения. Во всех остальных случаях движение пешехода считается непрямолинейным.

В случае принятия гипотезы  $\mathcal{H}_{l}^{dr}$  происходит выбор доминантного направления  $\psi_{k}^{dd}$ . Доминантные направления фиксируются в начале работы алгоритма следующим образом:

$$\Psi^{dd,1} = \Psi_I^{step}, \quad \Psi^{dd,i} = \Psi^{dd,1} + (i-1)\frac{\pi}{2}, \quad i = 2,3,4$$

Здесь  $\psi_I^{step}$  – направление первого зафиксированного прямолинейного участка. Доминантное направление должно быть ближайшим к текущему прямолинейному движению:

$$\Psi_k^{dd} = \Psi^{dd,i} : \min_{i=1\dots4} (\Psi^{step_k} - \Psi^{dd,i})$$

После того как доминантное направление выбрано считается, что отклонение траектории от него, не нарушающее условий  $\mathcal{H}_{l}^{lr}$ , является следствием накопления

ошибок ориентации БИНС. Это гипотеза, на которой основаны алгоритмы типа HDE [14-17]. В этих алгоритмах доминантные направления напрямую используются как измерения курса. В нашей работе предлагается использовать их как источник информации об ошибках ориентации БИНС с тем, чтобы адаптировать ковариации РФК.

Меру ошибки ориентации БИНС предлагается вычислять как накапливающуюся сумму модулей разностей курса следовой дорожки и курса доминантного направления:

$$\alpha = \sum_{k \in \Omega_j} |\psi_k^{dd} - \psi_k^{step}|$$

Здесь  $\Omega_j$  – множество моментов времени, в которые

принята гипотеза  $\mathcal{H}_{l}^{lr}$ . Индекс *j* обозначает номер множества.

В реальности курсы следовых дорожек левой и правой БИНС близки, поэтому отличие коэффициентов  $\alpha^l$  и  $\alpha^r$  можно считать следствием разной скорости накопления ошибок ориентации. При этом возможны ситуации, когда на отличия  $\alpha^l$  и  $\alpha^r$  большее влияние будет оказывать изначальное отличие курсов следовых дорожек БИНС. Такое положение дел нежелательно, но неизбежно. Таким образом формально мы считаем более точной БИНС, курс следовой дорожки которой ближе к курсу доминантного направления. Теоретически, исключить влияние начального рассогласования на величину  $\alpha$  можно, вычисляя ее производную по времени  $\dot{\alpha}$ . Однако в реальности такой алгоритм будет малонадежен, поскольку количество точек в множестве  $\Omega_j$  может быть мало.

Коэффициенты  $\alpha^{l}$  и  $\alpha^{r}$  вычисляются независимо, то есть в моменты DUPT-коррекции (влияющей на решения обоих БИНС) их обновление прекращается. Независимость параметров  $\alpha$  для разных БИНС нужна для второго уровня проверки гипотез, который затрагивают уже обе БИНС.

Второй уровень заключается в выборе БИНС, ковариации которого будут увеличены. Естественно увеличивать их для менее точного блока, поэтому предлагается проверять следующие гипотезы:

 $\mathcal{H}_0$  : Левая БИНС точнее правой

*H*<sub>1</sub> : Правая БИНС точнее левой

Эти гипотезы формализуются следующим образом:

$$\mathcal{H}_0 : \alpha^l < \alpha^r$$
$$\mathcal{H}_1 : \alpha^l > \alpha^r$$

В случае принятия гипотезы  $\mathcal{H}_0$  увеличивается блок ковариационной матрицы, соответствующей ошибкам координат правой БИНС:

$$P_k^r = P_k^r + \Delta P$$

В случае принятия гипотезы  $\mathcal{H}_1$  то же самое делается с блоком ковариаций, соответствующих левой ноге:

$$P_k^l = P_k^l + \Delta P$$

Выбор  $\Delta P$  во многом произволен, поскольку его изменение отражает наше представление о совокупной ошибке координат, складывающейся из многих составляющих. Целесообразно сделать  $\Delta P$  настроечным параметров.

#### VI. ПРОВЕРКА НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Для выяснения работоспособности описанного алгоритма было обработано два набора экспериментальных данных. Оба набора имели общие особенности. Пешеход с прикрепленными к стопам БИНС ходил по замкнутым траекториям. Замкнутость траекторий нужна для того, чтобы оценивать ошибку навигации как разницу между начальными и конечными координатами. Причина в сложности построения референс - траектории для экспериментов, проводившихся в помещении. Во всех экспериментах пешеход стоял первые 20 секунд неподвижно. Это время использовалось для осреднения показаний ДУС и их последующего вычитания из данных. Эта процедура стандартна для низкоточных МЭМС ДУС, дрейфы от запуска запуску которых могут достигать сотен градусов в час.

Во всех экспериментах использовались одни и те же датчики – МЭМС ИИБ МРU9250. Частота записи равнялась 125 Гц, данные пересылались с датчиков на смартфон по Bluetooth. Известно [26], что такая частота может быть недостаточной в случае пешеходной навигации, что, безусловно, снижало точность навигации. Имевшееся оборудование не позволяло передавать данные на смартфон с более высокой частотой. Характеристики ДУС были следующие: случайное блуждание угла (ARW) равнялось 15-18 градусам в час, нестабильность нуля (bias instability) 4-8 градусам в час, что типично для датчиков потребительского уровня.

Первый набор экспериментальных данных состоял из 60 треков. По 15 записей с продолжительностью ходьбы 1,3,5 и 10 минут. В экспериментах участвовало 15 человек. Испытуемые ходили по коридорам одного из зданий МГУ, спутниковый снимок здания приведен на рис.4, пример траектории уже был на рис.2



Рис. 4. Здание, в котором проводились эксприменты

В таблице 1 приведены результаты с использованием разных алгоритмов. Строка ZUPT соответствует базовому алгоритму. Строка ZUPT+HDE соответствует базовому алгоритму и алгоритму коррекции по информации о прямолинейности движения. Строка ZUPT+DUPT соответствует базовому алгоритму и алгоритму коррекции по расстоянию между стопами. Строка ZUPT+ADUPT соответствует базовому алгоритму и предложенному алгоритму коррекции. Поскольку оценки ошибок, генерируемые этим алгоритмом отличаются для левой и правой БИНС в силу адаптивного изменения ковариаций алгоритм в целом называется Adaptive Distance UPdaTe.

Ясно, что на первой серии экспериментов близкие к идеальным результаты мог показать алгоритм HDE, поскольку вся траектория состояла из длинных прямолинейных участков, которые позволяли почти непрерывно корректировать ошибку курса. Это и произошло – результаты применения HDE приведены в таблице 1 в графе ZUPT+HDE. Он оказался лучше и базового алгоритма, и DUPT, и ADUPT. При этом преимущества ADUPT перед DUPT оказались невелики.

Однако при навигации в здании наличие длинных прямых коридоров, расположенных под прямыми углами, совершенно необязательно. В больших торговых центрах, на складах и в заводских корпусах есть значительные пространства или стены сложной формы. Траектории пешеходов в таких условиях могут содержать совсем небольшое количество прямолинейных участков, а некоторые из них могут находиться под отличающимися от прямых углами.

Для имитации таких траекторий была проведена вторая серия экспериментов. Эксперименты этой серии проводились на улице в сквере МГУ и содержали большое количество поворотов, дуг окружностей разных радиусов и прочих отличных от прямых фигур. Было проведено 11 экспериментов с тремя испытуемыми общей длительностью около 2,5 часов. Примеры таких траекторий приведены на рис.5,6. Желтая линия – референс траектория, полученная по показаниям приемника СНС в автономном режиме. Высокая точность не требовалась. Спутниковый эталон был нужен лишь для представления о форме траектории. Красная линия – инерциальное решение (на рисунках представлен результат работы алгоритма в режиме ZUPT+ADUPT).



Рис. 5. Траектория улчиного эксперимента 1



Рис. 6. Траектория улчиного эксперимента 2

В подобных условиях непосредственное использование доминантных направлений для коррекции курса может привести к значительным ошибками. Это хорошо известно [13],[14]. Однако, если следовать работам авторов, занимавшихся усовершенствованием HDE, и ужесточать критерии прямолинейного движения, возможны ситуации, когда коррекция практически не будет происходить. Предложенный же алгоритм позволяет с одной стороны не вносить систематическую ошибку из-за непосредственной коррекции курса в случае, если реальное направление прямолинейного движения сильно отличается от доминантного направления, а с другой все же использовать информацию о прямолинейности для адаптации ковариаций. Качество этой адаптации зависит от достоверности гипотез о движении вдоль доминантного направления, но проверка на реальных данных показала, что некоторое улучшение точности все же происходит. Из таблицы 1 видно, что предложенный алгоритм показал лучшую точность.

Будем называть детектор прямолинейного движения жестким, если он принимает гипотезу  $\mathcal{H}_{1}^{l(r)}$  с низкой вероятностью и мягким, если он принимает  $\mathcal{H}_{1}^{l(r)}$  с высокой вероятностью. Жесткость зависит от количества условий, которые проверяются, количества следовых точек, которые анализируются и настроек. В таблице приведены результаты HDE с мягкими настройками. Настройки детектора движения в предложенном алгоритме были такие же. Для уличных треков результат HDE не приведен, поскольку алгоритм потерял работоспособность. Результаты HDE с жесткими настройками в таблице не приведены, поскольку они совпадают с результатами базового алгоритма. Жесткость настроек привела к тому, что детектор прямолинейности работал очень мало и фактически не оказал влияния на точность.

Таблица 1

Средняя ошибка навигации в горизонтальной плоскости [м]					
Тип алгоритма	Эксперименты в здании Эксперименты				
	1 min	3	5	10	на улице
		min	min	min	
ZUPT	1.3	6.9	16.6	23.2	24.6
ZUPT+HDE	0.7	1.7	3.3	4.6	-
ZUPT+DUPT	1.17	5.11	14.1	15.6	23.6
ZUPT+ADUPT	1.14	5.10	10.2	13.4	21.2

#### VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен новый алгоритм адаптивной коррекции в задаче навигации пешехода при помощи двух БИНС, прикрепленных к стопам пешехода. Адаптация заключается в изменении ковариаций левой или правой БИНС в зависимости от того, какая из них считается точнее. Точность оценивается при помощи подхода, положенного в основу алгоритмов типа HDE, а именно – обнаружении прямолинейного движения и представления о том, что отклонения от него вызваны накоплением ошибок ориентации БИНС. Коррекция происходит при помощи информации об ограниченности расстояния между стопами (DUPT).

Описанный алгоритм с был проверен на реальных данных. Проводились эксперименты двух типов: со «сложными» и с «простыми» траекториями. «Простые» траектории соответствовали ходьбе вдоль стен по зданию с ортогональными коридорами - в таких экспериментах лучшие результаты показал алгоритм HDE. «Сложные» траектории соответствовали ходьбе по улице с большим количеством поворотов, движением по дугам окружностей разных радиусов и т.п. На таких траекториях алгоритм HDE давал большие ошибки. Стандартный алгоритм коррекции по расстоянию между стопами и предложенный алгоритм показали приемлемые результаты. При этом предложенный алгоритм дал большую точность навигации. Это позволяет предположить, что оценка точности БИНС в движении оказалась полезна и предложенный алгоритм работоспособен.

#### Литература

- Judd, C. Tom, "A personal dead reckoning module", Proceedings of the 10th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation, Kansas City, 1997, pp. 47-51
- [2] Kourogi M., Kurata T., "Personal positioning based on walking locomotion analysis with self-contained sensors and a wearable camera, Proceedings of the Second IEEE and ACM International Symposium on Mixed and Augmented Reality, Tokyo, 2003, pp. 103-112
- [3] Elwell, J., "Inertial navigation for the urban warrior", Proceedings of the Digitalization of the Battlespace IV conference, Orlando, 1999, pp. 196–204
- [4] L.M. Ni, Yunhao Liu, Yiu Cho Lau, and A.P. Patil, "LANDMARC: indoor location sensing using active RFID", Wireless networks, 2004, vol. 10, no 6, pp. 701-710
- [5] Foxlin, E, "Pedestrian tracking with shoe-mounted inertial sensors", IEEE Computer Graphics and Applications, 2005, vol. 25, no. 6, pp. 38–46
- [6] Skog I., Handel P., Nilsson J.O., and Rantakokko J., "Zero-velocity detection – an algorithm evaluation", IEEE Trans. Bio-Med. Eng., 2010, vol. 57, no. 11, pp. 2657–2666.
- [7] Tian X., Chen J., Han Y., Shang J., and Li N., "A novel zero velocity interval detection algorithm for self-contained pedestrian navigation system with inertial sensors", Sensors, 2016, vol. 16, no 10, pp. 1578
- [8] Wagstaff B., Kelly J., "LSTM-based zero-velocity detection for robust inertial navigation", Proceedings of IPIN2018, Nantes, 2018, pp. 1-8
- [9] Bolotin Yu.V., Bragin A.V., Gartzeev I.B., "Covariance error analysis for pedestrian dead reckoning with foot mounted IMU", IPIN-2019, Piza, 2019, pp. 243-250.
- [10] Brand, T.J., Phillips, R.E., "Foot-to-Foot Range Measurement as an Aid to Personal Navigation", Proceedings of the 59th Annual Meeting of The Institute of Navigation and CIGTF 22nd Guidance Test Symposium, Albuquerque, 2003, pp. 113-121
- [11] Skog I., Nilsson J.O., Handel P., and Nehorai A., "Inertial sensor arrays, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound", IEEE Trans. Signal Processing, 2016, vol. 64, no. 16, pp. 4218-4227.

- [12] Zachariah D., Skog I., Jansson M., and Handel P., "Bayesian estimation with distance bounds", IEEE Signal Processing Letters, 2012, vol. 19, no. 12, pp. 880-883, Dec.
- [13] Skog I., Nilsson J., Zachariah D., and Handel P., "Fusing the information from two navigation systems using an upper bound on their maximum spatial separation". IPIN 2012, Sydney, 2012, pp. 1-5.
- [14] Abdulrahim K., Hide C., Moore T., Hill C. "Aiding MEMS IMU with building heading for indoor pedestrian navigation", Proceedings of UPINLBS, Kirkkonummi, 2010, pp. 1–6
- [15] Borenstein J., Ojeda L., "Heuristic Drift Elimination for Personnel Tracking Systems", Journal of Navigation, 2010, vol. 63, pp. 591–606
- [16] Jimenez A. R., Zampella F., Seco F. Prieto J.C., and Guevara J., "Improved heuristic drift elimination (iHDE) for pedestrian navigation in complex buildings", Proceedings of IPIN 2011, Guimaraes, 2011, pp. 1-8
- [17] Ju H. J., Lee M. S., Park C. G., Lee S., and Park S., "Advanced heuristic drift elimination for indoor pedestrian navigation", Proceedings of IPIN 2014, Busan, 2014, pp. 729-732
- [18] Болотин Ю.В., Брагин А.В., Гулевский Д.В., "Исследование состоятельности расширенного фильтра Калмана в задаче навига-ции пешехода с БИНС, закрепленными на стопах", Гироскопия и Навигация, 2021, Т. 29, № 2, С.59-77

- [19] S. Akhlaghi, N. Zhou and Z. Huang, "Adaptive adjustment of noise covariance in Kalman filter for dynamic state estimation", 2017 IEEE Power & Energy Society General Meeting, Chicago, 2017, pp. 1-5
- [20] Голован А.А., Вавилова Н.Б., Парусников Н.А. "Математические основы инерциальных навигационных систем", М: Издательство Московского университета, 2020. 164с.
- [21] Bancroft J., Lachapelle G., Cannon M., and Petovello M., "Twin IMU-HSGPS integration for pedestrian navigation", ION GNSS 2008, Savannah, 2008, pp. 1377 - 1387.
- [22] Nilsson J.-O., Skog I., Handel P., and Hari K.V.S., "Foot-mounted INS for everybody – an open-source embedded implementation", IEEE/ION PLANS 2012, Myrtle Beach, 2012, pp. 140-145.
- [23] Nilsson J.-O., Skog I., Handel P., "A note on the limitations of ZUPTs and the implications on sensor error modeling", 2012
- [24] R. Mehra, On the identification of variances and adaptive Kalman filtering, in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 15, no. 2, pp. 175-184, April 1970, doi: 10.1109/TAC.1970.1099422.
- [25] Mohamed, A., Schwarz, K. Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS. Journal of Geodesy 73, 193–203 (1999). https://doi.org/10.1007/s001900050236
- [26] Y. Wang, A.Chernyshoff, and A.Skel. "Error analysis of ZUPT-aided pedestrian inertial navigation, IPIN 2018, Nantes, 2018, pp. 24-27.

# Локализация радиоустройств внутри помещений на основе информации о состоянии канала связи с использованием ограниченной машины Больцмана

А.В. Астафьев Владимирский государственный университет Россия

Аннотация-В работе предлагается алгоритм определения расстояния между радиоустройствами на основе данных о состоянии калана связи для построения систем локализации радиоустройств внутри помещений с использованием ограниченной машины Больцмана (RBM). В качестве входных данных используется информация о состоянии канала связи (Channel State Information, CSI) - информация о значениях амплитуд и фаз сигнала при взаимодействии передатчика и приемника. Определение меры соответствия текущих и эталонных данных осуществляется на основе L1 меры. Используемые в работе данные собраны в ходе практического внедрения предлагаемых решений на предприятии промышленности. Для анализа точности определения расстояния между радиоустройствами используется матрица ошибок. Проведенные экспериментальные исследования показали возможность определения расстояния между маршрутизаторами на расстояниях до 4 метров со средней точностью 93.7%.

#### I. Введение

В связи с бурным ростом рынка информационных технологий, в том числе рынка интернета вещей, все более актуальным становится вопрос повышения точности позиционирования устройств на наблюдаемой территории, в том числе и внутри помещений.

Навигация устройств, как правило рассматривается для случаев открытого пространства (с англ. outdoor navigation) и внутри помещений (с англ. indoor navigation). Навигация в открытом пространстве решается за счёт использования глобальных навигационных спутниковых систем, таких как GPS, ГЛО-НАСС, Galileo и прочие [1], работающих при необходимости в RTK режиме. Для решения задачи позиционирования внутри помещений используются методы, основанные на радиочастотной информации [2], информации магнитного поля [3], технического зрения [5], [5] или их объединения [6]. Каждый из методов навигации имеет свои преимущества и недостатки, однако в силу доступности WiFi технологий, представляется, что наиболее экономичным является подход, основанный на анализе радиочастотной информации.

В силу постоянной модификации протоколов связи устройств, повышения частоты обмена и количества передаваемой информации [7], [8] с научной точки зрения представляет интерес разработка новых подходов к определению положения объекта основанных на большем количестве входной информации получаемой по радиоканалу. При этом в качестве базовой идеи построения алгоритма локализации радиоО.С. Астафьева Владимирский государственный уни-верситет Россия

устройств внутри помещений часто выбирается концепция отпечатка пальца [9], [10].

Целью работы является разработка алгоритма определения расстояния между радиоустройствами на основе данных о состоянии калана связи для построения систем локализации радиоустройств внутри помещений. В качестве радиоустройств в работе выступают маршрутизаторы WiFi на основе стандарта IEEE 802.11ac [8].

С точки зрения классификации алгоритмов на основе концепции цифрового отпечатка, предлагаемый алгоритм можно отнести к непараметрическим алгоритмам, основанным на Байесовской фильтрации, т.к. для оценки расстояний используется апостериорная функция распределения плотности вероятности [9].

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1. Провести более глубокий анализ проблемы (раздел «Обзор и анализ современного состояния проблемы»).
- Провести анализ состава информации о канале связи и извлечь ее из информационных пакетов (раздел «Разработка лабораторного стенда для получения данных о состоянии канала связи»).
- Разработать алгоритм определения расстояния между радиоустройствами на основе данных о состоянии калана связи для построения систем локализации радиоустройств внутри помещений (раздел «Разработка алгоритма определения расстояния между радиоустройствами на основе данных о состоянии калана связи»).
- Провести экспериментальные исследования предлагаемого алгоритма определения расстояния между радиоустройствами на основе данных о состоянии калана связи (раздел «Описание эксперимента»).

Новизной предлагаемого алгоритма является использование вектора входных параметров, включающего большее количество измерений, благодаря использованию нового стандарта WiFi.

#### II. ОБЗОР И АНАЛИЗ СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ

Задача локализации объекта интереса по радиосигналам может быть решена с использованием большого количество технологий:

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-71-00133.

- 1. Wireless Fidelity (WiFi).
- 2. Bluetooth.
- 3. Bluetooth Low Energy (BLE).
- 4. IrDA.
- 5. ANT+.
- 6. ZigBee.
- 7. Radio Frequency IDentification (RFID).
- 8. Near field communication (NFC).

Среди них широкое применение для решения задач локализации, позиционирования и навигации нашли технологии WiFi, Bluetooth, BLE, ZigBee и RFID. При чем технологии BLE, ZigBee и RFID нашли широкое применение на рынке интернета вещей и «умных» устройств благодаря низкому энергопотреблению и стоимости оборудования. Алгоритмы, базирующиеся на технологиях WiFi и Bluetooth, используют полноценные точки доступа для обработки информации.

Десятилетиями основным параметром оценки расстояния между радиочастотными устройствами был уровень принимаемого сигнала (Received signal strength indication, RSSI). К достоинствам данного параметра можно отнести относительную простоту получения, а также известную измерительную шкалу. Основными недостатками являются высокая зашумленность, т.к. он измеряется на всей полосе частот, а также его целочисленный характер, что не позволяет получить более высокую точность позиционирования. Несмотря на это, отечественными и зарубежными авторами были достигнуты хорошие показатели точности позиционирования. Так, большое количество работ нацелено на комплексирование разнородных данных, например, в работе [2] к аппроксимации показателя уровня сигнала добавляется анализ данных с акселерометра, что служит дополнительно информацией при фильтрации сигнала фильтром Калмана. Авторы работы [12] решают задачу компенсирования помех из-за отражения радиосигнала от поверхностей стен и других физических преград для повышения точность позиционирования по RSSI. В работе [13] к данным уровня сигнала добавляются данные барометра, что позволяет более точно определять перемещение между этажами. В работе [11] используются полносвязные искусственные нейронные сети для решения задачи аппроксимации данных об уровнях сигнала с BLE-маяков в совокупности с упрощённым фильтром Калмана.

Несмотря на высокую точность алгоритмов позиционирования на основе показателя уровня сигнала RSSI их применение для решения рассматриваемой задачи позиционирования не приводит к высокой точности из-за неоднородности среды передачи информации и наличия большого количества физических преград. Предварительные экспериментальные исследования показали низкую точность позиционирования на малых расстояниях.

Исследование большинства сложных систем даёт больший эффект при использовании более низкоуровневых измерений. В области позиционирования на основе радиосигналов таким параметром является информация о состоянии канала связи (Channel State Information, CSI). В беспроводных сетях, использующих Orthogonal frequency-division multiplexing (ODFM) модуляцию, CSI представляет собой комплексное число, в котором содержится информация об амплитуде и фазе сигнала. Пакет данных CSI содержит набор комплексных чисел, соответствующих каждой поднесущей.

Таким образом, используя информацию о состоянии канала связи можно получить до 114 значений фаз и амплитуд для каждой пары антенн на один замер, в противовес одному целочисленному значению уровня принимаемого сигнала. Доступ к такой подробной информации стал доступен с введением стандартов IEEE 802.11n [7] и IEEE 802.11ac [8], регламентирующих работу беспроводных сетей WiFi4 и WiFi5. Стандарты [7], [8] предполагают разделение высокоскоростного потока на несколько параллельных потоков меньшей скорости, которые принято называть вспомогательной несущей или поднесущей. В настоящее время появилось множество исследований в данном направлении. Например, работы PhaseFi [14], FIFS [15], Horus [16], Maximum Likelihood (ML) [17], FILA [18], DeepFi [19] и Static positioning [20].

В подходе PhaseFi [13] предлагается метод, основанный на использовании концепции цифрового отпечатка с использованием информации о состоянии канала связи по 56 поднесущим, из которых используются данные только с 30, согласно стандарта ІЕЕЕ 802.11n. Для определения расстояния используются ограниченная машина Больцмана с методом обучения на основе контрастивной дивергенции. Работа FILA [18] предлагает использование байесовского метода. Работа состоит из трёх этапов: построение карты отпечатков, анализ статических параметров для определения местоположения и анализ динамических параметров для уточнения результата. Подход DeepFi [19] использует новую систему снятия цифровых отпечатков на основе глубокого обучения. DeepFi включает в себя фазу обучения, использующую алгоритм жадного обучения для определения всех весов послойно, и фазу локализации в режиме реального времени с использованием вероятностного метода.

Расширение количества поднесущих (с 56 используемых в более ранних работах до 114) вызванных введением нового стандарта Wifi (стандарт IEEE 802.11ас базируется на диапазоне частот 5 ГГц и полосой пропускания в 40 МГц) отличает данную работу от известных.

#### III. РАЗРАБОТКА ЛАБОРАТОРНОГО СТЕНДА ДЛЯ ПОЛУЧЕ-НИЯ ДАННЫХ О СОСТОЯНИИ КАНАЛА СВЯЗИ

Получение информации о состоянии канала связи производится на уровне PHY и напрямую не доступно прикладным программистам. Ни один маршрутизатор не может предоставить эту информацию в исходном виде. Для извлечения информации о состоянии канала связи необходимо модифицировать прошивки устройств. Наиболее распространённые проекты по получению информации о состоянии канала связи:

1. Atheros CSI Tool [21] – доступ к информации о состоянии канала связи с 56 поднесущих при использовании WiFi4 и к 114 поднесущим при использовании WiFi5. Работа производится на чипах Atheros AR9580, AR9590, AR9344 и QCA9558.

 Linux 802.11n CSI Tool [22] - доступ к информации о состоянии канала связи с 56 поднесущих. Работа производится на чипе Intel 5300.

Для разработки лабораторного стенда в работе используется инструмент Atheros CSI Tool с модифицированной прошивкой OpenWRT 14.07 «Barrier Breaker» на базе маршрутизатора TP-Link WDR-4300. В состав установки входят два маршрутизатора TP-Link WDR4300 с модифицированной прошивкой для получения данных о состоянии канала связи, ноутбук для обработки полученной информации и измерительное оборудование. Реализована передача информации с трех передающих антенн на две принимающие. Внешний вид оборудования приведен на рисунке 1.



Рис. 1. Внешний вид лабораторной установки

#### IV. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ РАДИОУСТРОЙСТВАМИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ О СОСТОЯНИИ КАЛАНА СВЯЗИ

#### А. Постановка задачи исследования

В работе решается практическая задача локализации средств малой механизации (таких как траверсы кранов, погрузчики, манипуляторы и прочее), осуществляющих транспортировку изготавливаемых изделий по наблюдаемой территории, с целью контроля исполнения заданий на перемещение продукции. Для решения задачи локализации предлагается использовать информацию от маршругизаторов, установленных как на объекте интереса, так и по всей наблюдаемой территории. Принимающие маршрутизаторы (ПМ) объединены в единую локальную сеть посредством проводных Ethernet-соединений. Координаты принимающих маршрутизаторов обозначим как  $x_{\Pi M}^{n}, y_{\Pi M}^{n},$  где n – номер принимающего маршрутизатора. В работе необходимо найти координаты объект интереса (x, y) в дискретный момент времени  $t_k$ . Для этого на него устанавливается передающий маршрутизатор (ПД). Передающий маршрутизатор связан со всеми принимающими маршрутизаторами по беспроводному каналу связи на базе технологии WiFi в диапазоне частот 5 ГГц с шириной канала в 40 МГц.

В каждый дискретный момент времени  $t_k$  передающий маршрутизатор передает широковещательный запрос в виде информационных пакетов. Каждый из принимающих маршрутизаторов, получивший этот запрос, извлекает информацию о состоянии канала связи, формируя вектор измерений  $\Phi(n, t_k) = [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_S]$ , где  $\varphi_s$ - фаза сигнала на частоте *s*-ой

поднесущей для п-ого принимающего маршрутизато-

ра в момент  $t_k$ , s = 1, S, где S=114 – количество поднесущих, при использовании ширина канала связи WiFi в 40 МГц. Все полученные векторы ний  $\Phi(n, t_k)$  передаются приемными маршрутизаторами на вычислитель по локальной сети. В качестве вычислителя может выступать сервер или отдельная вычислительная машина. Обобщённая схема размещения оборудования на наблюдаемой территории представлена на рисунке 2.



Рис. 2. Обобщённая схема размещения оборудования на наблюдаемой территории

Для нахождения координат (x,y) необходимо вычислить дальности для каждой пары передающий маршрутизатор – *n*-ый принимающий маршрутизатор с точностью до определенного шага d. Для удобства вектор измерений при n = 1 обозначим как  $\Phi(t_k)$ , а дальность между маршрутизаторами как *r*. В работе предполагается, что существует некая нелинейная функция  $\hat{r}(\Phi(t_k))$ , ставящая в соответствие вектору  $\Phi(t_k)$  определенную дальность из некоторого набора дискретных значений  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ..., r_m]$ , где *m* – количество дискретных значений дальности. Количество значений дальности d.

#### В. Алгоритм решения в общем виде

Ввиду того, что явная аналитическая зависимость между входным вектором  $\Phi(t_k)$  и набором дискретных значений *r* неизвестна предлагается использовать методы машинного обучения и решать задачу классификации. Суть предлагаемого решения можно представить следующим образом. На вход классификатора подается вектор  $\Phi(t_k)$ , а на выходе с некоторой вероятностью определяется дальность, соответствующая этому вектору. В качестве классов принимаются ранее определенные элементы из r. Таким образом, задача классификации заключается в нахождении однозначного соответствия между входным вектором измерений фаз принятого сигнала  $\Phi(t_k)$  и соответствующей дальностью. Такая нелинейная зависимость между входом и выходом и описывается функцией  $\hat{r}(\Phi(t_k))$ . Работа функции  $\hat{r}(\Phi(t_k))$  включает в себя снижение размерности входного вектора фаз  $\Phi(t_k)$  с целью извлечения его скрытых особенностей в виде вспомогательного вектора  $V(t_k)$  и использования решающего правила, позволяющего сопоставить входной вектор фаз с дальностью из набора *r*, используя L1 норму.

#### С. Частное решение на основе нейронной сети

Архитектура нейронной сети. Для реализации классификатора в работе предлагается использование

аппарата нейронных сетей. Нейронная сеть (HC) состоит из двух слоёв: входного слоя из S нейронов и выходного слоя из H нейронов. Архитектуру HC в общем виде можно представить в виде рисунка 3.



Рис. 3. Архитектура нейронной сети

Обучение нейронной сети. В роли классификатора в работе выступает HC, именуемая ограниченной машиной Больцмана. В виду того, что обучение HC происходит без учителя, результат, получаемый на выходном слое сети, не может явно определить дальность между маршрутизаторами. Для определения дальности необходимо использовать решающее правило, заключающееся в нахождении минимального значения нормы модуля разности.

Тогда алгоритм обучения без учителя для нее можно представить следующим образом:

1. Для каждого вектора  $\Phi(t_k)$  из обучающего набора вычисляется вектор значений вероятности элементов выходного (скрытого) слоя  $V(t_k)$  согласно формуле (1)

 $V(t_k) = [1 + \exp(-b_0 + \sum W_0 * \Phi(t_k))]^{-1},$  (1) где  $b_0$  – смещение входного слоя HC, W – матрица весов HC.

1. Производится реконструкция вектора  $\widehat{\Phi}(t_k)$  с использованием полученного вектора  $V(t_k)$  по формуле (2)

$$\widehat{\Phi}(t_k) = [1 + \exp(-b_1 + \sum W_1 * V(t_k))]^{-1}, \quad (2)$$

где  $b_1$  – смещение выходного слоя HC.

2. Производится реконструкция вектора  $\hat{V}(t_k)$ , на основе реконструкции вектора  $\hat{\Phi}(t_k)$ , полученного на предыдущем шаге согласно формулы (3)

$$\hat{V}(t_k) = \left[1 + \exp(-b_0 + \sum W_0 * \hat{\Phi}(t_k))\right]^{-1}$$
 (3)

3. После оценки градиентов матрица весов W изменяется согласно формуле (4)

$$\Delta W = \rho(\Phi(t_k) * V(t_k) - \widehat{\Phi}(t_k) * \widehat{V}(t_k)), \quad (4)$$

где *р* – размер шага обучения.

 После корректировки матрицы весов W вносятся изменения в значения смещений по формулам (5) и (6).

$$\Delta b_0 = \rho(\Phi(t_k) - \widehat{\Phi}(t_k)) \tag{5}$$

$$\Delta b_1 = \rho(V(t_k) - \hat{V}(t_k)) \tag{6}$$

После прохождения одной эпохи обучения классификатор способен формировать вектора значений вероятности элементов выходного слоя  $V(t_k)$  по вектору  $\Phi(t_k)$ . Процесс обучения НС и реконструкции векторов  $\widehat{\Phi}(t_k)$  и  $\widehat{V}(t_k)$  можно представить в виде рисунка 4.



Рис. 4. Визуализация процесса обучения НС

В процессе обучения на вход НС подается множество известных векторов  $\Phi(t_k)$  размерности р, а на выходе для них формируется множество эталонных векторов  $V^{<l>}(t_k)$ .

Рассмотрим, что собой представляет вектор  $V(t_k)$ . Нейронная сеть в работе выступает в качестве энкодера, понижающего размер входного вектора  $\Phi(t_k)$  с S до  $H^2$ , по которым и осуществляется прогноз номера класса и определяется дальность. Количество нейронов на выходном слое определяется экспериментально. Так, каждый вектор  $V(t_k)$  содержит в себе информацию о том, как активировались нейроны выходного слоя в зависимости от значений входного вектора  $\Phi(t_k)$ . Например, для двух нейронов выходного слоя вектор  $V(t_k)$  можно записать как  $[a_1 \ 1 - a_1 \ a_2 \ 1 - a_2]$ , где  $a_1, a_2 - факт активации нейронов выходного слоя при поступлении вектора измерений <math>\Phi(t_k)$ .

*Нахождение*  $\hat{r}(\Phi(t_k))$ . При тестировании размерность вектора  $\Phi(t_k)$  выбиралась равной 100, что соответствует среднему времени получения 100 измерений с ПД на ПМ и их обработки HC, равному 1 секунде.

Определение дальности между передающим маршрутизатором и *n*-ым принимающим маршрутизатором производится путем нахождения минимального значения нормы модуля разности (L1 норма) между сигнатурой  $V(t_k)$ , полученной для входного набора измерений  $\Phi(t_k)$  и эталонными значениями сигнатур  $V^{<l>}$ . Тогда искомую функцию  $\hat{r}(\Phi(t_k))$  можно представить в виде формулы (7).

$$\hat{r}(\Phi(t_k)) = argmin(dist(V(t_k), V^{}))$$
(7)

Искомое значение  $\hat{r}$  соответствует тому значению дальности из дискретного набора r для которого эталонная сигнатура  $V^{<l>}$  имеет минимальное расстояние с полученной сигнатурой  $V(t_k)$ .

Локализация радиоустройств внутри помещений на основе информации о состоянии канала связи с использованием ограниченной машины Больцмана.

#### V. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

#### А. Синтез обучающей выборки

В работе рассматривается набор данных, полученный на расстоянии от 1 до 4 метров с шагом в 1 метр. Данные получены в лаборатории размером 4,5х2,5 метра, содержащей оборудование и элементы мебели, представляющие собой физические преграды для распространения сигнала. Принимающий маршрутизатор был стационарно расположен в дальней части лаборатории. Для получения данных о состоянии канала связи, принимающие маршрутизаторы были расположены на расстояниях в 1, 2, 3 и 4 метра со смещением в 0,6 метра от центра лаборатории (как показано на рисунке 5). Для формирования контрольной выборки были произведены замеры на расстояниях в 1, 2, 3 и 4 метра без смещения.



Рис. 5. Схема размещения оборудования для синтеза данных

В результате эксперимента получена информация о состоянии канала связи в количестве 6402 замеров. Для обеспечения равномерности распределения замеров по опорным точкам в исследовании для обучения используются по 400 замеров в каждой опорной точке, 100 замеров в каждой опорной точке используются как контрольные. В дополнение, к каждому анализируемому расстоянию, собраны по 200 замеров со смещением в 0,6 метра от анализируемых опорных точек. Количество замеров для разных точек лаборатории представлено на рисунке 6.



Рис. 6. Распределение замеров по опорным точкам

#### В. Расчёт эталонных сигнатур

После проведения процесса обучения вероятностной генеративной модели, согласно формул (5)– (8), были получены оптимальные веса [23], [24] и сформированы эталонные сигнатуры. Результат расчёта эталонных сигнатур  $H^{<l>}$  классов расстояний между маршрутизаторами при исследовании информации о состоянии канала связи с первой передающей антенны на первую принимающую антенну приведен в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1. ЧАСТОТА АКТИВАЦИИ НЕЙРОНОВ СКРЫТОГО СЛОЯ

	Состояния скрытых нейронов					
Рассто- яние	Hei	ірон 1	Нейрон 2			
	Активи- ровался	Не активи- ровался	Активи- ровался	Не активи- ровался		
1 метр	0.99	0.01	0.99	0.01		
2 метра	0.77	0.23	0.77	0.23		
3 метра	0.01	0.99	0.01	0.99		
4 метра	0.27	0.73	0.26	0.74		

С. Результаты экспериментальных исследований

Для оценки предложенного алгоритма, в определении расстояния от передающего устройства до принимающего, было использовано 100 замеров с опорных точек обучающей выборки и 200 замеров с из контрольной выборки, разделенных на две части по 100. Далее было подсчитано количество активированных выходных состояний и рассчитаны вектора *H*. Результат расчёта приведен в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2. РЕЗУЛЬТАТ РАСЧЁТА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СИГНАТУРАМИ

	Расстояние L1 для измерений 0-100						
ние		1 метр	2 метра	3 метра	4 метра		
1150	1 метр	0	0,64	3,96	1,22		
CTO	2 метра	0,88	0,24	3,08	0,34		
Pac	3 метра	3,92	3,28	0,04	2,7		
-	4 метра	2,9	2,26	1,06	1,68		
	Расстояние L1 для измерений 100-200						
не		1 метр	2 метра	3 метра	4 метра		
160	1 метр	0	0,92	3,96	3		
CL	2 метра	0,88	0,04	3,08	2,12		
Pac	3 метра	3,92	3	0,04	0,92		
	4 метра	2,9	1,98	1,06	0,1		

Оценку качества работы алгоритма произведем с использованием матрицы ошибок, включающей в себя показатели: истинно положительный (True Positive, TP), ложно отрицательный (False Negative, FN) и истинно отрицательный (True Negative, TN). К истинно положительным значения будем относить те значения, где алгоритм правильно сопоставил измеренное значение и предсказанное. К истинно отрицательным значениям будем относить те значения, при которых алгоритм не смог правильно предсказать дальность соответствующего класса. К истинно отрицательным значения будем относить те, которые не принадлежат рассматриваемому классу.

Исходя из того, что информация о состоянии канала связи извлекается по двум передающим и двум принимающим антеннам, измерение точности можно провести дополнительно еще по трем наборам данных того же размера. Матрица ошибок определения расстояния по всем антеннам приведена в таблице 3.

Данная таблица позволяет рассчитать ключевые характеристики предложенного алгоритма. Используя полученные ошибки и их вероятность можно рассчитать погрешность, полученную в каждом из классов. Так, для классов в один и два метр погрешность составила 3.25 сантиметра. Погрешность третьего класса составила 1.25 сантиметра, а погрешность четвертого класса – 22.7 сантиметра.

ТАБЛИЦА З. МАТРИЦА ОШИБОК ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ ПО ВСЕМ
ПАРАМ АНТЕНН

Истинное расстояние	Полученное расстояние			
	1 метр	2 метра	3 метра	4 метра
1 метр	776	22	2	0
2 метра	32	765	0	3
3 метра	0	2	786	12
4 метра	7	37	86	670

Также была рассчитана F-мера каждого из классов с целью получения гармонической средней точности. Так, для первого класса F-мера составила 96.4%, для второго – 93.6%, для третьего – 94% и для четвертого – 90.3%.

На основе данных из таблицы 3 можно сделать вывод, что наименьшая точность определения расстояния наблюдается на расстоянии 4 метров и варьируется в пределах от 64.5% до 95.5%. При чем, количество ошибок определения расстояния с первой передающей антенны на вторую принимающую антенну и со второй передающей антенны на первую принимающую антенну составило 15 и 9 соответственно. Из этого можно сделать вывод, что можно добиться высокой точности классификации при ограничении анализируемых параметров. Низкую точность классификации на 4 метрах также можно объяснить сложностью среды распространения сигнала в наблюдаемом помещении. На расстоянии 4 метров находился телекоммуникационный шкаф и два стационарных компьютера.

#### VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведения исследования разработан алгоритм определения расстояния между радиоустройствами на основе данных о состоянии калана связи для построения систем локализации радиоустройств внутри помещений.

В рамках работы были достигнуты следующие результаты:

- Проведен обзор и анализ отечественной и зарубежной научно-технической базы, показавший актуальность предлагаемого исследования.
- Разработан лабораторный стенд, позволяющий получать информацию о состоянии канала связи и проводить измерительные мероприятия по формированию обучающих наборов данных.
- Разработан алгоритма определения расстояния между радиоустройствами на основе данных о состоянии калана связи для построения систем локализации радиоустройств внутри помещений.

Проведенные экспериментальные исследования показали возможность определения расстояния между маршрутизаторами в наблюдаемом помещении на основе информации о состоянии канала связи. Средняя точность составила 93.7%. Максимальная ошибка наблюдалась на расстоянии в 4 метра и составила 35.5% по результатам исследования информации о состоянии канала связи с первой принимающей антенны на первую принимающую антенну. При анализе всех передающих и принимающих антенн средняя точность составила 93,66%.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Пешехонов В. Г. Высокоточная навигация без использования информации глобальных навигационных спутниковых систем // Гироскопия и навигация. 2022. №1 (116). С. 3–11. DOI 10.17285/0869-7035.0084.
- [2]. Danklang, P., & Pranekunakol, T. (2021). An RSSI-based weighting with accelerometers for real-time indoor positioning. 2021 13th International Conference on Knowledge and Smart Technology (KST). doi:10.1109/kst51265.2021.9415843.
- [3]. A. Poulose, J. Kim and D. S. Han, Indoor localization with smartphones: magnetometer calibration, 2019 IEEE International Conference on Consumer Electronics (ICCE), 2019, pp. 1-3, doi: 10.1109/ICCE.2019.8661986.
- [4]. Али Б., Садеков Р.Н., Цодокова В.В. Алгоритмы навигации беспилотных летательных аппаратов с использованием систем технического зрения Гироскопия и навигация. 2022. Т. 30. № 4 (119). С. 87-105.
- [5]. Carlos Campos, Richard Elvira, Juan J. Gómez Rodríguez, José M. M. Montiel and Juan D. Tardós, ORB-SLAM3: An accurate opensource library for visual, visual-inertial and multi-map SLAM, IEEE Transactions on Robotics 37(6):1874-1890, Dec. 2021.
- [6]. Бикмаев Р.Р., Золотов М.Д., Попов А.Н., Садеков Р.Н. Повышение точности сопровождения подвиж-ных объектов с применением алгоритма комплексной обработки сигналов с монокулярной камеры и лидара В сборнике: XXVI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. 2019. С. 39-42.
- [7]. IEEE Std. 802.11n-2009: Enhancements for higher throughput. http://www.ieee802.org, 2009.
- [8]. IEEE Std. 802.11ac-2013: Telecommunications and information exchange between systems – Local and metropolitan area networks. http://www.ieee802.org, 2013.
- [9]. Ф. Мюллер, М. Райхотарью, С. Али-Лойту, Л. Вирола, Р. Пише Обзор параметрических методов позиционирования на основе концепции отпечатка пальца // Гироскопия и навигация №1 (92), 2016, с. 3-33
- [10]. Степанов О.А. Методы навигации с использованием геофизических полей, планов помещений и на основе отпечатка пальца. Взаимосвязь и отличия // XXIII Санкт-петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. 2016. С. 492-496.
- [11]. Астафьев А. В., Титов Д. В., Жизняков А. Л., Демидов А. А. Метод позиционирования мобильного устройства с использованием сенсорной сети BLE-маяков, аппроксимации значений уровней сигналов RSSI и искусственных нейронных сетей // Компьютерная оптика, Самара, 2021. Т. 45, № 2. С. 277-285.
- [12]. Celik, Y. (2020). RSSI-Based Visible Light Positioning System with Angular Diversity Receiver. 2020 28th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU). doi:10.1109/siu49456.2020.9302364
- [13]. Jeon, J., Kong, Y., Nam, Y., & Yim, K. (2015). An Indoor Positioning System Using Bluetooth RSSI with an Accelerometer and a Barometer on a Smartphone. 2015 10th International Conference on Broadband and Wireless Computing, Communication and Applications (BWCCA). doi:10.1109/bwcca.2015.142
- [14]. Wang, X.; Gao, L.; Mao, S. CSI Phase Fingerprinting for Indoor Localization with a Deep Learning Approach. IEEE Internet Things J. 2017, 3, 1113–1123.
- [15]. J. Xiao, K. Wu., Y. Yi, and L. Ni, "FIFS: Fine-grained indoor fingerprinting system," in Proc. IEEE ICCCN'12, Munich, Germany, July/Aug. 2012, pp. 1–7.
- [16]. M. Youssef and A. Agrawala, "The Horus WLAN location determination system," in Proc. ACM MobiSys'05, Seattle, WA, June 2005, pp. 205–218.
- [17]. M. Brunato and R. Battiti, "Statistical learning theory for location fingerprinting in wireless LANs," Elsevier Computer Netw., vol. 47, no. 6, pp. 825–845, Apr. 2005.

- [18]. Wu, K.; Jiang, X.; Yi, Y.; Chen, D.; Luo, X.; Ni, L.M. CSI-Based Indoor Localization. IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst. 2013, 24, 1300–1309.
- [19]. X. Wang, L. Gao, S. Mao, and S. Pandey, "DeepFi: Deep learning for indoor fingerprinting using channel state information," in Proc. IEEE WCNC 2015, New Orlean, LA, Mar. 2015, pp. 1666–1671.
- [20]. Wang, W., Marelli, D., & Fu, M. (2020). Fingerprinting-Based Indoor Localization Using Interpolated Preprocessed CSI Phases and Bayesian Tracking. Sensors, 20(10), 2854. doi:10.3390/s20102854
- [21]. Yaxiong Xie, Zhenjiang Li, and Mo Li. 2015. Precise Power Delay Profiling with Commodity WiFi. In Proceedings of the 21st Annual

International Conference on Mobile Computing and Networking (MobiCom '15). ACM, New York, NY, USA, 53-64. DOI: http://dx.doi.org/10.1145/2789168.2790124

- [22]. Halperin, D., Hu, W., Sheth, A., & Wetherall, D. (2011). Tool release. ACM SIGCOMM Computer Communication Review, 41(1), 53. doi:10.1145/1925861.1925870
- [23]. Fischer, A., & Igel, C. (2014). Training restricted Boltzmann machines: An introduction. Pattern Recognition, 47(1), 25–39. doi:10.1016/j.patcog.2013.05.025
- [24]. Hinton, G. E. (2012). A Practical Guide to Training Restricted Boltzmann Machines. Neural Networks: Tricks of the Trade, 599– 619. doi:10.1007/978-3-642-35289-8\_32

## Локальная навигация колесного мобильного робота как носителя аппаратуры мониторинга дефектов воздушного судна на его стоянке

В.А. Петрухин Кафедра 305 Московский Авиационный институт Москва, Россия riksorge@me.com К.С. Лельков Кафедра 305 Московский Авиационный институт Москва, Россия pec-orange@mail.ru А.И. Черноморский Кафедра 305 Московский Авиационный институт Москва, Россия chernomorscky@yandex.ru

Аннотация-Целью работы является решение задачи обеспечения высокой точности определения параметров локальной навигации и ориентации около воздушного судна компонентов гетерогенной группы роботов в процессе мониторинга поверхности этого судна (на примере определения этих параметров для одноосного колесного модуля). Собственно обеспечение высокой точности навигации и ориентации одноосного колесного модуля достигается за счет учета поправок локального навигационного решения, формируемых на основе применения известных алгоритмов cloud matching и scan matching с использованием восстанавливаемой поверхности воздушного судна и дополнительной информации о ее модели. Локальное навигационное решение строится на основе информации от инерциальных измерителей и энкодеров. Комплексная обработка информации осуществляется с применением фильтра Калмана. Результаты моделирования локальной навигации одноосного колесного модуля в процессе мониторинга дефектов поверхности воздушного судна на его стоянке подтвердили эффективность предложенного подхода к решению задачи.

Ключевые слова—колёсный модуль, локальная навигация, управление ориентацией, математическая модель, алгоритмы, моделирование.

#### I. Введение

При дефектоскопическом мониторинге поверхности воздушного судна (ВС) на его стоянке гетерогенной группой роботов (ГГР) важной задачей является определение координат и угловой ориентации роботов относительно ВС. ГГР представляет собой комплекс мобильных автономных роботов различного типа, включающий, в частности, наземный колесный робот и беспилотный летательный аппарат. В качестве беспилотного летательного аппарата может быть использован мультироторный аппарат. В качестве наземного колесного робота перспективным является использование одноосного колесного модуля (ОКМ) с гравитационно-маховичным управлением его двухстепенной платформой [1-3].

Решение задачи обеспечения высокой точности параметров локальной навигации рассмотрим на примере ОКМ. На управляемой платформе ОКМ устанавливается аппаратура фотомониторинга – стереопара камер, секторный и сканирующий лазерные дальномеры. Комплексная навигационная система включает инерциальные измерители, энкодеры на осях мотор-колес модуля, систему технического зрения.

На начальном этапе процесса навигации при перемещении ОКМ в направлении стоянки ВС ОКМ определяет свои координаты и углы ориентации в локальной стартовой системе координат (СК), свободной в азимуте. В области расположения ВС по информации от сканирующего дальномера ОКМ идентифицирует тип, координаты и угловую ориентацию ВС. В бортовом вычислителе ОКМ при решении навигационной задачи реализуется переход в СК, связанную непосредственно с неподвижным ВС.

В процессе перемещения ОКМ по траектории объезда ВС осуществляется выявление на поверхности ВС локальных признаков (ориентиров) и восстановление его поверхности (построение трехмерной поверхности ВС на основе полученных снимков и измерений дальномеров) с одновременной ориентацией фотоаппаратуры мониторинга в направлении нормали к этой поверхности. С этой целью при оценивании перемещения ОКМ из предшествующего положения в текущее осуществляется анализ двух стереоизображений и одновременный поиск на них ориентиров. Так как параметры стереокамер априори известны, используя аппарат эпиполярной геометрии, определяются координаты найденных ориентиров в СК, связанной с ВС [4].

В непосредственно близости от ВС измерения спутниковой навигационной системы оказываются ненадёжны. В этих условиях обеспечение высокой точности навигации и ориентации ОКМ достигается за счет применения известных алгоритмов cloud matching и scan matching с использованием восстановленной поверхности ВС и дополнительной информации [5]. Эта дополнительная информация представляет собой предварительно сгенерированную 3D-модель геометрии поверхности планера ВС, которая задействуется также в качестве эталона в дефектоскопическом мониторинге.3D-модель геометрии используется для представления дополненного виртуального окружения ВС в виде облака точек, характеризующих его поверхность, с которым сравниваются получаемые для использования в алгоритмах cloud matching и scan matching данные о восстановленной поверхности ВС. В результате наложения на предварительно сгенерированную 3D-модель геометрии поверхности ВС восстановленного облака точек этой поверхности, попавших в поле зрения аппаратуры мониторинга, формируются поправки к определяемым параметрам навигации и ориентации ОКМ. Эти поправки используются для коррекции локального навигационного решения, построенного на основе информации от инерциальных измерителей и энкодеров. Комплексная обработка информации осуществляется с применением фильтра Калмана. Подобный поход позволяет существенно повысить точность локальной навигации в условиях отсутствия сигналов от спутниковой навигационной системы [6-8].

#### II. Схема построения и бортовые системы ОКМ

#### А. Схема ОКМ

ОКМ представляет собой фактически наземный колёсный гироскопический стабилизатор (НКГС) с платформой, на которой размещается носимая аппаратура [2]. Платформа ОКМ обычно обладает верхней маятниковостью, что предопределяет ее собственную неустойчивость, и опирается на колесную пару. ОКМ обеспечивает как возможность перемещения аппаратуры по программной пространственно-временной траектории (ПВТ), так и управление угловой ориентацией его платформы с этой аппаратурой мониторинга относительно плоскости горизонта, а также в азимуте. Таким образом, ОКМ совмещает в себе функции и транспортного средства, и гироскопического стабилизатора с управляемой платформой (рис. 1).

На рис. 1. обозначены: маховики 1, 2, осуществляющие стабилизацию и управления платформой вокруг соответственно осей рамы ( $O_s y_p$ ) и платформы ( $O_s x_{\Pi}$ ); ДЛМ, ДВМ – соответственно двигатели линейных перемещений и вращений маховиков; ИИБ – инерциальный измерительный блок; ПСНС – приемник спутниковой навигационной системы.



Рис. 1. Схема построения ОКМ

На рис. 1. представлены следующие системы координат (СК):  $O_s X_s Y_s Z_s$  – стартовая СК ( $O_s X_s$ ,  $O_s Y_s$  лежат в плоскости горизонта);  $O_s x_p y_p z_p$  – СК рамы;  $O_s x_n y_n z_n$  – СК платформы (центр масс платформы  $o_{II}$  смещен относительно  $O_s$  на величину  $l_{II}$ ). На рис. 1 обозначены также: V – скорость перемещения ОКМ по горизонтальной подстилающей поверхности;  $\theta$  – угол разворота ОКМ по курсу;  $\alpha$  и  $\beta$  – углы отклонения платформы от подстилающей поверхности вокруг осей  $O_s y_p$  и  $O_s x_n$ ;  $\dot{\theta}$  – угловая скорость курсового разворота ОКМ;  $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2$  – угловые скорости вращения первого и второго мотор-колёс (МК1 и МК2) с энкодерами;  $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$  – угловые скорости вращения 1, 2 (М1, М2).

#### В. Комплекс бортовых систем ОКМ

Структура комплекса бортовых систем ОКМ представлена на рис. 2 Состав и функциональное назначение измерителей навигационной системы (НС) таково: ИИБ, включающий горизонтальные акселерометры, курсовой микромеханический гироскоп, а также магнитометры, обеспечивает НС информацией о горизонтальных ускорениях платформы, разворотах ОКМ по курсовому углу  $\theta$ ; ПСНС вырабатывает информацию о текущих координатах и скорости ОКМ; энкодеры обеспечивают НС информацией об угловых скоростях вращения колес. Блок формирования программной угловой ориентации (БФПУО) задает потребные программные углы ориентации платформы  $\alpha_{\Pi}$ ,  $\beta_{\Pi}$ . Блок формирования ПВТ (БФПТ) задает потребные программные координаты  $x_n, y_n$ , курсовой угол  $\theta_n$  и программную скорость перемещений ОКМ Ип. Стереопара камер формирует стереоизображение поверхности ВС. Вычислитель нормали вырабатывает направление нормали к поверхности ВС. Фотограмметрический вычислитель формирует восстановленную трехмерную модель нижней части наружной поверхности ВС в связанной с ним СК. Блок идентификации дефектов (БИД) выявляет дефекты поверхности и определяет их параметры.



Рис. 2 Структура комплекса бортовых систем ОКМ: СТУ – система траекторного управления; НС – навигационная система; СУОП – система управления ориентацией платформы; СОФИ – система обработки фотоинформации; БФПУО, БФПТ – блоки формирования соответственно программных углов ориентации и программной траектории ОКМ; БИД – блок идентификации дефектов поверхности ВС; БЭМ – блок эталонных моделей ВС; ВНП – вычислитель навигационных поправок

#### С. Пространственно-временная траектория ОКМ

На рис. 3. представлена ПВТ ОКМ применительно к ВС МС21. Она сформирована при известном расположении и ориентации ВС на его стоянке таким образом, что обеспечивает с одной стороны возможность осмотра всех зон нижней части наружной поверхности ВС в соответствии с регламентом визуального осмотра, а с другой стороны – необходимое отстояние ОКМ от поверхности ВС с возможностью ориентации визирной линии стереопары камер по нормали к этой поверхности на сравнительно небольших углах  $\alpha, \beta$  отклонения платформы ОКМ от плоскости горизонта. В частности, участки траектории, эквидистантные контуру фюзеляжа, отстоят от него на расстоянии порядка 5м; при этом максимальные углы  $\alpha, \beta$  составляют величины порядка 15°.



Рис. 3. Траектория перемещения ОКМ

Контрольные точки на ПВТ, в которых осуществляется фотосъемка поверхности ВС, формируются таким образом, чтобы перекрытие соседних снимков составляло бы как минимум 30%. В контрольных точках ОКМ останавливается, разворачивается на углы  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ , главным образом по углу  $\beta_n$ , и визирная линия ориентируется по программной нормали (рис. 4).



Рис. 4 Ориентация визирной линии по программной нормали

Производится первичная фотосъемка и по фотоизображениям осуществляется восстановление истинной нормали к поверхности ВС [4]. Производится доворот платформы на коррекционные углы  $\alpha_{\kappa}$ ,  $\beta_{\kappa}$  и визирная линия устанавливается по направлению истинной нормали к поверхности, осуществляется вторичная фотосъемка (рис. 5) [4]. По полученным уточненным снимкам формируется фотограмметрическая модель поверхности ВС [4], которая сравнивается с опорной моделью поверхности ВС, и с применением алгоритма ОВВ [9] определяется расположение, а также параметры дефектов наружной поверхности ВС.



Рис. 5. Уточнение ориентации платформы. Индексы «п» и «и» при обозначениях осей означают соответственно принадлежность к программным и истинным направлениям;  $n_u$ ,  $n_n$ — вектора программной и истинной нормали к поверхности ВС

#### D. Математическая модель ОКМ

Используя результаты, полученные в [10], учитывая, что уклоны подстилающей аэродромной поверхности практически отсутствуют, математическую модель ОКМ при отсутствии проскальзывания колес относительно подстилающей поверхности можно представить в следующем виде:

$$\left(J_{y}^{p}+J_{y}^{\pi}\cos^{2}\beta+J_{z}^{\pi}\sin^{2}\beta+m^{M}p_{1}^{2}\right)\ddot{\alpha}\dots \dots+m^{n}l_{\mu}\left(\dot{V}\cos\alpha\cos\beta-g\sin\alpha\cos\beta\right)\dots +\dots J^{M}\dot{\psi}_{2}\dot{\theta}\cos\alpha\dots \dots-m^{M}gp_{1}=-M_{1}^{\mathcal{A}BM}-M_{1}^{\mathcal{A}K}-M_{2}^{\mathcal{A}K}+M_{yp}^{e};$$
(1)

$$\left(J_x^{\mathrm{n}} + m^{\mathrm{M}} p_2^{2}\right)\beta - m^{\mathrm{n}} l_{\mathrm{n}}(\theta V \cos^2 \alpha \cos \beta + g \sin \beta) \dots$$

$$+m^{\mathsf{M}}gp_{2} = -M_{2}^{\mathsf{ABM}} + M_{\mathsf{XII}}^{\mathsf{s}}; \qquad (2)$$
$$m^{\mathsf{M}}(\ddot{n} + \dot{V}\cos\alpha - \alpha\sin\alpha) = M^{\mathsf{AIM}};$$

$$m \left( p_1 + v \cos \alpha - g \sin \alpha \right) - m_1 \quad , \tag{3}$$

$$m^{\rm M}\left(\ddot{p}_2 + V\theta\cos\beta + g\sin\beta\right) = M_2^{\rm AJM};\tag{4}$$

$$J^{\mathsf{M}}\ddot{\psi}_1 = M_1^{\mathsf{ABM}};\tag{5}$$

$$J^{\scriptscriptstyle M} \ddot{\psi}_2 = M_2^{\scriptscriptstyle \text{двм}}; \tag{6}$$

$$\left(\frac{2J^{\kappa}b}{r} + \frac{r}{b}J_{z}\right)\ddot{\theta} + J^{\kappa}\frac{r}{b}\left(-\dot{\psi}_{2}\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta\right)\dots$$
$$= -M_{1}^{\pi\kappa} + M_{2}^{\pi\kappa} - M_{1}^{\mu\tau\rho} + M_{2}^{\mu\tau\rho};$$
(7)

$$\left(\frac{2J^{\kappa}}{r} + mr\right)\dot{V} = M_1^{\pi\kappa} + M_2^{\pi\kappa} + M_1^{\mu\taup} + M_2^{\mu\taup},$$
(8)

где  $J_{y}^{p}, J_{x}^{n}, J_{y}^{n}, J_{z}^{n}$  — моменты инерции рамы и платформы вокруг соответствующих осей;  $J^{k}$  — момент инерции колеса вокруг его оси вращения;  $m^{M}, J^{M}$  — соответственно масса и момент инерции маховика вокруг его оси собственного вращения; m и  $J_{z}$  — суммарная масса ОКМ и его момент инерции вокруг оси oz; r — радиус колеса; 2b — колея колесной пары; g — ускорение силы тяжести;  $M_{yp}^{B}, M_{x\Pi}^{B}$  — возмущающие моменты вокруг соответствующих осей рамы и платформы;  $M_{1}^{BM}, M_{2}^{BM}$  — моменты, развиваемые двигателями маховиков;  $M_{1}^{AIM}, M_{2}^{AIM}$  — моменты, развиваемые двигателями линейных перемещений маховиков;  $M_{1}^{AR}, M_{2}^{AR}$  — моменты, развиваемые двигателями колес.

Моменты  $M_1^{\text{двм}}, M_2^{\text{двм}}$ , формируемые в контурах, содержащих вычислитель СУОП, контроллер двигателей маховиков, ДВМ1 и ДВМ2 (Фиг. 2), фактически являются выходами эквивалентных ПИД-регуляторов, на входах которых - соответствующие разности между суммой программных  $\alpha_n, \beta_n$ , коррекционных  $\alpha_k, \beta_k$  углов и текущих α, β углов отклонений платформы от плоскости горизонта  $((\alpha_n + \alpha_\kappa) - \alpha), ((\beta_n + \beta_\kappa) - \beta)$ . Моменты  $M_1^{\text{длм}}, M_2^{\text{длм}}$ , формируемые в контурах, содержащих вычислитель СУОП, контроллер двигателей маховиков, ДЛМ1 и ДЛМ2 (рис. 2), фактически также являются выходами эквивалентных ПИД-регуляторов, на входы которых поступают, в частности, соответствующие угловые скорости  $\dot{\psi_1}$  и  $\dot{\psi}_{2}$  [10]. Эти моменты порождают перемещения  $p_{1}, p_{2}$  и соответственно гравитационные моменты маховиков с целью ограничения  $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$ . Моменты  $M_1^{_{4K}}, M_2^{_{4K}}$ , формируемые в контурах, содержащих вычислитель СТУ, контроллер двигателей мотор-колес, ДМК1 и ДМК2, являются выходами комплексной СТУ, включающей траекторную и локомоционную подсистемы [11-14]. Экспериментальные исследования разработанного макета ОКМ показали адекватность модели (1)-(8) и эффективность управления ориентаций платформы ОКМ с фотоаппаратурой.

#### III. Определение типа воздушного судна

Определение типа ВС осуществляется на основе оценки геометрии расположения стоек его шасси. Для конкретного выявленного типа ВС используется предварительно сформированная ПВТ его объезда, а также параметры потребной ориентации визирной линии аппаратуры фотомониторинга.

При движении ОКМ, в области расположения ВС возможно осуществление измерений дальностей до всех препятствий в пределах диапазона измерений бортового сканирующего лазерного дальномера и определение координат их местоположения. При этом в процессе решения задачи мониторинга поверхности ВС на его аэродромной стоянке BC неподвижно и обладает известной геометрией расположения стоек шасси (и, в общем случае, низко расположенных двигателей).

Определив координаты местоположения всех препятствий в окрестности ОКМ, и выбрав среди их множества точки, соответствующие стоякам шасси ВС, можно определить местоположение  $x_a, y_a$  и ориентацию  $\theta_a$  ВС в стартовой СК  $O_s X_s Y_s$ , а также его тип [14].

#### IV. АЛГОРИТМ НС И АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ

Локальная навигационная система ОКМ определяет его навигационные параметры на основе формируемых ошибок: ошибок  $\delta x, \delta y$  определения координат местоположения ОКМ; ошибки  $\delta \theta$  определения угла курса ОКМ; ошибок  $\delta l_{right}, \delta l_{left}$  определения длин окружностей правого и левого колес ОКМ; ошибки  $\delta \omega_z$  определения сдвига нуля курсового датчика угловой скорости.

Уравнения динамики системы ошибок  $\delta x, \delta y, \delta \theta, \delta l_2, \delta l_1, \delta \omega_z$  и уравнения измерений в общем виде имеют вид [15]:

$$\dot{X} = F \times X + Q;$$

$$Z = H \times X + v,$$
(9)

где X – вектор состояния параметров системы (вектор ошибок); F – матрица динамики системы; Q – вектор шумов системы; Z – вектор измерений; H – матрица измерений; v – вектор шумов измерений.

В рассматриваемом случае вектор состояния системы имеет вид:

$$X = \begin{bmatrix} \delta x & \delta y & \delta \theta & \delta l_2 & \delta l_1 & \delta \omega_2 \end{bmatrix}.$$
(10)

Матрица динамики системы F такова:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -V_{b} \sin \theta & \frac{\cos \theta \cdot \dot{\gamma}_{2}}{4\pi} & \frac{\cos \theta \cdot \dot{\gamma}_{1}}{4\pi} & 0 \\ 0 & 0 & V_{b} \cos \theta & \frac{\sin \theta \cdot \dot{\gamma}_{2}}{4\pi} & \frac{\sin \theta \cdot \dot{\gamma}_{1}}{4\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dt \\ 0 & 0 & 0 & 1/dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/dt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{\gamma}_{2}}{4\pi b \cdot dt} & \frac{\dot{\gamma}_{1}}{4\pi b \cdot dt} & 0 \end{pmatrix}.$$
(11)

Вектор шумов системы *Q* – вектор белых шумов с нулевыми математическими ожиданиями.

Вектор измерений Z имеет вид:

$$Z = \begin{bmatrix} \delta(x_m - x) \\ \delta(y_m - y) \\ (\dot{\theta}_{gyr} - \omega_z) - \dot{\theta}_{odo} \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

где  $\dot{\theta}_{gyr}$  – угловая скорость разворота ОКМ вокруг оси вертикальной оси, измеряемая курсовым гироскопом;  $\omega_z$  – текущее значение ошибки сдвига нуля курсового гироскопа;  $\dot{\theta}_{odo}$  – угловая скорость разворота ОКМ вертикальной оси, измеряемая одометрической системой;

 $\delta(x_m - x), \delta(y_m - y)$  — ошибки измерения координат местоположения ОКМ, вырабатываемая блоком ВНП СОФИ.

Матрица измерений Н такова:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
 (13)

Вектор шумов измерений *v* – вектор белых шумов с нулевыми математическими ожиданиями.

Соотношения (9-13) являются основой для построения фильтра Калмана, обеспечивающего расчёт оптимальных оценок компонент вектора состояния (10) [16].

#### V. МОДЕЛИРОВАНИЕ НС И КОРРЕКЦИИ

В качестве моделируемой ПВТ была выбрана фигура ВС (фиг. 6.). Результаты проезда и посчитанные координаты показаны на рис. 7. Ошибка локальной навигации в определении координат составила 0.2 м.



Рис. 6. Модельная траектория движения ОКМ



Рис. 7. Результаты проезда и ошибки локальной навигации

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Повышение точности локальной навигации при фотомониторинге воздушного судна гетерогенной группой роботов (на примере одноосного колесного модуля) может быть обеспечено на основе комплексной обработки информации об эталонной модели поверхности воздушного судна, о восстановленной с помощью системы технического зрения модели поверхности воздушного судна, об информации, получаемой от бортовых датчиков с использованием фильтра Калмана с применением и алгоритмов cloud matching и scan matching. Результаты моделирования локальной навигации одноосного колесного модуля в процессе мониторинга дефектов поверхности воздушного судна на его стоянке подтвердили эффективность предложенного подхода к решению задачи.

#### Литература

- Aleshin B.S., Lelkov K.S., Khorev T.S., Chernomorsky A.I., Miheev V.V., Kuris E.D., Petruhin V.A. Ground uniaxial wheeled modules for transportation and angular orientation control of environmental monitoring equipment. // 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2021. 28. 2021. C. 9470876.
- [2] Aleshin B.S., Chernomorskiy A.I., Feshchenko S.V. and others. Orientation, navigation and stabilization of single-axle wheel modules / Ed. B. S. Aleshin, A. I. Chernomorskiy M .: Publishing house MAI, 2012.271 p.
- [3] Maksimov V.N., Chernomorsky A.I. Integrated navigation and local mapping system for a uniaxial wheel module // Gyroscopy and navigation. 2016.T.92. No. 1. P. 116-132.
- [4] W. Förstner and B. P. Wrobel, Photogrammetric Computer Vision Statistics, Geometry, Orientation and Reconstruction, Springer, 2016.
- [5] X. Zhao and H. Wang, "Self-localization Using Point Cloud Matching at the Object Level in Outdoor Environment," 2019 IEEE 9th Annual International Conference on CYBER Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER), Suzhou, China, 2019, pp. 1447-1452, doi: 10.1109/CYBER46603.2019.9066619.
- [6] Antonov, D.A., Veremeenko, K.K., Zharkov, M.V. et al. Fault-Tolerant Integrated Navigation System for an Unmanned Apparatus Using Computer Vision. J. Comput. Syst. Sci. Int. 59, 261–275 (2020). https://doi.org/10.1134/S1064230720020045
- [7] D. A. Antonov, K. K. Veremeenko, M. V. Zharkov, I. M. Kuznetsov and A. N. Pron'kin, "Fault-tolerant airport vehicle integrated navigation system," 2017 24th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), St. Petersburg, Russia, 2017, pp. 1-4, doi: 10.23919/ICINS.2017.7995620.
- [8] Veremeenko, K.K., Zharkov, M.V., Kuznetsov, I.M. et al. Strapdown Inertial Navigation System Transfer Alignment: Algorithmic Features and Simulation Performance Analysis. Russ. Aeronaut. 63, 618–626 (2020). https://doi.org/10.3103/S106879982004008X
- [9] J. O'Rourke, Finding minimal enclosing boxes, International journal of computer & information sciences 14 (3) (1985) 183–199.
- [10] B. S. Aleshin et al., "Ground Uniaxial Wheeled Modules for Transportation and Angular Orientation Control of Environmental Monitoring Equipment," 2021 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), Saint Petersburg, Russia, 2021, pp. 1-7, doi: 10.23919/ICINS43216.2021.9470876.
- [11] B.S. Aleshin, A.I Chernomorsky, V.V. Miheev, "Indicator stabilization in the horizon plane of a two-degree platform of a uniaxial wheel module during its motion on a non-horizontal uneven surface", Bulletin of Russian Academy of Science, Control theory and systems, no. 5, pp 122-135, 2018 [Б. С Алешин. ,А. И. Черноморский,В. В. Михеев, "Индикаторная стабилизация в плоскости доризонта двух степенной платформы однооснодо колеснодо модуля при едо перемещениях по недоризонтальной неровной поверхности", Известия Российской академии наук. Теория и системы управления – 2018. – Номер 5 С. 122-135]
- [12] Aleshin B.S., Maksimov V.N., Mikheev V.V., Chernomorskii. Horizontal stabilization of the two-degree-of-freedom platform of a uniaxial wheeled module tracking a given trajectory over an underlying surface A.I. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. T. 56. № 3. C. 471-482.
- [13] A.I. Chernomorsky, V.V. Miheev, "Control of a uniaxial wheeled module moving on an uneven surface along a predetermined trajectory", Bulletin of Tula State Univercity, Technical studies, no. 12, pp 502-512, 2018 [А. И. Черноморский, В. В. Михеев, "Управление одноосным колесным модулем, перемещающимся на неровной

поверхности по заданной траектории", Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 12. – С. 502-512]

- [14] Alexander I. Chernomorsky, Konstantin S. Lelkov & Eduard D. Kuris (2020) About One Way to Increase the Accuracy of Navigation System for Ground Wheeled Robot Used in Aircraft Parking, Smart Science, 8:4, 219-226, DOI: 10.1080/23080477.2020.1824055
- [15] Brammer, K., Sifflin, G. (1989): Kalman-Bucy Filters. Artech House, Boston, USA
- [16] Q. Li, R. Li, K. Ji and W. Dai, "Kalman Filter and Its Application," 2015 8th International Conference on Intelligent Networks and Intelligent Systems (ICINIS), Tianjin, 2015, pp. 74-77.doi: 10.1109/ICINIS.2015.35.

## Метод пеленгации малоразмерного робототехнического комплекса подвижным наблюдателем в условиях сложного рельефа

Л.А. Мартынова *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»* Санкт-Петербург, Россия martynowa999@bk.ru +7-921-941-13-95 К.В. Ланцов ФГУП «Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем» (ГосНИИПП) Санкт-Петербург, Россия

Аннотация-Рассмотрена задача определения пеленга излучателя, находящегося на борту малоразмерного морского или воздушного робототехнического комплекса. Пеленг определяется в режиме шумопеленгования приемником с направленными в разные стороны антеннами. В условиях сложного рельефа морского дна или плотной городской застройки на материке определение пеленга происходит с большой погрешностью из-за возникновения зон тени, затухания сигнала, рассеяния и многократного его отражения, многолучевых полей со сложной интерференционной структурой и резким пространственным изменениям уровня сигнала. Уменьшение погрешности определения пеленга за счет совершенствования аппаратных средств ограничено требованиями к приемнику: он должен быть бюджетным, малозаметным, мобильным и экономичным по энергопотреблению. Предложенный метод пеленгации робототехнического комплекса позволяет определить требования к аппаратным средствам подвижного приемника и местам его расположения в зависимости от параметров приемника и затухания сигнала в условиях сложного рельефа. Получены зависимости влияния фона и явных препятствий, их отражающих поверхностей - на уровень сигнала на входе приемника. В таких условиях многолучевости за пеленг предложено принимать направление поступления максимального по уровню сигнала с оценкой погрешности определения пеленга. Для уменьшения погрешности определения пеленга предложено использовать фильтр Калмана, и по результатам моделирования определено при его использовании уменьшение погрешности определения пеленга от 10 градусов до десятых долей градуса. Предложенный в работе метод пеленгации малоразмерного робототехнического комплекса подвижным наблюдателем в условиях сложного рельефа может быть использован как в воздушных условиях при пеленгации беспилотного воздушного судна, так и в морской среде при пеленгации автономного необитаемого подводного аппарата.

Ключевые слова—малоразмерный робототехнический комплекс, режим шумопеленгования, многолучевость, отражение сигнала, сложный рельеф.

#### I. Введение

В настоящее время использование широкодоступных малоразмерных морских и воздушных робототехнических комплексов (РТК) для освещения наземной [1] и подводной обстановок привели к необходимости контроля их деятельности и определения их местоположения – в целях обеспечения безопасности объектов, находящихся в наблюдаемом с помощью РТК районе. При использовании приемника с ориентированными в различных направлениях антеннами в режиме шумопеленгования определяется пеленг на излучатель, находящийВ.В. Ланцов ФГУП «Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем» (ГосНИИПП) Санкт-Петербург, Россия А.В. Корякин ФГУП «Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем» (ГосНИИПП) Санкт-Петербург, Россия

ся на борту РТК. В условиях сложного рельефа морского дна, прибрежной сухопутной зоны со скалами или плотной городской застройки на берегу – возникают большие погрешности определения пеленга, вызванные формированием зон тени, затуханием сигнала излучателя, рассеянием и многократным его отражением, что приводит к формированию многолучевых полей со сложной интерференционной структурой и резким пространственным изменениям уровня сигнала.

Уменьшение погрешности определения пеленга на излучатель за счет совершенствования аппаратных средств невозможно из-за ограничений по стоимости приемника, легкости и мобильности при перемещении и экономичности по энергопотреблению. Другим направлением уменьшения погрешности определения пеленга на излучатель является обоснованный выбор места размещения приемника и совершенствование методов обработки поступающей на вход приемника информации. Этим определяется актуальность исследований, направленных на уменьшение погрешности определения пеленга на излучатель в условиях сложного рельефа.

Уменьшение погрешности определения пеленга на излучатель за счет совершенствования аппаратных средств невозможно из-за ограничений по стоимости приемника, легкости и мобильности при перемещении и экономичности по энергопотреблению. Другим направлением уменьшения погрешности определения пеленга на излучатель является обоснованный выбор места размещения приемника и совершенствование методов обработки поступающей на вход приемника информации. Этим определяется актуальность исследований, направленных на уменьшение погрешности определения пеленга на излучатель в условиях сложного рельефа.

Целью исследований явилась разработка метода пеленгации малоразмерного робототехнического комплекса подвижным наблюдателем в условиях сложного рельефа.

По результатам проведенных исследований разработан метод, который заключается:

- в определении положения и маршрута движения приемника на основе оценки затухания сигнала излучателя;
- в определении зон тени, многолучевости и отражения излучаемого сигнала с последующим исключением, по возможности, таких зон из маршрута движения приемника;
- в разработке алгоритмов обработки поступающей на вход приемника сигнала от излучателя.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 23-29-00803.

#### II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАТУХАНИЯ СИГНАЛА

Маршрут движения приемника выбирается из условия обнаружения сигнала излучателя на уровне помех в сложных условиях распространения сигнала. Для определения зоны устойчивого приема сигнала от беспилотного воздушного судна предлагается использовать модель оценки затухания сигнала в воздухе Уолфиша-Икегами [2], которая учитывает возможность прихода волны в точку приема несколькими маршрутами с последующим сложением и учитывает направления прихода радиоволн. Согласно модели Уолфиша-Икегами, медианное значение затухания L<sub>b</sub> определяется по эмпирической формуле, учитывающей потери распространения волн в свободном пространстве в зависимости от дальности до излучателя и частоты сигнала, потерь из-за отражений от зданий и из-за дифракции [2]. Аналогичные потери возникают также в прибрежной воздушной зоне, и для оценки затухания сигнала достаточно в модель Уолфиша-Икегами подставить вместо высоты домов - высоту скал, вместо ширины улиц – ширину ущелий и т.д.

В работе проведены расчеты затухания сигнала с использованием модели Уолфиша-Икегами для наиболее характерных частот излучателя. Результаты расчетов приведены на рисунке 1 в виде зависимости затухания от дистанции на частотах 1,080ГГц (линия синего цвета), 711,25МГц (линия красного цвета), 191,25МГц (линия зеленого цвета).

Результаты расчетов показали, что с увеличением расстояния потери уровня сигнала возрастают от 50 до 140 дБ и наибольшее затухание наблюдается у гигагерцового сигнала, наименьшее – у сигнала с частотой 191,25МГц. При движении приемника целесообразно сохранять дальность до излучателя сигнала в пределах до 12 км, так как затем наступает существенное увеличение потерь из-за затухания сигнала.



Рис. 1. Изменение потерь с увеличением расстояния

В водной среде распространение акустического сигнала происходит с затуханием, зависящим от параметров морской среды, аномалий распространения сигнала, которые хорошо моделируются с использованием закона Снеллиуса [3, 4].

По результатам оценки затухания сигнала в зависимости от дальности до излучателя определяется область устойчивого приема сигнала излучателя. Именно в этой области целесообразно осуществлять движение приемника, причем, по возможности, синхронно с перемещением излучателя, сохраняя свое положение в пределах допустимой дальности до излучателя. Однако модели распространения сигнала, в частности, Уолфиша-Икегами, позволяют получить средние значения затухания сигнала в условиях отсутствия ярко выраженных препятствий и отражающих поверхностей. При наличии ярко выраженных препятствий и отражающих поверхностей для оценки затухания излучаемого сигнала предлагается использовать геометрическую оптику, для чего необходимо определить расстояния, проходимые лучами сигнала – как прямыми, так и отраженными. Расчетные значения путей прямых и отраженных лучей сигнала позволяют оценить его затухание и определить суммарный сигнал, попадающий на ориентированные в различных направлениях плоскости антенн приемника.

## III. Определение зон тени, многолучевости и переотражения

На рисунке 2 представлено взаимное расположение плоскости антенны приемника, излучателя, лучей и зон тени. Полагаем, что вся изображенная на рисунке 2 область имеет затухание сигнала в пределах устойчивого приема, и влияние оказывают лишь зоны тени, многолучевости и переотражения.

На рисунке 2 в виде линии черного цвета показано положение плоскости одной из антенн, в верхней части схемы в виде линии серого цвета - положение препятствия, справа по диагонали сверху вниз - положение траектории перемещения излучателя, формирующего всенаправленное излучение, которое попадает, в том числе, на плоскость антенны (направления лучей показаны зеленым цветом). При отсутствии препятствий все лучи попадают на плоскость антенны (рис.2 слева). Наличие препятствия экранирует прохождение лучей к плоскости антенны, вследствие чего возникают зоны тени (область белого цвета). При дальнейшем движении излучателя возникает переотражение от плоскости препятствия (рис.2 справа), и лучи переотраженного сигнала попадают на плоскость антенны - наряду с прямыми лучами. Отражение от препятствия приводит к формированию многолучевости.



Рис. 2. Схема перемещения излучателя и распространения лучей на плоскость антенны

Таким образом, использование геометрической оптики позволяет определить угол прихода сигнала и проходимое лучами расстояние. Направление прихода центрального луча из точки  $(X_b, Y_b)$  в точку середины плоскости антенны  $(X_a, Y_a)$  и расстояние, проходимое центральным лучом, определяются из геометрических соображений. Аналогично для лучей, смежных с центральным, направление прихода и расстояние - также определяются из геометрических соображений в полярной системе координат, связанной с точкой (Ха, Уа), протяженностью антенны и углом ориентации плоскости антенны относительно направления на Север.

При наличии препятствия отражение луча излучаемого сигнала определяется от всех точек препятствия. Определение координат точек отражения от препятствия, направление прихода отраженного сигнала на плоскость антенны и пройденное отраженным лучом расстояние - определяются из геометрических соображений. На основе расстояний, пройденных отраженными лучами, определяются затухания сигнала каждого луча, пеленг и погрешность его определения.

Расчеты уровней сигналов, в том числе отраженных, позволили уточнить дальности обнаружения излучателя, и с учетом уточнений - определить целесообразное положение подвижного приемника относительно предполагаемой трассы движения малоразмерного робототехнического комплекса, при котором затенения и переотражения минимальны. Таким образом, при определении положения места размещения приемника в выделенных областях оцениваются положение зон тени, которые должны быть, по возможности, исключены из планируемого маршрута движения приемника. Кроме того, по результатам анализа положения зон многолучевости и переотражения выбирается маршрут движения приемника с минимизацией размеров таких зон.

#### IV. Обработка принятого сигнала

При определении пеленга на этапе обработки сигнала учитываются сигналы, принятые с антенн, плоскости которых ориентированы под различными углами относительно направления на Север. Пусть принимаемая мощность сигнала в направлении  $\theta$  будет равна  $P(\theta)$ , где угол θ в радианах измеряется от направления прихода основного наиболее мощного сигнала. Полагая

$$P_0 = \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta) d\theta$$
, определим пеленг [5]:

 $\overline{\theta} = \frac{1}{P_0} \int_{-\pi}^{\pi} \Theta P(\theta) d\theta$ , а среднеквадратичный угловой раз-брос  $\sigma_{\theta}$  направления прихода:  $\sigma_{\theta} = \sqrt{\frac{1}{P_0}} \int_{-\pi}^{\pi} (\theta - \overline{\theta})^2 P(\theta) d\theta$  с условием, что все инте-

гралы оцениваются для значений выше минимального уровня шума при измерении [5].

Для уменьшения погрешности определения пеленга, вызванного многолучевостью, затенением и переотражением, в разработанном методе предложено использование фильтра Калмана. Для этого задаются модель изменения пеленга на робототехнический комплекс с учетом погрешности моделирования и модель измерений с учетом погрешности измерений.

Изменение пеленга:  $q_{k+1} = q_k + u_k + \xi_k$ , где  $q_k$  – значение пеленга по результатам моделирования, изменялось с течением времени по мере движения излучателя; uk управляющая функция изменения пеленга qk определялась выражением:  $u_k = q_{k+1} - q_k$ ;  $\xi_k$  – ошибка модели;  $\sigma_{\xi}^2$  – ее дисперсия. В качестве значения измерения использовалось  $\overline{\theta}_k$ , в качестве дисперсии – значение  $\sigma_{\theta}^2$ .

Оптимальное значение пеленга после фильтрации определялось выражением [6]:

$$q_{k+1}^{opt} = K_{k+1} \cdot \bar{\theta}_{k+1} + (1 - K_{k+1}) \cdot (q_k^{opt} + u_k),$$

 $K_{k+1}$  — коэффициент Калмана: усиления  $K_{k+1} \frac{Ee_k^2 + \sigma_\xi^2}{Ee_k^2 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\theta^2}$ , здесь  $Ee_k^2$  – среднее значение квад-

рата ошибки  $e_k$ ;  $e_k = q_k - q_k^{opt}$ .

Для проведения численных экспериментов, направленных на тестирование предложенного метода, разработана имитационная модель приема сигналов от подвижного робототехнического комплекса. Имитационная модель включала в себя модель движения робототехнического комплекса [7], модель движения приемника и описанные выше алгоритмы оценки затухания сигнала, уравнения геометрической оптики, оценки пеленга на робототехнический комплекс, фильтр Калмана для уменьшения ошибки определения пеленга и эффективной работы [8] подвижного приемника. Результаты исследований приведены на рисунке 3.



Рис. 4. Результаты определения пеленга

На рисунке 3 по горизонтальной оси отложено время в тактах имитации, по вертикальной – изменение пеленга с течением времени. Точечная линия zk отражает результаты измерений, пунктирная (mod) – истинный пеленг на излучатель, сплошная линия xOptk - результат обработки измерений с применением фильтра Калмана. Из результатов, представленных на рисунке 3, видно, что на начальном этапе наблюдается расхождение истинного и измеренного значений пеленга из-за выбора пеленга по лучу сигнала с максимальным уровнем, не совпадающем с направлением в середину антенны. К 22 такту начинается затенение препятствием, вследствие чего часть лучей не доходит до приемника, и в результате пеленг вместо 80° был определен равным 70°. Однако использование фильтра Калмана позволяет уменьшить эту неточность, и изменение пеленга остается плавным. На 27 такте начинается переотражение сигнала, в результате чего по наиболее сильному сигналу пеленг долгое время принимается ошибочно равным 2° вместо 10°. Применение фильтра Калмана позволяет наблюдать плавное изменение пеленга с постепенным уменьшением ошибки определения пеленга от 10° до десятых долей градуса.

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена пеленгация движущегося РТК в сложных условиях препятствий, многолучевости, переотражения, зон тени. Разработан метод уточнения пеленга на излучатель, включающий в себя определение зон устойчивого приема сигнала от излучателя и алгоритмы обработки принятого сигнала. Определение зон устойчивого приема сигнала от излучателя включало в себя оценку затухания сигнала, выявление зон тени, уровень сигнала при переотражении. Алгоритм обработки принятого сигнала включал в себя определение пеленга на излучатель и оценку погрешности его определения. Для уменьшения погрешности определения предложено использовать фильтр Калмана. Для получения количественных оценок разработана имитационная модель определения пеленга подвижным приемником на движущийся РТК в сложных условиях препятствий, многолучевости, переотражения, зон тени. По результатам численных экспериментов, направленных на тестирование описанных алгоритмов, получены результаты, продемонстрировавшие преимущество от использования фильтра Калмана, благодаря которому удалось получить гладкие оценки пеленга, несмотря на зону тени и многолучевость, и, тем самым, сократить ошибку определения пеленга от 10° до десятых долей градуса.

Предложенный в работе метод пеленгации малоразмерного робототехнического комплекса подвижным наблюдателем в условиях сложного рельефа может быть использован как для пеленгации воздушных РТК – беспилотных воздушных судов, так и в морской среде при пеленгации автономных необитаемых подводных аппаратов.

#### Литература

- Martynova L.A., Koryakin A.V., Lantsov K.V., Lantsov V.V. Determination of coordinates and parameters of a moving object by image processing // Computer Optics. 2012. T. 36. № 2. – C. 266-273.
- [2] Сундучков К. С., Мальчук М А., Кобзарь Л.С. Методика определения оптимальной топологии сети GSM для городского микрорайона. [Электронный ресурс]. URL: https://pandia.ru/text/77/132/891.php. (дата обращения 03.11.2022).
- [3] Урик Роберт Дж. Основы гидроакустики / Пер.с англ. –Л.: Судостроение, 1978. – 448 с.
- [4] Мартынова Л.А., Безрук Г.Г., Мысливый А.А. Исследование возможности применения дифференциального режима уточнения местоположения АНПА под водой // Информационноуправляющие системы. №4. 2018. – С. 15-23.
- [5] Ермолаев, В.Т. Гауссовская модель многолучевого канала связи в городских условиях. / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, И.М. Аверин // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. - Серия «Радиофизика». - 2004. - Вып. 2. - С. 127-137.
- [6] Степанов О.А. Фильтр Калмана: история и современность (к 80летию Рудольфа Калмана) // Гироскопия и навигация. 2010. № 2 (69). С. 107-121.
- [7] Мартынова Л.А., Машошин А.И., Пашкевич И.В., Соколов А.И. Алгоритмы, реализуемые интегрированной системой управления АНПА // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. № 1 (162). – С. 50-58.
- [8] Мартынова Л.А., Машошин А.И. Особенности оценки эффективности функционирования автономных необитаемых подводных аппаратов в нештатных ситуациях // Экстремальная робототехника. – 2016. – Т. 1. – № 1. – С. 86-91.

## Особенности работы системы предупреждения столкновений воздушных судов при относительной навигации

В.И. Бабуров *АО «Навигатор* Санкт-Петербург, Россия info@navigat.ru Н.В. Иванцевич *АО «Навигатор* Санкт-Петербург, Россия info@navigat.ru, *БГТУ «ВОЕНМЕХ»* Санкт-Петербург, Россия sciencebstu@spb.su

Аннотация—Приводится описание работы системы предупреждения столкновений воздушных судов; представлены результаты исследования работы алгоритмов предупреждения столкновений; сформулированы предложения по проведению полётов в рамках лётных проверок.

Ключевые слова—алгоритмы, предупреждение столкновений, полет, нейронная сеть.

#### I. Введение

Система предупреждения столкновений с воздушными судами предназначена для повышения безопасности полетов путем предотвращения риска столкновения с другими воздушными судами в воздухе, предупреждения о близости земли, реактивном сдвиге ветра, улучшения ситуационной осведомленности экипажа о воздушной обстановке, а также при посадке и движении по поверхности земли аэропорта. Оборудование представляет собой сложную интегрированную систему, входящую в состав навигационного радиотехнического оборудования воздушного судна. Принцип действия системы в части предупреждения столкновений в воздухе заключается в периодической выдаче импульсов запроса, на которые ожидается получить ответы от других близко пролетающих воздушных судов. Полученная информация позволяет построить модель окружающей воздушной обстановки с оценкой степени опасности окружающих воздушных объектов с оповещением экипажа о потенциально опасной воздушной ситуации [1]. Внешний вид поставочного комплекта системы предупреждения столкновений представлен на рис. 1.



Рис. 1. Комплект системы предупреждения столкновений

В.В. Худошин *АО «Навигатор* Санкт-Петербург, Россия info@navigat.ru

#### II. Описание базового алгоритма

Общая структура базового алгоритма представлена на рис. 2 [2].



Рис. 2. Базовый алгоритм предупреждения столкновения.

Базовый алгоритм включает в себя следующие модули:

Модуль слежения, который принимает параметры движения (расстояние, высота и пеленг) от близко пролетающих воздушных судов, передаваемые из подсистемы наблюдения, и отслеживает маршрут движения этих воздушных судов. Информация о треке совместно с информацией о параметрах движения собственного воздушного судна позволяет определить время и высоту полёта до момента наибольшего сближения воздушных судов. Выходная информация (дальность, скорость сближения, относительная высота и вертикальная скорость) является входными данными для модулей формирования рекомендации и определения угрозы для последующего анализа необходимости выдачи сообщения: ТА - оповещение экипажа о возникновении опасного сближения, RA – рекомендация экипажу на совершение манёвра в вертикальной плоскости;

- Модуль формирования рекомендации, используя информацию о треках близко пролетающих воздушных судов, проводит анализ на выполнение условий по формированию сообщения ТА по дальности и высоте;
- Модуль анализа по расстоянию, служит для определения степени угрозы близко пролетающего воздушного судна исходя из расстояния до него. В зависимости от высоты полёта воздушных судов, в соответствии с нормативными документами защитный интервал вокруг собственного воздушного судна определяется для сообщений TA и RA;
- Модуль анализа по высоте, служит для определения степени угрозы близко пролетающего воздушного судна исходя из относительной высоты.
   В зависимости от высоты полёта воздушных судов, в соответствии с нормативными документами защитный интервал вокруг собственного воздушного судна определяется для сообщений ТА и RA;
- Модуль определения угрозы, используя информацию о треках близко пролетающих воздушных судов, проводит анализ на выполнение условий по формированию рекомендации на манёвр RA по дальности и высоте;
- Модуль горизонтальной фильтрации, служит для снижения частоты формирования рекомендаций на манёвр, при условии гарантированно большого расстояния в горизонтальной плоскости в момент наибольшего сближения. Работает совместно с модулем анализа по расстоянию;
- Модуль координационного сообщения, работает при воздушном конфликте воздушных судов, на которых установлены системы предупреждения столкновения с воздушными судами. В этом случае при определении возможного манёвра каждым из воздушных судов происходит обмен этой информацией между ними. На основании полученной информации модуль корректирует сформированную рекомендацию в части дополнения к полученной;
- Модуль выбора тенденции движения, служит для определения рекомендации на совершение манёвра в части выбора между снижением или набором высоты. На основе трека близко пролетающего воздушного судна проводится оценка последующей траектории полета воздушного судна, вплоть до момента наибольшего сближения, и определяется, какой манёвр в вертикальной плоскости обеспечит наибольшую относительную высоту между объектами в момент наибольшего сближения. Иллюстрация выбора тенденции представлена на рис. 3;
- Модуль выбора степени усиления рекомендации, служит для определения степени ограничения на вертикальную скорость для набора или снижения собственного воздушного судна с целью определения необходимого и достаточного

значения. Это позволит провести манёвр с минимально допустимым отклонением от текущего маршрута движения. Иллюстрация представлена на рис. 4;

 Модуль выдачи сообщения, принимает сформированное сообщение во внутреннем представлении, проводит форматирование согласно спецификации информационного взаимодействия, принятого как стандарт.



Рис. 3. Пример выбора тенденции движения манёвра



Рис. 4. Пример выбора степени усиления манёвра

Моментом наибольшего сближения является момент времени, в который расстояние между собственным воздушным судном и другим воздушным судном достигает минимального значения. Расстояние в этот момент является наименьшим расстоянием между двумя воздушными судами, а время наибольшего сближения представляет собой данный момент [3].

#### III. Описание модернизированного алгоритма

Общая структура модернизированного алгоритма представлена на рис. 5.

Модернизация алгоритма основана на выполнении дополнительных вычислений во время движения воздушных судов при относительной навигации. Дополнительные вычисления позволяют уточнить сформированную рекомендацию в приведенной на рис. 6 воздушной обстановке. Уточнённое сообщение позволяет уменьшить количество нежелательных рекомендаций на манёвр в данной ситуации. Основой вычислений является обученная нейронная сеть, на вход которой подаётся информация о взаимном положении воздушных судов и базовой рекомендации. В результате работы нейронной сети рассчитывается в процентном соотношении необходимость уточнённой рекомендации [4].



Рис. 5. Модернизированный алгоритм предупреждения столкновения

Модернизированный алгоритм включает в себя следующие модули:

- Модуль определения степени уточнения рекомендации, принимает параметры движения (расстояние, высота и пеленг) от близко пролетающих воздушных судов, передаваемые из подсистемы наблюдения, данные о движении собственного воздушного судна и информацию, по сформированному сообщению, базовым алгоритмом предупреждения столкновения. Принимается решение о необходимости уточнения сформированных сообщений ТА и RA;
- Модуль формирования уточнённой рекомендации, используя информацию модуля определения степени уточнения, проводит формирование уточнённой рекомендации. Основные параметры нейронной сети приведены на рис. 7;
- Модуль выдачи уточнённого сообщения, принимая на вход сформированное уточнённое сообщение во внутреннем представлении, проводит форматирование согласно протокола информационного взаимодействия с комплексом бортового оборудования, сопрягаемого с системой предупреждения столкновения.



Рис. 6. Схема воздушной обстановки при относительной навигации вид сверху (а) и вид сбоку (б)



Рис. 7. Основные параметры нейронной сети

#### IV. Лётная оценка и стендовые проверки

В рамках лётных проверок модернизированного комплекса бортового оборудования воздушного судна были проведены проверки работоспособности системы предупреждения столкновения с воздушными судами. В том числе были проведены полёты воздушных судов при относительной навигации. План маршрутов движения воздушных судов был разработан с учётом проверки срабатывания системы при встречном движении и движении в одном направлении двух близко пролетающих воздушных судов. Во время полётов проводился мониторинг с использованием сторонних средств наблюдения за воздушной обстановкой на базе автоматического зависимого наблюдения вещательного типа и программного инструментария. Внешний вид трека слежения с помощью FlightRadar24 приведён на рис. 8. В процессе рассматриваемого полёта воздушных судов при относительной навигации с опасными сближениями система предупреждения столкновения с другим воздушным судном сформировала сообщения TA и RA, приведённые в таб. 1.



Рис. 8. Маршрут полёта

Этяп	Сообщение			
полёта	Время, час:мин:сек	Наименование		
	4:16:40	ВНИМАНИЕ, КОНФЛИКТ		
	4:17:08	КОНТРОЛИРУЙ ВЕРТИКАЛЬНУЮ СКОРОСТЬ		
V	4:17:41	КОНФЛИКТ УСТРАНЁН		
IPAE	4:17:44	ВНИМАНИЕ, КОНФЛИКТ		
CI	4:17:59	СНИЖАЙСЯ		
	4:18:10	КОНФЛИКТ УСТРАНЁН		
	4:20:12	УВЕЛИЧЬ ВЕРТИКАЛЬНУЮ СНИЖЕНИЯ		
	4:20:57	КОНФЛИКТ УСТРАНЁН		
	4:21:03	СНИЖАЙСЯ		
CJIEBA	4:21:12	ПРЕКРАТИ СНИЖЕНИЕ, НАБИРАЙ		
	4:22:08	ВЫСОТУ НАБИРАЙ, С ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ		
	4:22:38	ВЫСОТУ НАБИРАЙ		
	4:22:41	КОНФЛИКТ УСТРАНЁН		

ТАБЛИЦА 1. СООБЩЕНИЯ ТА И RA

Проведённый полёт воздушных судов соответствует схеме воздушной обстановки, приведённой на рис. 6, и представляет собой полёт воздушных судов в одном направлении в одном или двух соседних эшелонах с разницей высот менее 180 метров и горизонтальным расстоянием менее 500 метров.

Зафиксированные в полёте сообщения ТА и RA для наглядности были наложены по времени формирования на треки воздушных судов. На рис. 9 при движении другого воздушного судна справа и на рис. 10 при движении другого воздушного судна слева графическими фигурами показаны срабатывания системы. Жёлтый круг означает, что было сформировано сообщение ТА, красный квадрат – сформирована рекомендация на манёвр RA, белый круг соответствует информации по успешному разрешению опасного сближения.



Рис. 9. Движение другого воздушного судна справа



Рис. 10. Движение другого воздушного судна слева

Проведённый полёт показал слабые места базового алгоритма предупреждения столкновения при относительной навигации: близкое местоположение воздушных судов приводит к постоянному формированию сообщений для экипажа различных типов, сменяющих друг друга. Это может привести к дополнительной нагрузке на экипаж воздушных судов. При этом использование сокращённого режима работы системы выдачи только сообщений TA в рассмотренной ситуации подавит желательные рекомендации на манёвр.

Полученная информация по результатам совершённых полётов позволила сформировать новый обучающий набор для дополнительного обучения нейронной сети модернизированного алгоритма.

#### V. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

По результатам лётных проверок системы предупреждения столкновения с воздушными судами с реализованным базовым алгоритмом экспериментально подтверждено, что при полете двух близко пролетающих воздушных судов в одном направлении при малых относительных высотах формируется значительное количество рекомендаций на манёвр, причём часто сменяющихся рекомендаций, на что влияет постоянно меняющееся взаимное расположение воздушных судов как в горизонтальной, так и вертикальной плоскостях. При моделировании работы модернизированного алгоритма предупреждения столкновения наблюдалось меньшее количество сформированных нежелательных сообщений. В результате проведённых проверок разрабатывается новое исполнение программного обеспечения системы предупреждения столкновения с воздушными судами, которое формирует дополнительный поток уточнённых рекомендаций, выдаваемых на внешний регистратор. Последующие проверки на лабораторном стенде [5] и планируемый контрольный полёт при относительной навигации нескольких воздушных судов, согласно схемы воздушной обстановки, представленной на рис. 6, позволит проверить его работу с целью дальнейшего анализа:

- определить пути повышения качества работы нейронной сети;
- оценить влияние точности информации от датчиков воздушного судна на работу нейронной сети;
- сформулировать дополнительные критерии условий работы нейронной сети на расширенный набор ситуаций.

#### Литература

- [1] RTCA DO-185B. MOPS for Traffic Alert and Collision Avoidance System II (TCAS II). Вашингтон: RTCA, 2008. 548 с.
- [2] FAA. Introduction to TCAS II, version 7.1. Вашингтон: FAA, 2011. 50 с.
- [3] ИКАО. Doc9863 Руководство по бортовой системе предупреждения столкновений. Монреаль: ИКАО, 2006. 245 с.
- [4] Худошин, В.В. Применение нейронной сети для модернизации алгоритма предупреждения столкновений при полёте близлежащих воздушных судов в одном направлении. // Региональная информатика и информационная безопасность. Сборник трудов. Выпуск 8. СПб.: СПОИСУ, 2020. С. 298–301.
- [5] Бабуров В.И., Бойко В.А., Иванцевич Н.В., Фидлин И.Л., Худошин В. В. Полунатурный моделирующий комплекс проверки и отладки алгоритмов работы системы предупреждения столкновений с воздушными судами и наблюдения за воздушной обстановкой. // XXIX Санкт-Петербургская МКИНС. Сборник материалов. СПб.: Электроприбор, 2022. С. 66-68.

## Оценивание системы раннего предупреждения близости земли в летных испытаниях

И.А. Копылов АО «Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова» Жуковский, Россия e-mail nio9@lii.ru

А.Ф. Якушев АО «Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова» Жуковский, Россия e-mail nio9@lii.ru Е.Г. Харин АО «Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова» Жуковский, Россия e-mail nio9@lii.ru

Л.Л. Ловицкий АО «Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова» Жуковский, Россия e-mail nio9@lii.ru В.А. Копелович АО «Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова» Жуковский, Россия e-mail nio9@lii.ru

Э.Р. Степанова АО «Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова» Жуковский, Россия e-mail nio9@lii.ru

Аннотация-В докладе изложены методы летных испытаний систем раннего предупреждения близости земли (СРПБЗ) летательных аппаратов. Методы разработаны на основе комплекса бортовых траекторных измерений с использованием программно-математического обеспечения (ПМО) обработки и анализа материалов летных испытаний АО «ЛИИ им. М.М. Громова». Рассмотрены методы и ПМО моделирования и стендовых исследований методик летных испытаний и оценки систем раннего предупреждения близости земли и качества управления при избегании столкновения с землей. Приведены результаты летных испытаний современной СРПБЗ для основных режимов работы. Полученные результаты могут быть рекомендованы для использования при разработке методик летных испытаний СРПБЗ воздушных судов.

Ключевые слова—предупреждение близости земли, комплекс бортовых траекторных измерений, методы оценивания, летные испытания, карта рельефа местности, пилотажно-навигационное оборудование.

#### I. Введение

По данным статистики столкновение с земной поверхностью (Controlled Flight into Terrain, CFIT) во время управляемого полета воздушных судов доминирует среди факторов, которые привели к наиболее тяжелым катастрофам. Чтобы уменьшить вероятность катастроф категории CFIT в большинстве стран с 70-х годов XX века стали устанавливать системы, предупреждающие о возможности такого события. Когда в середине 70-х годов с целью повышения безопасности полёта на самолеты стали устанавливать систему предупреждения о близости земли, количество CFIT резко сократилось [1].

Были созданы такие системы предотвращения столкновения самолета с поверхностью земли как:

- система сигнализации сближения с опасной скоростью (ССОС), разработанная в 1976 г.;
- Ground proximity warning system (GPWS) в 1974 г.;
- система предупреждения приближения земли (СППЗ) – в 1990 г. [2].

Современные достижения в технологии цифровой обработки картографических данных, а также появле-

ние на борту практически каждого самолета приемников спутниковой навигационной системы привели к разработке нового типа СРПБЗ. За рубежом системы с этой функцией обозначаются как EGPWS (Enhanced Ground Proximity Warning System) – усовершенствованные системы предупреждения приближения земли.

СРПБЗ – это система оповещения о рельефе местности, обеспечивающая функции отображения с дополнительными возможностями. СРПБЗ использует данные самолета, включая географические координаты, углы ориентации, курс, высоту, скорость, вертикальную скорость и отклонение от глиссады. Система использует базу данных для прогнозирования потенциального конфликта между траекторией полета самолета и рельефом местности или препятствием. Предупреждение осуществляется путём выдачи голосовой и визуальной сигнализации, а также графической информацией о характере подстилающей поверхности и искусственных препятствиях на экранном индикаторе.

С 1 января 2003 года, международная организация гражданской авиации ИКАО ввела требование об обязательном наличии системы предупреждения приближения к земле на всех самолётах с турбинными двигателями с максимальной разрешённой взлётной массой более 15 т.

#### II. АРХИТЕКТУРА СИСТЕМЫ РАННЕГО ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ БЛИЗОСТИ ЗЕМЛИ

С технической точки зрения раннее предупреждение осуществляется путем вывода на экран дополнительно устанавливаемого в кабине пилотов устройства отображения данных о высоте профиля местности, над которой пролетает самолет. Высотный профиль при этом вводится в вычислитель в виде базы данных, созданной на основе электронной карты местности. Таким образом, к традиционному высотомеру добавляется предупреждающая поправка по высоте.

Модуль предупреждения столкновений с землей обеспечивает полный прогноз для сигналов тревоги и предупреждения, чтобы предотвратить катастрофическое столкновение с землей исправного самолета в управляемом полете, а также все режимы обычной системы предупреждения столкновений с землей.

Целью СРПБЗ является обеспечение летного экипажа своевременной информацией о потенциальной опасности в направлении маршруга полета, которая может привести к столкновению с землей. Система формирует сигнал тревоги приближения к земле, предупреждение о необходимости набора высоты или предупреждение о необходимости обхода в зависимости от положения самолета относительно земли. СРПБЗ принимает во внимание специфические ситуации, когда самолет маневрирует в соответствии с одобренными процедурами на высотах значительно ниже окружающих местных высот рельефа (например, заходы в долинах с крутыми склонами). Датчик прогноза тревоги срабатывает с учетом реальных характеристик самолета. Задача конструкторов системы минимизация подачи ложной тревоги и повышение доверия экипажа к системе, поскольку формируемые сигналы тревоги представляют реальную опасность.

При летных испытаниях СРПБЗ регистрация информации бортовых систем пилотажно-навигационного оборудования и информации, выдаваемой СРПБЗ, осуществляется системой бортовых измерений, в состав которой входят бортовой регистратор и комплекс бортовых траекторных измерений [5].

Структура системы раннего предупреждения близости земли и система бортовых измерений при летных испытаниях приведена на рис. 1.



Рис. 1. Структура СРПБЗ и система бортовых измерений при летных испытаниях.

СПУ – самолётное переговорное устройство;

СГУ – самолётное громкоговорящее устройство;

ВС - воздушное судно

Система раннего предупреждения близости земли выполняет следующие действия:

- обрабатывает входные сигналы от систем самолета;
- устанавливает соотношения между местоположением самолета и базами данных рельефа и аэропортов;
- оценивает опасность столкновения с землей в направлении траектории полета самолета;
- определяет прогнозируемую огибающую набора высоты для предотвращения столкновения;

 формирует соответствующие голосовые и визуальные сигналы тревоги и предупреждения летному экипажу.

#### III. РЕЖИМЫ РАБОТЫ СРПБЗ

В зависимости от условий и текущих значений параметров выполнения полета система раннего предупреждения близости земли определяет наличие одного из заложенных в нее режимов и выдает соответствующую индикацию и сигнализацию экипажу.

Для СРПБЗ, установленной на борту самолета, предусмотрены следующие режимы:

- 1 Чрезмерная скорость снижения.
- 2 Чрезмерная скорость сближения с земной поверхностью.
- 3 Чрезмерная потеря высоты при выполнении взлета или ухода на второй круг.
- 4 Недостаточный запас высоты над подстилающей поверхностью при полете в непосадочной конфигурации.
- 5 Чрезмерное отклонение ниже глиссады при заходе на посадку.
- 6 Неверная установка признака QNH/QFE в зоне аэродрома.
- 7 Оценка рельефа местности в направлении полета.
- 8 Преждевременное снижение.
- 9 Сигнализация о прохождении характерных высот при заходе на посадку.
- 10 Предупреждение о сдвиге ветра.

При проведении летных испытаний необходимо удостовериться в правильности работы СРПБЗ в различных режимах ее работы. В летных испытаниях создают специальные условия полета, в которых система должна сигнализировать экипажу, и оценивают функционирование системы и своевременность ее срабатывания.

> IV. ОЦЕНКА РАБОТЫ СИСТЕМЫ РАННЕГО ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ БЛИЗОСТИ ЗЕМЛИ

Анализ работы системы раннего предупреждения близости земли включает в себя:

- анализ информации о всех включениях/выключениях сигнализации системы (номер сработавшего режима, дата, время, координаты, высоты, скорости, состояние шасси, закрылков и другая информация);
- анализ положения точек сигнализации на фоне границ сигнализации всех режимов системы с индикацией траектории выбранного участка движения воздушного судна в осях режима сигнализации;
- оценка области сигнализации режима раннего предупреждения в момент включения/выключения сигнализации в плане и в профиль;
- просмотр траектории полета ВС на фоне топографической карты и карты рельефа местности.

Для оценки функционирования СРПБЗ системами бортовых измерений регистрируются не только данные от СРПБЗ, но и вся информация от сопряженных с ней бортовых систем.

#### V. МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ЛЕТНЫХ ИСПЫТАНИЙ СРПБЗ

Общие положения по испытаниям СРПБЗ. Перед проведением летных испытаний по оценке функционирования СРПБЗ в различных режимах составляются методические указания. Один из разделов методических указаний содержит перечисление мер безопасности, которые необходимо соблюдать при выполнении полетов. Режимы, задаваемые при испытаниях. должны быть отработаны летным составом до начала летных испытаний на стендах или тренажерах. Испытательные полеты должны проводиться в дневное время, в условиях выполнения визуальных полетов. Перед каждым испытательным полетом должен быть выполнен предполетный разбор с рассмотрением всех планируемых маневров, ознакомлением с топографией географических областей - мест проведения испытательного полета. База данных о рельефе местности, заложенная в систему, должна быть актуальной. Имитации отказов других систем не допускается.

Цель летных испытаний заключается в оценке правильного выполнения системой выдачи предупреждений о близости земли, оценке эффективности предупреждений при всех условиях полета самолета. Для получения достоверных результатов летных испытаний особое внимание уделяется выдерживанию режима полета, наблюдению соответствующей информации на индикаторах и сигнализаторах при возникновении предупреждающих и аварийных тревожных сигналов.

При проведении летных испытаний СРПБЗ большое внимание уделяется эргономической оценке летного состава. Оценка сигнализации проводится для каждого предусмотренного в системе режима. После выполнения полета экипаж отвечает на вопросы специально разработанной анкеты по оценке эффективности индикации и сигнализации СРПБЗ.

Регистрируемые параметры. В испытательных полетах по оцениванию режимов срабатывания СРПБЗ необходимо производить регистрацию информации следующих бортовых систем:

- приемника спутниковой навигации (СНС);
- радиовысотомера;
- системы воздушных сигналов (CBC);
- инструментальной системы посадки;
- инерциальной навигационной системы;
- вычислительной системы самолетовождения;
- системы раннего предупреждения близости земли СРПБЗ.

Если в качестве системы регистрации применяется комплекс бортовых траекторных измерений (КБТИ), то одновременно он производит регистрацию информации встроенного в него приемника спутниковой навигационной системы для формирования траекторных параметров в послеполетной обработке материалов летных испытаний [5, 10].

Выходной сигнал СРПБЗ содержит набор слов состояния. При выходе на режим система соответствующим образом изменяет их содержимое. По изменению слов состояния СРПБЗ можно определить, какие световые и звуковые сигналы подает система. Регистрация параметров в КБТИ производится с частотой 8 Гц.

Анализ работы СРПБЗ осуществляется в послеполетной обработке. Нахождение в параметрических областях, где согласно требованиям должно происходить срабатывание сигнализации системы, определяется по траекторным параметрам воздушного судна, сформированным по данным КБТИ и информации бортовых систем.

Программно-математическое обеспечение обработки и анализа материалов летных испытаний СРПБЗ. Зарегистрированная в процессе летных испытаний информация СРПБЗ обрабатывается и анализируется на базе локальных вычислительных сетей с помощью универсального программно-математического обеспечения. В АО «ЛИИ им. М.М. Громова» разработан и внедрен в практику испытаний ряд крупных программных комплексов (ПК) в том числе таких, как ПК «Анализ», предназначенный для комплексного анализа материалов летных и стендовых испытаний систем пилотажно-навигационного оборудования, оценки точностных и статистических характеристик [7], обработрезультатов испытаний систем пилотажноки навигационного оборудования [5, 6, 8, 9].

Стендово-моделирующий комплекс самолетовождения и посадки [10] предназначен для отработки задач: пилотирования при посадке в сложных метеоусловиях; проектирования и отработки систем индикации и управления; тренировок и подготовки летного состава и руководителей полетов; эргономических исследований.

При сопровождающем моделировании по реальной информации, зарегистрированной в полете на КБТИ, осуществляется воспроизведение полета в виртуальной визуальной среде, которая реализована в имитаторе кабины испытываемого ВС. Совместно с летным составом анализируется качество пространственного движения ВС, оценивается состав и полнота индикации на многофункциональных пилотажнонавигационных индикаторах. Выполняется разбор выполненного полета и подготавливается полетное задание следующего летного эксперимента [11].

Все эти ПК прошли метрологическую аттестацию и широко используются в практике летных испытаний гражданских ВС.

#### VI. РЕЗУЛЬТАТЫ ЛЕТНЫХ ИСПЫТАНИЙ СИСТЕМЫ РАННЕГО ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ БЛИЗОСТИ ЗЕМЛИ

В летных испытаниях создаются условия, в которых параметры полета ВС оказываются в зоне срабатывания СРПБЗ для каждого из предусмотренных режимов системы. Приведем материалы летных испытаний СРПБЗ, установленной на одном из транспортных самолетов.

**Режим 1. Чрезмерная скорость снижения.** Режим активируется автоматически после взлета самолета на высоту 30 метров и продолжает быть активным в течение всего полета. При попадании самолета в критические зоны подает световые и речевые предупреждающие сигналы: «Опасный спуск» или «Тяни вверх» (рис. 2).



Рис. 2. Схема областей предупреждения СРПБЗ в режиме 1

Области, в которых должна срабатывать СРПБЗ в режиме 1, задаются на плоскости значений параметров:  $H_{\rm r}$  – геометрическая высота полета, измеряемая радиовысотомером, и  $V_h$  – вертикальная скорость снижения.

На рис. 3 приведены результаты летных испытаний самолета, в которых происходило срабатывание СРПБЗ в режиме 1. Траектория полета изображена в виде кривой  $H_r(-V_h)$ . Показаны область предупреждения, где система должна подавать речевое сообщение «Опасный спуск», и область тревоги, в которой должно звучать речевое сообщение «Тяни вверх». Значения вертикальной скорости  $V_h$  положительны, когда самолет набирает высоту. Для удобства восприятия по оси абсцисс на рис. 3 отложены значения «минус»  $V_h$ , скорость снижения при этом становится положительной.



Рис. 3. Участок траектории полета со срабатыванием СРПБЗ в режиме 1

На траектории полета маркером обозначены места срабатывания системы. Представленные материалы летных испытаний свидетельствуют, что СРПБЗ в режиме 1 срабатывает правильно.

Режим 2. Чрезмерная скорость сближения с земной поверхностью. Режим 2 автоматически активиру-

ется после взлета самолета на высоту 30 метров и продолжает быть активным на протяжении всего полета. Выделяются две критические зоны предупреждения, при попадании в которые текущих значений параметров полета система подает световые и речевые предупреждающие сигналы: «Земля, земля» или «Тяни вверх» (рис. 4).



Рис. 4. Схема областей предупреждения СРПБЗ в режиме 2

Система начинает сигнализировать в режиме 2 при значительной скорости сближения с подстилающей поверхностью. Скорость сближения рассчитывается по показаниям радиовысотомера. Для предотвращения ложных сигнализаций производится фильтрация вычисленного параметра. Для формирования сигнализации не обязательно, чтобы самолет снижался. В режиме 2 СРПБЗ должна подавать сигналы даже в горизонтальном полете, если увеличивается высота подстилающей поверхности.

На рис. 5 цветом показана область возникновения сигнализации в режиме 2 в случае, когда закрылки находятся не в посадочной конфигурации.



Рис. 5. Участок траектории полета со срабатыванием СРПБЗ в режиме 2

На горизонтальной оси отложены значения скорости сближения с подстилающей поверхностью. Значения скорости сближения положительны, когда расстояние между самолетом и подстилающей поверхностью уменьшается. На вертикальной оси нанесены значения высоты радиовысотомера. Область сигнализации разделена на два участка. В верхнем из них происходит сигнализация, если путевая скорость самолета превышает установленное значение (570 км/ч). На рис. 5 изображена траектория движения самолета, полученная по материалам летных испытаний в послеполетной обработке, в плоскости значений указанных выше параметров. Скорость изменения геометрической высоты *Dh*, отличающаяся знаком от скорости сближения с подстилающей поверхностью, вычислялась по данным радиовысотомера, зарегистрированным КБТИ, с помощью следующего соотношения:

$$Dh_i = k_h Dh_{i-1} + (1 - k_h) \cdot (H_i - H_{i-1}) / (T_i - T_{i-1}).$$

Здесь  $Dh_i$  и  $Dh_{i-1}$  – значения скорости изменения геометрической высоты в соседние моменты времени  $T_i$  и  $T_{i-1}$  соответственно;  $H_i$  и  $H_{i-1}$  – показания радиовысотомера в соответствующие индексу моментам времени;  $k_h$  – коэффициент фильтрации, значение которого при обработке материалов летных испытаний было выбрано 0,9. Регистрация геометрической высоты радиовысотомера производилась с частотой 8 Гц, поэтому разность  $\Delta T_i = T_i - T_{i-1}$  равна 0,125 с.

Синим цветом на рис. 5 обозначены участки траектории без сигнализации; зеленый цвет соответствует моментам, когда зажигалась сигнализация в режиме 2 и подавался речевой сигнал «Земля, земля»; на участках, выделенных красным цветом, звучал речевой сигнал «Тяни вверх». Сигнализация в режиме 2 на изображенной траектории возникла, когда при скорости сближения с подстилающей поверхностью 25 м/с высота по данным радиовысотомера равнялась 390 м. Соответствующая точка находится в заданной области сигнализации. Прекращение сигнализации произошло после выхода изображающей точки из обозначенной зоны сигнализации.

Режим 3. Чрезмерная потеря высоты при выполнении взлета или ухода на второй круг. Режим 3 активен на этапах взлета и ухода на второй круг. Если при наборе высоты после взлета показания радиовысотомера начинают уменьшаться, то система должна подавать речевой сигнал «Не снижайся» (рис. 6).



Рис. 6. Схема областей предупреждения СРПБЗ в режиме 3

Высота радиовысотомера, на которой должно произойти срабатывание системы, зависит от достигнутой при взлете максимальной высоты.

На рис. 7 цветом обозначена область срабатывания системы.



Рис. 7. Участки траектории полета со срабатыванием СРПБЗ в режиме 3  $% \left( {{{\bf{D}}_{{\rm{B}}}}} \right)$ 

На вертикальной оси отложены значения  $H_{\Gamma}^{m}$  – максимальной достигнутой высоты по показаниям радиовысотомера. На горизонтальной оси отложены значения –  $\Delta h$  уменьшения высоты:

$$-\Delta h = H^m - H$$

здесь *H* – текущие показания барометрической высоты.

Траектория начинает изображаться синим цветом при уменьшении показаний радиовысотомера. Точки траектории ложатся на горизонтальную линию, соответствующей максимальной достигнутой высоты  $H_{\Gamma}^{m}$  непосредственно перед началом ее уменьшения. Красным цветом рис. 7 выделены точки траектории, где система выдавала предупреждающие речевые сигналы «Не снижайся». Приведены четыре различные траектории со снижением. Все точки срабатывания системы находятся в выделенной области. Отметим, что выдача сигнализации СРПБЗ происходила не сразу после попадания траектории в выделенную цветом область.

Режим 4. Недостаточный запас высоты над подстилающей поверхностью при полете в непосадочной конфигурации. В режиме 4 формируется сигнализация, если самолет приближается к земле, не выпустив шасси (режим 4а) или закрылки (режим 4б). Если приборная скорость  $V_{\rm np}$  больше 352 км/ч, то на относительно малой высоте полета, определяемой по радиовысотомеру, должно прозвучать речевое предупреждение «Низко, земля». При скорости ниже 352 км/ч снижении ниже предопределенной высоты с убранными шасси выдается речевая сигнализация «Низко, шасси». При снижении ниже предопределенной высоты с убранными закрылками выдается речевая сигнализация «Низко, закрылки».

На рис. 8 показаны зоны срабатывания сигнализации в режимах 4а и 46 соответственно.

На оси абсцисс отложены значения приборной скорости по данным CBC, на оси ординат – высота  $H_{\rm r}$  по данным радиовысотомера.



Рис. 8 Участок траектории полета со срабатыванием СРПБЗ в режиме 4а и 4б

Участки срабатывания сигнализации на траекториях самолета выделены красным цветом. Как видно из рис. 8, срабатывание сигнализации происходило при нахождении изображающей точки траектории самолета в обозначенной зоне параметров.

Режим 5. Чрезмерное отклонение ниже глиссады при заходе на посадку. В режиме 5 сигнализация включается на этапе посадки, когда принят сигнал захвата курса и глиссады, выпущены шасси и закрылки. Речевые и световые сигналы подаются, если возникает отклонение от линии глиссады в вертикальной плоскости больше допустимого значения. В требованиях область сигнализации задана в виде зависимости величины отклонения от высоты полета. Для оценивания работы системы в режиме 5 удобнее изображать на рисунке действительную траекторию самолета в вертикальной плоскости с нанесением на нем линии глиссады и расположением области сигнализации относительно глиссады. По оси абсцисс откладываются значения D удаления от торца ВПП, по оси ординат – значения высоты радиовысотомера.

На рис. 9 показаны два захода на посадку, на которых происходила сигнализация СРПБЗ в режиме 5.



Рис. 9. Участок траектории полета со срабатыванием СРПБЗ в режиме 5

Для изображения траектории самолета использован синий цвет, участки сигнализации и речевого сообщения «Ниже глиссады» помечены красным цветом. Зеленым цветом выделена линия глиссады, и закрашены заданные области сигнализации. Сигнализация системы в режиме 5, согласно данным, полученным в испытательном полете, происходила в заданных областях.

Режим 6. Неверная установка признака **QNH/QFE в зоне аэродрома.** При полете в зоне аэродрома экипаж использует значения относительной барометрической высоты ONH (O-code Nautical Height) - нулевое значение высоты приведено к среднему уровню моря и OFE (O-code Field Elevation) – нулевое значение высоты устанавливается на уровне порога ВПП. СРПБЗ в режиме 6 должна выдавать сигнализацию «Проверь высоту», если при подлете к аэродрому экипажем выполнен переход на относительную барометрическую высоту и наблюдается недопустимое расхождение между барометрической высотой и высотой Н<sub>Г</sub> радиовысотомера. Несоответствие высот может быть вызвано, например, ошибочным вводом давления аэродрома.

На рис. 10 для примера представлена область расхождения, выделенная цветом, где по оси абсцисс отложены значения барометрической высоты  $H_{QFE}$ , а по оси ординат – высоты  $H_{\Gamma}$  радиовысотомера.



Рис. 10. Область срабатывания сигнализации СРПБЗ в режиме 6

При получении предупреждений в этом режиме СРПБЗ экипаж воздушного судна должен незамедлительно проверить правильность установки уровня атмосферного давления на аэродроме посадки, выяснить причину расхождения и принять решение о возможности выполнения посадки или уходе на второй круг.

Режим 7. Оценка рельефа местности в направлении полета. В системе СРПБЗ предусмотрен режим раннего предупреждения. В памяти системы хранится база данных с рельефом и иных препятствий на всей земной поверхности. Режим используется для проверки отсутствия элементов подстилающей поверхности в пределах предустановленного рабочего пространства, форма и размеры которого являются расчетными и зависят от текущих траекторных параметров самолета. Рабочее пространство ограничено расчетной дальностью по направлению полета самолета и определяется его путевой скоростью. Рабочее пространство состоит из обширной области предупреждения и более узкой аварийной области. При попадании воздушного судна в критические зоны СРПБЗ должна подавать сигналы «Впереди земля» или «Тяни вверх». Кроме того на многофункциональный индикатор выводятся в реальном времени картинки вида рельефа местности в плане и сбоку.

Для оценивания системы в режиме раннего предупреждения самолет сначала пролетает над горой в определенном направлении с целью получения рельефа подстилающей поверхности. Показания радиовысотомера при этом регистрируются с частотой не менее 4 Гц. Линия рельефа получается с помощью разности между высотой приемника СНС и высотой радиовысотомера. На рис. 11 рельеф горы изображен красной тонкой линией. Далее самолет совершает проходы над горой в том же направлении на различных высотах.



Рис. 11. Участок траектории полета со срабатыванием СРПБЗ в режиме 7

В КБТИ производится регистрация изменений слов состояния системы СРПБЗ. Одна из траекторий самолета со срабатыванием СРПБЗ в режиме раннего предупреждения показана рис. 11. Направление движения самолета - в сторону увеличения координаты Х. По оси ординат отложены значения высоты Н приемника СНС. Самолет подлетал к горе со снижением. Зеленым цветом на траектории самолета отмечены участки со срабатыванием предупредительной сигнализации «Внимание земля». Зеленой вертикальной чертой показана вычисленная граница области предупреждения в момент первого появления сигнализации системы. При дальнейшем снижении система начала выдавать сигнализацию, соответствующую области критичности. Участки траектории с сигнализацией «Тяни вверх» обозначены красным цветом. Красная вертикальная линия на рис. 11 показывает границу области критичности в момент появления сигнализации «Тяни вверх». Приведенный пример свидетельствует об удовлетворительной работе системы СРПБЗ на самолете в режиме 7.

Функции СРПБЗ постоянно расширяются, и количество режимов системы увеличивается, в частности за счет функций контроля положения летательного аппарата на ВПП и рулежных дорожках.

#### VII. Выводы

 Предложен общий подход к методам и средствам летных испытаний систем раннего предупреждения близости земли, предназначенный для оценки и анализа характеристик пилотажно-навигационного и другого бортового оборудования летательных аппаратов в процессе летных испытаний.

- Разработано в АО «ЛИИ им. М.М. Громова» программно-математическое обеспечение обработки и анализа результатов летных испытаний СРПБЗ. На примерах летных испытаний СРПБЗ в различных режимах работы системы показано применение программного обеспечения.
- 3. Полученные результаты могут быть рекомендованы для использования при создании технологии летных испытаний СРПБЗ воздушных судов.

#### Литература

- Kunz B. TAWS Effective Against CFIT. Aviation Week & Space Technology. - 2001. - T. 155. - № 20. - C. 64-68.
- [2] Али А.А. Новые подходы к решению проблемы предотвращения столкновений исправных воздушных судов с земной поверхностью (CFIT) при производстве полетов на горные аэродромы. Проблемы безопасности полетов. – М.: ВИНИТИ, – 2007. – №4.
- [3] Портнов В.П. Структура проблем CFIT, ALAR/CFIT при летной эксплуатации воздушных судов гражданской авиации. Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. – 2009. – № 149.– С. 138-144.
- [4] Игошин А.М. Применение баз аэронавигационных данных на воздушных судах гражданской авиации. Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. – 2006. – № 1. – С. 81-83.
- [5] Харин, Е.Г. Технологии летных испытаний бортового оборудования летательных аппаратов с применением комплекса бортовых траекторных измерений / Харин Е.Г., Копылов И.А. // М.: Издательство МАИ-ПРИНТ, 2012. 360 с.
- [6] Харин, Е.Г. Исследования и отработка бортовых и наземных алгоритмов комплексной обработки информации инерциальных и радионавигационных систем по материалам летных испытаний. /Харин Е.Г., Копылов И.А., Копелович В.А., Клабуков Е.В./ Труды XVII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. С.Петербург, Россия. 2010 г. Стр. 178-182
- [7] Ясенок, А.В. «Комплексный метод автоматизации обработки и анализа материалов летных испытаний». АО «ЛИИ им. М.М. Громова». Сборник «Летные испытания летательных аппаратов» № 264, 2017г. с. 24 – 47.
- [8] Горский, Е.Б. «Обработка и анализ материалов летных испытаний радиовысотомеров». Труды 3-й Всероссийской научнопрактической конференции «Свободный полет – 2017», г. Уфа и г. Жуковский. 2017г.
- [9] Пушков, С.Г. НТО № 34-18-IX «Разработка алгоритмов автоматизированной обработки экспериментальных данных при испытаниях на режимах взлета и посадки, идентификации математических моделей аэродинамических погрешностей измерений воздушных параметров с учетом влияния экрана». /Пушков С.Г., Ловицкий Л.Л., Горшкова О.Ю., Малахова И.В.,/ АО «ЛИИ им. М.М. Громова». 2018, Реестр программ для ЭВМ, Свидетельство № 2018617385.
- [10] Харин, Е.Г. Развитие технологий летных испытаний бортового оборудования летательных аппаратов с применением летномоделирующих комплексов, спутниковых и информационных технологий. /Харин Е.Г., Якушев А.Ф., Копылов И.А., Копелович В.А./ Научно-технический журнал «Новости навигации» № 2. 2012г., Москва.
- [11] Харин, Е.Г. Технология автоматизированного оценивания самолетовождения по стандартным маршрутам вылета и прибытия. /Харин Е.Г., Копылов И.А., Копелович В.А., Ясенок А.В./ XXII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург, Россия. 25 - 27 мая 2015 г. С. 157-161.

# Определение целочисленной фазовой неоднозначности при абсолютном определении координат по спутниковым радионавигационным измерениям

А.Л. Толстой Санкт-Петербургский государственный университет Санкт-Петербург, Россия st063510@student.spbu.ru С.Д Петров Санкт-Петербургский государственный университет Санкт-Петербург, Россия s.d.petrov@spbu.ru П.В. Мовсесян Санкт-Петербургский государственный университет Санкт-Петербург, Россия movsesyanpv@gmail.com

И.В. Чекунов Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана Москва, Россия onip4@mail.ru

Аннотация—Статья посвящена разрешению целочисленной фазовой неоднозначности при абсолютных определениях координат по спутниковым радионавигационным измерениям. Обсуждается реализация метода MLAMBDA с новыми дополнениями, призванными повыситт надежность данного метода и сделать его пригодным для ГЛОНАСС.

### Ключевые слова—радионавигация, разрешение фазовой неоднозначности.

#### I. Введение

Первоначально позиционирование с помощью измерений сигналов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) выполнялось путем обработки дальномерных кодов, демодулированных из радиосигналов навигационных спутников, таким образом, точность определяемых координат была ограничена несколькими дециметрами. Но вскоре после запуска первых спутников ГЛОНАСС и GPS был обнаружен недокументированный способ точного измерения фазы волны, передающей сигнал с дальномерным кодом, который открыл новую перспективу для повышения точности. Начало появляться множество новых методов обработки ГНСС наблюдений, и эта работа все еще продолжается. В настоящее время в рамках относительных определений ГНСС, то есть, когда неизвестные координаты точки вычисляются относительно фиксированной точки с уже известными координатами, современные методы дают точность до нескольких миллиметров. В то же время, в рамках абсолютных определений ГНСС точность пока не так высока, как для относительных методов. Эта работа посвящена развитию недавно появившегося метода MLAMBDA (Modified Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment — модифицированная корректировка декорреляции неоднозначности методом наименьших квадратов) как для наблюдений GPS, так и для ГЛОНАСС.

Основная проблема с измерениями фазы заключается в том, что они не привязаны ко времени, по сравнению с кодовыми измерениями. Это можно проиллюстрировать Д.А. Трофимов Санкт-Петербургский государственный университет Санкт-Петербург, Россия d.trofimov@spbu.ru

на рис. 1. В последовательности дальномерного кода, когда каждый фрагмент кода пронумерован, и всегда просто привязать любой фрагмент кодовой последовательности ко времени. В то же время точность кодовых измерений ограничена в лучшем случае несколькими дециметрами. В отличие от этого фаза несущей может быть измерена ГНСС приемником чрезвычайно точно, до долей миллиметра. С другой стороны, измерения фазы никак не могут быть пронумерованы, следовательно, не могут быть привязаны ко времени. Другими словами, каждый фрагмент измерения фазы выглядит так же, как и другой, поскольку количество полных длин волн несущего сигнала, которое помещается между навигационным космическим аппаратом и ГНСС приемником, не может быть измерено непосредственно. Также давно разработан и доведен до совершенства математический аппарат для редукций при обработке кодовых ГНСС измерений, тогда как обработка фазовых измерений попрежнему имеет несколько проблем, которые еще не решены полностью. Одной из таких проблем является разрешение целочисленной фазовой неоднозначности навигационного радиосигнала.



Рис. 1 Целочисленная неоднозначность

Абсолютный метод точной обработки ГНСС измерений был предложен в [1] и получил название Precise Point Positioning (точного позиционирования точки – PPP). Первоначально этот метод не учитывал целочисленную неоднозначность фазы. В оригинальном PPP целочисленная неоднозначность фазы рассматривалась как часть общей, не смоделированной ошибки псевдодальности [1]. Позже начали появляться новые версии PPP, которые пытались выделить ошибку целочисленной неоднозначности фазы из общего бюджета ошибок. В настоящее время существует два основных подхода к оценке целочисленной фазовой неоднозначности. Вопервых, методы FCB (fractional cycle base) [2], где аппаратные задержки сигнала калибруются и вычитаются из общей ошибки псевдодальности, а оставшаяся часть рассматривается как ошибка фазы. Во-вторых, методы IRC (integer recovery clock) [2], которые основаны на коррекции бортовых часов навигационного космического аппарата. В работе [6] было показано, что оба метода в принципе эквивалентны. Существует также новый класс методов, основанных использовании точных карт ПЭС (полного электронного содержания) и водяного пара в атмосфере[3].

#### II. MLAMBDA метод

Данная работа посвящена развитию метода MLAMBDA. Этот метод, с одной стороны, показал достаточно высокую эффективность определения целочисленной неоднозначности, а с другой стороны, он относительно прост и достаточно быстр с вычислительной точзрения. Рассмотрена ки реализация алгоритма MLAMBDA для метода абсолютного позиционирования ГНСС, а также показано, что этот метод непосредственно не применим к системе ГЛОНАСС. В работе сформулировано расширение метода, позволяющее применять его не только к GPS, но и к измерениям ГЛОНАСС. Как бы то ни было, системы ГЛОНАСС и GPS очень близки друг к другу, но принципиально отличаются принципом разделения сигналов от различных спутников. Система GPS использует кодовое разделение спутниковых сигналов, так что каждый спутник GPS использует уникальный код модуляции на общей частоте несущего сигнала, в то время как система ГЛОНАСС реализует частотное разделение, так что каждый спутник ГЛОНАСС в зоне видимости использует единый код модуляции на частоте, уникальной для каждого спутника. Каждый из принципов разделения доступа имеет свои преимущества и недостатки, но в случае частотного разделения сигналов разрешение неоднозначности целочисленной фазы осложняется наличием нескольких несущих сигналов разной частоты вместо одного в случае GPS. Авторы статьи модифицируют метод MLAMBDA таким образом, чтобы он также мог быть применен к измерениям ГЛОНАСС. Метод MLAMBDA является развитием метода LAMBDA (Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment — корректировка декорреляции неоднозначности методом наименьших квадратов), предложенного в [1]. Согласно [1] модель наблюдения ГНСС может быть записана в виде

$$E(x) = Aa + Bb, D(x) = Qx,$$
(1)

где х – вектор данных ГНСС порядка m, а и b – векторы параметров порядка n и р соответственно, A и B – матрицы модели наблюдения, которые связывают вектор данных с параметрами модели. Известная ковариационная матрица х равна Qx. Предполагается, что вектор х представляет собой разности между наблюдениями и моделированными значениями. Это могут быть наблюдения с двойной разностью фазовых или кодовых измерений, или и то, и другое. Ищется решение таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов разностей между моделированными и наблюдаемыми данными. Учитывая тот факт, что вектор данных включает в себя целочисленные значения фазовых неоднозначностей, эту проблему можно решать с помощью целочисленного метода наименьших квадратов (ЦМНК). Как хорошо известно, точное решение такой задачи ЦМНК неосуществимо, поскольку для этого потребовался бы огромный объем вычислительных ресурсов. Однако в [4] было предложено субоптимальное решение задачи (1).

Основная идея заключается в том, чтобы сначала применить к уравнению (1) ортогональное разложение на три части. Первая часть состоит из полных параметров с плавающей точкой, вторая часть - из разностных параметров с плавающей точкой и, наконец, третья часть - из целочисленных параметров, то есть из фазовых неоднозначностей. Затем решение выполняется в три этапа. Во-первых, ищется решение задачи (1) с плавающей точкой, предполагающее, что все целочисленные параметры равны нулю. Во-вторых, задача решается для целочисленных параметров с использованием решения с плавающей точкой в качестве приближения к конечному. В-третьих, вычисленные параметры, как с плавающей точкой, так и целые числа, подставляются в (1), и оценивается, насколько близка квадратичная норма решения к минимуму с помощью процесса поиска, см. схему на рис. 2.



Рис. 2 Схема MLAMBDA-метода

#### III. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Ключевой частью вычислений, которые проводятся при высокоточном определении координат из ГНСС наблюдений относительными методами является разрешение целочисленной неоднозначности двойных разностей в целых числах. В литературе по ГНСС существует множество методов разрешения неоднозначностей. Среди них хорошо известен LAMBDA метод.
LAMBDA метод решает задачу с помощью метода целочисленных наименьших квадратов (ЦМНК) для получения оценок целочисленных неоднозначностей двойных разностей. Необходимо отметить, что задачи решаемые с помощью ЦМНК, могут также возникать в других приложениях, таких как связь, криптография и исследование кристаллических решеток. Интересно, что LAMBDA-метод и некоторые ЦМНК, разработанные для этих приложений, имеют некоторое сходство, на которое будет указано в этой статье. Как и многие другие методы ЦМНК, LAMBDA метод состоит из двух этапов. Его первым этапом является перенос исходной задачи ЦМНК в новую с помощью так называемых Zпреобразований или унимодулярных преобразований. Поскольку этот этап устраняет неоднозначности в контексте ГНСС, в литературе по ГНСС он называется "декорреляцией". Однако на самом деле это нечто большее, чем декорреляция, поэтому мы предпочитаем называть этот этап "редукцией", как это делается в литературе по теории информации. Его второй этап заключается в поиске оптимальной оценки или нескольких оптимальных оценок вектора параметра в гиперэллипсоидальной области, и поэтому называется этапом "поиска". Для редукций целочисленных неоднозначностей были предложены различные методы.

Для кинематических приложений ГНСС реального времени и других приложений с большими размерами скорость вычислений имеет решающее значение. В этой статье мы представляем модифицированный LAMBDA метод (MLAMBDA), который может значительно снизить вычислительную сложность LAMBDA метода для задач ЦМНК высокой размерности. Новый метод повышает вычислительную эффективность как этапа редукций, так и этапа поиска. Численные результаты показывают, что редукции MLAMBDA также более эффективны с точки зрения вычислений, чем редукции алгоритма LLL.

Для целей проверки, в дополнение к оптимальной оценке, часто также требуется вторая оптимальная оценка, которая дает второе наименьшее значение целевой функции.

Далее мы представим два этапа LAMBDA метода: редукция и поиск. Мы также укажем на сходство между идеями LAMBDA метода и идеями некоторых типичных методов ЦМНК, разработанных для других приложений в литературе.

Пусть  $\hat{a} \in \mathbb{R}^n$  – вещественное приближение целочисленного значения  $a \in \mathbb{Z}^n$ , то есть вектор целочисленных фазовых неоднозначностей, и  $Q_{\hat{a} \in \mathbb{R}^{n \times n}}$  – его ковариационная матрица, которая является симметричной и положительно определенной. Для того чтобы найти целочисленное значение а, должно быть выполнено следующее условие:

$$\min_{a \in Z^n} (a - \hat{a})^T Q_{\hat{a}}^{-1} (a - \hat{a}).$$
(2)

Задача (2) известна как NP-полная. LAMBDA-метод [4] выполняется в два этапа: редукция и поиск.

Пусть Z – унимодулярная квадратная матрица размерности n. Давайте определим следующее:

$$z = Z^T a, \ \hat{z} = Z^T \hat{a}, \ Q_{\hat{z}} = Z^T Q_{\hat{a}} Z.$$
 (3)

Обратите внимание, что если а имеет целочисленное значение, то z также имеет целочисленное значение, и наоборот. Тогда с помощью (2) и (3) задача сводится

$$\min_{a \in \mathbb{Z}^n} (z - \hat{z})^T Q_z^{-1} (z - \hat{z}).$$
(4)

Теперь пусть  $L^T DL$ -разложения по  $Q_{\hat{a}}$  и  $Q_{\hat{z}}$  таковы:

$$Q_{\hat{a}} = L^T DL, \, Q_{\hat{z}} = Z^T L^T DL Z = \overline{L}^T \overline{D} \overline{L} \,, \tag{5}$$

где L и  $\overline{L}$  – нижние треугольные матрицы, а также D и  $\overline{D}$  – диагональные.

При редукции матрица Z ищется такая, как:

1.  $Q_{\hat{z}}$  имеет как можно большую диагональ, то есть содержит как можно больше нулей за пределами главной диагонали.

2. Диагональные элементы  $\overline{D}$  отсортированы по убыванию значений.

Для того чтобы выполнить сортировку значений матрицы  $\overline{D}$ , необходимо выполнить симметричные перестановки матрицы  $Q_{\hat{z}}$ . Процесс редукции начинается с предпоследнего столбца L и двух последних диагональных элементов D и пытается достичь первой пары диагональных элементов D и первого столбца L (слева направо). Когда индекс k достигается в первый раз, выполняется преобразование Гаусса таким образом, чтобы абсолютные значения всех меньших значений L не превышали  $\frac{1}{2}$ . Затем производится перестановки перезапускается до тех пор, пока все диагональные элементы не будут отсортированы по возрастанию значения.

После завершения редукции запускается процесс поиска. Для решения проблемы неоднозначности целочисленной фазы поиск используется для того, чтобы перечислить подпространство в  $Z^n$ , содержащее решение. Поиск выполняется по целочисленным значениям в порядке возрастания. После того, как  $z_i$  найден, выполняется поиск  $z_{i-1}$ . Если поиск на i-м уровне не увенчался успехом, то алгоритм переключается на (i+1)-й уровень и так далее. Весь *z*-вектор считается определенным, если  $z_1$  находится на уровне 1.

Как показано в [5], весь алгоритм может быть оптимизирован с помощью дополнительной декомпозиции задачи Холески (1). В этом случае и сокращение, и поиск становятся быстрее, чем в исходном LAMBDA-методе.

Поскольку метод MLAMBDA изначально предназначен только для GPS, он не может быть непосредственно применен к ГЛОНАСС. В этой статье MLAMBDA-метод модифицирован таким образом, чтобы его можно было применить к наблюдаемым данным ГЛОНАСС. Как уже упоминалось выше, ГЛОНАСС использует частотный способ разделения сигнала между спутниками. Поддиапазоны для каждого спутника идентифицируются частотным номером k, так что  $f_{L1k} = 1602 \times 10^6 + 562500 \times k$ и  $f_{L2k} = 1244 \times 10^6 + 437500 \times k$ , где k изменяется от -7 до 6. Это означает, что всего для спутников ГЛОНАСС доступно 15 диапазонов частот. Полное покрытие обеспечивается условием назначения одной и той же полосы частот для некоторых спутников, которые являются антиподальными друг другу.

После исследования алгоритма MLAMBDA оказалось, что он может быть модифицирован для наблюдаемых объектов ГЛОНАСС следующим образом. Предположим, что мы наблюдаем сигналы п спутников ГЛОНАСС, где n < k. Межчастотные смещения фазы несущей (CPIFB) определяются как различия между фазой несущей спутника і-го диапазона частот и первой фазой среди наблюдаемых спутников ГЛОНАСС. Теперь есть два возможных способа двигаться дальше. Самый простой случай - когда CPIFB известны заранее. Некоторые центры обработки данных ГНСС действительно вычисляют CPIFB и делают их доступными для обычных пользователей. В этом случае, после того как мы применим CPIFB к наблюдаемым фазам несущей ГЛОНАСС, проблема сводится к стандартному алгоритму MLAMBDA.

Более сложный случай - когда СРІҒВ априори неизвестны. Можно модифицировать MLAMBDA-метод, чтобы включить CPIFB в качестве дополнительных наблюдаемых величин. Для простоты предположим, что все СРІҒВ имеют вещественное значение. На самом деле это не всегда так. Иногда СРІҒВ могут принимать целочисленные значения, но такой случай будем исследовать в следующих работах. Таким образом, мы можем включить CPIFB в (1) в качестве дополнительных наблюдательных данных вещественного типа. Кроме того, CPIFB должны быть достаточно малы, в противном случае задача (1) может стать вырожденной. Для выполнения этого условия необходимо учитывать ионосферную часть смещения фазы несущей. Этого можно достичь несколькими способами, самым простым из которых является использование карт ионосферы, вычисленных центрами обработки данных ГНСС. Представляется также возможным расширить алгоритмы таким образом, чтобы можно было вычислять задержки в ионосфере наряду с другими параметрами, но это остается предметом будущих исследований.

## IV. ПЕРВЫЕ РЕУЛЬТАТЫ

В результате этой работы авторы дают обзор существующих в настоящее время методов устранения целочисленной фазовой неоднозначности в методах абсолютного позиционирования ГНСС. Взяв за основу известный из литературы LAMBDA метод, авторы рассматривают его преимущества, а также формулируют его распространение на систему ГЛОНАСС. Разработанный алгоритм реализован в виде библиотеки подпрограмм и протестирован на конкретных примерах решения навигационной задачи в абсолютном режиме с использованием только измерений GPS, только измерений ГЛОНАСС и смешанных измерений GPS/ГЛОНАСС. В первом и третьем случаях показана удовлетворительная работа метода, в то время как при обработке только измерений ГЛОНАСС метод работает не всегда. Рассматриваются возможные причины этой проблемы, а также дальнейшие шаги по ее решению. Когда алгоритм будет полностью реализован в программном обеспечении, его можно будет использовать для обработки наблюдений GPS/ГЛОНАСС в абсолютном режиме с точностью до первых сантиметров. Особенно важно применение этого метода к решению, основанному только на ГЛОНАСС, когда сигналы GPS глушатся или подделываются средствами радиоэлектронной борьбы. Единственная проблема, связанная с решением только по ГЛОНАССнаблюдениям, это необходимость использования априорных карт ионосферы. В настоящее время авторы ищут способ вычисления как ионосферных фазовых задержек, так и CPIFB.

#### V. Заключение

Мы модифицировали LAMBDA алгоритм для разрешения целочисленной фазовой неоднозначности таким образом, чтобы сделать его применимым к системе ГЛОНАСС. С этой целью мы включили в модель наблюдения ГНСС межчастотные задержки спутников ГЛОНАСС. В настоящее время некоторые центры обработки данных ГНСС проводят оценку межчастотных задержек на регулярной основе. Модифицированный алгоритм может использовать эти известные межчастотные задержки, и в этом случае он совпадает с исходными уравнениями LAMBDA метода. Но если параметры ГЛОНАСС заранее неизвестны, их можно оценить как часть алгоритма, представленного в этой статье. Этот шаг практически реализует абсолютные методы ГНСС для систем ГЛОНАСС, а также GPS. В настоящее время ведется работа по реализации представленного алгоритма в программном обеспечении

#### Литература

- J.F. Zumberge, M.B. Heflin, D.C. Jefferson, M.M. Watkins, and F.H. Webb, "Precise point positioning for the efficient and robust analysis of GPS data from large networks," *Journal of Geophysical Research*, vol. 102, no. B3, pp. 5005–5018, 1997. doi:10.1029/96JB03860.
- [2] P. Heroux and J. Kouba "GPS Precise Point Positioning with a Difference," Presented at: *Geomatics* '95, 13-15 June, Ottawa, Canada, 1995, 11pp
- [3] C. Rocken, J. Johnson, T. Van Hove, and T. Iwabuchi, "Atmospheric water vapor and geoid measurements in the open ocean with GPS," *Geophysical Research Letters*, vol. 32, no. 12, 2005. doi:10.1029/2005GL022573.
- [4] PJG. Teunissen, "The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation," *Journal of Geodesy* 70, 65–82, 1995. doi:10.1007/BF00863419.
- [5] X.W. Chang, X. Yang, T. Zhou, "MLAMBDA: a modified LAMBDA method for integer least-squares estimation," *Journal of Geodesy*, 79, 552–565, 2005, doi:10.1007/s00190-005-0004-x
- [6] J. Geng, X. Meng, A.H. Dodson, and F.N. Teferle, "Integer ambiguity resolution in precise point positioning: method comparison," *Journal* of Geodesy, vol. 84, no. 9, pp. 569–581, 2010. doi:10.1007/s00190-010-0399-x.

# Синхронизация шкал времени локальной и глобальной навигационной спутниковой системы для «бесшовной» навигации в городе

В.Б. Пудловский ФГУП «ВНИИФТРИ» Менделеево, Московская область, Россия pudlovskiy@vniiftri.ru А.П. Малышев ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ», Москва, Россия malyshevap99@gmailcom С.А. Серов ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ», Москва, Россия srv.28@yandex.ru

С.В. Черных ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ», Москва, Россия ChernykhSVl@mpei.ru

Аннотация-В работе представлены результаты, полу-ФГУП ченные сотрудниками НИУ «МЭИ» И «ВНИИФТРИ», в развитие темы «бесшовной» навигации в городских условиях. Предложен вариант аналитической синхронизации шкал времени передатчика локальной навигационной системы и приемника сигналов ГНСС с точностью до 10 микросекунд. С учетом дополнительной погрешности, вносимой неточной синхронизацией шкал времени передатчика локальной навигационной системы и приемника сигналов ГНСС, погрешность координат не превысила 2 м (СКО). Предложенный вариант синхронизации шкал времени позволяет достичь "бесшовной" навигации в городских условиях при наблюдении менее трех навигационных спутников внутри рабочей зоны сверхширокополосной локальной навигационной системы.

Ключевые слова—"бесшовная" навигация, ГНСС, сверхширокополосные сигналы, шкалы времени, временная синхронизация

#### I. Введение

В прошлых работах коллектива авторов исследовалась возможность использования совместной обработки сигналов сверхширокополосных (СШП) локальных навигационных систем (ЛНС) [1] и глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) [2] в навигационной аппаратуре потребителей (НАП) в бортовом комплексе беспилотного транспортного средства [3] для позиционирования в сложных городских условиях [4].

На конференции «МКИНС 2022» сотрудниками НИУ «МЭИ» и ФГУП «ВНИИФТРИ» были представлены результаты, подтверждающие возможность «бесшовной» навигации наземных объектов в сложных условиях при совместной обработке сигналов ГНСС и ЛНС СШП при известной высоте объекта [5].

Однако режим совместной обработки (фильтрации в единой шкале времени (ШВ)) измерений параметров сигналов разных навигационных систем потребовал оценки разницы ШВ ГНСС и ЛНС до начала работы фильтра при входе в рабочую зону ЛНС. В предыдущей работе [5], для обоснования принципа совместной фильтрации измерений ЛНС и ГНСС эта разница ШВ была нами получена отдельно и апостериорно по результатам предварительной обработки полученных измерений. Для реализации совместной обработки в реальном масштабе времени требуется оперативная оценка разницы ШВ А.А. Фролов ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская область, Россия frolov\_aa@vniiftri.ru

сигналов от ЛНС и ГНСС в НАП, то есть их синхронизация. В известных ЛНС, использующих СШП сигналы, информация о времени излучения сигнала в ШВ этой системы до сих не была реализована.

Используемая в работах [5, 6] беззапросная СШП ЛНС представляет собой инфраструктуру опорных точек, называемых в англоязычной литературе маяками, и передатчик (именуемый в англоязычной литературе меткой), координаты которого необходимо оценить. В зависимости от способа организации обмена радиосигналами можно выделить два типа таких систем [7]. Используемый в данной работе тип СШП ЛНС имеет синхронизированные между собой маяки, которые принимают радиосигналы от передатчика объекта, излучающего излучающей СШП радиосигнал.

НАП ГНСС, используемая в работах представляла собой отдельное от метки СШП ЛНС устройство, принимающее сигналы от навигационных космических аппаратов ГНСС. В виду этого факта для создания алгоритма, использующего измерения параметров сигналов от этих систем необходимо иметь информацию о моментах времени измерения параметров в единой шкале времени (ШВ). Для оценки точностных характеристик оценки координат, получаемых с помощью данного алгоритма, привязка измерений в единой ШВ проводилась апостериорно.

Положительные результаты [5] позволили продолжить исследования по совместной обработке сигналов ЛНС и ГНСС. Они были направлены на разработку способов реализации единой ШВ для НАП ГНСС и передатчика ЛНС в масштабе времени близком к реальному.

Отсюда целями данной работы стали:

- разработка способа передачи информации о моменте времени излучения СШП сигнала в ШВ этой ЛНС;
- анализ возможности совместной обработки измерений параметров сигналов ГНСС и СШП с учетом информации о разнице ШВ сигналов от ЛНС и ГНСС, в том числе при снижении количества сигналов навигационных космических аппаратов (НКА) до 2.

## II. Варианты синхронизации шкал времени ГНСС и ЛНС

Синхронизация ШВ НАП ГНСС и передатчика ЛНС необходима для корректной работы совместного фильтра, реализованного авторским коллективом ранее [7]. Погрешность синхронизации является ключевым фактором снижения погрешности оценки вектора состояния при въезде в рабочую зону ЛНС и выезде из неё.

Существует два основных варианта к созданию общей ШВ двух измерителей при работе в режиме реального времени. Первый вариант реализуется путем аппаратного подключения общего опорного генератора (ОГ) к двум устройствам. Второй вариант является аналитическим способом синхронизации ШВ. В этом варианте необходимо вычислить текущую разницу ШВ НАП ГНСС и ШВ передатчика ЛНС. В данной работе рассматривался второй вариант, поскольку не требует аппаратной доработки используемой аппаратуры. Ниже эти варианты описаны подробнее.

#### А. Аппаратная синхронизация ШВ

Аппаратная синхронизация предполагает использование одного общего ОГ, формирующего ШВ всех устройств в составе бортового комплекса объекта. Данный вариант требует существенную переработку НАП ГНСС и передатчика СШП ЛНС, при сохранении их в виде отдельных устройств, входящих в бортовой комплекс объекта. Данный вариант предпочтителен при разработке аппаратуре, объединяющей обработку сигналов ГНСС и ЛНС в одном устройстве. Альтернативным подходом является использование внешнего ОГ. Этот вариант возможен только при наличии соответствующих интерфейсов в НАП ГНСС и передатчике ЛНС.

Аппаратный вариант с использованием общего ОГ обеспечивает высокую точность синхронизации ШВ, однако требует существенной доработки существующих или разработки новых устройств. Поэтому данный способ не будет рассматриваться в данной работе.

#### В. Аналитическая синхронизация ШВ

Основная задача выбранного аналитического способа заключается в наблюдении информации о моменте времени излучения СШП сигнала передатчиком в его шкале другим устройством, в данном случае НАП в его более стабильной ШВ.

Аналитическая синхронизация ШВ передатчика ЛНС и НАП ГНСС в данном способе заключается в следующем.

Внутри приемопередатчика ЛНС (например, DW1000) имеется 40 битный счётчик, с разрешением по времени порядка 15 пс. Приемопередатчик фиксирует времена излучения и приёма в своих регистрах. После излучения очередного сообщения регистр, содержащий момент времени излучения, считывается управляющим контроллером, установленным в бортовом комплексе, по прерыванию через интерфейс SPI. Затем, вычислитель приписывает данному моменту времени текущее значение времени своей ШВ в соответствии с (1):

$$T_{\text{сшп } TX,j} \stackrel{\text{def}}{=} T_{\text{сшп } TX,j}(t_{\text{сшп}}) = \tilde{T}_{\text{сшп } TX,j}(t_{\text{выч}}) \qquad (1)$$

Далее этот момент времени  $T_{\text{сшп }TX,j}$  сохраняется в памяти управляющего контроллера и может быть передано в последующем j + 1 излучаемом СШП сигнале.

Параллельно, как показано на рисунке 1, управляющий контроллер получает оцифровку секундных меток от НАП ГНСС  $T_{pps,k}(t_{\text{нап}})$ . Получив эту информацию, вычислитель приписывает данному моменту времени текущее значение времени своей ШВ в соответствии с (2).

$$T_{pps,k} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} T_{pps,k}(t_{\text{\tiny HAII}}) = \tilde{T}_{pps,k}(t_{\text{\tiny BЫY}})$$
(2)



Рис. 1. Временная диаграмма обмена значениями ШВ при аналитической синхронизации

Таким образом, после фиксации моментов k и j вычислитель может оценить разницу ШВ НАП ГНСС и передатчика СШП ЛНС в соответствии с выражением (3):

$$\Delta T_{\text{han/cum}} = T_{\text{cum }TX,j}(t_{\text{cum}}) - T_{pps,k}(t_{\text{han}}) =$$
  
=  $\tilde{T}_{\text{cum }TX,j}(t_{\text{Bbly}}) - \tilde{T}_{pps,k}(t_{\text{Bbly}})$  (3)

После оценки разности ШВ ЛНС и НАП ГНСС после j + 1 излученного передатчиком СШП ЛНС появляется возможность дальнейшие моменты излучения передатчиком СШП транслировать в шкале НАП ГНСС, например, следующим образом (4):

$$T_{\text{сшп}TX,j+2}(t_{\text{нап}}) = T_{\text{сшп}TX,j+2}(t_{\text{сшп}}) + \Delta T_{\text{нап/сшп}}$$
(4)

Оценка разности шкал в данном варианте построения СШП ЛНС производится в вычислителя бортового комплекса объекта, как показано на рисунке 2.



Рис. 2. Схема обмена информацией в бортовом комплексе

Эта разница ШВ должна быть передана в инфраструктуру ЛНС, в которой реализован объединенный фильтр, обрабатывающий первичные измерения СШП ЛНС и/или НАП ГНСС.

## С. Оценка погрешности координат при аналитической синхронизации

Основным фактором, вносящим дополнительную погрешность в оценку координат совместного фильтра, несомненно, является погрешность синхронизации ШВ НАП и ЛНС.

Погрешность оцифровки ШВ НАП известна и составляет, как правило, не более 0.1 мкс.

Погрешность фиксации оценки момента времени излучения в передатчике ЛНС определяется разрешением по времени и составляет около 15 пс.

Дополнительно необходимо учесть погрешность воспроизведения и фиксации моментов в ШВ вычислителя. Погрешность определяется задержкой в интерфейсе при обмене информацией вычислителя с НАП или передатчиком ЛНС. Значение данной погрешности составляет, как правило, единицы микросекунд.

Таким образом, суммарное значение погрешности синхронизации ШВ, с учетом всех факторов, не превышает 10 мкс. С учетом динамики автомобиля (скорость не превышает 20 м/с) и необходимости оценки времени излучения передатчика ЛНС [6] вклад данной погрешности в итоговую оценку координат не превысит 0.1 м. Таким образом предложенный синхронизации измерений в ШВ НАП позволяет реализовать работу объединенного фильтра в реальном времени.

## III. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Полученные в данной статьей результаты на основании апостериорной обработки в предлагаемом расширенном фильтре Калмана (РФК) наблюдений, полученных в серии ранее проведенных экспериментов, представленных в статье [6] на основании алгоритмов, описанных в [5].

Предлагаемый вариант синхронизации не нарушает модели наблюдений и работу алгоритма совместной фильтрации измерений по сигналам ГНСС и ЛНС, приведенных в [5].

Предлагаемый алгоритм синхронизации ШВ в реальном времени, реализованный в НАП с алгоритмом совместной обработки сигналов ГНСС и ЛНС позволяет проводить определение координат в условиях наблюдения не менее трех ОТ ЛНС и при сохранении погрешности определения координат не более 2 м даже при сокращении количества наблюдаемых НКА до двух, как показано на рисунках 3,4.



Рис. 3. Оценка траектории автомобиля, полученная различными алгоритмами



Рис. 4. Оценка траектории автомобиля, полученная различными алгоритмами в увеличенном масштабе

На рисунках 3,4 в качестве опорной траектории для оценки погрешности работы использованного РФК (совместно с предлагаемым алгоритмом синхронизации ШВ) приняты результаты обработки только ГНСС GPS измерений в режиме RTK, полученные в [5].

Оценка погрешности координат относительно опорной траектории, полученной при совместной обработке сигналов от 2 НКА ГЛОНАСС и минимум трех ОТ ЛНС, не превысила 2 м.

Предложенный алгоритм синхронизации позволяет реализовать совместную обработку сигналов ГНСС и ЛНС в единой шкале времени, что позволяет достичь «бесшовности» навигационных определений в сложных городских условиях приема сигналов от НКА.

## IV. Заключение

Для достижения всех преимуществ совместной фильтрации разных радионавигационных систем требуется представление измерений параметров сигналов в единой шкале времени, например, в ШВ НАП.

Предложены два варианта синхронизации ШВ СШП ЛНС и НАП ГНСС с учетом особенностей формирования моментов излучения сигналов в ЛНС.

Выбранный вариант аналитической синхронизации потенциально обеспечивает совместную обработку сигналов ГНСС и ЛНС в масштабе времени, близком к реальному. Предлагаемый вариант синхронизации ШВ ЛНС относительно ШВ НАП основан на передаче в вычислитель ботового комплекса информации о моменте времени излучения СШП сигнала в ШВ приёмопередатчика. Трансляция информации о моменте времени излучения СШП сигнала может быть реализована программно, например, в приёмопередатчиках типа DW1000.

Извлечение и использование этой информации в бортовом комплексе потенциально позволяет осуществлять текущую оценку разницы ШВ ЛНС и ГНСС с темпом поступления этих измерений. При этом сохраняются преимущества совместной фильтрации сигналов используемых систем.

Использование текущей оценки разницы ШВ ЛНС и ГНСС позволяет реализовать "бесшовную" навигацию потребителей в режиме реального времени в городских условиях с погрешностью не более 2 м при приеме на 2...3 маяках излученного передатчиком СШП сигнала и снижении количества НКА до 2 при известной высоте объекта.

Предложенный аналитический вариант синхронизации был реализован в типе ЛНС с передатчиком на борту объекта и маяками, принимающими СШП радиосигнал. Для физической реализации совместной обработки в интересах навигационного обеспечения большого количества беспилотных транспортных средств требуется оценка всех определяемых параметров (координаты, скорость, время) в бортовом навигационном комплексе объекта. Поэтому дальнейшая работа будет посвящена разработке и исследованию синхронизации ШВ маяков ЛНС для реализации совместной обработки сигналов, принимаемых на борту объекта от маяков ЛНС и от НКА ГНСС.

#### ЛИТЕРАТУРА

- D. Tsaregorodtsev, A. Chugunov and N. Petukhov, "Ultra-Wideband Motion Capture Radio System," 2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon), Vladivostok, Russia, 2019, pp. 1-6, doi: 10.1109/FarEastCon.2019.8934111.
- [2] A. I. Perov and V. N. Kharisov, "GLONASS" in Construction and functioning principles, Moscow:Radiotekhnika, 2010. (in Russian).

- [3] T. Luettel, M. Himmelsbach, and H. Wuensche, "Autonomous ground vehicles—Concepts and a path to the future," Proc. IEEE, vol. 100, no. Special Centennial Issue, pp. 1831–1839, May 2012.
- [4] G. Wan et al., "Robust and Precise Vehicle Localization Based on Multi-Sensor Fusion in Diverse City Scenes," 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2018, pp. 4670-4677, doi: 10.1109/ICRA.2018.8461224.
- [5] V. Pudlovskiy, N. Petukhov, A. Chugunov, A. Malyshev and A. Frolov, "Joint Processing of GNSS and UWB Signals for Seamless Navigation in Urban Environments," 2022 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), Saint Petersburg, Russian Federation, 2022, pp. 1-4, doi: 10.23919/ICINS51784.2022.9815417.
- [6] A. A. Chugunov, N. I. Petukhov, A. P. Malyshev, V. B. Pudlovskiy, O. V. Glukhov and A. A. Frolov, "Experimental Evaluation of UWB Local Navigation System Performance Used for Pedestrian and Vehicle Positioning in Outdoor Urban Environments," 2021 XV International Scientific-Technical Conference on Actual Problems Of Electronic Instrument Engineering (APEIE), 2021, pp. 449-454, doi: 10.1109/APEIE52976.2021.9647604.
- [7] I. V. Korogodin, A. P. Malyshev, A. A. Chugunov, T. A. Brovko, A. Y. Siziakova and R. R. Vakhitov, "Comparison of local ultrawideband radio navigation systems architectures," 2022 4th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), 2022, pp. 1-6, doi: 10.1109/REEPE53907.2022.9731398.

# Анализ точности навигационных определений по двум спутниковым навигационным системам в условиях кренов потребителей

В.И. Бабуров АО «Навигатор» Санкт-Петербург, Россия info@navigat.ru Н.В. Васильева *АО «Навигатор»* Санкт-Петербург, Россия info@navigat.ru Н.В. Иванцевич *АО «Навигатор»* Санкт-Петербург, Россия info@navigat.ru *БГТV «ВОЕНМЕХ»* Санкт-Петербург, Россия sciencebstu@bstu.spb.su

Аннотация—Исследуется влияние крена потребителя на точность навигационных определений по двум спутниковым навигационным системам. Выполнено имитационное математическое моделирование. Проведено сравнение точностных характеристик при крене и при его отсутствии на потребителе. Результаты представлены в виде вероятностных характеристик оценок точности местоопределений.

Ключевые слова—спутниковые радионавигационные системы, точность навигационных определений, крен ЛА, имитационное моделирование.

## I. Введение

При определении координат потребителя по спутниковым навигационным системам ГЛОНАСС, GPS или Beidou точность местоопределения зависит от характеристик рабочего созвездия спутников, попадающих в зону радиовидимости приёмной антенны, от числа спутников в рабочем созвездии и от их взаимного расположения. В ряде случаев возникают ситуации, когда определяющийся объект имеет крен, например, при местоопределениях на судах при волнении морской поверхности или при маневрировании летательных аппаратов (ЛА) различного типа. При полёте ЛА без крена ось симметрии приёмной антенны ориентирована в верхнюю полусферу и совпадает с местной вертикалью. В этом случае в зону радиовидимости попадает максимальное из возможных число навигационных спутников для заданного минимального угла возвышения. При отклонениях оси симметрии антенны от вертикали в случае крена потребителя в зону радиовидимости будет попадать меньшее количество спутников. В некоторых ситуациях их число может стать меньше минимально необходимого для проведения навигационных определений. Кроме того, при кренах точность навигационных определений, даже при наличии в зоне радиовидимости потребителя необходимого числа спутников, может быть хуже, чем это гарантируется интерфейсным контрольным документом на спутниковые системы [1-3].

Одним из способов глобальной компенсации такого эффекта является использование методов повышения информационной избыточности рабочих созвездий за счёт включения в рабочие созвездия ГЛОНАСС дополнительных навигационных точек, например, из других спутниковых навигационных систем, GPS или Beidou.

В докладе анализируются количественный состав и точностные характеристики рабочих созвездий, образуемых одновременно двумя спутниковыми системами

ГЛОНАСС и GPS при кренах ЛА. Мерой точности навигационных определений принят геометрический фактор рабочего созвездия. В качестве оценки ухудшения точности навигационных определений рассматривались отношения геометрических факторов при наличии и отсутствии крена потребителя.

## II. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ РАБОЧИХ СОЗВЕЗДИЙ ГЛОНАСС + GPS ПРИ КРЕНЕ ЛА

Исследование структурных свойств навигационных полей систем ГЛОНАСС, GPS и ГЛОНАСС + GPS проведено методом имитационного математического моделирования с применением метода Монте-Карло. Для расчёта координат спутников были использованы данные альманахов на системы ГЛОНАСС и GPS с сайта www.glonass-iac.ru [4]. Координаты расположения потребителя задавались случайным образом, равновероятно по Земному шару. Моменты времени навигационных определений выбирались случайным образом, равновероятно из интервала повторяемости спутниковой конфигурации ГЛОНАСС или GPS. Число испытаний было равно 10000. Крен В задавался величиной отклонения оси симметрии приёмной антенны потребителя от вертикали на заданную величину с ориентацией в случайном направлении для каждого момента времени. Были сделаны расчеты для значений крена β, равных 5°, 10°, 15° и 20°. Определение видимых спутников проводилось для заданных значений допустимого минимального угла возвышения а<sub>min</sub>. Были рассчитаны геометрические факторы рабочих созвездий для потребителя, имеющего крен, и в отсутствии крена, а также отношения геометрических факторов. Осуществлялась отбраковка точек, в которых количество видимых спутников было меньше минимально допустимого, что составляет для навигационных измерений по одной системе четыре спутника, по двум системам - пять спутников. Кроме того, были отбракованы точки, где значение PDOP превышало значение шесть. Количество отбракованных точек фиксировалось. По оставшемуся после отбраковки массиву данных строились распределения коэффициентов ухудшения геометрических факторов за счёт кренов ЛА, равных отношению геометрических факторов при наличии крена и при его отсутствии.

## III. Состав рабочих созвездий ГЛОНАСС и ГЛОНАСС + GPS при крене ЛА

Количество навигационных спутников, попадающих в зону радиовидимости потребителя  $n_{\theta}$ , определялось в зависимости от угла крена ЛА  $\beta$  для случая, когда допустимый минимальный угол места  $\alpha_{min}$  составлял 5°. На рис. 1 приведены статистические распределения  $P(n_{e})$ числа спутников в рабочем созвездии совмещенной навигационной системы ГЛОНАСС + GPS при трёх значениях угла крена ЛА, равных 0°, 10°, 20°. На рис. 2 даны аналогичные данные для случая местоопределений по одной спутниковой системе ГЛОНАСС.



Рис. 1. Распределение вероятности числа спутников ГЛОНАСС+GPS, попадающих в зону радиовидимости потребителя при крене



Рис. 2. Распределение вероятностей числа спутников ГЛОНАСС, попадающих в зону радиовидимости потребителя при крене

Основные характеристики распределений числа видимых спутников навигационных систем ГЛОНАСС и ГЛОНАСС + GPS, а именно, максимальные  $n_{g max}$ , минимальные  $n_{g min}$  и наиболее вероятные  $n_{g}^{*}$  значения, представлены в таблице 1. Величине  $n_{g}^{*}$  соответствует значение количества видимых спутников, имеющее максимальную вероятность  $P(n_{g}^{*})$ .

Из приведенных данных следует, что при кренах не более 20° рабочие созвездия содержат необходимое для решения навигационной задачи количество спутников. Однако существует ограничение на максимально допустимое значение геометрического фактора рабочего созвездия. В интерфейсном документе и на сайте Информационно-аналитического центра ГЛОНАСС принято ограничение по геометрическому фактору, равное шести. Величину геометрического фактора можно рассматривать как меру точности местоопределений по ГНСС.

ТАБЛИЦА І. Характеристики числа видимых спутников ГЛОНАСС и ГЛОНАСС+ GPS в зависимости от углов крена ЛА

β	ГНСС	n <sub>s min</sub>	n <sub>e max</sub>	$n_{s}^{*}$	P( n <sub>6</sub> * )
00	ГЛОНАСС	5	11	9	0.337
0	ГЛОНАСС + GPS	12	26	18	0.196
1.09	ГЛОНАСС	4	11	8	0.331
10	ГЛОНАСС + GPS	11	24	17	0.203
200	ГЛОНАСС	4	10	7	0.278
20°	ГЛОНАСС + GPS	10	23	16	0.200

## IV. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НАВИГАЦИОННЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ПО ГЛОНАСС+GPS ПРИ КРЕНЕ ЛА

Точность навигационных определений оценивалась по геометрическому фактору. Рассчитывались геометрические факторы по горизонтальным координатам HDOP, по высоте VDOP и по положению PDOP. Наиболее существенные изменения геометрического фактора при неполных созвездиях наблюдаются для высоты ЛА, что обусловлено структурой навигационного поля ГНСС. Поэтому далее приводятся данные по VDOP при различных значениях крена ЛА. На рис. 3 даны интегральные распределения вероятностей геометрического фактора VDOP при местоопределениях по системе ГЛОНАСС + GPS, для значений углов крена ЛА, равных 0°, 5°, 10°, 15° и 20°. Минимальный угол места для видимых спутников составлял 5°.



Рис. 3. Распределение вероятностей VDOP при местоопределениях по ГЛОНАСС + GPS при кренах ЛА

При расчёте вероятностей геометрических факторов рабочих созвездий проводилась проверка на выполнение ограничения по допустимому значению геометрического фактора в виде: PDOP  $\leq 6$ . При навигационных определениях по спутниковой системе ГЛОНАСС + GPS и рассмотренных значениях кренов ЛА это условие выполнялось для всех пространственно-временных точек. Рабочие созвездия даже при крене потребителя в 20° обладают значительной избыточностью, поскольку они содержат не менее десяти навигационных спутников, (см. табл. 1), что вдвое больше минимально необходимого количества. Этим объясняется тот факт, что наличие крена потребителя в пределах рассмотренных значений приводит к увеличению VDOP всего на 50% с вероятностью 0,95 и на 25% с вероятностью 0,67.

Введем характеристику  $\delta$  ухудшения геометрических свойств рабочего созвездия спутников за счет крена ЛА, равную отношению геометрического фактора рабочего созвездия при крене ЛА к соответствующему значению при нулевом крене:  $\delta_V = VDOP(\beta)/VDOP(0)$ . Используя описанную выше методику, были проведены расчеты величины  $\delta_V$  и получены статистические распределения.

В табл. 2 и 3 даны основные характеристики  $\delta_V$  отношений геометрических факторов по высоте рабочих созвездий ГЛОНАСС + GPS для двух значений допустимых углов возвышения спутников, 5° и 10° соответственно.

Полученные результаты моделирования позволяют сделать вывод о том, что использование в навигационной аппаратуре потребителя режима навигационных определений по двум ГНСС обеспечивает приемлемые точности местоопределений даже при кренах ЛА до 20°

включительно. Аналогичные расчёты были проведены для случая местоопределений по одной ГНСС. Полученные результаты для навигационных определений по ГЛОНАСС показывают, что при всех рассмотренных значениях кренов потребителя наблюдались пространственно-временные точки, в которых не выполнялось условие PDOP  $\leq 6$ , а их число изменялось от 9 до 183 из 10000 при изменении угла крена от 5° до 20°.

ТАБЛИЦА II. Коэффициент ухудшения геометрического фактора по высоте при крене ЛА, угол места $5^\circ$ 

β	Mean $\delta_V$	СКО δ <sub>V</sub>	Max $\delta_V$
5°	1,056	0,076	1,911
10°	1,114	0,109	2,731
15°	1,171	0,134	2,731
20°	1,229	0,158	3,162

ТАБЛИЦА III. КОЭФФИЦИЕНТ УХУДШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ФАКТОРА ПО ВЫСОТЕ ПРИ КРЕНЕ ЛА, УГОЛ МЕСТА 10°

β	Mean <b>b</b> <sub>V</sub>	<b>CKO</b> δ <sub>V</sub>	Max ð
5°	1,065	0,101	3,840
10°	1,132	0,149	3,840
15°	1,201	0,188	3,840
20°	1,273	0,226	3,914

V. Заключение

В докладе представлены статистики коэффициентов ухудшения точности навигационных определений в зависимости от крена ЛА и от допустимых углов возвышения спутников. Проведено сравнение коэффициентов ухудшения геометрических факторов при кренах потребителя для навигационных определений по двум спутниковым системам и по одной системе.

В результате моделирования были установлены предельные значения кренов ЛА, при которых навигационные определения могут быть выполнены со стандартной точностью при работе по двум спутниковым системам.

Совместное использование навигационных полей двух спутниковых радионавигационных систем ГЛОНАСС и GPS позволяет существенно расширить область допустимых значений кренов потребителя, что позволит увеличить объём решаемых задач, в том числе задач навигации и посадки ЛА в сложных условиях пилотирования.

#### Литература

- Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ. Ред. 5.1. М.: РНИИ КП, 2008. 74 с.
- [2] ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. 4-е изд. перераб. и доп. М.: Радиотехника, 2010. 800 с.
- [3] Совместное использование навигационных полей спутниковых радионавигационных систем и сетей псевдоспутников / В.И. Бабуров, Н.В. Иванцевич, Н.В. Васильева, Э.А. Панов. СПб.: Агентство «РДК-Принт», 2005. 264 с.
- [4] Информационно-аналитический центр координатно-временного и навигационного обеспечения: [Электронный pecypc]. URL: www.glonass-iac.ru.

# Распознавание места с использованием сиамской нейронной сети в задаче одновременной локализации и построения карты при разреженном восприятии

С.Б. Беркович Управление навигационногеодезических систем Институт инженерной физики Серпухов, Россия naviserp5@iifmail.ru Н.И. Котов Управление навигационногеодезических систем Институт инженерной физики Серпухов, Россия naviserp5@iifmail.ru

Р.Р. Бикмаев Управление навигационногеодезических систем Институт инженерной физики Серпухов, Россия naviserp5@iifmail.ru А.В. Шолохов Управление навигационногеодезических систем Институт инженерной физики Серпухов, Россия naviserp5@iifmail.ru

Аннотация—Использование нанодронов для построения карты является эффективным методом получения плана труднодоступных мест. В работе представлены алгоритмы построения карты с использованием графа факторов и коррекции ошибок путем распознавания места с использованием сиамской сверточной нейронной сети. Приведены экспериментальные результаты, полученные с применением нано-дрона в режиме автономного полета. Построенная карта местности оценивалась на согласованность численным методом.

Ключевые слова—одновременная локализация и построение карты, разреженное восприятие, замыкание петли, сиамская нейронная сеть.

## I. Введение

Построение карты труднодоступных мест или местности без доступа спутниковой системы навигации актуальная задача для навигации роботов в условиях высокой неопределенности наблюдений. В настоящее время она решается с помощью одновременной локализации и построения карты [1] с использованием стереокамер и лазерных дальномеров, имеющих высокую плотность измерительной информации. Данные датчики могут размещаться на роботе, который будет иметь определенные габаритные размеры, не всегда позволяющие проникать в труднодоступные места.

В этом случае использование очень маленьких квадрокоптеров (нанодронов) позволила бы решить задачу построения карт труднодоступных мест. Однако данные роботы могут использовать маломощные сенсоры, восприятие которых может быть очень разреженным, а измерения шумным.

Тем не менее существуют подходы с использованием нано-дронов, которые можно объединить в один класс решений задачи одновременной локализации и построения карты с разреженным.

## II. Подходы

Задача одновременной локализации и построения карты с разреженным восприятием отличается тем, что в

ней робот получает меньше измерительной информации с большей неопределенностью.

В подходе Биверса и Гуанга [2] измерения с лазерного дальномера, представленные в виде пяти направлений показаний дальности, объединяются в мультискан, а историю поз включают в вектор состояния. Ориентиры из собранных разреженных сканов оценивают с помощью фильтра частиц Рао-Блэквелла, используя историю поз в векторе состояния. Оцененные ориентиры разбиваются на кластеры и объединяются в линии, которые наносятся на сетку занятости. Применение данного алгоритма, по мнению авторов, приводит к появлению ложных ориентиров, но при определенном разрешении сетки обобщение линейных объектов позволяет правильно построить карту.

В другом подходе [3] также применяется мультисканирование, чтобы преодолеть разреженность сонаров. Авторы применяют фильтр частиц для оценки позы робота, и вероятностное преобразование Хафа для извлечения линейных сегментов из мультисканов. Затем строят карту с учетом предположения о параллельности и перпендикулярности стен, объединяя линейные сегменты в отрезки. У данного подхода есть ограничение – вероятностное преобразование Хафа не уточняет ориентиры, измеренные сонарами, с учетом предыдущих поз робота.

Этот недостаток компенсируется в подходе Чжоу и др. [4] за счет применения одной из разновидностей баейсовской сети - графа факторов. Высокую неопределенность разреженного восприятия авторы этого подхода также предлагают снижать составлением мультисканов с извлечением в них линейных сегментов. Однако вместо фильтрации позы робота применяют оптимизацию с помощью составления графа факторов. Для внешней оптимизации в работе предлагается строить граф ориентиров, в котором вершинами являются позы робота в виде вектора  $(x, y, \theta)^T$ , а ограничениями выступают одометрия и ориентиры, которые принадлежат с определенным допуском линейным сегментам, полученным из мультисканов. Для внутренней оптимизации применяется сетка занятости, с помощью которой достигается согласованность построенной карты. Для этого сетка занятости делится на подкарты и сравнивается с линейными сегментами мультисканов. При наличии корреляции выдвигается гипотеза о наличии замыкании петли. Она подтверждается пространственной проверкой: если текущая поза находится в ячейке, которая входит в ядро 3x3 подкарты сетки занятости, то петля обнаружена, граф поз оптимизируется и выравнивается карта. Недостатком подхода, по мнению авторов, является отсутствие достаточного перекрытия между подкартой, составленной из сетки занятости, и кадра, содержащего линейные сегменты мультискана. Тем самым задача замыкания петли не всегда решается. Стоит отметить, что в перечисленных подходах построенные карты не оценивались численными методами на согласованность, ограничиваясь визуальной оценкой отдельных участков или визуальной схожестью с топологической структурой окружающей среды.

Идея нашего подхода заключалась в следующем:

- Для снижения неопределенности наблюдения в измерениях датчика дальности учитывать углы тангажа, крена и рыскания робота, а также смещение датчиков от центра масс нанодрона.
- Для замыкания петли использовать нелинейную функция сравнения подкарты текущего мультискана с подкартой из графа «видимости». Оценка сходства в процессе внутренней оптимизации определять с помощью модели сиамской сверточной нейронной сети.
- Для построения карты применить сетку занятости, для которой вероятность занятости ячеек представляет задачу бинарной байесовской оценки со статическим состоянием.
- Полученную цифровую модель оценить на согласованность с точки зрения сенсорных данных численным методом.

#### III. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Формулируем нашу задачу построения двумерной карты труднодоступной местности как задачу апостериорной оценки сетки занятости, в которой вероятность заполнения ячеек определяется бинарной байесовской оценкой [5]:

$$l(m_i | z_{1:t}, x_{1:t}) = l(m_i | z_{1:t-1}, x_{1:t-1}) + l(m_i | z_t, x_t) - l(m_i)$$
(1)

где логарифм отношения вероятности  $l(x) = \log \frac{p(x)}{1 - p(x)}$ ,

 $m_i$  – і-я ячейка сетки,  $Z_{1,i}$  – набор всех наблюдений,  $X_{1,i}$  – путь робота, определяемый через последовательность поз (положение и ориентация).

 $Z_{1x}$  и  $X_{1x}$  будем считать неизвестными и требующими оценки. Тогда задачу построения двумерной карты определим как задачу оценки максимального правдоподобия поз робота и наблюдений датчика или как максимальный апостериорный вывод по графу факторов:

$$\hat{x} = \arg\max_{x} \prod_{i=1}^{t} e^{\{-\frac{1}{2} \|f_{x}(x) - z_{i}\|_{\Sigma_{i}}^{2}\}}$$

В предположениях модели гауссового шума максимальный апостериорный вывод по графу факторов эквивалентен задаче наименьших квадратов [6].

На рис. 1 показана система координат, в которой перемещается робот. Его поза есть вектор  $(x_i^p, y_i^p, \theta_i^p)^T$ , положение k-ого ориентира  $x_k^1 - (u_k^1, v_k^1)^T$ . Поза робота  $x_i^p \in SE(2)$  и оценивается бортовыми датчиками, выдавая навигационную информацию для анализа в требуемый момент времени.



Рис. 1. Система координат движения робота

Датчик дальности измеряет расстояние *d* до ориентира по четырем фиксированным на борту робота углам  $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ . Предполагая, что продольная ось дрона совпадает с осью измерения фронтального датчика, определяется пеленг на ориентир –  $\alpha$ .

Последовательные позы робота  $x_i^p$  и  $x_{i+1}^p$  связаны относительным движением, приводящим дрон из  $x_i^p$  в  $x_{i+1}^p$ , измеренное одометром. Истинное преобразование между двумя положениями будет отличаться от измеренного на величину шума, воздействующие на бортовые датчики. Поэтому ребро одометрии (сплошная линия на рис. 2) между вершинами поз  $x_i^p$  и  $x_{i+1}^p$  описывает движением между узлами  $x_{i,i+1}^p \in SE(2)$  и обратной ковариацией измерения  $\Omega_{i,i+1}^p \in R^{3\times 3}$ .

Из позы  $x_i^p$  робот обнаруживает ориентир  $x_k^1$  и соответствующее измерение моделируется ребром, идущим от положения робота к ориентиру. Ограничение между положением дрона и ориентиром параметризуется положением ориентира в базисе бортовой системы  $x_{i,k}^l \in \mathbb{R}^2$  и обратной ковариацией измерения  $\Omega_{i,k}^l \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Положения ориентиров находятся в евклидовом пространстве. Приращения  $\Delta x_k^l$  находиться в том же пространстве и оператор композиции движения  $\oplus$  выражается векторной суммой:

$$x_{k}^{l} \otimes \Delta x_{k}^{l} = x_{k}^{l} + \Delta x_{k}^{l} = \begin{pmatrix} u + \Delta u \cos \alpha - \Delta v \sin \alpha \\ v + \Delta u \sin \alpha + \Delta v \cos \alpha \end{pmatrix}$$
(2)

Оператор композиции движения  $\oplus$  для позы робота определялся как в подходе Кумерле и др. [7]:

$$x_i^p \otimes \Delta x_i^p = \begin{pmatrix} x + \Delta x \cos \theta - \Delta y \sin \theta \\ y + \Delta x \sin \theta + \Delta y \cos \theta \\ \|(\theta + \Delta \theta)\| \end{pmatrix}$$
(3)

где  $\Delta x$  – продольное смещение,  $\Delta y$  – боковое смещение и  $\Delta \theta$  – изменение ориентации.

Для функции ошибок ребер, соединяющих позу робота  $x_i^p$  и ориентир  $x_k^l$ , прогноз измерения  $h_{i,k}^1(x_i^p, x_k^l)$  вычислялся как:

$$h_{i,k}^{l}(x_{i}^{p}, x_{k}^{l}) = \begin{pmatrix} (x-u)\cos\alpha + (y-v)\sin\alpha \\ -(x-u)\sin\alpha + (y-v)\cos\alpha \end{pmatrix}$$
(4)

Функция ошибок ориентиров определялась из следующей формулы:

$$e_{i,k}^{l}(x_{i}^{p}, x_{k}^{l}) = x_{i,k}^{l} - h_{i,k}^{l}(x_{i}^{p}, x_{k}^{l}).$$
<sup>(5)</sup>

«Виртуальное измерение» для ребра одометрии вычислялось как:

$$h_{i,i+1}^{\mathbf{p}}(x_{i}^{\mathbf{p}}, x_{i+1}^{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} (x_{i} - x_{i+1})\cos\theta_{i+1} + (y_{i} - y_{i+1})\sin\theta_{i+1} \\ -(x_{i} - x_{i+1})\sin\theta_{i+1} + (y_{i} - y_{i+1})\cos\theta_{i+1} \\ \|(\theta_{i+1} - \theta_{i})\| \end{pmatrix}$$
(6)

Поскольку измерения позы принадлежат SE(2), то функция ошибки поз определялась разностью композиции движения:

$$e_{i,i+1}^{p}(x_{i}^{p}, x_{i+1}^{p}) = x_{i,i+1}^{p} - h_{i,k}^{1}(x_{i}^{p}, x_{k}^{1})$$
(7)

Функции ошибок факторов объединялись в целевую функцию для оптимизации графа:

$$F(X) = \sum \left\| e_{i,i+1}^{p}(x_{i}^{p}, x_{i+1}^{p}) \right\|_{\sum_{i}}^{2} + \sum_{ik} \left\| e_{i,k}^{l}(x_{i}^{p}, x_{k}^{l}) \right\|_{\sum_{k}}^{2}$$
(8)



Рис. 2. Структура графа факторов. Синие треугольники – позы робота, красные звезды – положение ориентиров, ограничения показаны сплошной и прерывистой линиями, а окружность – область замыкания петли.

Определенная целевая функция (8) позволяет оптимизировать позы и ориентиры нелинейным методом наименьших квадратов для построения карты. Однако ошибка одометрии и измерений дальности до ориентиров будет иметь накопительный характер с течением времени. Более того, разреженное восприятие увеличивает неопределенность наблюдения и составления фактора ориентиров. Из-за чего построенная карта может быть несогласованной, то есть несхожей с топологической структурой окружающей среды.

Для получения согласованной карты должна решаться задача замыкания петли [8], чтобы корректировать ошибки поз и положений ориентиров.

Из определения переменных состояния, модели факторов, функции ошибок и процессов для построения карты требовалось решить следующие задачи:

- Определить алгоритм оптимизации поз и ориентиров в процессе внешней и внутренней оптимизации.
- Создать функцию сходства для замыкания петли.
- Оценить согласованность построенной карты.

## **IV.** РЕШЕНИЕ

Для решения поставленной задачи в работе было определено несколько этапов:

- уточнение данных измерения сенсоров;
- распознавание места с использованием сиамской сверточной нейронной сетью в местах повторного посещения;
- построение графа факторов из поз и ориентиров, используя мультисканирование;
- замыкание петли;
- оценка карты на согласованность.

#### А. Уточнение данных измерений сенсоров

Уточнение данных включало в себя преобразование измеренных положений ориентиров в плоские координаты на карте.

Преобразование положения k-ого ориентира  $x_k^l$  в положение  $x_l^m$  в системе координат карты (*X*,*Y*) осуществлялось по следующей зависимости:

$$\begin{bmatrix} x_t^m \\ 1 \end{bmatrix} = R_y \cdot R_r \cdot R_p \cdot \begin{vmatrix} x_i^p + (d_k + C_k) \cdot \cos \alpha_k \\ y_i^p + (d_k + C_k) \cdot \sin \alpha_k \\ 1 \end{vmatrix}$$
(9)

где  $R_p$ ,  $R_r$ ,  $R_y$  – матрицы вращения по тангажу, крену и рысканью, а  $C_k$  – смещение положения датчика дальности от центра масс робота.

Смещения положения датчиков от центра масс квадрокоптера были определены как среднее значение многократных измерений известного расстояния.

## В. Распознавание места с использованием сиамской нейронной сети

Для обнаружения петли производилась пространственная проверка положения робота на сетке занятости с размером интереса I ячеек или областью интереса  $I \times I$  ячеек. Если робот находился в области интереса, то положительный результат поиска кандидата на замыкание петли считался корректным.

Распознавание места осуществлялось путем сравнения подкарт, находящихся в стеке незамкнутой петли, с текущей подкартой совместной видимости. Алгоритм сравнения строился на функции сходства, которая была получена из модели сиамской сверточной нейронной сети, состоящей из 6 слоев удвоенной сети, на выходе которой использовалась сигмоидальная активация [9].

## С. Модель сиамской нейросети

Для поиска кандидата на замыкание петли используется синтезированная под размеры покарты совместной видимости модель сиамской сверточной нейронной сети с L слоями, каждый из которых содержит  $N_L$  единиц нейронов с весовыми коэффициентами  $w_L$ . В ней  $g_{1,L}$  – скрытый вектор в слое L первого "близнеца а  $g_{2,L}$  – в слое второго "близнеца". В первых пяти слоях используется функция активации ReLU, а в выходных слоях сигмоида. Поэтому вектор предсказания задавался как в подходе Салахутдинова и др. [10]

$$p = \sigma \left( \sum_{j} \left| g_{1,L-1}^{(j)} - g_{2,L-1}^{(j)} \right| \right), \tag{10}$$

где *сигмоидальная функция активации*.

Модель синтезированной сиамской сверточной нейронной сети с параметрами оптимизации и картой признаков представлена на рис. 3



Рис. 3. Модель сиамской сверточной нейронной сети, которая использовалась в алгоритме замыкании петли

#### *D. Машинное обучение*

Набор данных для машинного обучения создавался из подкарт, полученных с разным количеством измерений в мультискане, размер которого определяется как в подразделе F. Для обучения применялась мини-пакетная оптимизация с бинарной кросс-энтропийной функцией потерь имеющей следующий вид:

$$L(\bar{y}^{(i)}, y^{(i)}) = y(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})\log p(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) + (1 - y(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})\log(1 - p(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})), \quad (11)$$

где  $y(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$  – векторы, которые содержат метки для мини-пакета *i*. Если  $y(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = 1$ , тогда  $x_1$  и  $x_2$  принадлежат к одному и тому же классу подкарт, и  $y(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = 0$  в противном случае.

С учетом регуляризации при обучении целевая функция для машинного обучения представляла собой следующей выражение:

$$J(w^{[l]}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L(\hat{y}^{(i)}, y^{(i)}) + \frac{\lambda}{2m} \sum_{l=1}^{L} \left\| w^{[l]} \right\|_{F}^{2}$$
(12)

где m – количество мини-пакетов,  $\left\|w^{[l]}\right\|_{F}^{2} = \sum_{i=1}^{n^{[l-1]}} \sum_{j=1}^{n^{[l]}} \left(w^{[l]}_{ij}\right)^{2}$  –

квадратная норма Фробениуса, а последний многочлен в целевой функции является *L2* регуляризацией.

Для вычисления весовых параметров глубокой нейронной сети применялся алгоритм адаптивной оценки момента. Для каждой пары изображений подкарт генерировались аффинные преобразования с углами (0  $\pi = 3\pi$ )

$$\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{5\pi}{2}\}.$$

#### Е. Метрика оценки машинного обучения

Для оценки модели применялась метрика подсчета числа неправильных классификаций. Для сравнения предсказанной метки  $\hat{y}_p$  и истинной  $y_p$  использовалось следующее условие:

$$\mathbf{I} = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad \hat{y}_p = y_p \\ 1, & \text{if} \quad \hat{y}_p \neq y_p \end{cases}$$
(13)

Из суммирования тестовых пар  $(x_i, y_i)$  вычислялось число неправильных распознаваний мест по выражению:  $\sum_{p=1}^{P} I(\hat{y}_p, y_p)$ . Затем определялась точность по следующей формуле:

 $A = 1 - \frac{1}{P} \sum_{p=1}^{P} I(\hat{y}_{p}, y_{p})$ (14)

#### F. Составление подкарты совместной видимости

Для построения подкарты составлялся мультискан размером N, который определялся как

$$N = \frac{\Delta S}{\upsilon \cdot \Delta t},\tag{15}$$

где  $\Delta S$  – расстояние, пройденное роботом для получения мультискана, v – скорость робота,  $\Delta t$  – время дискретизации измерений.

Из определенного набора измерений по формуле (1) строилась подкарта с учетом оцененных поз и положений ориентиров.

## G. Ассоциация данных

Конструирования графа осуществлялось по принципу скользящего окна, размер которого определялся размером мультискана N.

Граф факторов ориентиров строился с ассоциацией данных. Для этого определялись координаты центрального пикселя каждой сетки: синий прямоугольник, расположенный на пересечении линий (рис. 4).

Затем в зависимости от скорости робота вычислялся размер субкарты ячеек, в которые могут попасть ориентиры (прогнозируемые ячейки). Инициализировалось минимальное расстояние от центрального пикселя до максимально возможного. Вычислялось расстояние между текущими измерениями и центральным пикселем прогнозируемых ячеек. Определялся прогнозируемый центр ячейки, ближайший к текущему наблюдаемому ориентиру. Устанавливался идентификатор наблюдения равным идентификатору ближайшего прогнозируемого ориентира.



Рис. 4. Схема ассоциации данных положений ориентиров.

#### Н. Замыкания петли

В алгоритме замыкания петли использовалась идея подхода, с применением скользящего окна и составления графа совместной видимости [11]. Отличием нашего подхода стало то, что граф факторов синтезировался из мультисканов, вместо ключевых кадров. Из-за применения вероятностной сетки занятости граф совместной видимости отображался на подкарту совместной видимости.

Алгоритм замыкания петли функционировал в процессе внутренней оптимизации и включал в себя следующие шаги:

- Составление подкарты совместной видимости.
- Распознавание места с использованием сиамской нейронной сети.
- Оптимизация петли.

#### I. Оптимизация петли

Оптимизация замыкания петли формулировалась как нелинейная задача наименьших квадратов, как в подходе Гесса и др.[12]. При обнаружении петли для пары сканирования k и подкарты t поза  $x_{tk}^p$  определялась в системе координат подкарты. Матрица ковариации рассчитывалась

$$\sum_{lk} = \sigma_d^2 \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha)\cos\alpha \\ \sin(\alpha)\cos\alpha & \sin(\alpha)^2 \end{bmatrix}$$
(16)

где  $\sigma_d$  – ошибка измерения дальности. Невязка E определялась как:

$$E^{2}\left(x_{t}^{m}, x_{k}^{l}; \sum_{tk} x_{tk}^{p}\right) = e\left(x_{t}^{m}, x_{k}^{l}; x_{tk}^{p}\right)^{T} \sum_{tk}^{-1} e\left(x_{t}^{m}, x_{k}^{l}; x_{tk}^{p}\right)$$
(17)  
пде  $e\left(x_{t}^{m}, x_{k}^{l}; x_{tk}^{p}\right) = x_{tk}^{p} - \begin{bmatrix} R_{x_{t}^{m}}^{-1}\left(t_{x_{t}^{m}}^{t} - t_{i}^{p}\right) \\ x_{t}^{m}\left(t_{x}^{m} - x_{i}^{p}\right) \end{bmatrix}$ 

Оптимизация петли выполнялась через функцию потерь Хьюберта  $\rho$ :

$$\arg\min_{\xi^m,\xi^s} \frac{1}{2} \sum_{ij} p\left( E^2\left(x_t^m, x_i^p; \sum_{tk} x_{tk}^p\right) \right)$$
(18)

где  $\xi^m = \{x_i^m\}_{i=1,\dots,m}$  – позы подкарты,  $\xi_i^p = \{x_i^p\}_{i=1,\dots,n}$  – позы сканирования.

## J. Оценка согласованности карты

Проверка гипотезы о согласованности карты проводилась с использованием подхода, основанной на мере парной совместимости [13]. Она вычислялась по формуле:

$$M_{ij} = \sum_{k} d_i \left( p_j^k \right) + \sum_{k} d_j \left( p_i^k \right)$$
(19)

где  $d_i(p)$  – расстояние несогласованности  $d_i(p)$  для точки p, из множества точек, определяющих многоугольник видимости по точкам скана. На меру несогласованности  $M_{ij}$  при процессе оптимизации карты влияет параметр  $\Phi$  как:

$$M(\Phi) = \frac{1}{\Xi(\Phi)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} M_{ij}(\Phi), \qquad (20)$$

где  $\Xi(\Phi)$  – количество пар перекрывающихся сканов. Чем меньше  $\Phi$ , тем согласованнее карта. Поэтому наименьшее значение  $\Phi$  являлось наилучшей оценкой согласованности карты:

$$\Phi^* = \arg\min_{\Phi \in [0, +\infty]} M(\Phi)$$
(21)

#### V. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для эксперимента использовался нано-дрон Crazyflie2.1, который определял дальность до ориентиров четырьмя сенсорами. Датчики измеряли расстояния вперед, влево, назад и вправо до 4 метров с точностью до нескольких миллиметров. Смещения положения датчиков от центра масс коптера были определены как среднее значение многократных измерений известного расстояния. Полученные значения  $C_K$  приведены в табл. 1.

 
 TABLE I.
 Смещения положения датчика от центра масс Crazyflie2.1

Направле ние	вперед	влево	назад	вправо
$C_K$ , м	0.015	0.017	0.016	0.014



Рис. 5. Моделируемая местность для полета Crazyflie2.1

При проведении эксперимента коптер автономно перемещался с установленной скоростью  $v_x$  и  $v_y$  на высоте 0.2 метра по специальной площадке размером 3 на 1,5 метра, огибая самостоятельно препятствия. Местность моделировалась с учетом предположения о не параллельности и не перпендикулярности стен (рис. 5). В задаче апостериорной оценки сетки занятости в качестве модели измерения  $l(m_i | z_i, x_i)$  в зависимости (1) использовался алгоритм Брезенхэма [14].

В ходе натурного эксперимента проверялось несколько предположений:

- Увеличение скорости движения коптера (v<sub>x</sub>, v<sub>y</sub>) уменьшает согласованность карты, построенной с использованием предложенного подхода.
- Размер мультискана, используемого в нашем алгоритме замыкания петли, влияет на согласованность карты.
- Предложенный подход имеет зависимость от разрешения сетки занятости, но ее увеличение может снижать согласованность карты.



Рис. 6. Прогнозируемое наблюдение сиамской нейронной сети

## А. Машинное обучение

Машинное обучение проводилось на натурных данных, полученных в ходе автономного полета нанодрона Crazyflie2.1 над моделью местности (рис. 5). Набор данобучения создавался ных для для  $v_x \in \{0.1, 0.05, 0.03, 0.01, 0.005\}$  и  $v_y = v_x / 2$  в пяти облетах. Подкарта формировалась из мультискана, размер которого определялся по формуле (15), где расстояние  $\Delta S$  задавалось в зависимости от скорости, например, для v = 0.005 м/с –  $\Delta S = 0.03$  метра. Положительными образцами считались подкарты, которые получены в одном измерении с допуском 10% (рис.6). Извлеченные для обучения данные представляли собой 258 директорий, в каждой из которых порядка 30 изображений.

Данные для тестирования были собраны аналогичным способом: по 3 пролета – на разных скоростях. Из тестового набора случайным образом выбирались 2 папки, из которых формировалась одна пара схожих и 30 пар несхожих изображений. Предсказанный класс определяется как  $K^* = \arg\max_x p^{(k)}$ , где p рассчитывается по формуле (10). Если К соответствует классу схожих пар, то проверка однократности обучения считалась корректной. Оценка эффективности весовых параметров синтезированной модели рассчитывалась по формулам (13),(14)

## В. Замыкание петли

Для проверки предположений были получены натурные данные на пяти облетах по каждому значению скорости  $v_x \in \{0.1, 0.05, 0.03, 0.01, 0.005\}$ .

Для оценки первой гипотезы разрешение вероятностной сетки занятости была установлена на 1 х 1 мм. Оценка согласованности карты определялась по формулам (19), (20), (21), которые приведены в табл.2. Оценка согласованности карты без коррекции вычислялась только для оптимального параметра.

ТАВLЕ II. РЕЗУЛЬТАТЫ ЗАВИСИМОСТИ ОЦЕНКИ СОГЛАСОВАННОСТИ КАРТЫ ОТ СКОРОСТИ РОБОТА И КОЛИЧЕСТВА ЗАМКНУТЫХ ПЕТЛЕЙ

Значение скорости <sup>v</sup> x	0.1	0.05	0.03	0.01	0.005	0.005
Значение скорости <sup>v</sup> y	0.05	0.025	0.015	0.005	0.0025	0.0025
Среднее кол-во петлей	3.1	3.7	4.7	4.8	7.3	-
М(Ф)	27.1	23.4	19.7	18.3	12.2	21.3
Φ	17.3	14.2	15.1	13.8	4.7	17.1

Второе предположение оценивалось на данных, полученных при облете на скорости 0.005 м/с. На этой скорости была построена карта с оптимальной согласованностью.

Результаты оценки согласованности при разных размерах мультискана приведены в табл. 3.

Размер мультис- кана, ед.	100	150	200	250	300	150
Среднее кол-во петлей	7.7	7.2	6.7	6.8	8.1	-
М(Ф)	17.1	12.4	18.3	19.3	19.2	21.3
Φ	24.5	21.9	5.3	4.7	8.6	24.5

ТАВLЕ III. РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНКИ СОГЛАСОВАННОСТИ КАРТЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РАЗМЕРА

Для проверки третьей гипотезы также использовались данные, полученных при облете на скорости 0.005 м/с. В табл.4 показаны результаты оценки.

 
 TABLE IV.
 Результаты оценки согласованности карты в зависимости от разрешения.

Разрешение сетки, мм	10	7	5	3	1
Среднее кол-во петлей	13.2	7.9	4.9	6.8	9.2
<b>Μ</b> (Φ)	35.1	33.4	17.4	12.6	15.2
Φ	24.5	21.9	5.3	4.7	8.6

Карта, построенная с замыканием петли при скорости по продольной оси – 0.005 м/с и разрешение сетки в 3 мм, приведена на рис. 7.







Рис. 7. Построенные карты а) с уточнением измерений, b) с оптимизацией поз и ориентиров, c) с оптимизацией поз и ориентиров и замыканием петли при скорости по продольной оси -0.005 м/с и разрешение сетки в 3 мм.

## VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уменьшение скорости полета увеличивает связность графа факторов за счет большего количества данных из полученных наблюдений. Из табл.1 также следует, что фактор снижения скорости увеличивает количество замкнутых петель. Поэтому на меньшей скорости коптера построенная карта имеет лучшую оценку согласованности.

Из табл. 2 видно, что размер мультискана N = 150 при частоте 25 Гц имеет оптимальную оценку согласованности карты. Снижение или увеличение размера m влияет на количество замыканий петли, но не улучшает оценку согласованности из-за появления ложных срабатываний при распознавании места.

Разрешение сетки в 3 мм оптимально при скорости по продольной оси – 0.005 м/с и по поперечной оси -0.0025 м/с следует из данных табл. 3. При разрешении 10 на 10 мм резко увеличивается количество замыканий петель ввиду появления ложных срабатываний во время распознавания места. Из-за этого построенная карта становится менее согласованной.

#### Литература

- [1] F.Dellaert, M. Kaess, "Factor Graphs for Robot Perception", Found. Trends Robotics, 6, 2017, pp. 1-139.
- [2] K. Beevers and W. Huang, "SLAM with sparse sensing," in Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2006, pp. 2285–2290.
- [3] T. N. Yap and C. R. Shelton, "SLAM in large indoor environments with low-cost, noisy, and sparse sonars," in 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2009, pp. 1395–1401.
- [4] H. Zhou, Z. Hu, S. Liu and S. Khan, "Efficient 2D Graph SLAM for Sparse Sensing," IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Japan, 2022, pp. 6404-6411.
- [5] S. Thrun, W. Burgard, D. Fox, "Probabilistic Robotics", MIT Press, 2006, pp. 94-96.
- [6] F. Dellaert, M. Kaess, "Factor graphs for robot perception", Foundations and Trends in Robotics, vol. 6, no. 1-2, 2017, pp. 1–139.
- [7] R. Kummerle, G. Grisetti, H. Strasdat, K. Konolige, and W. Burgard, "G2o: A general framework for graph optimization," in IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2011, pp. 3607–3613.
- [8] S. Arshad, G-W. Kim, "Role of Deep Learning in Loop Closure Detection for Visual and Lidar SLAM: A Survey", Sensors, 2021, 21(4):1243.
- [9] Р.Р.Бикмаев, "Определение нелинейной функции сравнения изображений с применением сиамской сверточной нейронной сети", Известия Института инженерной физики, 2023, стр. 102-106.
- [10] G. Koch, R. Zemel, R. Salakhutdinov, "Siamese Neural Networks for One-shot Image Recognition", Proceedings of the 32 International Conference on Machine Learning, France, 2015.
- [11] R. Mur-Artal, J.D. Tardos, "Fast relocalisation and loop closing in keyframe-based SLAM," IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2014, pp. 846-853.
- [12] W. Hess, D. Kohler, H. Rapp and D. Andor, "Real-time loop closure in 2D LIDAR SLAM," 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Sweden, 2016, pp. 1271-1278.
- [13] M. Mazuran, G. Tipaldi, L. Spinello, W. Burgard, C. Stachniss, "A statistical measure for map consistency in SLAM", IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2014, pp. 3650-3655.
- [14] J.E. Bresenham, "Algorithm for computer control of a digital plotter", IBM Systems Journal, 4 (1), 1965, pp. 25–30.

# Учет априорной информации о траектории движения объекта при коррекции показаний навигационной системы по данным о геофизических полях

О.А. Степанов *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО* Санкт-Петербург, Россия <u>soalax@mail.ru</u> В.А. Васильев *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО, СПбГЭТУ «ЛЭТИ»* Санкт-Петербург, Россия <u>vasiliev\_vl.a@mail.ru</u>

Аннотация—Задача коррекции показаний навигационной системы по данным о геофизических полях формулируется в рамках неинвариантного подхода, предполагающего наличие и учет априорной информации о характере движения объекта при проведении коррекции. Описывается постановка задачи и используемые алгоритмы. Приводятся и обсуждаются результаты моделирования.

Ключевые слова—коррекция, навигационная система, геофизические поля, погрешность, изменчивость, байесовский подход, алгоритмы оценивания, априорная информация о траектории движения.

#### I. Введение

Традиционно задача уточнения (коррекции) показаний навигационной системы (HC) по данным от внешних средств, решаемая с использованием байесовской теории фильтрации, формулируется в рамках инвариантного относительно траектории движения объекта подхода. В этом случае решается задача фильтрации, вектор состояния в которой включает два подвектора. Один подвектор описывает погрешности корректируемой НС, а другой - погрешности средств коррекции [1-4], при этом в качестве измерений выступают только измерения от внешних средств, а показания НС рассматриваются как входные сигналы в модели для этих измерений. Полученные в результате решения задачи фильтрации оценки погрешностей НС используются затем для уточнения искомых навигационных параметров. При таком подходе какая-либо априорная информация о характере движения объекта в синтезируемом алгоритме не учитывается. Его достоинство заключается в отсутствии явной зависимости алгоритма от свойств и характера предполагаемой траектории движения.

Вместе с тем в ряде случаев объект при проведении обсервации в процессе коррекции должен двигаться по заранее задаваемой траектории, свойства которой известны. Привлечение этой информации может повысить точность решения задачи коррекции особенно в тех случаях, когда сама коррекция носит длительный во времени характер. Именно такая ситуация в ряде случаев и складывается при проведении коррекции показаний НС с использованием измерителей геофизических полей с точечным зондированием, поскольку время коррекции определяется необходимостью прохождения траектории определенной длины [5]. Эта задача известна как задача навигации по геофизическим полям (ГФП) [6-23], нередко называемая также в отечественной литературе задачей корреляционно-экстремальной навигации [7, 8, 13, 16]. Как правило, она также формулируется в рамках

Ю.А. Литвиненко АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО Санкт-Петербург, Россия ya litvinenko@mail.ru А.М. Исаев *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО* Санкт-Петербург, Россия <u>itmo\_student@mail.ru</u>

инвариантного подхода [9, 23]. Ранее было показано, что при решении задачи в такой постановке точность определения координат заметно снижается при наличии изменчивости ошибок НС и существенным образом зависит от характера этой изменчивости [24, 25].

Таким образом, актуальным представляется исследование возможности повышения эффективности решения задачи навигации по ГФП за счет учета априорной информации о траектории движения объекта, чему и посвящена предлагаемая работа.

Структура доклада следующая. После введения во второй части приводится постановка рассматриваемой задачи коррекции в рамках неинвариантного подхода, позволяющего учесть информацию о модели движения объекта. Здесь же эта задача формулируется и в рамках традиционного инвариантного подхода, при котором информация о модели движения не используется. Раздел 3 посвящен описанию возможных моделей для траектории движения объекта, погрешностей НС и суммарных погрешностей карты и измерителя геофизического поля. В разделе 4 кратко описывается используемые алгоритмы, а в разделе 5 – условия моделирования и полученные результаты. Выводы по докладу приводятся в заключении.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОРРЕКЦИИ НС В РАМКАХ ДВУХ ПОДХОДОВ

Опираясь на работы [23–25], сформулируем постановки задач фильтрации, соответствующие двум рассматриваемым подходам. Предположим, что на борту подвижного объекта имеются HC, называемая далее опорной или корректируемой и вырабатывающая измерения его координат на плоскости  $y_i^{HC} = \left[ y_i^{HC(1)} \quad y_i^{HC(2)} \right]^T$  в *i*-е моменты времени, и датчик, обеспечивающий измерение геофизического поля  $y_i$ , показания которых могут быть представлены в виде

$$y_i^{HC} = y_i^{\Pi O} + \Delta y_i^{HC}, \qquad (1)$$

$$y_i = \phi^k \left( y_i^{\Pi O} \right) + \Delta y_i^{\Sigma}, \qquad (2)$$

где  $y_i^{nO} = \begin{bmatrix} y_i^{nO(1)} & y_i^{nO(2)} \end{bmatrix}^T$  – истинные координаты подвижного объекта в некоторой прямоугольной системе координат;  $\Delta y_i^{HC} = \begin{bmatrix} \Delta y_i^{(1)} & \Delta y_i^{(2)} \end{bmatrix}^T$  – погрешности выра-

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00626, <u>https://rscf.ru/project/23-19-00626/</u>.

ботки координат места HC;  $\phi^k \left( y_i^{IO} \right) - \phi$ ункция векторного аргумента, определяющая карту поля и позволяющая с точностью до ее погрешностей  $\Delta y_i^k$  вычислять значения поля в произвольной точке заданного района, т.е.  $\phi^k \left( y_i^{IO} \right) = \phi \left( y_i^{IO} \right) - \Delta y_i^k$ ;  $\phi \left( y_i^{IO} \right) - \phi$ ункция, описывающая зависимость истинных значений используемого поля от координат;  $\Delta y_i^{\Sigma} = \Delta y_i + \Delta y_i^k - суммарная погрешность измерений датчика <math>\Delta y_i$  и карты поля.

Будем полагать, что истинные координаты подвижного объекта  $y_i^{IIO}$  описываются с помощью линейного формирующего фильтра для векторной последовательности  $x_i^{IIO}$  размерности  $n^{IIO}$ :

$$x_{i}^{\Pi O} = \Phi_{i}^{\Pi O} x_{i-1}^{\Pi O} + \Gamma_{i}^{\Pi O} w_{i}^{\Pi O} .$$
 (3)

Для описания погрешностей  $\Delta y_i^{HC}$  и  $\Delta y_i^{\Sigma}$ , в свою очередь, вводятся два формирующих фильтра для векторных последовательностей  $x_i^{HC}$ ,  $x_i^{\Sigma}$  с размерностями  $n^{HC}$  и  $n^{\Sigma}$  соответственно:

$$x_{i}^{HC} = \Phi_{i}^{HC} x_{i-1}^{HC} + \Gamma_{i}^{HC} w_{i}^{HC}, \qquad (4)$$

$$x_i^{\Sigma} = \Phi_i^{\Sigma} x_{i-1}^{\Sigma} + \Gamma_i^{\Sigma} w_i^{\Sigma}.$$
 (5)

В соотношениях (3)–(5)  $\Phi_i^l$ ,  $\Gamma_i^l$  – известные матрицы динамики и порождающих шумов;  $w_i^l$  – центрированные, белошумные гауссовские последовательности размерности  $p^l$  с известными матрицами ковариаций  $Q^l$ ,  $l = \Pi O$ ,  $\Sigma$ , HC. Эти последовательности для простоты предполагаются независимыми между собой и от начальных условий.

Связь погрешностей  $\Delta y_i^l \, c \, x_i^l$  предполагается линейной  $\Delta y_i^{\Sigma} = H_i^{\Sigma} x_i^{\Sigma} + v_i^{\Sigma}$ ,  $\Delta y_i^{HC} = H_i^{HC} x_i^{HC} + v_i^{HC}$ , как и соотношение между истинными координатами объекта  $y_i^{IIO}$  и вектором параметров модели движения  $y_i^{IIO} = H_i^{IIO} x_i^{IIO}$ , где  $H_i^l$ ,  $l = \Pi O$ ,  $\Sigma$ , HC – известные матрицы;  $v_i^{\Sigma}$ ,  $v_i^{HC}$  – центрированные белошумные составляющие суммарных погрешностей карты и датчика поля и погрешностей HC с матрицами ковариаций  $R^{\Sigma}$  и  $R^{HC}$  соответственно. При этом будем полагать, что вектор  $x_i^{IIO}$  не коррелирован с вектором  $x_i^{HC}$ .

Введем составные векторы  $x_i = \left[ \left( x_i^{no} \right)^T \quad \left( x_i^{\Sigma} \right)^T \quad \left( x_i^{HC} \right)^T \right]^T$ ,  $w_i = \left[ \left( w_i^{no} \right)^T \quad \left( w_i^{\Sigma} \right)^T \quad \left( w_i^{HC} \right)^T \right]^T$  размерности  $n = n^{nO} + n^{\Sigma} + n^{HC}$ ,  $p = p^{nO} + p^{\Sigma} + p^{HC}$ и функцию

$$\tilde{\tilde{s}}_{i}\left(x_{i}\right) = \tilde{s}_{i}\left(x_{i}^{\Pi O}\right) + H_{i}^{\Sigma}x_{i}^{\Sigma},$$
(6)

в которой  $\tilde{s}_i\left(x_i^{\Pi O}\right) = \phi^k\left(H_i^{\Pi O}x_i^{\Pi O}\right).$ 

С учетом введенных обозначений в рамках неинвариантного подхода можно сформулировать следующую задачу нелинейной фильтрации: оценить вектор состояния

$$x_i = \Phi_i x_{i-1} + \Gamma_i w_i \tag{7}$$

по измерениям

$$y_i^g = \tilde{\tilde{s}}_i \left( x_i \right) + v_i^{\Sigma} , \qquad (8)$$

$$y_i^{HC} = \begin{bmatrix} H_i^{\Pi O} & \mathbf{0}_{2 \times n^{\Sigma}} & H_i^{HC} \end{bmatrix} x_i + v_i^{HC}, \quad (9)$$

где  $\Phi_i$ ,  $\Gamma_i$  формируются с учетом (3)–(5). Если ввести составной вектор  $y_i = \left[ y_i^g \quad \left( y_i^{HC} \right)^T \right]^T$ , то измерения (8)–(9) можно представить в виде

$$y_i = S_i\left(x_i\right) + v_i, \qquad (10)$$

где  $v_i$  – трехмерный составной вектор шумов измерений  $v_i = \begin{bmatrix} v_i^{\Sigma} & (v_i^{HC})^T \end{bmatrix}^T$  с матрицей ковариации  $R_i = diag(R_i^{\Sigma}, R_i^{HC})$ , а нелинейная вектор-функция определяется исходя из соотношения

$$S_{i}\left(x_{i}\right) = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{s}}_{i}\left(x_{i}\right) \\ \begin{bmatrix} H_{i}^{\Pi O} & 0_{2\times n^{\Sigma}} & H_{i}^{HC} \end{bmatrix} x_{i} \end{bmatrix},$$
(11)

В рамках инвариантного подхода, при котором информация о траектории не учитывается, соответствующая задача фильтрации формулируется так [9, 25]: оценить вектор состояния  $\tilde{x}_i$ 

$$\tilde{x}_i = \tilde{\Phi}_i \tilde{x}_{i-1} + \tilde{\Gamma}_i \tilde{w}_i \tag{12}$$

по измерениям

$$\tilde{y}_i^g = \tilde{\tilde{s}}_i^{HC} \left( \tilde{x}_i \right) + v_i^{\Sigma}, \qquad (13)$$

где  $\tilde{x}_i = \left[ \left( x_i^{HC} \right)^T \quad \left( x_i^{\Sigma} \right)^T \right]^T$ ,  $\tilde{w}_i = \left[ \left( w_i^{HC} \right)^T \quad \left( w_i^{\Sigma} \right)^T \right]^T$ , а

функция  $\tilde{\tilde{s}}_{i}^{HC}(\tilde{x}_{i})$  определяется следующей формулой:

$$\tilde{\tilde{s}}_{i}^{HC}\left(\tilde{x}_{i}\right) = \tilde{s}_{i}^{HC}\left(x_{i}^{HC}\right) + H_{i}^{\Sigma}x_{i}^{\Sigma}, \qquad (14)$$

в которой  $\tilde{s}_i^{HC}\left(x_i^{HC}\right) = \phi^k\left(y_i^{HC} - H_i^{HC}x_i^{HC}\right).$ 

Обе приведенные постановки представляют собой задачи нелинейной фильтрации в силу нелинейного характера функции  $\phi^k \left( y_i^{\Pi O} \right)$ . Их решение с использованием байесовской теории фильтрации сводится к получению оптимальных в среднеквадратическом смысле оценок  $\hat{x}_i^{opt} \left( \mathbf{y}_i \right)$  вектора состояния (7) по измерениям (10) в неинвариантном случае и оценки  $\hat{x}_i^{opt} \left( \mathbf{\tilde{y}}_i \right)$  вектора состояния (13) в инвариантном случае. Здесь для составных векторов измерений, накопленных к

текущему моменту времени *i* , использованы обозначения  $\mathbf{y}_i = [y_1, ..., y_i]^T$  и  $\tilde{\mathbf{y}}_i = [\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_i]^T$ .

Известно, что для получения искомых оценок и соответствующих им условных матриц ковариаций  $P_i^{opt}(\mathbf{y}_i)$ при решении задачи нелинейной фильтрации необходимо располагать апостериорной плотностью для вектора оцениваемых параметров. В этом случае, например, для задачи в неинвариантной постановке можем записать:

$$\hat{x}_{i}^{opt}\left(\mathbf{y}_{i}\right) = \int x_{i} p\left(\mathbf{x}_{i} / \mathbf{y}_{i}\right) d\mathbf{x}_{i}, P_{i}^{opt}\left(\mathbf{y}_{i}\right) = E_{p\left(\mathbf{x}_{i} / \mathbf{y}_{i}\right)} \left\{ \left(x_{i} - \hat{x}_{i}^{opt}\left(\mathbf{y}_{i}\right)\right) \left(x_{i} - \hat{x}_{i}^{opt}\left(\mathbf{y}_{i}\right)\right)^{T} \right\},$$
(15)

где  $p(\mathbf{x}_i / \mathbf{y}_i)$  – апостериорная (условная) к измерениям функция плотности распределения вероятности для составного вектора  $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T & \dots & x_i^T \end{bmatrix}^T$ ,  $E_{p(\mathbf{x}_i / \mathbf{y}_i)}$  – знак математического ожидания, соответствующего плотности, указанной в подстрочном индексе.

Аналогичные соотношения будут иметь место и при получении оценки  $\hat{\tilde{x}}_{i}^{opt}(\mathbf{y}_{i})$  в случае решения задачи в рамках инвариантной постановки.

#### III. Описание моделей

Конкретизируем введенные выше модели траектории движения объекта и погрешностей измерительных средств, которые будем использовать при исследовании возможностей повышения точности за счет учета характера движения. Будем считать, что траектория движения объекта в процессе проведения обсервации в непрерывной форме может быть задана в виде

$$\begin{cases} \dot{x}^{\Pi O(l)} = V^{\Pi O(l)}, \\ \dot{V}^{\Pi O(l)} = 0, \end{cases}, \ l = 1, 2.$$
(16)

В этом случае истинные координаты объекта  $y^{\Pi O(1)} = x^{\Pi O(1)}, y^{\Pi O(2)} = x^{\Pi O(2)}$  могут быть описаны с помощью полинома первой степени с неточно известными коэффициентами

$$x^{\Pi O(l)}(t) = x_0^{\Pi O(l)} + V_0^{\Pi O(l)}t, \quad l = 1, 2,$$
(17)

где  $x_0^{nO(1)} = x^{nO(1)}(0)$ ,  $x_0^{nO(2)} = x^{nO(2)}(0)$ ,  $V_0^{nO(l)} = V^{nO(l)}(0)$ , l = 1, 2 – независимые друг от друга гауссовские случайные величины с известными математическими ожиданиями  $\overline{x}_0^{(l)}$ ,  $\overline{V}_0^{(l)}$ , l = 1, 2 и дисперсиями  $\sigma_{x_0}^2$ ,  $\sigma_{V_0}^2$ . С учетом (16) матрица  $H_i^{nO}$  принимает вид:

$$H_i^{\Pi O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (18)

Для описания ошибок HC введем шестимерный вектор состояния в виде  $x_i^{NS} = \left(\Delta_i^{(1)}, \Delta_i^{(2)}, \delta x_i^{HC(1)}, \delta V_i^{HC(1)}, \delta x_i^{HC(2)}, \delta V_i^{HC(2)}\right)^T$ 

и будем полагать, что общая погрешность HC  $\Delta y_i^{HC}$  может быть представлена в виде суммы постоянной и изменчивой составляющих

$$\Delta y^{HC}(t) = \Delta + \delta y^{HC}(t) \,.$$

В этом случае матрица  $H_i^{HC}$  будет определяться как

$$H_i^{HC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (19)

При этом матрицу ковариаций  $R_i^{HC}$  шумов HC зададим в виде  $R^{HC} = diag\left(\left(\sigma^{(HC)}\right)^2, \left(\sigma^{(HC)}\right)^2\right).$ 

Формирующий фильтр (4) будет включать два блока. Один из них описывает постоянную составляющую в виде

$$\dot{\Delta}^{(l)} = 0, \ l = 1, 2,$$
 (20)

где  $\Delta^{(l)}(0)$  – независимые друг от друга случайные величины с известными одинаковыми дисперсиями  $\sigma_{\Delta}^2$ . Второй блок описывает переменную составляющую  $\delta y^{HC(l)} = \delta x^{HC(l)}$ . Этот блок зависит от типа используемой HC. Рассмотрим два варианта. В одном из них предполагается, что ошибки HC носят колебательный характер и могут быть описаны с помощью узкополосного марковского процесса, формирующий фильтр второго порядка для которого записывается как

$$\begin{cases} \delta \dot{x}^{HC(l)} = \delta V^{HC(l)}, \\ \delta \dot{V}^{HC(l)} = -\left(\alpha_{HC}^{2} + \beta_{HC}^{2}\right) \delta x^{HC(l)} - 2\alpha_{HC} \delta V^{HC(l)} + (21) \\ + 2\sigma_{NS} \sqrt{\left(\alpha_{HC}^{2} + \beta_{HC}^{2}\right) \alpha_{HC}} w^{(l)}, \end{cases}$$

где  $w^{(l)}(t)$ , l = 1, 2 – непрерывные независимые друг от друга гауссовские белые шумы единичной интенсивности,  $\alpha_{HC}$ ,  $\beta_{HC}$ ,  $\sigma_{HC}$  – известные параметры.

Во втором варианте предполагается, что ошибки HC носят нарастающий характер и при этом изменчивые составляющие погрешностей  $\delta y^{HC(l)} = \delta x^{HC(l)}$  описываются в виде суммы линейного тренда и второго интеграла от белого шума

$$\delta x^{HC(l)}(t) = \delta x_0^{HC(l)} + \delta V_0^{HC(l)} t + q^{(l)} \int_0^t \int_0^{t'} w^{(l)}(\tau) d\tau dt', \quad (22)$$

где  $\delta x_0^{HC(l)} = 0$ , l = 1, 2,  $\delta V^{HC(l)}(0)$ ,  $\delta V^{HC(2)}(0)$  – независимые друг от друга центрированные гауссовские случайные величины с известными одинаковыми дисперсиями  $\sigma_v^2$ . В этом случае можем записать:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}^{HC(l)} = \delta V^{HC(l)}, \\ \delta \dot{V}^{HC(l)} = q^{(l)} w^{(l)}, \end{cases}$$
(23)

где  $w^{(l)}(t)$  – непрерывные независимые друг от друга гауссовские белые шумы единичными интенсивностями,  $q^{(l)}$  – известные параметры, l = 1, 2.

При описании суммарной погрешности карты и измерителя будем полагать, что она представляет собой сумму центрированного гауссовского белого шума с дисперсией  $\sigma_{\Sigma}^2$  и марковского процесса первого порядка  $x^{\Sigma}$  с экспоненциальной функцией корреляции, дисперсия  $\sigma_{\eta}^2$  и интервал корреляции  $\tau_{\kappa}^{(\eta)}$  которой считаются известными. В этом случае процесс  $x^{\Sigma}$  может быть представлен в непрерывной форме с помощью соотношений:

$$\dot{x}^{\Sigma} = -\alpha_{\eta} x^{\Sigma} + \sqrt{2\sigma_{\eta}^2 \alpha_{\eta}} \zeta, \qquad \alpha_{\eta} = 1 / \tau_{\kappa}^{(\eta)}, \quad (24)$$

где *с* – центрированный гауссовский белый шум единичной интенсивности.

Необходимые выражения для формирующих фильтров, приведенных в разделе III, могут быть легко получены с учетом введенных моделей с использованием известных процедур дискретизации с заранее заданным интервалом  $\Delta t$ .

## IV. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ

При решении сформулированных задач навигации по ГФП крайне важной является не только точность вычисления самих оценок, но и адекватность выработки характеристик их точности в виде расчетных матриц ковариаций. Алгоритмы, в которых расчетные и действительная характеристики точности согласованы, получили наименование состоятельных. Учитывая существенно нелинейный характер рассматриваемых задач фильтрации, для построения состоятельных рекуррентных алгоритмов оценивания, близких по точности к оптимальному алгоритму, требуется опираться на методы, позволяющие описывать апостериорную плотность, имеющую негауссовский многоэкстремальный характер, в частности на метод точечных масс и (или) последовательные методы Монте-Карло [9, 26-29]. Не вдаваясь в подробное описание предлагаемых алгоритмов, заслуживающее отдельного рассмотрения, отметим лишь тот факт, что при их построении важной является возможность использования метода интегрирования по части переменных [19, 29-31]. При его использовании в векторе оцениваемых параметров выделяется подвектор, при фиксации которого задача фильтрации для оставшегося подвектора сводится к линейной. В частности, при решении задачи коррекции в рамках инвариантной постановки вектор  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  может быть представлен в виде

 $\tilde{\mathbf{x}}_{i} = \left[ \left( \tilde{\mathbf{x}}_{i}^{N} \right)^{T}, \left( \tilde{\mathbf{x}}_{i}^{L} \right)^{T} \right]^{T}$ , где  $\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{N} = \mathbf{x}_{i}^{HC}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{L} = \mathbf{x}_{i}^{\Sigma}$ . Ясно, что при фиксации  $\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{N} = \mathbf{x}_{i}^{HC}$  задача фильтрации для другого  $\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{L} = \mathbf{x}_{i}^{\Sigma}$  сводится к линейной. В этом случае плотность  $p(\tilde{\mathbf{x}}_{i} / \mathbf{y}_{i})$  может быть представлена в виде [30, 31]

$$p\left(\tilde{\mathbf{x}}_{i} / \mathbf{y}_{i}\right) = p\left(\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{N} / \mathbf{y}_{i}\right) p\left(\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{L} / \tilde{\mathbf{x}}_{i}^{N}, \mathbf{y}_{i}\right).$$
(25)

В силу сделанных предположений плотность  $p(\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{L} / \tilde{\mathbf{x}}_{i}^{N}, \mathbf{y}_{i})$  будет гауссовской, а плотность  $p(\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{N} / \mathbf{y}_{i})$  может быть аппроксимирована в виде взвешенного набора дельта-функций [9, 19]:

$$p\left(\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{N} / \mathbf{y}_{i}\right) \approx \sum_{j=1}^{K} \mu_{i}^{(j)} \delta\left(\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{N} - \left(\tilde{\mathbf{x}}_{i}^{N}\right)^{(j)}\right), \qquad (26)$$

в котором  $\mu_i^{(j)}$  – веса, а  $\left(\tilde{\mathbf{x}}_i^N\right)^{(j)}$  – выборка случайных векторов j = 1, ..., K (или набор фиксированных точек).

С опирой на представление (26) может быть построен банк фильтров Калмана размерности  $n^L$ , см. [24].

В случае неинвариантной постановки задачи при оценивании вектора  $\mathbf{x}_i = \left[ \left( \mathbf{x}_i^{IIO} \right)^T \quad \left( \mathbf{x}_i^{\Sigma} \right)^T \quad \left( \mathbf{x}_i^{HC} \right)^T \right]^T = \left[ \left( \mathbf{x}_i^{IIO} \right)^T \quad \left( \tilde{\mathbf{x}}_i \right)^T \right] \mathbf{B}$ качестве  $\mathbf{x}_i^N$  и  $\mathbf{x}_i^L$  предлагается выбрать

$$\mathbf{x}_i^N = \mathbf{x}_i^{\Pi O} \quad \mathbf{x}_i^L = \tilde{\mathbf{x}}_i \,. \tag{27}$$

В силу того что модель движения объекта казидетерминирована и задается с помощью 4-х параметров, плотность  $p(\mathbf{x}_i^N / \mathbf{y}_i)$  целесообразно аппроксимировать с помощью фиксированного набора узлов, что приводит к использованию метода сеток [9] в качестве алгоритма оценивания.

#### V. ПРИМЕРЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью определения эффекта от учета априорной информации о траектории движения объекта ниже приведены результаты моделирования, полученные при решении задачи в рамках двух представленных постановок. Рассматривалась задача коррекции по гравитационному полю, карта которого залавалась с использованием модели EGM 2008 [32]. Средний модуль градиента гравитационного поля на моделируемом участке составлял 0.9 мГал/км, а максимальное значение – 2.7 мГал/км. При моделировании вычислялись расчетная и действительная характеристики точности исследуемых алгоритмов в виде радиальных погрешностей оценок двух координат (корень квадратный из суммы квадратов двух составляющих погрешностей оценок) по методике, описанной в частности в работе [33]. Действительная и расчетная характеристики точности вычислялись с осреднением по 50-100 реализациям. Основные параметры истиной траектории, моделей погрешности НС, модели суммарных погрешностей карты и датчика поля приведены в табл. 1, 2 и 3. Интервал дискретизации составлял  $\Delta t = 60$  с, время проведения обсервации – 50 мин.

ТАБЛИЦА 1 ПАРАМЕТРЫ ИСТИНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Предполагаемые координаты		Предполагаемая скорость		Параметры модели (16)	
$\overline{x}_{0}^{(1)}$	$\overline{x}_0^{(2)}$	$\overline{V}_{0}^{(1)}$	$\overline{V}_{0}^{(2)}$	$\sigma_{x_0}$	$\sigma_{_{V_0}}$
20.5 км	20.5 км	-2.85 м/с	-4.11 м/с	1 км	0.3 м/с

ТАБЛИЦА. 2. ПАРАМЕТРЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ КОРРЕКТИРУЕМЫХ НС

Посто- янная состав- ляющая погреш- ности $\Delta$	Уро- вень шумов НС	Колебательный характер бу <sup>нс</sup> (t)			Нарастающий характер бу <sup>нс</sup> (t)	
$\sigma_{_\Delta}$	$\sigma_i^{(HC)}$	$\sigma_{_{HC}}$	$\alpha_{_{HC}}$	$\beta_{HC}$	$\sigma_{_V}$	$q^{(1)} = q^{(2)}$
1 км	0.001 км	0.3 км	1/7200 c <sup>-1</sup>	5*10 <sup>-3</sup> рад/с	0.25м/с	0.001 м/с <sup>2</sup>

ТАБЛИЦА. З. ПАРАМЕТРЫ СУММАРНОЙ ОШИБКИ КАРТЫ И ИЗМЕРИТЕЛЯ

$\sigma_{\Sigma}$	ση	$\alpha_{\eta}$
0.1 мГал	0.5 мГал	$1/120 c^{-1}$

В табл. 4 и 5 приведены значения радиальной погрешности для двух моделей ошибок НС при различных значениях неопределенности знания скорости объекта σ<sub>к</sub>. Полученные при моделировании действительная и расчетная характеристики точности, полученные в рамках инвариантного и неинвариантного подходов, позволяют оценить эффективность использования априорной информации о траектории движения объекта в рассматриваемой задаче. Из представленных данных следует, что при времени коррекции 50 мин привлечение модели движения объекта (16) позволяет повысить точность решения задачи при колебательном характере погрешностей НС на 13% при точном задании скорости объекта и на 18% при неопределенности скорости объекта 0,3 м/с, для задачи коррекции при нарастающем характере погрешностей НС - на 23% и 32% соответственно.



Рис. 1. Схема изолиний аномалий силы тяжести района и траектория движения объекта (зелёный)

ТАБЛИЦА. 4. РАДИАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОРРЕКЦИИ ПРИ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ХАРАКТЕРЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ НС, КМ.

e-	Действительная / Расчетная ,							
змер ние.	$\sigma_{V_0} =$	0 м/с	$\sigma_{V_0} = 0.3 \ M/c$					
И	Инвар	Неинвар	Инвар	Неинвар				
1	1.28/ 1.41	0.95/ 1.00	1.39 / 1.42	1.04 / 1.00				
10	1.23/ 1.35	0.95/ 0.92	1.37 / 1.33	1.00 / 0.91				
20	1.11/ 1.16	0.83/ 0.80	1.22 / 1.14	0.90 / 0.79				
30	1.03/ 1.07	0.72/ 0.72	1.15 / 1.04	0.77 / 0.71				
40	0.85/ 0.90	0.64/ 0.63	1.00 / 0.88	0.67 / 0.63				
50	0.59/ 0.68	0.51/0.48	0.74 / 0.67	0.60 / 0.50				

ТАБЛИЦА. 5. РАДИАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОРРЕКЦИИ ПРИ НАРАСТАЮЩЕМ ХАРАКТЕРЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ НС, КМ

ę	Действительная / Расчетная ,						
змер ние.	$\sigma_{V_0} = 0 M/c$		$\sigma_{V_0} = 0.3 \ M/c$				
И	Инвар	Неинвар	Инвар	Неинвар			
1	1.40/ 1.36	0.96/ 0.98	1.43 / 1.36	1.02 / 0.98			
10	1.36/ 1.30	0.89/ 0.91	1.32 / 1.30	0.95 / 0.92			
20	1.13/ 1.15	0.78/0.79	1.13 / 1.16	0.84 / 0.82			
30	0.99/1.13	0.72/ 0.70	1.16 / 1.13	0.78 / 0.76			
40	0.85/ 1.07	0.66/ 0.62	1.02 / 1.13	0.74 / 0.73			
50	0.74/ 0.88	0.53/0.50	0.90/0.95	0.61 / 0.59			

Важно также отметить, что в обоих случаях можно говорить о состоятельности алгоритмов, поскольку наблюдается высокая степень совпадения расчетной и действительной характеристик точности.

#### VI. Заключение

В отличие от традиционно используемого, инвариантного подхода при постановке задачи навигации по ГФП, при котором не привлекается информация о траектории движения объекта, а показания корректируемой (опорной) НС выступают в качестве входных сигналов, в работе приведена постановка задачи в рамках неинвариантного подхода. Такая постановка позволяет при длительном характере проведения обсервации учесть имеющуюся априорную информацию о траектории движения объекта, задаваемую в виде соответствующей модели, и при этом использовать показания опорной НС наряду с показаниями датчика поля в качестве измерений, поступающих в задачу фильтрации.

Кратко описаны алгоритмы, позволяющие анализировать точность коррекции НС при решении задачи как при учете информации о траектории движения объекта, так и в случае, когда эта информация не используется в предположении квазидетерминированного характера модели движения объекта.

Исследована эффективность привлечения информации о траектории для случая прямолинейного движения объекта с постоянной скоростью в зависимости от свойств ошибок опорной HC.

Приведены предварительные результаты моделирования, показавшие эффективность привлечения априорной информации при решении задачи навигации по ГФП. Так, погрешность выработки координат НС при коррекции с привлечением данных о траектории может быть снижена приблизительно на 18% при колебательном характере погрешностей НС и на 32% при нарастающем характере погрешностей НС по сравнению со случаем, когда эта информация не привлекается. При этом существенно, что разработанные алгоритмы обеспечили совпадение расчетной и действительной характеристик точности, что говорит об их состоятельности.

Следует обратить внимание, что эффективность привлечения информации о движении объекта существенным образом зависит от соотношения временных свойств процессов, описывающих движение объекта, погрешностей опорной НС и суммарных погрешностей карты и измерителя поля. Подробный анализ этой зависимости представляет предмет дальнейшего исследования, в частности при отказе от предположения о квазидетерминированном характере модели движения объекта.

## Литература

- [1] Емельянцев Г. И. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / Емельянцев Г.И., Степанов А.П. ; акад. Пешехонов В.Г. (общ. ред.) ; Нац. исслед. ун-т ИТМО. СПб., 2016. 393 с. :
- [2] Groves P. D. Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems, 2nd Ed. Boston: Artech house, 2013.
- [3] Oleg A. Stepanov Optimal and Suboptimal Filtering in Integrated Navigation Systems in Book Editor(s):Alexander V. Nebylov, Joseph Watson Aerospace Navigation Systems 2016 https://doi.org/10.1002/9781119163060.ch8
- [4] Степанов О.А., Мостафа М. Алгоритмы комплексной обработки в задаче коррекции показаний навигационных систем при наличии нелинейных измерений. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. № 6. С. 89-102.
- [5] Степанов О.А., Торопов А.Б. Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Часть 2. Современные тенденции развития. Гироскопия и навигация, №4 (91), 2015. сс. 147-159. DOI 10.17285/0869-7035.2015.23.4.147-159.
- [6] Белоглазов И.Н. Джанджгава Г.И. Чигин Г.П. Основы навигации по геофизическим полям. - М.:Наука. - 1985. - 328 с.
- [7] Степанов О.А. Методы оценки потенциальной точности в корреляционно-экстремальных навигационных системах Аналитический обзор / Санкт-Петербург, 1993.
- [8] Белоглазов И. Н., Казарин С. Н. и Косьянчук В. В. Обработка информации в иконических системах навигации, наведения и дистанционного зондирования местности. ФИЗМАТЛИТ, 2012.
- [9] Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли / Под. общей редакцией В.Г. Пешехонова, редактор О.А. Степанов. – Санкт-Петербург: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. – 390 р.
- [10] Melo J. and Matos A. Survey on advances on terrain based navigation for autonomous underwater vehicles//Ocean Engineering, vol. 139, p. 250-264, Jul. 2017, doi: 10/gbkpwd.
- [11] Canciani, A.; Raquet, J. Airborne Magnetic Anomaly Navigation. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 2017, 53, 67–80.
- [12] Pasnani P. and Seto M. L. Terrain-Based Localization and Mapping for Autonomous Underwater Vehicles using Particle Filters with Marine Gravity Anomalies IFAC-PapersOnLine, vol. 51, no. 29, p. 354-359, 2018, doi: 10.1016/j.ifacol.2018.09.498.
- [13] Джанджгава Г.И. Навигация по геополям / Г.И. Джанджгава, Л.И. Августов. Москва: Научтехлитиздат, 2018. 296 с.
- [14] J. Quintas, J. Cruz, A. Pascoal and F. C. Teixeira, "A Comparison of Nonlinear Filters for Underwater Geomagnetic Navigation," 2020 IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicles Symposium (AUV), St. Johns, NL, Canada, 2020, pp. 1-6, doi: 10.1109/AUV50043.2020.9267915
- [15] Каршаков Е.В., Павлов Б.В., М.Ю. Тхоренко и И.А. Папуша Перспективные системы навигации летательных аппаратов с использованием измерений потенциальных физических полей. Гироскопия и навигация, том 29. №1 (112), 2021. сс. 32-51. DOI 10.17285/0869-7035.0055.
- [16] Ююкин И. В. Корреляционно-экстремальная навигация по геофизическим полям на основе использования сплайновой технологии // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2021. Т. 13. № 4. С. 505–517. DOI:10.21821/2309-5180-2021-13-4-505-517.
- [17] Дунаевская К. В. Исследование метода вычисления текущей характеристики точности в задаче навигации по картам геофизических полей / К. В. Дунаевская, Л. В. Киселев, В. Б. Костоусов // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29. № 1 (112). С. 52-69. DOI: 10.17285/0869-7035.0056.

- [18] Liu, H.; Wu, L.; Bao, L.; Li, Q.; Zhang, P.; Xi, M.; Wang, Y. Comprehensive Features Matching Algorithm for Gravity Aided Navigation. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters 2022, 19, 1– 5. https://doi.org/10.1109/LGRS.2022.3192408
- [19] Торопов А.Б., Степанов О.А. Использование последовательных методов Монте-Карло в задаче корреляционно-экстремальной навигации. // Изв. вузов. Приборостроение. 2010. № 53(10). С. 49–54.
- [20] Wang B., Cai T. Path Planning Method for Underwater Gravity-Aided Inertial Navigation Based on PCRB. J. Mar. Sci. Eng. 2023, 11(5), 993; https://doi.org/10.3390/jmse11050993/.
- [21] Zhou T., Peng D., Xu C., Zhang W. and Shen J. Adaptive particle filter based on Kullback–Leibler distance for underwater terrain aided navigation with multi-beam sonar. IET Radar Sonar Navigat. 2018, vol. 12, no. 4, pp. 433-441. https://doi.org/10.1049/ietrsn.2017.0239
- [22] Duan X., Xiao J., Qi X., Liu Y. An INS/Geomagnetic Integrated Navigation Algorithm Based on Matching Strategy and Hierarchical Filtering. Electronics 2019, 8(4), 460; https://doi.org/10.3390/electronics8040460.
- [23] Степанов О.А., Носов А.С., Торопов А.Б. О классификации алгоритмов решения задачи навигации по геофизическим полям. // В сборнике XXVII Санкт-Петербургский международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. 2020, с.326-336.
- [24] Степанов О.А., Васильев В.А., Торопов А.Б. Решение задачи навигации по геофизическим полям с учетом изменчивости погрешностей корректируемой навигационной системы в сборнике: XXIX Санкт-петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. сборник материалов. Санкт-Петербург, 2022. С. 60-65
- [25] Васильев В.А., Степанов О.А. Анализ эффективности решения задачи навигации с использованием карты и измерителя геофизического поля в зависимости от изменчивости погрешностей корректируемой навигационной системы. // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2022. № 4
- [26] Simon, D. Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, 2006.
- [27] Chen Z. Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond // Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics. - 2003. - V. 182. - № 1. - P. 1-69.
- [28] Doucet, A. Freitas N. and Gordon N. Sequential Monte Carlo Methods in Practice. New York, NY: Springer New York, 2001.
- [29] Соболь, И.М. Численные методы Монте-Карло/ И. М. Соболь. М.: «Наука», гл. редакция физ.-мат. литературы, 1973. 312 с.
- [30] Schön, T., Gustaffson, F., Nordlund, P.-J. Marginalized Particle Filters for Linear/Nonlinear State-space Models// IEEE Transactions on Signal Processing. – 2005. – Vol. 53, № 7. P. 2279-2289.
- [31] Gustafsson F. [et al.], "Particle filters for positioning, navigation, and tracking", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50, no. 2, p. 425-437, Feb. 2002, doi: 10.1109/78.978396.
- [32] Pavlis, N.K., Holmes, S.A., Kenyon, S.C., Factor, J.K., The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008), // J. Geophys. Res., vol. 117, iss. B4, B04406, 2012, doi:10.1029/2011JB008916.
- [33] Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Васильев В.А., Торопов А.Б., Басин М.В., Алгоритм полиномиальной фильтрации в задачах обработки навигационной информации при квадратичных нелинейностях в уравнениях динамики и измерений. Часть 1. Описание и сопоставление с алгоритмами калмановского типа. // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29. № 3 (114). С. 3-33. DOI 10.17285/0869-7035.0068

К.Б. Амелин *АО «НАВИГАТОР», СПбГУАП* Санкт-Петербург, Россия info@navigat.ru

А.А Рогова *АО «НАВИГАТОР»* Санкт-Петербург, Россия info@navigat.ru А.Р. Бестугин СПбГУАП Санкт-Петербург, Россия fresguap@mail.ru

О.И. Саута *АО «НАВИГАТОР», СПбГУАП* Санкт-Петербург, Россия info@navigat.ru

Аннотация—Исследуются точностные характеристики определения местоположения летательного аппарата с использованием математического моделирования ошибок инерциальных микро-электромеханических датчиков для системы спутниковой посадки на подвижную платформу в условиях качки.

Ключевые слова—посадка летательных аппаратов, глобальная навигационная спутниковая система, относительная навигация, микро-электромеханические датчики.

## I. Введение

Стратегией развития авиационной промышленности России до 2035 года [1, 2] предусматривается создание беспилотных воздушных систем для связи, мониторинга и транспортировки грузов.

Актуальной задачей как для пилотируемых, так и для беспилотных летательных аппаратов (ЛА), является задача обеспечения безопасной посадки, успешность которой обусловлена, в том числе, радиотехническим оснащением аэродромов. На больших аэродромах гражданской авиации в настоящее время установлены инструментальные системы посадки типа ILS (instrument landing system), радиолокационные системы типа РСП (радиолокационная система посадки); на государственных аэродромах установлены системы посадки типа ПРМГ (посадочная радиомаячная группа); на больших авианесущих кораблях ВМФ РФ устанавливаются системы посадки типа ПРЛК (посадочный радиолокационный комплекс) и MLS (microwave landing system) [3, 4, 5].

В настоящее время основным направлением развития систем посадки является использование решений на базе глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) с функциональными дополнениями (GBAS/ЛККС, SBAS) [3]. Широкому внедрению таких систем способствует высокая точность определения навигационных параметров ЛА, низкие требования к погодным условиям при эксплуатации, глобальность зоны действия, а также относительно невысокая стоимость бортового и наземного оборудования. Для повышения точности, непрерывности и целостности информации системы спутИ.А. Киршина СПбГУАП, Санкт-Петербург, Россия fresguap@mail.ru

П.А. Семенов *АО «НАВИГАТОР», СПбГУАП* Санкт-Петербург, Россия info@navigat.ru

никовой посадки (ССП) в составе оборудования активно внедряются малогабаритные бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС) на основе датчиков построенных по технологии микроэлектромеханических систем (МЭМС).

Задачи посадки ЛА на стационарные посадочные площадки, платформы и аэродромы с использованием ГНСС, GBAS/ЛККС, SBAS к настоящему времени достаточно подробно изучены и широко внедряются в гражданской авиации [3]. Применение малогабаритных БИНС, выполненных на МЭМС датчиках, в бортовом оборудовании так же широко обсуждается и имеет множество реализаций. В то же время, задача посадки на подвижную посадочную платформу в условиях качки с применением относительной навигации по данным ГНСС к настоящему времени изучена недостаточно.

Целью работы является оценка ошибок определения местоположения ЛА, обусловленных погрешностями стабилизации синтетической глиссады в ССП при моделировании случайного дрейфа нулевого значения МЭМС датчиков и различных расположений антенны ГНСС и расчётной точки посадки (РТП) для определения возможности автоматической посадки ЛА на подвижную платформу в условиях качки.

## II. ТОЧНОСТЬ НАВИГАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ ГНСС В ОТНОСИТЕЛЬНОМ РЕЖИМЕ

Для определения необходимой точности стабилизации точки посадки (то есть точки пересечения глиссады с плоскостью посадочной площадки) при использовании синтетической глиссады в ССП с относительным режимом определения дальности и боковых отклонений ЛА от глиссады, необходимо задать максимальные допустимые ошибки определения координат местоположения точки посадки (ТП). На стационарном основании эти ошибки связаны только с погрешностями навигационного решения приёмника ГНСС.

На подвижном основании антенна ГНСС и точка посадки всегда разнесены на некоторое расстояние друг от друга как в горизонтальной плоскости, так и по высоте. Антенну ГНСС устанавливается как можно выше, чтобы избежать затенения небесной полусферы над антенной конструкциями самой платформы. При наклоне платформы эти расстояния становятся плечом взаимного смещения точки посадки и фазового центра антенны (ФЦА) ГНСС в координатах местного горизонта. Для измерения углов наклона целесообразно применять инерциальные датчики МЭМС типа.

Учитывая тот факт, что суммарная погрешность измерений местоположения БЛА в ССП должна соответствовать, как минимум, требованиям для категории III [3], составляющим по горизонтальным координатам не более 6 м, а по вертикальным – не более 2 м с вероятностью 0,95, и принимая во внимание, что погрешности измерения в относительном режиме ГНСС составляют 0,2 м по горизонтальным координатам и 0,5 м по высоте с вероятностью 0,95 [6], можно утверждать, что дополнительная погрешность, вносимая в определение местоположения ЛА за счёт ошибок инерциальных датчиков, влияющих на точность стабилизации глиссады, не должна превышать 5.9 м по горизонтальным координатам и 1.9 м по высоте с вероятностью 0,95.

#### III. Влияние качки на ошибки местоопределения

Для оценки предельных значений отклонений рассмотрим качку, как совокупность линейных и угловых колебаний. Линейные колебания могут происходить как в вертикальной плоскости, так и в горизонтальной, при этом происходит смещение центра тяжести платформы со всем находящимся на ней оборудованием. Такие смещения легко регистрировать при помощи приёмника ГНСС с одной антенной. Точность определения этих смещений полностью зависит от точности навигационного решения приёмника ГНСС. Второй вид колебаний угловой. Угловые колебания платформы, в общем случае, происходят также вокруг всех трёх ортогональных осей: крен, дифферент, рыскание. Крен и дифферент вызывают отклонение вертикальной оси. Будем рассматривать процесс качки, амплитуда углов крена и дифферента при которой не превышают 15° и 5° соответственно. Качка с креном до 15° обычно не вызывает смещение центра тяжести [7], что обеспечивает линейность описания воздействующих сил и равномерность процесса качки. Угловые колебания платформа вокруг вертикальной оси имеют незначительную амплитуду и достаточно большой период, что делает практически невозможным адекватное измерение этих колебаний без применения датчиков навигационного класса точности, к которым датчики МЭМС типа не относятся. Если курсовое направление платформы выдерживается постоянным, то смещения ФЦА относительно ТП платформы будут вызваны качанием платформы только по углам крена и дифферента. Выражения для преобразования смещений из связанной системы координат (ССК) в местную горизонтальную систему координат (ГСК) имеют вид [8]:

$$\begin{bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \\ \Delta_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p & S_p S_r & S_p C_r \\ 0 & C_r & -S_r \\ -S_p & C_p S_r & C_p C_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_p \\ \Delta_y \end{bmatrix}$$
(1)

где  $\Delta_X$ ,  $\Delta_Y$ ,  $\Delta_Z$  – компоненты вектора смещения в ГСК,  $\Delta_r$ ,  $\Delta_p$ ,  $\Delta_y$  – компоненты вектора смещения в ССК,  $S_r$  и  $C_r$  – синус и косинус угла крена,  $S_p$  и  $C_p$  – синус и косинус угла дифферент.

Таким образом при формировании синтетической глиссады смещение ФЦА относительно ТП в ГСК становится дополнительной ошибкой определения координат ЛА в режиме относительной навигации. Эти линейные смещения являются функциями углов крена и дифферента.

В условиях качки с низкой динамикой изменения углов крена и дифферента, углы можно измерить посредствам инклинометра, построенного на триаде микромеханических акселерометров, так как тангенциальные и центростремительные ускорения незначительны. Для условий с высокой динамикой угловых движений при качке требуется применение датчиков угловой скорости с целью учёта негравитационных ускорений, что значительно усложняет алгоритмы обработки. Для определения углов крена и дифферента используются выражения:

$$roll = \arctan\left(\frac{a_p}{a_y}\right); pitch = \arctan\left(\frac{-a_r}{\sqrt{a_p^2 + a_y^2}}\right)$$
 (2)

где *a<sub>r</sub>*, *a<sub>p</sub>*, *a<sub>y</sub>* - составляющие проекции вектора кажущегося ускорения на оси ССК, *roll* – истинный угол крена, *pitch* – истинный угол дифферента.

Рассмотрим ошибки МЭМС акселерометров. Все сборки инерциальных датчиков должны проходить процедуру калибровки для расчёта температурных смещений, нулевых показаний, масштабного коэффициента в диапазоне измерений, а также углов неортогональности. В процессе калибровки невозможно устранить ошибки измерений, которые вызваны случайным дрейфом нулевого значения как от запуска к запуску (повторяемость), так и внутри каждого запуска (нестабильность). Дрейф нуля от запуска к запуску для датчиков МЭМС типа, как правило, превышают вдвое и более величину нестабильности нулевого значения по вариациям Аллана в запуске [9, 10] и варьируется от 0,1 mg до 100 mg для современных МЭМС датчиков.

Для оценки ошибки углов наклона платформы используем выражения (2), представив входящие в них параметры в виде истинного значения и случайной ошибки:

$$roll' = \arctan\left(\frac{a_p + a_{\Delta}}{a_y + a_{\Delta}}\right)$$
$$pitch' = \arctan\left(\frac{-(a_r + a_{\Delta})}{\sqrt{(a_p + a_{\Delta})^2 + (a_y + a_{\Delta})^2}}\right)^{(3)}$$

где  $a_{\Delta}$  – случайный сдвиг нуля датчиков ускорения, *roll* – измеренный угол крена, *pitch* – измеренный угол диф-ферента.

Ошибка определения углов крена и дифферента при качке в заданных пределах изменения углов наклона платформы определяется модулем разности углов полу-

ченных в соответствии с выражениям (2) и (3). Результаты расчёта указанных ошибок приведены на рисунке 1.



Рис. 1. Распределения ошибки углов при случайном смещении нуля датчиков ускорения на 10 мg. а) Ошибка угла дифферента. б) Ошибка угла крена

Рассмотрим три диапазона повторяемости сдвига нуля датчиков ускорения: 0,001 g, 0,01 g, 0,1 g. При расчётах используем максимальные значения отклонений по углам крена и дифферента для каждого диапазона повторяемости сдвига нуля.

Величины среднеквадратической погрешности (СКП) определения местоположения в зависимости от расстояния от антенны ГНСС до РТП и от значения повторяемости сдвига нуля акселерометров приведены на рис.2-5. Пунктирной линией на рисунках отмечен допустимые СКП при выполнении автоматической посадки в соответствии с категорией III.



Рис. 2. СКП координат в местной ГСК в зависимости от расстояния от РТП до ФЦА ГНСС в плоскости посадочной площадки.



Рис. 3. СКП высоты в местной ГСК в зависимости от расстояния от РТП до ФЦА ГНСС в плоскости посадочной площадки



Рис. 4. СКП координат в местной ГСК в зависимости от расстояния от РТП до ФЦА ГНСС по нормали к плоскости посадочной площадки.



Рис. 5. СКП высоты в местной ГСК в зависимости от расстояния от РТП до ФЦА ГНСС по нормали к плоскости посадочной площадки.

По графикам на рис. 2-5 можно определить минимальную необходимую точность датчиков, в части совокупного случайного дрейфа нулевого значения, в зависимости от размещения антенны ГНСС на посадочной платформе.

### Заключение

Определены ошибки определения местоположения ЛА в спутниковой системе посадки на подвижную платформу при использовании МЭМС акселерометров различного класса точности для стабилизации посадочной глиссады.

Приведены требования к МЭМС датчикам для минимизации влияния подвижности платформы на точностные характеристики ССП.

Полученные результаты могут быть использованы для разработки рекомендаций по размещению антенны ГНСС и выбору МЭМС акселерометров для обеспечения заданных требований к точности местоположений при построении системы спутниковой посадки ЛА на подвижную платформу.

#### Литература

[1] Распоряжение Правительства РФ от 06 июня 2020 г. № 1512-р (Об утверждении Сводной стратегии развития обрабатывающей промышленности РФ до 2024 г. и на период до 2035 г.) [Электронный ресурс]. – URL: http://government.ru/docs/all/128331 (дата обращения 06.11.2022)

- [2] Постановление правительства РФ от 15 апреля 2014г. № 303 «Об утверждении государственной программы Российской федерации «Развитие авиационной промышленности» [Электронный ресурс]. URL: http://gov.garant.ru/document?id=70544068&byPara=1 (дата обращения 10.12.2022).
- [3] Приложение 10 к Конвенции о международной гражданской авиации. Авиационная электросвязь. Радионавигационные средства. Том 1 / Изд. шестое, ИКАО, 2006 г.
- [4] RTCA/DO-217. Minimum aviation system performance standards DGNSS instrument approach system: special category I (SCAT-I), 1993.
- [5] Музылев И. Г., Шукайло А. В., Амелин К.Б. Опыт применения микроволновой системы посадки в качестве канала передачи данных о параметрах движения корабля для обеспечения захода на посадку корабельных ЛА // Навигация и управление летательными аппаратами №22, 2018, с. 23-32.
- [6] Амелин К.Б. Бестугин А.Р., Киршина И.А., Негрескул Г.Г., Рогова А.А., Семенов П.А. Система спутниковой посадки на подвиж-

ную платформу с микроэлектромеханическими датчиками // XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов, 2021, с.96-99

- [7] Остойчивость. [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Остойчивость (дата обращения 15.12.2022)
- [8] Mohinder S. Grewal, Lawrence R. Weill, Angus P. Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, 2nd ed, John Wiley & Sons, 2007. ISBN:9780470041901
- [9] Analog Devices Inc., Six Degrees of Freedom Inertial Sensor ADIS16375, Data Sheet Rev. C, 2012
- [10] МЭМС акселерометр AS 100 [Электронный ресурс]. URL: https://lasercomponents.ru/product/navigatsionnyesistemy/komplektuyushhie-navigatsionnyesistemy/akselerometry/mems-akselerometry/mems-akselerometras100/ (дата обращения 15.02.2023).

# Локальная радионавигационная система дальномерного типа

С.С. Смирнов Санкт-Петербургский государственный университет Санкт-Петербург, Россия s.s.smirnov@spbu.ru С.Д. Петров Санкт-Петербургский государственный университет Санкт-Петербург, Россия s.d.petrov@spbu.ru

Д.А. Трофимов Санкт-Петербургский государственный университет Санкт-Петербург, Россия

d.trofimov@spbu.ru

Аннотация—В работе описывается локальная радионавигационная система, основанная на дальномерных измерениях. Обсуждаются принципы определения координат на основе корреляционной обработки дальномерных кодовых радиосигналов, передаваемых локальными радиомаяками. Описан макет локальной радионавигационной системы, приведены результаты первых экспериментов по определению координат с её помощью.

#### Ключевые слова—радионавигация, дальномерные коды.

#### I. Введение

В настоящее время использование глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) для решения как навигационных, так и геодезических задач получило широкое распространение во многих областях человеческой деятельности. Многие отрасли науки, техники и военного дела в значительной степени зависят от работоспособности спутниковых навигационных систем. С другой стороны, практическое использование ГНСС выявило их критическую уязвимость в условиях радиоэлектронной борьбы (РЭБ) как в военном, так и даже в гражданском применении. С развитием спутниковой навигации появились приёмники, технологии и алгоритмы, позволяющие в той или иной степени решать навигационную задачу в условиях РЭБ, но, к сожалению, в настоящее время они вряд ли дадут гарантированный результат. Основной причиной уязвимости ГНСС является низкая мощность спутниковых навигационных сигналов по причине того, что источник энергии навигационных космических аппаратов состоит исключительно из солнечных батарей, что ограничивает мощность передатчика, в обозримом будущем ситуация не изменится. Кроме того, существуют ситуации, когда навигационный сигнал ГНСС может быть недоступен из-за особенностей местности, таких как горный рельеф или плотная городская застройка.

В целях снижения уязвимости ГНСС в последнее время было применено несколько подходов. Это: традиционная астронавигация, основанная на современных технологических достижениях, таких как автоматические зенитные камеры и теодолиты, корреляционноэкстремальные методы определения координат, инерциальные навигационные системы, а также глобальные и локальные наземные радионавигационные системы. Каждая из этих технологий имеет свои преимущества и недостатки. Принципиальным недостатком астронавигации является зависимость от чистого неба, в то же время эти системы вряд ли могут быть нарушены средствами Корреляционно-экстрерадиоэлектронной борьбы. мальные методы также пассивны, но для них требуются точные модели рельефа, гравитационного и/или магнитного поля, которые пока не существуют с удовлетворительной точностью. Инерциальные навигационные системы автономны, но их точность со временем снижается из-за дрейфа гироскопа. Глобальные навигационные системы наземного базирования уязвимы для РЭБ, хотя и в меньшей степени, чем ГНСС, а также их точность не соответствует современным требованиям. В этой статье мы сосредоточились на локальной радионавигации. Такого рода системы, поскольку они активны, также могут быть объектом радиоэлектронной борьбы, но эта уязвимость может быть уменьшена их мобильностью и возможностью быстрой настройки. Таким образом, локальная радионавигационная система может быть быстро развернута в заданном районе и, после решения поставленной задачи, так же быстро удалена. Кроме того, несущие частоты могут быть быстро изменены. Оба эти фактора делают локальную навигационную систему менее уязвимой для радиоэлектронной борьбы, чем глобальную навигационную систему, как спутниковую, так и наземную.

#### II. Состав и функционал системы

### А. Существующие и разрабатываемые локальные радионавигационные системы

Из литературы известно, что на Западе ведутся работы по созданию новых радионавигационных систем наземного базирования. В качестве примера можно рассматривать давно функционирующую французскую систему DORIS, которая состоит из наземных радиомаяков, передающих радиосигналы с временным кодом для определения положения объекта, оснащенного специальным приемным устройством. Хотя система DORIS в первую очередь предназначена для космической навигации, она также может быть использована для определения местоположения объекта, находящегося на Земле.

В Соединенных Штатах Америки в рамках программы "Информация о пространстве, времени и ориентации в оспариваемых условиях" (Spatial, Temporal, and Orientation Information in Contested Environments - STOIC) [1], поддерживаемой Агентством перспективных исследовательских проектов Министерства обороны (DARPA), разрабатывается наземная радионавигационная система, работающая в диапазоне очень низких частот. Эта программа

И.В. Чекунов Московский государственный техничекий университет им. Н.Э. Баумана Москва, Россия onip4@mail.ru имеет в первую очередь военное значение. Предполагается, что особенности диапазона очень низких частот сделают невозможным глушение или подделку навигационного сигнала. Предполагается, что система STOIC будет иметь глобальный или почти глобальный охват.

Кроме того, были созданы другие наземные радионавигационные системы, такие как Locata [2,3,4] или NextNav [5], предназначенные для предоставления услуг позиционирования и навигации в отсутствие сигнала ГНСС. Эти системы имеют скорее коммерческое назначение, предназначены для работы в условиях плотной городской застройки. Они предполагают развертывание радиомаяков, сигналы которых либо дополняют сигнал ГНСС, либо работают независимо от ГНСС. Поскольку эти системы предназначены для местной навигации, радиомаяки имеют довольно небольшую дальность действия, около 10 км. Обычно они устанавливаются на вышках или крышах зданий. Поскольку эти системы имеют в первую очередь коммерческое значение и предназначены для замены ГНСС в условиях пересеченной местности или городской застройки, а не в условиях подавления сигнала или его подмены (спуфинга), в них обычно используются приемники ГНСС для синхронизации по времени и частоте.

#### В. Принципиальные основы построения системы

Представленный в этой статье прототип локальной радионавигационной системы разработан в соответствии со следующими принципами:

1. Система основана на компактных автономных радиомаяках, передающих навигационные дальномерные кодовые радиосигналы.

 Каждый маяк включает в себя автономный компактный стандарт времени и частоты со стабильностью, которая позволяет решать навигационные задачи с требуемой точностью.

3. На основе приема радиосигналов от нескольких радиомаяков в точке, расположенной в зоне их действия, можно определить координаты точки, а также время.

4. Частота несущего радиосигнала может варьироваться в довольно широком диапазоне в соответствии с заранее установленным правилом.

5. Радиомаяки должны быть достаточно компактными и мобильными для оперативного развертывания в заданном районе.

Общая конструкция системы основывается на конструкции существующих ГНСС. Радиомаяки закрепляются на поверхности с помощью стабильных неподвижных объектов, таких как бетонные столбы или здания, в точках с известными координатами. Каждый маяк излучает радиосигнал, на общей несущей частоте, модулированный уникальным псевдослучайным кодом. Мобильный приемник принимает сигналы от всех маяков, демодулирует их и соотносит с дальномерными кодами, которые генерируются в приемнике. Корреляционный анализ позволяет определить время прохождения излучения от каждого радиомаяка до приемника. Это время прохождения, умноженное на скорость света, дает псевдодальности между маяками и приемником. Затем по этим псевдодальностям координаты приемника вычисляются стандартными методами, используемыми в ГНСС.

## С. Состав системы

Радиомаяк состоит из радиомодуля, вычислительного модуля, стандарта времени и частоты и источника питания. Радиомодуль формирует сигнал на несущей частоте, синхронизированный со стандартом частоты, модулирует сигнал с помощью дальномерного кода и передает его с помощью всенаправленной антенны. Вычислительный модуль управляет радиомодулем и снабжает его дальномерным кодом для модуляции сигнала. Вычислительный модуль также синхронизирован со стандартом времени.

Конструкция приемника аналогична конструкции маяка, но в качестве вычислительного модуля используется портативный компьютер (ноутбук), поскольку корреляционный анализ довольно ресурсоемкий. Ноутбук подключен к радиомодулю с помощью кабеля. Он загружает демодулированный дальномерный код из радиомодуля, выполняет корреляционный анализ и отправляет вычисленную псевдодальность обратно в радиомодуль для предстоящей демодуляции. Таким образом, вычислительный модуль работает совместно с радиомодулем в цикле.

Развертывание системы заключается в выборе точек для установки маяков. Координаты этих точек должны быть известны или определены заранее любым другим способом. После установки маяков они начинают излучать навигационные сигналы, и система готова к использованию. Приемник можно размещать и перемещать в любом месте, в зоне видимости маяков. После определения координат приемника систему можно отключить и быстро демонтировать. Установка и демонтаж всей системы может занять от нескольких минут до пары часов. Также несущая частота может быть оперативно изменена для защиты системы от средств РЭБ.



Рис. 1 Маяк: Принципаильная электрическая схема



Рис. 2 Внутренний вид устройства радиомаяка

## III. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Созданный в настоящее время прототип радионавигационного маяка состоит из программно-определяемой радиосистемы (LimeSDR производства Lime Microsystems), управляющего микрокомпьютера (Raspberry Pi4 Model B) и подсистемы электропитания. Плата LimeSDR имеет диапазон частот от 100 кГц до 3,8 ГГц и полосу пропускания 61,44 МГц. В нашей работе мы используем несущий сигнал с частотой 2 ГГц. Этот несущий сигнал модулируется дальномерным кодом с использованием модуляции с фазовой манипуляцией. Требуемая полоса пропускания составляет 20 МГц.

Кроме того, схема радиомаяка включает в себя ГНСС-приемник, используемый для синхронизации временных шкал радиомаяков. Это временное решение. Поскольку приемник ГНСС уязвим к РЭБ, это может привести к неработоспособности всей системы при наличии помех и/или подмены. В будущем планируется использовать стандарт времени и частоты, основанный на сгруппированных рубидиевых стандартах, для хранения шкалы времени и частоты маяка. Такой стандарт в настоящее время находится в стадии разработки.



Рис. 3 Внешний вид радиомаяка

Оборудование собрано в корпусе размерами 240×160×90 мм, на верхней панели корпуса установлена дипольная антенна длиной 19 см. Принципиальная электрическая схема маяка показана на рис. 1. Расположение компонентов показано на рис. 2, внешний вид устройства в сборе - на рис. 3.

Как уже упоминалось выше, алгоритм функционирования системы практически заимствован из системы GPS. Прототип основан на схеме множественного доступа с разделением кода (CDMA). Практически это означает, что все маяки излучают сигналы на одной и той же частоте, но каждый маяк имеет свой уникальный дальномерный код. В то же время дальномерный код заимствован из ГЛОНАСС и основан на М-последовательностях. Уникальная М-последовательность четвертого порядка генерируется для каждого радиомаяка вычислительным модулем и затем передается в радиомодуль для модуляции сигнала несущей.

Поскольку программное обеспечение для приемника на базе LimeSDR еще не было готово, приемник был реализован с помощью другой программноопределяемой радиосистемы, а именно USRP B210, которая поставляется с программным обеспечением для приема сигнала ГНСС с открытым исходным кодом. Программное обеспечение было разработано в соответствии с функционалом прототипа. Корреляционный анализ выполняется на ноутбуке, подключенном к плате USRP по каналу Gigabit ethernet. Ноутбук подключен к радиомодулю с помощью кабеля. Первоначально он вычисляет априорные значения псевдодальностей, генерирует копии дальномерного кода и отправляет их в радиомодуль. Радиомодуль, в свою очередь, выполняет оцифровку и демодуляцию принятого сигнала и генерирует синфазные и квадратурные выборки, которые отправляются обратно на портативный компьютер. Ноутбук выполняет корреляционный анализ полученных выборок и вычисляет угочненные значения псевдодальностей, которые отправляются обратно в радиомодуль, формируя таким образом цикл обработки.

На основе программно-определяемых радиосистем была разработан и собран макет системы, состоящий из четырех радиомаяков и приемного устройства. Была продемонстрирована принципиальная работоспособность системы. В то же время были выявлены её недостатки. Основной проблемой, ограничивающей использование системы и ее точность, являются многочисленные переотражения в ближней зоне. Таким образом, для повышения надежности и точности системы должны быть реализованы алгоритмы фильтрации переотраженных сигналов, как это делается в современных системах ГНСС. В результате точность определения координат такой системы может быть доведена до первых сантиметров, в то время как существующий макет демонстрирует характеристики точности на уровне нескольких метров.

#### IV. ПЕРВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На базе Государственного морского университета в Новороссийске был проведен тестовый эксперимент по определению координат подвижной точки относительно стационарных маяков с известными координатами. Для этой цели были выбраны четыре точки, точные координаты каждой в системе WGS-84 были определены с помощью ГНСС. После этого в каждой из точек был установлен и запущен радиомаяк. Далее приемное устройство было последовательно установлено в девяти точках вблизи радиомаяков, на расстоянии не более одного километра от них. Во время эксперимента между маяками и приемником не было никаких зданий или деталей рельефа. Сеанс измерения был проведен в каждой из девяти точек. Во время каждого сеанса измерений регистрировались синфазная и квадратурная составляющие всех принятых навигационных радиосигналов. Корреляционная обработка измерений, а также решение навигационной задачи выполнялись в режиме постобработки. На рис. 4 показана схема эксперимента.

Измерения в первой точке не могли быть обработаны из-за наличия мощного сигнала на частотах 1575 и 1602 МГц (спуфинг), который отключил модули ГНСС как на маяках, так и на приемном устройстве, что сделало невозможной синхронизацию шкалы времени и опорной частоты маяка. Измерения в остальных восьми точках обрабатывались только в ручном режиме из-за наличия многочисленных переотраженных сигналов от окружающих зданий и сооружений и от рельефа местности. Одновременно в каждой точке были проведены двухчастотные измерения ГНСС для контроля результатов.



Рис. 4. Схема эксперимента. Маяки показаны красными треугольниками, точки установки приёмника синими треугольниками

При выполнении тестовых измерений были выявлены две основные проблемы. Во-первых, несовершенная синхронизация, которая несколько раз терялась из-за спуфинга. Вторая проблема заключалась в приеме большого количества переотраженных сигналов, что снизило конечную точность.

Тем не менее, измерения в других восьми точках были успешно обработаны и координаты точек были определены. Сравнение с измерениями ГНСС показало точность определения широты и долготы в пределах 1,7 метра. Высоты в точках не были определены из-за неполноты программного обеспечения. Это будет исправлено в будущем. В целом, достигнутая точность не хуже точности одночастотного ГНСС-приемника. Будущая работа над более стабильным стандартом времени и частоты, а также над фильтрацией переотраженных сигналов может еще больше повысить точность определения координат.

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан макет локальной радионавигационной системы на базе унифицированных блоков радиомаяков и приемника. Система может быть быстро развернута на земле для формирования навигационного поля в радиусе нескольких километров. Тестовый эксперимент показал принципиальную возможность определения координат подвижных объектов с точностью не хуже нескольких метров. Все аппаратные компоненты комплекса доступны на открытом рынке и основаны на технологиях, которые продемонстрировали свою надежность и эффективность. Основным недостатком комплекса является использование им ГНСС для синхронизации шкалы времени и опорной частоты. Чтобы устранить этот недостаток, маяки должны быть оснащены независимым источником (хранителем) временной шкалы и частоты. В настоящее время разрабатывается хранитель времени и частоты на основе трех рубидиевых генераторов. Другой проблемой являются переотраженные сигналы, принимаемые приемником. Даже на открытой местности постоянно принимается множество переотраженных сигналов. Современные приемники ГНСС используют алгоритмы, предназначенные для фильтрации переотраженных сигналов. К сожалению, эти алгоритмы в основном проприетарныые и не опубликованы в открытой литературе, за исключением основных принципов. Таким образом, чтобы повысить точность системы до нескольких сантиметров, следует разработать и использовать подобный алгоритм фильтрации. Так же, будет обновлено программное обеспечение приемника для определения высот, а также широт и долгот.

### Литература

- [1] D. Kramer; "DARPA looks beyond GPS for positioning, navigating, and timing," *Physics Today* 1 October 2014; 67 (10): 23–26
- [2] J. Barnes, C. Rizos, M. Kanli, A. Pahwa, D. Small, G. Voigt, N. Gambale and J. Lamance, "High accuracy positioning using Locata's next generation technology," *Proceedings of the 18th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2005)*, Long Beach, CA, September 2005, pp. 2049-2056.
- [3] C. Rizos, G. Roberts, J. Barnes and N. Gambale, "Experimental results of Locata: A high accuracy indoor positioning system," 2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation, Zurich, Switzerland, 2010, pp. 1-7, doi: 10.1109/IPIN.2010.5647717.
- [4] C. Rizos and L. Yang, "Background and Recent Advances in the Locata Terrestrial Positioning and Timing Technology," *Sensors*, vol. 19, no. 8, p. 1821, Apr. 2019, doi: 10.3390/s19081821
- [5] S. Meiyappan, A. Raghupathy, and G. Pattabiraman, "Positioning in GPS Challenged Locations -The NextNav Terrestrial Positioning Constellation," in Proceedings of the 26th InternationalTechnical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS+ 2013), 2013, pp. 426-431.

# Дробные фильтры калмановского типа для оценивания состояния, параметров и порядка дробной динамической системы в задачах обработки навигационной информации

О.С. Амосов Лаборатория интеллектуальных систем управления и моделирования, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН Россия, г. Москва osa18@yandex.ru

Аннотация—Дана постановка и решение задачи оценивания состояния, параметров и дробного порядка дробных динамических систем. Представлены расширенный и ансцентный дробные фильтры калмановского типа. Приводятся иллюстрирующие примеры использования обобщенного и ансцентного фильтров Калмана дробного порядка.

Ключевые слова—дробный фильтр Калмана, обобщенный фильтр, ансцентный фильтр, оценивание, состояние, параметр, порядок, навигационная информация.

## I. Введение

Оптимальные и адаптивные алгоритмы фильтрации калмановского типа широко используются для обработки сигналов и навигационных данных [1-4]. При этом также было установлено, что исчисление дробного порядка является эффективным инструментом обработки сигналов [5, 6]. В частности, алгоритм фильтра калмановского типа был обобщен для многих классов динамических систем дробного порядка [7-9]. Поэтому одним из весьма перспективных направлений является использование этих алгоритмов для оценки переменных состояния и параметров систем с динамикой дробного порядка применительно к задачам обработки навигационных данных. Учет фрактальных свойств и динамики дробного порядка позволяет добиться успеха при создании более качественных математических моделей систем и датчиков. В частности, это улучшение для обработки навигационной информации было предложено в наших работах [10-14].

Поэтому целью настоящей статьи является описание особенностей использования дробных фильтров Калмана (ФК) для оценки состояния и параметров дробных динамических систем, применительно к обработке навигационной информации. Важным является идентификация дробного порядка динамической системы.

## II. Постановка и решение задачи оценивания

Необходимо оценить *n* -мерный вектор состояния динамической системы  $\mathbf{x}_i = [x_{1i} \dots x_{ni}]^T$ ,  $i = 1, 2, \dots$  по *m* -мерному вектору измерений  $\mathbf{y}_i = [y_{1i} \dots y_{mi}]^T$ , исходя из условия минимизации заданного критерия. В состав вектора состояния может входить и *u* -мерный С. Г. Амосова Лаборатория киберфизических систем, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН Россия, г. Москва amosovasg@yndex.ru

вектор неизвестных и подлежащих идентификации параметров системы  $\mathbf{a}_i = [a_{1i} \ \dots \ a_{ui}]^T$ .

В таблице 1 приведена постановка и решение задачи оценивания дробных нелинейных динамических систем с использованием обобщенного фильтра Калмана дробного порядка (Fractional Extended Kalman Filter, FEKF) [7, 14]. Для математического описания систем дробного порядка конечная разность первого порядка  $\Delta^{l} \mathbf{x}_{i} = \mathbf{x}_{i} - \mathbf{x}_{i-1}$  обобщена на разность любого нецелого порядка  $\Delta^{\mu} \mathbf{x}_i$  в соответствии со следующим определеразности нием дробного порядка Грюнвальда-Летникова [7-9]:

$$\Delta^{\mu} \mathbf{x}_{i} = \frac{1}{h^{\mu}} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{j} {\mu \choose j} \mathbf{x}_{i-j} = \frac{1}{h^{\mu}} \left[ \mathbf{x}_{i} - \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j} {\mu \choose j} \mathbf{x}_{i-j} \right],$$
$$\mathbf{x}_{i} = h^{\mu} \Delta^{\mu} \mathbf{x}_{i} - \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j} {\mu \choose j} \mathbf{x}_{i-j},$$

где  $\mu \in \mathbb{R}$  – порядок дробной разности,  $\mathbb{R}$  – множество действительных чисел, h – интервал выборки, который принимается в дальнейшем равным 1 и i – номер отсчета, для которого вычисляется разность. Параметр  $\begin{pmatrix} \mu \\ j \end{pmatrix}$ 

может быть получен из выражения

$$\binom{\mu}{j} = \begin{cases} 1 & j = 0, \\ \frac{\mu(\mu - 1)...(\mu - j + 1)}{j!} & j > 0. \end{cases}$$

В случае, когда число уравнений системы равно N, а дробные порядки уравнений  $\mu_1,...,\mu_N$ ,

$$\Delta^{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{x}_{i} = \boldsymbol{\Phi}_{i} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_{i}, \quad \mathbf{x}_{i} = \Delta^{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{x}_{i} - \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j} \boldsymbol{\gamma}_{j} \mathbf{x}_{i-j},$$
  

$$\Gamma \mathcal{A} \mathbf{e}_{\boldsymbol{\gamma}_{j}} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{1} \\ j \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \mu_{N} \\ j \end{pmatrix} \end{bmatrix}; \quad \Delta^{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{x}_{i} = \begin{bmatrix} \Delta^{\mu_{1}} x_{1,i} & \dots & \Delta^{\mu_{N}} x_{N,i} \end{bmatrix}^{T}.$$

Следует заметить, что при  $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_N = 1$  выражения обобщенного и дробного обобщенного ФК совпадают.

ТАБЛИЦА 1. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АЛГОРИТМА ОБОБЩЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Постановка задачи фильтрации						
Обобщенная дискретная нелинейная стохастическая система дробного порядка						
Вектор состоя- ния	$\Delta^{\gamma} \mathbf{x}_{i} = \mathbf{\Phi}_{i}(\mathbf{x}_{i-1}) + \mathbf{w}_{i}$ $\mathbf{x}_{i} = \Delta^{\gamma} \mathbf{x}_{i} - \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j} \gamma_{j} \mathbf{x}_{i-j}$					
Измерения	$\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{v}_i$					
Начальные условия	$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N,  \mathbf{P}_0 = E[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T].$					
Порождающие шумы	$\overline{\mathbf{w}}_i = 0,  E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{Q}_i$					
Шумы измере- ния	$\overline{\mathbf{v}}_i = 0,  E\{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{R}_i$					
Взаимная корреляция	$E\{\mathbf{x}_0\mathbf{w}_i^T\}; E\{\mathbf{w}_i\mathbf{v}_i^T\} = 0; E\{\mathbf{x}_0\mathbf{v}_i^T\} = 0$					
Функции, матрицы	$\begin{split} & \Phi_{i}(\mathbf{x}_{i-1}), \mathbf{s}_{i}(\mathbf{x}_{i}) - n \cdot \mathbf{u} \ m \text{-мерные нелиней-} \\ & \text{ные вектор-функции,} \\ & \Phi_{\mathbf{x}i} \equiv \Phi_{\mathbf{x}i}(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \left[\frac{\partial \Phi_{i}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{i-1}} - n \times n, \\ & \mathbf{H}_{\mathbf{x}i} \equiv \mathbf{H}_{\mathbf{x}i}(\tilde{\mathbf{x}}_{i}) = \left[\frac{\partial \mathbf{s}_{i}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right] - m \times n \end{split}$					
	$ \begin{bmatrix} C\mathbf{X} & \mathbf{J}_{\mathbf{x}=\widetilde{\mathbf{x}}_i} \\ \mathbf{Q}_i - p \times p,  \mathbf{R}_i - m \times m \end{bmatrix} $					
Минимизиру- емый критерий	$J_i = E_{\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i (\mathbf{Y}_i))^T (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i (\mathbf{Y}_i)),$ $\mathbf{Y}_i = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_i^T)^T$					
	Решение задачи фильтрации					
	Дробный обобщенный ФК					
Прогноз	$\Delta^{\gamma} \widetilde{\mathbf{x}}_{i} = \mathbf{\Phi}_{i}(\widehat{\mathbf{x}}_{i-1}),$ $\widetilde{\mathbf{x}}_{i} = \Delta^{\gamma} \widetilde{\mathbf{x}}_{i} - \sum_{i=1}^{i} (-1)^{j} \gamma_{j} \widehat{\mathbf{x}}_{i-j},$					
Матрица кова- риаций оши- бок прогноза	$\widetilde{\mathbf{P}}_{i} = (\mathbf{\Phi}_{\mathbf{x}i} + \mathbf{\gamma}_{1})\mathbf{P}_{i-1}(\mathbf{\Phi}_{\mathbf{x}i} + \mathbf{\gamma}_{1})^{T} + \mathbf{Q}_{i} + \sum_{j=2}^{i} \mathbf{\gamma}_{j}\mathbf{P}_{i-j}\mathbf{\gamma}_{j}^{T},$					
Оценка	$\hat{\mathbf{x}}_i = \widetilde{\mathbf{x}}_i + \mathbf{K}_i [\mathbf{y}_i - \mathbf{s}_i (\widetilde{\mathbf{x}}_i)]$					
Коэффициент усиления	$\mathbf{K}_{i} = \widetilde{\mathbf{P}}_{i} \mathbf{H}_{\mathbf{x}i}^{\mathrm{T}} (\mathbf{H}_{\mathbf{x}i} \widetilde{\mathbf{P}}_{i} \mathbf{H}_{\mathbf{x}i}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_{i})^{-1}$					
Матрица кова- риаций оши- бок оценива- ния	$\mathbf{P}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_{\mathbf{x}i}) \widetilde{\mathbf{P}}_i$					

## III. ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ И НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА СИСТЕМЫ

Необходимо совместно оценить скалярную переменную  $x_i$  и неизвестный параметр  $a_i$  по зашумленным измерениям  $y_i$  вида  $y_i = x_i + v_i$ . Это приводит к нелинейной системе. Система определена следующими выражениями:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_i - 1)x_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_i^x \\ w_i^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \mu \\ j \end{pmatrix} x_{i-j} \\ -1a_{i-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{x}i}(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \begin{bmatrix} (\hat{a}_{i-1}-1) & \hat{x}_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{\mathbf{x}i}(\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Параметры дробного обобщенного фильтра Калмана, используемого в примере, следующие:

$$\mathbf{P}_{0} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,0001 \end{bmatrix}, \ R = 25$$

Для представленной системы проведено совместное оценивание и дано сравнение результатов для обобщенных фильтров Калмана целого и дробного порядков для различных значений нецелого порядка  $\mu = \mu_1 : 0.5; 1;$  1,6. Результаты совместной оценки показаны на рис. 1–2.

При  $\mu = 1$  обобщенный ФК совпадает с дробным обобщенным ФК. Обобщенный ФК позволяет получить оптимальное решение только для этого значения  $\mu$  и не является оптимальным при других значениях  $\mu$ . В общем случае, когда  $\mu \neq 1$  оптимальная оценка и матрица ковариации для ошибки оценивания определяются с помощью выражений для обобщенного фильтра Калмана дробного порядка.

При  $\mu = 0,5$  точность оценки неизвестного параметра  $a_i$  с помощью дробного обобщенного ФК выше, чем для обобщенного ФК. Точности оценки координат для сравниваемых фильтров близки.

При  $\mu = 1,6$  точности оценки параметра близки. Точность оценки координаты у дробного ФК значительно выше.



Рис. 1. Оценивание х



Рис. 2. Оценивание параметра а

## IV. ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ И ДРОБНОГО ПОРЯДКА СИСТЕМЫ

Необходимо совместно оценить скалярную переменную  $x_i$  и дробный порядок системы  $\mu$  по зашумленным измерениям  $y_i$  вида  $y_i = x_i + v_i$ . Это приводит к нелинейной системе.

Данный пример иллюстрирует использование и сравнение дробного обобщенного и дробного ансцентного (Fractional Unscented Kalman Filter, FUKF) фильтров Калмана. Для решения совместного оценивания переменных состояния и дробного порядка в случае дробного ансцентного ФК рассматривается схема двойного оценивания, содержащая два фильтра [4, 8]. Для простоты рассмотрим скалярную модель переменной состояния постоянного дробного порядка.

Таблица 2. Соотнош	ЕНИЯ ДЛЯ АЛГОРИТМА АНСЦЕНТНОГО ФИЛЬТРА
КА	ПМАНА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Постановка задачи фильтрации				
Скалярная система дробного порядка				
Вектор состояния	$\begin{bmatrix} x_i \\ \mu_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-1)x_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_i^x \\ w_i^\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \mu \\ j \end{pmatrix} x_{i-j} \\ -1\mu_{i-1} \end{bmatrix}$			
Измерения	$y_i = x_i + v_i$			
Начальные условия	$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2,  \mathbf{P}_0 = E[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T].$			
Порождающие шумы	$\overline{\mathbf{w}}_i = 0,  E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{Q}_i$			
Шумы измерения	$\overline{v}_i = 0,  E\{v_i v_j^T\} = \delta_{ij} R_i$			
Взаимная корреля- ция	$E\{\mathbf{x}_0\mathbf{w}_i^T\}; E\{\mathbf{w}_i\mathbf{v}_i^T\} = 0; E\{\mathbf{x}_0v_i^T\} = 0$			
Минимизируемый критерий	$J_i = E_{\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i (\mathbf{Y}_i))^T (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i (\mathbf{Y}_i)),$ $\mathbf{Y}_i = (\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i)^T$			
Do	$\mathbf{Y}_i = (y_1, y_2, \dots, y_i)$			
re	шение задачи фильтрации			
	Дрооныи линеиныи ФК			
п	$\Delta^{\mu_{i-1}} \widetilde{x}_i = (a-1) \widetilde{x}_{i-1},$			
Прогноз	$\widetilde{x}_i = h\Delta^{\widehat{\mu}_{i-1}}\widetilde{x}_i - \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \widehat{\mu}_{j,i} \widehat{x}_{i-j},$			
Матрица корариаций	$\widetilde{P}_i = h(a-1+\hat{\mu}_{i-1})^2 P_{i-1} + Q_{i-1}^x +$			
ошибок прогноза	$+ \sum_{j=2}^{l} (\hat{\mu}_{i-j})^2 P_{i-j},$			
Оценка	$\hat{x}_i = \tilde{x}_i + K_i(y_i - \tilde{x}_i)$			
Коэффициент усиле- ния	$K_i = \widetilde{P}_i (\widetilde{P} + R)^{-1}$			
Матрица ковариаций ошибок оценивания	$P_i = (1 - K_i)\tilde{P}$			
	Дробный ансцентный ФК			
	$\widetilde{\mu}_i = \hat{\mu}_{i-1},  \widetilde{\mu}_1 = \hat{\mu}_0,$			
	$\Delta^{\widetilde{\mu}_i}\widetilde{\chi}_{i,k} = \Phi_d(a_{i-1})\widehat{x}_{i-1} = (a-1)\widehat{x}_{i-1},$			
	$\widetilde{x}_{i,k}^{\mu} = h^{\widetilde{\mu}_i} \Delta^{\widetilde{\mu}_i} \widetilde{\chi}_{i,k}^{\mu} - \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \widetilde{\mu}_{j,i} \hat{x}_{i-j},$			
Прогноз	$\widetilde{P}_{i}^{\mu} = P_{i-1}^{\mu} + Q_{i-1}^{\mu}, \\ \widetilde{P}_{1}^{\mu} = P_{0}^{\mu} + Q_{0}^{\mu}, \\$			
	$\widetilde{\mathbf{M}}_{i} = [\widetilde{\mu}_{i}  \widetilde{\mu}_{i} + \gamma \sqrt{\widetilde{P}_{i}^{\mu}}  \widetilde{\mu}_{i} - \gamma \sqrt{\widetilde{P}_{i}^{\mu}} ],$			
	$\widetilde{Y}_{i,k}^{\mu} = H \widetilde{\chi}_{i,k}^{\mu} = \chi_{i,k}^{\mu},  \widetilde{\mathbf{Y}}_{i}^{\mu} = \widetilde{\chi}_{i}^{\mu},$			
	$\widetilde{y}_i^{\mu} = \sum_{k=0}^{2L} W_k^{(m)} \widetilde{Y}_{i,k}^{\mu}$			
	$P_{y_i y_i}^{\mu} = \sum_{i=0}^{2L} W_k^{(c)} [\widetilde{Y}_{i,k}^{\mu} - \widetilde{y}_i^{\mu}] [\widetilde{Y}_{i,k}^{\mu} - \widetilde{y}_i^{\mu}]^T + R^{\mu},$			
Матрицы ковариаций ошибок прогноза	$k=0$ $\frac{2L}{2L}$			
•	$P^{\mu}_{\mu_{i}y_{i}} = \sum_{k=0} W^{(c)}_{k} [\tilde{M}^{\mu}_{i,k} - \tilde{\mu}^{\mu}_{i}] [Y^{\mu}_{i,k} - \tilde{y}^{\mu}_{i}]^{T},$			

Оценка	$\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_i + K_i^{\mu} (y_i - \widetilde{y}_i^{\mu})$
Коэффициент усиле- ния	$K_i^{\mu} = P_{\mu_i y_i}^{\mu} (P_{y_i y_i}^{\mu})^{-1}$
	$P_i^{\mu} = \widetilde{P}_i^{\mu} - K_i^{\mu} P_{y_i y_i}^{\mu} K_i^{\mu},$
Матрица ковариаций	$Q^\mu_i = (1-\delta^\mu)Q^\mu_{i-1} +$
ошибок оценивания	$+ \delta^{\mu}(K_i^{\mu})(y_i - \widetilde{y}_i^{\mu})(y_i - \widetilde{y}_i^{\mu})^T (K_i^{\mu})^T,$
	$\delta^{\mu} \in (0,1]$

Здесь коэффициенты ансцентного преобразования *W* равны:

$$\begin{split} W_0^{(m)} &= \lambda / L + \lambda , \ W_0^{(c)} = \lambda / (L + \lambda) + (1 - 2\alpha^2 + \beta) , \\ W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = 1 / (2(L + \lambda)) , \end{split}$$

где  $\gamma = \sqrt{L + \lambda}$ ,  $\lambda = \alpha^2 (L + k) - L$  – параметр масштабирования, L – размерность состояния,  $\alpha$  – разброс сигматочек ( $1 \le \alpha \le 10^{-4}$ ), k = 3 - L,  $\beta = 2$  для гауссовского распределения.

Параметры дробных фильтров Калмана, используемых в примере, следующие:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ Q_0^x = 3, \ Q_0^\mu = 0,0001, \ R = 25, \ a = 0.8.$$

Для представленной системы проведено совместное оценивание и дано сравнение результатов для обобщенного и двойного ансцентного ФК дробного порядка  $\mu = 0,7$ . Результаты совместной оценки состояния и дробного порядка показаны на рис. 3–4.

Из рис. З видно, что точности оценки координат у обоих фильтров близки. Использование обобщенного ФК вызывает сложности для оценки дробного порядка, поскольку алгоритм обобщенного ФК не включает знание того факта, что порядок первого уравнения состояния является элементом вектора состояния [7]. Одно из решений этой проблемы состоит в том, чтобы рассматривать зависимость между порядком  $\mu$  и переменной состояния  $x_i$  первого уравнения как шум и вводить в матрицу  $\mathbf{Q}_i$  некоторое значение в позиции, представляющей эту зависимость. Это требует дополнительных эмпирических данных, получение которых планируется для дальнейших исследований.





Рис. 4. Оценивание µ

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены математические модели дискретных динамических систем дробного порядка с использованием разности дробного порядка Грюнвальда-Летникова.

Дана постановка задачи оценивания состояния, параметров и дробного порядка дробных динамических систем.

Представлены обобщенный и ансцентный фильтры калмановского типа дробного порядка для оценивания состояния, параметров и дробного порядка динамической системы.

Приводятся иллюстрирующие примеры для оценивания: 1) совместного оценивания переменной состояния и неизвестного параметра системы; 2) совместного оценивания переменной состояния и дробного порядка системы.

Дана оценка точности алгоритмов дробной калмановской фильтрации.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] О.А. Степанов Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Изд. 3-е, исправленное и дополненное. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 509 с., 2017.

- [2] О.А. Степанов Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Изд. 3-е, исправленное и дополненное. Ч. 2. Введение в теорию фильтрации. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 428 с., 2017.
- [3] S. Haykin, Kalman Filtering and Neural Networks; John Wiley & Sons Inc.: New York, NY. USA, 2001. 298 p.
- [4] E.A. Wan, Rudolph van der Merwe, A.T. Nelson, "Dual Estimation and the Unscented Transformation", Advances in Neural Information Processing Systems, pp. 1–7, January 2000.
- [5] А.В. Летников Теория дифференцирования с произвольным указателем. Матем. Сб. 1868. т. 3, вып.1. С. 1–68.
- [6] K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus. Academic Press, 1974. 234 p.
- [7] D. Sierociuk, A. Dzieliński, "Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation", International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, vol. 16, iss. 1, pp. 129–149, 2006.
- [8] D. Sierociuk, M. Macias, "Triple Estimation of Fractional Variable Order, Parameters, and State Variables Based on the Unscented Fractional Order Kalman Filter", Sensors, vol. 21, 8159, 2021, DOI: 10.3390/s21238159.
- [9] G. Xue, Y. Xu, J. Guo, and W. Zhao, "The Fractional Kalman Filter-Based Asynchronous Multirate Sensor Information Fusion", Hindawi Complexity, vol. 2018, article ID 1450353, 10 p., Dec. 2018, https://doi.org/10.1155/2018/1450353.
- [10] O.S. Amosov, S.G. Amosova, "Peculiarities and applications of stochastic processes with fractal properties", Sensors, vol. 21, iss. 17, № 5960, 2021, DOI: 10.3390/s21175960.
- [11] O.S. Amosov, "Peculiarities of stochastic processes with fractal properties and their applications in problems of navigation information processing", 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2018, Saint Petersburg, pp. 1-5, 28–30 May 2018, DOI:10.23919/ICINS.2018.8405867.
- [12] O.S. Amosov, S.G. Baena, "Wavelet based filtering of mobile object fractional trajectory parameters", 13th IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA, Ohrid, № 8003045, pp. 118–123, 3–6 July 2017, DOI: 10.1109/ICCA.2017.8003045.
- [13] O.S. Amosov, S.G. Baena, "Trajectory tracking while measuring distance and bearing with the use of fractal wiener process for the motion model", 24th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2017, Saint Petersburg, № 7995599, 29–31 May 2017, DOI: 10.23919/ICINS.2017.7995599.
- [14] О.С. Амосов, С.Г. Амосова, "Оценивание состояния и параметров дробных динамических систем с использованием дробных фильтров калмановского типа", В книге: Материалы XXXIII конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. 15-ая мультиконференция по проблемам управления. Санкт-Петербург, С. 96–99, 2022.

## Система ориентации полезной нагрузки

Ю.Н. Адякин Отдел перспективных разработок ПАО «НПО «Стрела» Тула, Российская Федерация nto410@npostrela.net

А.П. Шведов Отдел перспективных разработок) ПАО «НПО «Стрела» Тула, Российская Федерация nto410@npostrela.net В.А. Орлов Отдел перспективных разработок ПАО «НПО «Стрела» Тула, Российская Федерация nto410@npostrela.net

А.В. Ладонкин Отдел перспективных разработок ПАО «НПО «Стрела» Тула, Российская Федерация nto410@npostrela.net

Аннотация—В работе рассмотрена конструкции перспективного двухкоординатного опорно-поворотного устройства полезной нагрузки, имеющего повышенную скорость поворота в азимутальной плоскости, повышенную точность позиционирования полезной нагрузки, малые масса-габаритные характеристики. Построение привода осуществлено на базе волнового редуктора с новой формой зубьев, способного передавать большие нагрузки при малых габаритах и массе, имеющего малую кинематическую погрешность вследствие многопарности зацепления, высокоточных оптико-электронных датчиков угла и электрических двигателей с высоким соотношением момент/масса –габаритные характеристики.

Ключевые слова—опорно-поворотное устройство, редуктор, датчик угла, электродвигатель, следящая система, параметры ориентации.

## I. Введение

Системы ориентации (иначе опорно-поворотные устройства) предназначены для ориентации в пространстве полезной нагрузки, например, дистанционного изменения направления оптической оси телевизионной системы с изменяемой скоростью по командам оператора в двух плоскостях (вертикальной и горизонтальной). Разработка системы пространственной ориентации полезной нагрузки, обеспечивающей поворот по двум координатам, высокие скорости переброса, высокую точность позиционирования и обладающей малыми массой и габаритами является актуальной задачей [1].

Анализ конструкций и технических характеристик современных отечественных и зарубежных опорноповоротных устройств (ОПУ) в сегменте нагрузки до 20 кг показал, что достигнутые в настоящее время технические характеристики ОПУ таких производителей, как ООО «Бик-информ» ССТV, Security Systems, «Пергам – Инжиниринг» решают задачу управления положением полезной нагрузки, однако имеют ряд недостатков. К основным недостаткам существующих ОПУ можно отнести невысокую скорость поворота в горизонтальной плоскости, малую точность позиционирования и значительные масса-габаритные характеристики [2–4].

## II. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является разработка перспективной конструкции ОПУ с существенно меньшими массагабаритными характеристиками (по сравнению с существующими аналогами в сегменте нагрузи до 20 кг); на базе волнового редуктора; коллекторных двигателей постоянного тока, обладающих высоким соотношением В.А. Борисов Отдел перспективных разработок ПАО «НПО «Стрела» Тула, Российская Федерация nto410@npostrela.net

Д.М. Малютин Кафедра приборов управления ФГБОУ ВО ТулГУ Тула, Российская Федерация Malyuitindm@yandex.ru

момент / массогабаритные характеристики, способных длительное время работать в заторможенном режиме; высокоточных оптико-электронных датчиков угла. Система управления ОПУ реализует функционирование ОПУ в режиме следящей системы с повышенной точностью и повышенной скоростью управления [3–5]. Целевые технические характеристики приведены в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРСПЕКТИВНОГО ОПУ

Модель	Перспективное ОПУ	Аналоги: РТК-404НМ. НВ-1510, ZL-3040, NERO
Угол поворота в азимуте, градус	от 0 до 360	от 0 до 360
Скорость поворота в азимуте, градус/с	120	9-80
Скорость наклона, гра- дус/с	30	5-50
Точность позициониро- вания, градус	0,02	0,085-1
Осевая нагрузка, кг	11	10-20
Класс защиты корпуса	IP66	IP66
Диапазон рабочих тем- ператур, <sup>0</sup> С	от -40 до +50	от -40 до +65
Напряжение питания, В	DC 27	DC 18-36/AC24
Потребляемая мощность	не более 60Вт	50-85Вт
Габаритные размеры, мм. Произведение трех габа-	157,7×125×118	-
ритных размеров, м <sup>3</sup>	0,0023	0,007-0,04
Масса, кг	не более 2,5	5,5-7,5
Тип передачи	волновая	червячная
Тип двигателя	постоянного тока, с	шаговый
	возбуждением от	
	постоянных магнитов	

#### III. Конструкция перспективного ОПУ

Для обеспечения требований, указанных в табл. 1, разработана конструкция перспективного ОПУ Конструкция представлена на рис. 1, а весовая сводка в табл. 2.

Основные проблемные технические задачи, которые необходимо было решить при создании перспективной конструкции привода - это:

- обеспечить КПД редукторов не менее 80%;
- обеспечить безлюфтовое зацепление зубьев в редукторах;
- обеспечить передаточное отношение редуктора азимутального канала привода не более 56;

 обеспечить трансляцию постоянного напряжения до 30 В с силой тока до 10 А неподвижной части привода на части, вращающиеся по азимуту.



Рис. 1. Конструкция перспективного ОПУ на базе волнового редуктора: 1 – двигатель ДС-27-01 со связанными с ним деталями, 2 – датчик угла ЛИР-ДА219А со связанными с ним деталями (угломестный), 3 – двигатель ДС-28-01 со связанными с ним деталями, 4 –кронштейн для закрепления нагрузки, 5– угломестный волновой редуктор, 6 – корпусные детали, 7 – азимутальный волновой редуктор, 8 – токосъемник

ТАБЛИЦА 2. ВЕСОВАЯ СВОДКА ПЕРСПЕКТИВНОЙ КОНСТРУКЦИИ ОПУ

Позиция	Наименование	Macca,	Примечание
		КГ	
1	Двигатель ДС-27-01	0,487	С подшипниками
	со связанными с ним		
	деталями		
2	Датчик угла ЛИР-	0,105	
	ДА219А со связан-		
	ными с ним деталями		
	угломестный		
3	Двигатель ДС-28-01	0,215	С подшипниками
	со связанными с ним		
	деталями		
4	Кронштейн для за-	0,09	
	крепления нагрузки		
5	Угломестный волно-	0,343	
	вой редуктор		
6	Корпусные детали	0,497	С крепежными изде-
			лиями
7	Азимутальный вол-	0,408	
	новой редуктор		
8	Токосъемник	0,1	
	Узел управления	0,25	
	Датчик угла ЛИР-	0,059	Не попал в сечение
	ДА219А со связан-		
	ными с ним деталями		
	азимутальный		
	Масса двухкоорди-	2,5	-0,1+0,2кг
	натного привода		

Для выполнения требований обеспечения передаточного отношения редуктора 85 в угломестном канале привода и 56 в азимутальном канале привода, минимальных габаритных размеров и массы, а также прочности при нагрузочном моменте не менее 25 Нм подходят два типа передач: многопоточная планетарная и волновая. При этом требуемый коэффициент полезного действия (КПД) не ниже 80% может обеспечить только планетарная передача, которая практически не может быть

безлюфтовой. Отсутствие люфта в передаче является одним из основных требований для применения в следящем приводе. Отсутствие люфта может обеспечить только волновая зубчатая передача (ВЗП). Существуют ВЗП двух типов: с длинными и короткими гибкими колесами. Применение передачи с длинным гибким звеном не позволяет выполнить требование по минимизации массы привода из-за увеличения осевых габаритов. При этом КПД передач с длинным гибким колесом не превышает 75%. КПД передач с коротким гибким колесом не превышает 40%. Это объясняется тем, что условия зацепления зубьев эвольвентной формы в волновой зубчатой муфте (ВЗМ) значительно хуже условий зацепления в ВЗП. Поэтому передача, с коротким гибким колесом, имеющая два существенных преимущества перед передачей с длинным гибким колесом: меньшие осевые габариты и меньшие напряжения при одинаковых нагрузках, применяется чрезвычайно редко. Дополнительно необходимо отметить, что диапазон передаточных отношений существующих ВЗП находится в пределах 80-250.

Для выполнения всех требований к приводу была проведена работа по изучению нынешнего технического уровня приводов с ВЗП и разработки инновационных решений. Результатом этой работы является изобретение новой формы зубьев для ВЗП и ВЗМ. Новая форма зубьев позволяет создать конструкцию привода, соответствующую всем основным требованиям минимизации массы и габаритов, отсутствия люфта. Это обеспечивается тем, что, предложенный тип зубьев дает следующие преимущества перед известными до настоящего времени конструкциями волновых передач:

- повышение нагрузочной способности на 50%;
- повышение КПД ВЗП и ВЗМ до 90%, что обеспечивает КПД редукторов около 81%;
- сохранение характеристик зацепления в процессе эксплуатации из-за равномерного распределения нагрузки на зубъя и соответственно значительного снижения нагрузки на каждом зубе;
- повышение крутильной жесткости передачи;
- повышение кинематической точности передачи;
- возможность уменьшения передаточного отношения на стальных колесах до 50, на пластмассовых колесах до 30.

Так как привод должен иметь режим кругового вращения, требуется осуществить трансляцию электропитания с неподвижных на вращающиеся части. Токосъемное устройство должно обеспечивать трансляцию постоянного напряжения до 30 Вольт с силой тока до 10 Ампер. Устройство должно иметь минимальный момент трения и низкое переходное сопротивление, для уменьшения механических и электрических потерь. Токосъемное устройство (рис. 2) состоит из наружной обоймы 1, изготовленной из электроизоляционного материала АГ-4, на которой закреплены две токопроводящих втулки 2, с закрепленными на них контактными элементами 3, которые поджаты к двум токонесущим втулкам 4, закрепленным на внутренней обойме 5, изготовленной из электроизоляционного материала. Форма контактных элементов 3 заимствована из серийно выпускаемых из-
делий. Контактные элементы имеют переходной сопротивление менее 0,05 Ом и пропускают ток силой до 1,5 А. Использование в конструкции семи элементов 3, позволяет обеспечить переходное сопротивление менее 0,01 Ом и трансляцию тока свыше 10 А. Момент трения не превышает величину 0,2 Нм.



Рис. 2. Токосъемное устройство

В конструкции (рис. 1) применены малогабаритные двигатели с возбуждением от постоянных магнитов. Двигатели имеют высокое соотношение номинальный момент/массогабаритные характеристики и способны работать в заторможенном режиме и удерживать нагрузку неподвижно долгий промежуток времени. К особенностям функционирования системы управления можно отнести наличие верхней маятниковости, обусловленной положением центра масс нагрузки по отношению к оси вращения канала высоты. Устойчивый режим работы и астатизм первого порядка передаточной функции, как отношение угла поворота нагрузки к сигналу задатчика канала высоты, обеспечен путем применения в прямой цепи управления двигателем корректирующего звена с

передаточной функцией  $W_{\kappa}(p) = \frac{(T_1p+1)}{p} \frac{(T_2p+1)}{(T_3p+1)}$ 

Устойчивый режим работы и астатизм второго порядка передаточной функции, как отношение угла поворота нагрузки к сигналу задатчика азимутального канала, обеспечен путем применения в прямой цепи управления двигателем корректирующего звена с передаточной функцией  $W_{\kappa}(p) = (Tp+1)/p$  [3–5].

#### IV. Выводы

Рациональный выбор элементной базы, инновационные решения при построении волновой зубчатой передачи с новой формой зубьев, проведенная компановка подтвердили техническую реализуемость ОПУ с требуемым быстродействием, точностью позиционирования и массой двухкоординатного привода не превышающей 2,5 кг.

#### V. ССЫЛКА НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства Тульской области в сфере науки и техники. Договор ДС/143 от 26 июля 2022 года.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Распопов В.Я. Измерительные приборы и системы для ориентации, стабилизации и управления / В.Я. Распопов, Д.М. Малютин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. № 4. С. 372-386.
- [2] Пат. 2345501 Российская Федерация, МПК Н04N, Н02Р 8/04 С2. Поворотное устройство для камеры наружного наблюдения / Мостовой А.Ю.; приор. 27.12.2006; заявитель и патентообладатель Общество с ограниченной ответственностью "БИК-Информ"; опубл. 27.01.2009, Бюл. №1.
- [3] Малютин, Д.М. Особенности динамики канала высоты опорно поворотного устройства / Д.М. Малютин, Ю.Н. Адякин, В.А. Орлов, А.П. Шведов, А.В. Ладонкин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. № 1. С. 266-270.
- [4] Малютин Д.М., Адякин Ю.Н. Динамика канала высоты опорноповоротного устройства // 15-ая международная научнотехническая конференция «Приборостроение - 2022». Минск.: БНТУ, 2022. С.91-93.
- [5] Малютин Д.М. Исследование динамики системы стабилизации оптической оси // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2003.Т.46. №9. С. 49-53.

# Метод адаптивно-робастного всеракурсного наблюдения аэрообъекта при расширенном диапазоне скоростей сближения/удаления в радаре с квазинепрерывным ЛЧМ-излучением

В.Н. Коврегин Кафедра аэрокосмических измерительно-вычислительных комплексов, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия <u>kovregin@mail.ru</u>

Аннотация—Представлен метод наблюдения объекта в РЛС с квазинепрерывным ЛЧМ-излучением при широком диапазоне относительных скоростей, включая нулевые и сверхзвуковые скорости при сближении/удалении объекта. Приведены результаты, подтверждающие эффективность предложенного метода.

Ключевые слова—импульсно-доплеровский радар; высокая частота повторения; линейная частотная модуляция; микронавигация.

#### I. Введение

В настоящее время в задачах дальнего наблюдения воздушных объектов, традиционно решаемых РЛС при квазинепрерывным излучении [1, 2] актуальна проблема обеспечения всеракурсного наблюдения при мешающих отражениях от земли (MO3) и при широком диапазоне положительных и отрицательных радиальных скоростей объекта относительно РЛС. Требуемые диапазоны могут включать как традиционно «слепые» (нулевые/малые), так и сверхзвуковые относительные скорости объекта. При малых скоростях обычно используют излучения со средней частотой повторения импульсов, при больших положительных скоростях (сближение) - с высокой или средневысокой частотой. Для наблюдения мало- и высокоскоростных объектов обычно применяют их последовательные комбинации. Однако обнаружение малоскоростных объектов в дальней зоне может быть затруднено, поскольку потенциально не обеспечивается при средней частоте повторения. Комбинированный режим излучения, как правило, критичен по временным затратам. В то же время на фоне тенденций к расширению диапазона скоростей объектов, роста динамичности процессов при обзоре воздушного пространства, прежде всего, в многоцелевых ситуациях, существенно ужесточаются требования к оперативности и точности сеансов наблюдения объекта (обнаружения/ измерения траекторных параметров).

В работах [3-6 и др.] показано разрешение такой проблемной ситуации на основе методов адаптивноробастного (АР) наблюдения мало- и высокоскоростных приближающихся объектов в рамках унифицированного режима излучения – высокая (ВЧП) частота повторения импульсов (ЧПИ) при линейной частотной модуляции несущей волны (ЛЧМ). Однако их применение при «двустороннем» и существенном расширения диапазона Г.М. Коврегина Кафедра аэрокосмических измерительно-вычислительных комплексов, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия <u>g\_kovregina@mail.ru</u>

относительных скоростей наблюдаемого объекта на данный момент исследовано недостаточно. Но при этом возникает ряд факторов влияния, не учитываемых в типовых методах АР наблюдения [3-6], приводящих к существенному снижению их эффективности или нарушению работоспособности.

Цель работы – представление метода дальнего АР наблюдения объекта с расширенным диапазоном его относительных скоростей в условиях мощных МОЗ.

Прагматическая цель – расширение функциональных возможностей РЛС в режиме ВЧП с ЛЧМ; повышение точности, оперативности и помехоустойчивости сеанса наблюдения.

#### II. Постановка задачи

Аналогично работам [3-6] рассматривается РЛС при зависании или движении на малой высоте, с типовой диаграммой направленности антенны (ДН) (см. рис.1) и при ориентации главного луча (ГЛ) в окологоризонтное свободное пространство.



Рис. 1. Вид пространственной ДН в антенной системе координат

По боковым лепесткам (БЛ) формируются МОЗ, на фоне спектра которых обнаружение сигнала объекта считается невозможным. Текущие границы спектра МОЗ полагаются известными на основе расчетов по данным от системы микронавигации/ориентации в составе РЛС [3-5, 9]. Обеспечивается режим излучения с ВЧП  $F_r=1/T_r$ и ЛЧМ с крутизной *S*. Есть возможность адаптивного управления  $F_r$ /периодом повторения импульсов (ППИ)  $T_r$  и крутизной *S* в рамках аппаратных ограничений РЛС:

$$T_r \in T_{r\min} \le T_r(k) \le T_{r\max}$$
,  $k=1, ..., K_{Tr}$ ;  
 $S \in \{S^*(m)\}, |S^*(m)| \le S^*_{max}, m = 1, ..., M_S$ .

Объект в ГЛ, на дальности  $R_{ob} \in [R_{d \min}; R_{d \max}]$  при скорости  $V_R \in [V_{R \max}(\cdot); V_{R \max}(+)]$ , где  $R_{d \min}$  и  $R_{d \max}$  – заданная минимальная и максимальная дальность обнаружения, обеспечиваемая РЛС;  $V_{R \max}(\cdot)$  и  $V_{R \max}(+)$  – задан-

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект № 22-19-00058.

ные максимальные значения положительной и отрицательной скорости, полагаемые как сверхзвуковые. Считается, что сигнал объекта имеет узкий спектр и его обнаружение на фоне шумов приемника потенциально обеспечено в РЛС.

Требуется в условиях МОЗ в заданных диапазонах дальности/скорости объекта обеспечить возможность его обнаружения, измерения дальности и скорости (захвата) с точностью, достаточной для дальнейшего перехода к устойчивому сопровождению его траектории. При этом затраты времени (количество пачек импульсов) на сеанс наблюдения объекта должно быть минимизированы.

### III. АДАПТИВНО-РОБАСТНОЕ ВСЕРАКУРСНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ПРИ РАСШИРЕННОМ ДИАПАЗОНЕ СКОРОСТЕЙ

Логика и результаты типового этапа АР обнаружения [3-5] сводятся к следующему. Излучаются «пары» ЛЧМпачек с инвертируемой крутизной S<sub>1(i)</sub> =-S<sub>2(i)</sub> при одном ППИ  $T_{r1(i)} = T_{r2(i)} = T_{r(i)}$ . Это дает возможность обнаружения объекта со «слепой» скоростью, как минимум, на одной ЛЧМ-пачке из пары – при условии, что неоднозначная задержка сигнала объекта (H3C)  $\tau_{1(i)}$  и/или  $\tau_{2(i)}$  будет вне слепой зоны ППИ (из-за бланкирования приемника на время излучения). При необходимости раскрытия этих слепых зон НЗС в следующих парах ППИ изменяется. Если обнаружение было на стартовой паре (*i*=0) и дало два частотно-временных измерения (H3C  $\tau_{1(i)}$  и  $\tau_{2(i)}$ , дальномерно-доплеровские частоты (ДДЧ) F<sub>RD1(i)</sub> и  $F_{RD2(i)}$ ), то известными способами [7, 8] определяется дальность и скорость. Далее выполняется типовой шаг АР захвата [3, 5] при адаптации приращений ППИ  $\Delta T_{r(i+1/i)} = T_{r(i+1)} - T_{r(i)}$  для уточнения индекса ППИ  $r_{(i+1)}$  и дальности  $R_{ob (i+1)}$  на основе оценок вида:

$$r_{(i+l)} = int\left\{\frac{\left(\tau_{(i+l)} - \tau_{(i+l)}\right)}{\Delta T_{r(i+l)}}\right\}; R_{ob(i+l)} = \frac{1}{2}c\left[r_{(i+l)}T_{r(i+l)} + \tau_{(i+l)}\right], (1)$$

где *int*  $\{.\}$  – целая часть числа; *с* – скорость радиоволн;

$$\tau_{(i+1/i)} = \tau_{2(i)} + \frac{2}{c} V_{R(i)} \Delta t_{i+1/i} -$$
(2)

прогнозная оценка H3C с учетом смещения объекта за время  $\Delta t_{i+1/i}$  между излучением пачек импульсов.

На всех пачках импульсов при захвате инвертируется ЛЧМ:  $S_{(i+1)} = (-S_{2(i)}), S_{(i+2)} = (-S_{(i+1)})$  и на фоне процедур (1) также выполняется оценивание дальности/скорости на «скользящем» окне типовыми «частотными» методами [7, 8]. Используемые при этом действительные значения ДДЧ  $F_{RD}$  и измеряемые («видимые») частоты  $f_{RD}$  связаны неоднозначно:

$$F_{RD} = JF_r + f_{RD}, \qquad (3)$$

где *J*=0 или *J*= (-1) – априорно неизвестный индекс ЧПИ.

При небольших скоростях неоднозначность индекса J в выражении (3) устраняется логически: если при S < 0 частота  $f_{RD(-)}$  превышает частоту  $f_{RD(+)}$ , измеренную при S>0, то индекс J = (-1). Иначе J = 0.

Однако при расширенном диапазоне скоростей на этапе обнаружения при двух ДДЧ неоднозначность ДДЧ (3) не устраняется логически и, соответственно, она есть для доплеровской частоты  $F_D$  (ДЧ)/скорости (см. рис.2).



Рис. 2. Неоднозначность ДДЧ и ДЧ/скорости по двум измерениям при высокой положительной/отрицательной скорости объекта

Прогноз (2) в таком случае невозможен и в оценках (1) возникают систематические ошибки, существенные при высокой скорости. Предлагаются два подхода.

*а*) Устранение неоднозначности (3) на первом цикле захвата, что возможно при анализе реакции измеряемой частоты на изменение ЧПИ:

$$J = int\left(\frac{f_{RD(i)} - f_{RD(i+1)}}{F_{r(i+1)} - F_{r(i)}}\right); S_{i+1} = S_i. \quad (4)$$

Следует отметить, что неоднозначность ДЧ может устраняться и на этапе обнаружения – в том частном случае, когда есть наблюдаемое отличие  $\tau_{1(j)}$  и  $\tau_{2(j)}$ . Это позволяет определить знак смещения НЗС, скорости и устранить неоднозначность ДДЧ.

*b)* Нетрадиционный метод захвата, инвариантный к неучтенному дрейфу H3C, не требующий определения скорости и экстраполяции (2). Метод предполагает:

 формирование линейной комбинации из измерений H3C т<sub>(i)</sub>, т<sub>(i+1)</sub> и т<sub>(i+2)</sub> в виде:

$$Z_{(j+2)} = \left| \tau_{(j)} + \tau_{(j+2)} - 2\tau_{(j+1)} \right|;$$
(5)

 оценку дальности по комбинированному измерению:

$$r_{(j+2)} = int \left\{ \frac{Z_{(j+2)}}{|\Delta T_{r(j+1/j)} - \Delta T_{r(j+2/j+1)}|} \right\};$$
(6)

$$R_{ob(i+2)} = \frac{1}{2}c \left[r_{(i+2)}T_{r(i+2)} + \tau_{(i+2)}\right].$$
 (7)

При адаптивном управлении приращения ППИ, по аналогии с работами [3-5], выбираются максимальными, но при выполнении условия

$$sign(\Delta T_{r(j+1/j)}) \neq sign(\Delta T_{r(j+2/j+1)}),$$

что обеспечивает: взаимную компенсацию дрейфов H3C на интервалах  $\Delta t_{(j+1/j)} = \Delta t_{(j+2/j+1)}$ ; увеличение итогового приращения ППИ в выражении (6) и, следовательно, повышение точности оценивания.

При двух частотно-временных измерениях после обнаружения с «раскрытием» слепых зон ППИ (i=I>0) ситуация такая же, как и на стартовой паре, дополняется только наличием только «грубой» оценкой дальности по квазиизмерениям НЗС [6], в данном случае избыточной.

При одном измерении в любом случае  $(i=I\geq 0)$  нет информации о скорости. Но при i=I>0 есть «грубая» оценка по дальности. Неоднозначность ДЧ имеет вид:

$$F_{D \ k} = \{JF_{r \ k} + f_{RD \ k} \} - S_{k} \{r_{k} T_{r(k)} + \tau_{(k)} \}, \quad (8)$$

где  $r_{(k)} \in [r_{min(k)}; r_{max(k)}]$ , причем диапазон индексов ППИ исходно широкий или сокращенный (при *i=I*>0). С учетом инвертирования ЛЧМ, неоднозначность ДДЧ устраняется логически. Например, при  $S_{1(i)} = (-S_{2(i)}) > 0$ :

$$\exists f_{RD(i)} \pi p u S_{I(i)} \to F_{RD(i)} = f_{RD(i)} > 0;$$

$$H \text{ have } : \exists f_{RD(i)} \pi p u S_{2(i)} \to F_{RD(i)} = f_{RD(i)} - F_{r(i)} < 0.$$

$$(9)$$

Но неоднозначность ДЧ (8) и скорости сохраняется, корректный прогноз (2) невозможен и систематические ошибки оценок (1) также присутствуют. В таком случае при сохранении крутизны ЛЧМ далее может быть реализован захват по дальности (5)-(7), по результатам которого в соотношении (8) с учетом (9) определяется ДЧ (при замене индекса k:=i+2) и скорость при длине волны  $\lambda$ :

$$V_{R(i+2)} = \frac{\lambda}{2} F_{D(i+2)}.$$
 (10)

Кроме того, на первой пачке импульсов при захвате (i=I+1), изменяя крутизну ЛЧМ, можно обеспечить и определение дальности/скорости по двум измерениям ДДЧ ( $F_{RD}$  (i=I) и  $F_{RD(i=I+1)}$ ) известным способом [8]. Адаптация ЛЧМ должна гарантировать нахождение ДДЧ вне слепой зоны – границ ДДЧ-спектра МОЗ, которые на основе данных микронавигации/ориентации РЛС [3-5, 9] могут быть рассчитаны [4] для любой крутизны ЛЧМ:

$$F_{RD sl \max} = \max \left\{ F_{Dsl(r)} + S[r T_r + \tau] \right\};$$
  

$$F_{RD sl \min} = \min \left\{ F_{Dsl(r)} + S[r T_r + \tau] \right\} \forall r \in [r_{slmin}; r_{slmax}],$$
(11)

где [ $r_{slmin}$ ; $r_{slmax}$ ] – диапазон индексов ППИ для наклонных дальностей в границах облучаемой БЛ поверхности. Если рассматривать кругизну, при которой на паре ЛЧМпачек не было обнаружения, то с учетом (11) и имеющейся ДДЧ можно оценить диапазоны  $\Delta T_{ob}$  для однозначной задержки сигнала (O3C)/дальности и  $\Delta F_D$  для ДЧ/скорости объекта, при которых был возможен «срыв» обнаружения – из-за попадания ДДЧ в слепую зону (см. рис. 3).



Рис. 3. Диапазоны ОЗС/дальности и ДЧ/скорости объекта при срыве его обнаружения при  $S_2 = -S_1 < 0$ из-за попадания ДДЧ в слепую зону

С учетом (11) и этих диапазонов для следующей пачки определяются N значений крутизны ЛЧМ, при которых «восстанавливается» возможность обнаружения объекта вне слепой зоны ДДЧ. Для повышения точности оценок из N возможных значений крутизны выбирается

$$S_{(i=I+1)} = max \left\{ |S_{(i=I)} - S(n)| \right\}, n = 1, \dots, N.$$
 (12)

С другой стороны, в рамках решаемой задачи – при узких БЛ и малой высоте РЛС – ширина  $\Delta F_{sl}$  спектра МОЗ по БЛ при ЛЧМ относительно невелика (не более 200-300 Гц). Для такой слепой зоны оценка положения  $F^*_{RD}$  и среднеквадратическое отклонение (СКО) ошибок оценивания  $G_{F^*RD}$ :

$$F^{*}_{RDn(i)} = F_{slcn(i)}; \sigma_{F^{*}RDn(i)} = \left[ \left( \Delta F_{sln(i)} \right)^{2} / 12 \right]^{1/2}, (13)$$

где n = 1, 2 – номер пачки в паре пачек для обнаружения. Далее  $F^*_{RD}$  считается оценкой ДДЧ необнаруженного сигнала объекта, т.е. оценкой по квазиизмерению. Тогда по ДДЧ  $F_{RD(i)}$  и  $F^*_{RD(i)}$  (реальное и квазиизмерение:

• для всех  $r \in [r_{min(i)}; r_{max(i)}]$  формируются невязки

$$\vartheta(r) = (F_{RD(i)} - F^*_{RD(i)}) - (2ST_{r(i)})r - 2S\tau_{(i)},$$
(14)

причем при крутизне ЛЧМ 
$$S_{I(i)} \neq S_{2(i)}$$

$$\Theta(r) = (F_{RD(i)} - F^*_{RD(i)}) - (S_{I(i)} - S_{2(i)})T_{r(i)}r - (S_{I(i)} - S_{2(i)})\tau_{(i)};$$

 определяется индекс ППИ по минимуму невязок (14):

$$r^* \leftarrow \min\{|\vartheta(r)|\}; \tag{15}$$

 оценивается дальность R<sub>ob(i)</sub> по соотношению вида (1) при r<sub>(i)</sub>: = r\*, доплеровская частота по выражению

$$F_{D(i)} = F_{RD(i)} - S_{(i)} \{ r * T_{r(i)} + \tau_{(i)} \}$$
(16)

и скорость по формуле вида (10).

Следует отметить, что при высоких скоростях и при обнаружении сигнала только на одной ЛЧМ-пачке из пары в дискрете НЗС, близком к границе слепой зоны ППИ, возможны неоднозначные ситуации. Например, отсутствие обнаружения на второй пачке может быть обусловлено смещением НЗС в слепую зону ППИ и/или положением ДДЧ в слепой зоне МОЗ. В рамках данной работы специальные процедуры для устранения такой неопределенности не рассматриваются. Предполагается, что при обнаружении в крайнем дискрете НЗС далее выполняется традиционный захват по дальности (1) без прогноза (2), без изменения крутизны ЛЧМ и с определением скорости по соотношению вида (16).

В целом, в результате традиционного (базового) АР обнаружения объекта [3-6] при расширении диапазона его относительных скоростей отсутствует или является неоднозначной информация о скорости. Но при этом изза больших скоростей усиливается негативное влияние неучтенного дрейфа НЗС на оперативность и точность в последующих процедурах традиционного АР захвата по дальности/скорости [3-6]. Показанные в работе способы позволяют устранить неоднозначности по частотам и скорости и/или осуществлять захват, инвариантный к скорости объекта. Кроме того, при отсутствии данных по скорости/дальности (или при наличии только грубой оценки дальности) при базовом обнаружении, показан способ определения этих параметров с высокой точности на основе единственного «реального» измерения при первоначальном обнаружении объекта.

На рис. 3 показаны ошибки б*r* оценки индекса ППИ, полученные при моделировании базового обнаружения, дополненного процедурами устранения неоднозначности ДДЧ/ДЧ. Кроме того, в случаях с одним обнаружением в паре пачек дополнительно выполнялся один цикл типового захвата. На рис. 4 показаны ошибки б*r* без цикла захвата, но с оценками дальности/скорости вида (13)-(16), полученными в рамках этапа обнаружения с использованием квазиизмерений ДДЧ.



Рис. 4. Ошибки оценивания индекса ППИ



Рис. 5. Ошибки оценивания индекса ППИ (при квазиизмерении ДДЧ)

По результатам моделирования, показанным на рис. 3 и рис. 4, диапазоны максимальных погрешностей  $\delta r$  соответственно составляют [-6; 7] и [-3; 5]. В табл. 1 показаны статистические результаты для модельных ситуаций с одним обнаружением/измерением ДДЧ, разрешаемых: в первом цикле типового АР захвата (две пачки обнаружения и пачка захвата); в рамках этапа обнаружения (две пачки обнаружения) с использованием квазиизмерения ДДЧ.

Таблица 1. Статистические характеристики оценок дальности/скорости

	Обнаружение/оценки в 1цикле захвата	Обнаружение/оценки по квазиизмерениям ДДЧ
Среднее оши-	784.700688 м	166.904213 м
бок дальности		
СКО ошибок	3289.451879 м	1636.983644 м
дальности		
Среднее для б <i>r</i>	0.430565	0.080433
СКО для б <i>r</i>	1.800646	0.923444
Среднее оши-	-0.010680 м/с	-0.529695 м/с
бок скорости		
СКО ошибок	5.776730 м/с	2.761815 м/с
скорости		

В целом, представленные выше и другие результаты моделирования показали эффективность применения

предлагаемого методического обеспечения для решения задач дальнего всеракурсного наблюдения объекта с расширенным диапазоном относительных скоростей.

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный метод расширяет функциональные возможности радаров с высокой частотой повторения импульсов и ЛЧМ в условиях расширенного диапазона относительных скоростей объекта, включая нулевые и сверхзвуковые. В рамках метода обеспечивается:

- повышение информативности этапа обнаружения за счет использования квазиизмерений неоднозначной задержки и дальномерно-доплеровской частоты сигнала;
- устойчивость процедур оценивания дальности/ скорости при захвате к влиянию неучтенного дрейфа задержки сигнала при высоких скоростях – за счет специальных комбинаций измерений, адаптации излучения, интеграции различных способов определения дальности/скорости;
- повышение точности и оперативности адаптивно-робастного наблюдения объекта в сравнении с типовыми методами.

#### Литература

- Справочник по радиолокации. В 2-х кн. / Под ред. М.И. Сколника: Пер. с англ. под общ. ред. В.С. Вербы. Кн. 1. М.: Техносфера. 2015. 672 с.
- [2] Дудник, П.И., Кондратенков, Г.С., Татарский, Б.Г., Ильчук, А.Р., Герасимов, А.А. Авиационные радиолокационные комплексы и системы. М.: Изд. ВВИА им. проф. В.И. Жуковского. 2006. 1112 с.
- [3] V.N. Kovregin, G.M. Kovregina, Adaptive-robust methods for detecting, capturing and tracking hovering, low- and high-speed objects in integrated radar-inertial systems with quasi-continuous radiation, 28th St Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St Petersburg, CSRI Elektropribor, 2021, pp. 1–4.
- [4] Коврегин В.Н., Коврегина Г.М., Мурзаев А.С. Адаптивноробастное всеракурсное наблюдение разнотипных объектов в главном луче радара с квазинепрерывным ЛЧМ-излучением // Радиотехника. 2023. Т. 87. № 1. С. 69–78.
- [5] V.N. Kovregin, G.M. Kovregina, A.S. Murzaev, A Unified Method for Observation of an Air Object with a Complex Spectrum in Radar with Quasi-Continuous Radiation, 29th St Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St Petersburg, CSRI Elektropribor, 2022, pp. 56–59.
- [6] Коврегин В.Н., Коврегина Г.М. Унифицированный метод адаптивноробастной редукции неопределенностей при раскрытии «слепых» зон и дальнометрии воздушных объектов в импульсно-доплеровских радарах // Системный анализ и логистика. 2021. Вып. 4(30). С. 42–48.
- [7] Пат. 2 697 509 С2 Российская Федерация, МПК G01S 13/08 (2006/02). Способ обнаружения, измерения дальности и скорости низколетящей малоскоростной цели в импульсно-доплеровских радиолокационных станциях при высокой частоте повторения и инвертируемой линейной частотной модуляции / Коврегин В. Н., Коврегина Г. М.; приор. 25.05.2017; заявитель и патентообладатель Российская Федерация, опубл. 15.08.2019, Бюл. №23.
- [8] Пат. 2 692 912 С2 Российская Федерация, МПК G01S 13/00, G01S 13/00 (2006/01). Способ одновременного измерения дальности, скорости и ускорения малоскоростной маневрирующей воздушной цели в импульсно-доплеровских радиолокационных станциях при высокой частоте повторения импульсов и линейной частотной модуляции / Коврегин В. Н., Коврегина Г. М.; приор. 13.02.2018; заявитель и патентообладатель Российская Федерация, опубл. 01.07.2018, Бюл.№ 19.
- [9] Чернодаров, А.В., Патрикеев, А.П., Коврегин, В.Н, Коврегина, Г.М., Меркулова, И.И. Летная отработка распределенной системы инерциально-спутниковой микронавигации для радиолокатора с синтезированной апертурой // Научный Вестник МГТУ ГА. 2017. т.20. №1. С. 222-231.

### Метод наблюдения зависшего объекта на фоне земли в радарах с квазинепрерывным ЛЧМ-излучением

В.Н. Коврегин Кафедра аэрокосмических измерительно-вычислительных комплексов, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия kovregin@mail.ru

Аннотация—Показан метод обнаружения/измерения дальности и скорости зависшего объекта на фоне земли в дальней зоне обзора в радарах с квазинепрерывным ЛЧМизлучением при мешающих отражениях по главному лучу и боковым лепесткам диаграммы направленности.

Ключевые слова—импульсно-доплеровский радар; высокая частота повторения импульсов, линейная частотная модуляция; мешающие отражения.

#### I. Введение

В настоящее время при наблюдении аэрообъектов (обнаружении/измерении траектории) типовыми РЛС с квазинепрерывным излучением актуальной проблемой является обеспечение обнаружения зависшего объекта на фоне мешающих отражений от земли (МОЗ) [1, 2]. Известны методы [3-7 и др.], позволяющие решить эту проблему при дальнем наблюдении такого объекта в условиях МОЗ по боковым лепесткам (БЛ) диаграммы направленности антенны (ДНА). Они базируются на применении квазинепрерывного излучения с линейной частотной модуляцией несущей волны (ЛЧМ). Применение этих методов предполагает:

- ориентацию главного луча (ГЛ) вверх, в окологоризонтное свободное пространство, наличие МОЗ только по БЛ;
- дальность объекта, превышающую максимальную наклонную дальность до облучаемых БЛ участков земли. При этом ЛЧМ-излучение позволяет разнести спектр МОЗ по БЛ и дальномернодоплеровскую частоту (ДДЧ) эхосигнала объекта, причем практически независимо от его относительной скорости.

В итоге ДДЧ-сигнал объекта выносится за пределы ДДЧ-спектра МОЗ и уже может обнаруживаться только на фоне шумов приемника. Эти методы, в основном, ориентированы на наблюдение маловысотных объектов в дальней зоне, выполняемое при небольшой высоте носителя радара (при зависании или движении). Наибольшие дальности до участков МОЗ по БЛ в такой ситуации относительно небольшие. Они рассматривались как ограничения по минимальной дальности обнаружения при традиционно «слепых» (нулевых/малых) относительных скоростях объекта, несущественные в рамках задачи их дальнего наблюдения. Однако, при наблюдеГ.М. Коврегина Кафедра аэрокосмических измерительно-вычислительных комплексов, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия <u>g kovregina@mail.ru</u>

нии объекта в нижней полусфере помеховая ситуация существенно меняется, поскольку ГЛ частично или по полной ширине облучает земную поверхность. Формируются мощные МОЗ по ГЛ. В такой ситуации применение традиционных [3-7] методов наблюдения на основе ЛЧМ-излучения при высокой (ВЧП) частоте повторения импульсов (ЧПИ) не представляется возможным. В то же время в практике применения авиационных радаров такая ситуация является типичной. С другой стороны, количество, типаж, применение низковысотных малоскоростных/зависающих объектов сейчас интенсивно расширяются. В связи с этим, исследования, направленные на расширение функциональных возможностей РЛС при дальнем наблюдении таких объектов, в т. ч. на фоне земли, в вышеуказанной сложной помеховой обстановке, на данный момент являются актуальными и практически значимыми.

Цель данной работы – предложить метод дальнего наблюдения зависшего объекта на фоне земли при мешающих отражениях по БЛ и ГЛ, реализуемый в типовых радарах с квазинепрерывным ЛЧМ-излучением при ВЧП.

#### II. МЕДОД НАБЛЮДЕНИЯ ЗАВИСШЕГО ОБЪЕКТА НА ФОНЕ ЗЕМЛИ В ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ ОБЗОРА

#### А. Постановка задачи

Аналогично работам [3-7] рассматривается ДНА, типичная для радаров с фазированной антенной решеткой [1, 2]. На рис. 1 показан вид ДНА и возможная ориентация ГЛ в рамках решаемой задачи. Также поверхность может облучаться только частью ГЛ. На рис. 1 показан вид ДНА и возможная ориентация ГЛ в рамках решаемой задачи. Также поверхность может облучаться только частью ГЛ. Реализуется режим ЛЧМ-излучения при ВЧП. Известна максимальная дальность обнаружения объекта на фоне шумов приемника в этом режиме. Зависший объект находится в ГЛ в пределах этой дальности. С достаточно высокой точностью известны текущие траекторные параметры фазового центра антенны (ФЦА), наклонные дальности до центров и границ облучаемых ГЛ, БЛ поверхностей, радиальные составляющие скорости ФЦА по этим направлениям. Эти параметры определяются на основе данных системы микронавигации РЛС, в т. ч. и с использованием данных от цифровой 3D-карты местности [5, 6, 8] – при рельефной подстилающей поверхности (см. рис. 1).

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект № 22-19-00058.



Рис. 1. Вид ДНА в антенной системе координат *охуг* и ориентация ГЛ при наблюдении объекта в ГЛ

#### Б. Мешающие отражения от земли

В общем случае, в сравнении со спектром МОЗ при излучении немодулированной (гладкой) пачки при ВЧП, использование ЛЧМ приводит к смещению/деформации спектра МОЗ – в зависимости от крутизны ЛЧМ, дальностей до облучаемых ГЛ и БЛ участков земли, скорости РЛС, ширины ГЛ, БЛ и ориентации ДНА.

При немодулированной пачке импульсов при ВЧП центральная доплеровская частота (ДЧ)  $F_{Dml}$  и ширина ДЧ-спектра МОЗ по ГЛ  $\Delta F_{Dml}$ :

$$F_{Dml} = \frac{2}{\lambda} W \cos \beta_{ml} \cos \alpha_{ml}; \qquad (1)$$

$$\Delta F_{Dml} = \frac{2}{\lambda} W \sin \beta_{ml} \sin \theta_{\beta ml}, \qquad (2)$$

где W=const — скорость ФЦА радара, движущегося в горизонтальной плоскости;  $\lambda$  — длина волны;  $\beta_{ml}$  - угол наклона оси ГЛ;  $\alpha_{ml}$  - азимут оси ГЛ относительно вектора скорости, причем далее полагается, что  $\alpha_{ml} = 0$ ;  $\theta_{\beta ml}$  - ширина ГЛ в вертикальной плоскости.

Аналогично определяется центральная ДЧ  $F_{Dsl(i)}$  и ширина ДЧ-спектра  $\Delta F_{Dsl(i)}$  для МОЗ по направлениям осей БЛ. Для рассматриваемого типа ДНА, как правило, считается существенным влияние только «первых» БЛ [1, 2]. Для «первых» БЛ, симметрично ориентированных относительно вектора скорости ФЦА:

$$F_{Dsll} = \frac{2}{\lambda} W \cos(\beta_{ml} - \Delta \beta_{ml/sll}) \cos \Delta \alpha_{ml/sll}; \qquad (3)$$

$$\Delta F_{Dsll} = \frac{2}{\lambda} W \sin(\beta_{ml} - \Delta \beta_{ml/sll}) \sin \theta_{\beta_{sll}}, \qquad (4)$$

где  $\Delta\beta_{ml/sll}$  и  $\Delta\alpha_{ml/sll}$  – углы между осями ГЛ и БЛ в вертикальной и горизонтальной плоскостях;  $\theta_{\beta_{sll}}$  – ширина БЛ в вертикальной плоскости. Центральные ДЧ по ГЛ и по БЛ отличаются на величину

$$dF_{Dml/sll} = \frac{2}{\lambda} W \{ \cos \beta_{ml} - \cos(\beta_{ml} - \Delta \beta_{ml/sll}) \cos \Delta \alpha_{ml/sll} \}.$$

Следует отметить, что при высоких скоростях эта величина может быть существенной. Например, на рис. 2 показан характерный вид спектра МОЗ по ГЛ и БЛ при гладкой пачке [7, 8] (по абсциссе – номера доплеровских фильтров (отсчетов); по ординате – амплитуда сигнала). Можно видеть значительное смещение спектра МОЗ по БЛ: локальный максимум слева от глобального максимума, соответствующего ГЛ.



Рис. 2. Типичный вид ДЧ-спектра МОЗ немодулированной пачке

Эхосигнал зависшего объекта в ГЛ дает значение ДЧ  $F_D$  в границах спектра МОЗ по ГЛ и не детектируется.

При ЛЧМ пачке по направлению оси ГЛ центральная дальномерно-доплеровская частота  $F_{RDml}$  в спектре МОЗ:

$$F_{RDml} = F_{Dml} + S\left(\frac{2R_{ml}}{c}\right) = F_{Dml} + S\left[r \ T_r + \tau\right], (5)$$

где S – крутизна ЛЧМ как величина физически реализуемой в задающем генераторе ЛЧМ, взятая с обратным знаком; c – скорость радиоволны;  $R_{ml}$  – наклонная дальность по оси ГЛ до земной поверхности;  $\tau$  – неоднозначная задержка сигнала (НЗС) для той изодали (с шириной в длительность импульса  $\tau_{imp}$ ), в которой находится точка пересечения оси ГЛ с поверхностью;  $T_r$  и r – период повторения импульсов (ППИ) и индекс ППИ для дальности  $R_{ml}$ .

После традиционной обработки сигнала в каждом kом элементе разрешения (дискрете) НЗС  $\tau_k$  при ВЧП присутствуют сигналы от N изодалей в границах облучаемой ГЛ поверхности, дистанцированных на кратные ППИ расстояния. Тогда в дискрете НЗС будет проявляться ряд ДДЧ вида (5):

$$F_{RDml(r_k)} = F_{Dml(r_k)} + S[r_k T_r + \tau_k] \forall r_k \in [r_{min}; r_{max}], (6)$$

где  $r_{min}$  и  $r_{max}$  — минимальный и максимальный индекс ППИ для изодалей в границах облучаемой поверхности;

 $F_{Dml(r_k)}$  – условно центральная доплеровская частота, определяемая по аналогии (1), но направлению от ФЦА к центру изодали в границах ГЛ при ППИ с индексом  $r_k$ , т. е. при различных углах наклона

$$\beta_{ml(r_k)} \in \left[\beta_{ml} - \frac{1}{2}\theta_{\beta_{ml}}; \beta_{ml} + \frac{1}{2}\theta_{\beta_{ml}}\right].$$
(7)

Ширина спектра  $\Delta F_{RD \ ml \ (r_k)}$  для каждой такой ДДЧ определяется по аналогии с выражением (2)

$$\Delta F_{RD \ ml \ (r_k)} = \frac{2}{\lambda} W \sin \beta_{ml \ (r_k)} \sin \theta_{\beta_{ml}}.$$
 (8)

В целом, частотными границами МОЗ по ГЛ можно считать максимальное и минимальное значения из набора ДДЧ вида (6) с учетом ширины их спектра (8). При S>0, например, ширина диапазона ДДЧ  $\Delta F_{RD \ ml}$  по всем МОЗ по ГЛ может быть определена в виде:

$$\Delta F_{RDml} = S T_r [r_{max} - r_{min}] + \frac{1}{2} (\Delta F_{RD ml (r_{max})} + \Delta F_{RD ml (r_{min})}).$$
(9)

Применительно к БЛ спектр МОЗ оценивается как спектр МОЗ по ГЛ, но учитывая отличия по ширине и ориентации этих лепестков ДНА.



Рис.3. Спектры МОЗ по ГЛ и БЛ: ДЧ-спектр и ДДЧ-спектр по пачке ЛЧМ2 при  $S_2\!\!>\!\!0$ 



Рис.4. Спектры МОЗ по ГЛ и БЛ: ДЧ-спектр и ДДЧ-спектр по пачке ЛЧМ1 при  $S_{l}{>}\ S_{2}$ 



Рис.5. Спектры МОЗ по ГЛ и БЛ: ДЧ-спектр и ДДЧ-спектры по пачкам ЛЧМ1 и ЛЧМ2 с разной крутизной

#### В. Сущность предлагаемого метода наблюдения зависшего объекта на фоне земли

Вышеуказанные соотношения и представленные на рис. 3-5 результаты экспериментов показывают, что ЛЧМ при S>0 фактически приводит к «расщеплению» и

смещению спектра МОЗ в сравнении с узким спектром МОЗ, наблюдаемом при гладкой пачке.

Следует отметить, что при большой крутизне ЛЧМ границы спектров МОЗ по ГЛ и по БЛ не пересекаются (см. рис. 4). Из-за разной ориентации ГЛ и БЛ их центральные ДЧ (1) и (3) отличаются:  $F_{Dsll} < F_{Dml}$ . Кроме того, влияет разность наклонных дальностей до земли  $R_{grml}$  и  $R_{gr sl}$  по направлениям нижней кромки ГЛ и верхней кромки БЛ:  $R_{grml} > R_{grsl}$ . При типичных угловых параметрах ДНА и высокой скорости ФЦА разница ДЧ оставляет сотни Гц. Определяя наклонные дальности как

$$R_{gr} = H \sin^{-1} \beta$$

при  $\beta = \beta_{ml}$  и  $\beta = \beta_{sl}$  разница расстояний при большой высоте РЛС составляет десятки километров. При этом центральные ДДЧ вида (5) для ГЛ и БЛ при большой крутизне ЛЧМ отличаются на несколько кГц.

Таким образом, для обнаружения объекта возникают «прозрачные» зоны по дальности/однозначной задержке сигнала (ОЗС) и ДДЧ. В основе предлагаемого метода использование таких зон, взаимосвязанных по размерам/ положениям, и возможностей управления ими за счет изменения параметров ЛЧМ-излучения. Кроме того, в границах спектра МОЗ по ГЛ, а также и БЛ, при детализации отмечаются интервалы  $\Delta_{FRD} = S T_r$  между соседними амплитудными максимумами. Эти интервалы при определенных назначениях параметров S и T<sub>r</sub> могут значительно превышать ширину спектров (8) соседних ДДЧ. Таким образом, внутри такого рассредоточенного спектра МОЗ (исходно понимаемого как «слепая» зона (СЗ) ДДЧ при обнаружении) могут быть «прозрачные» зоны ДДЧ, на которых возможно обнаружение объекта. В данной работе результаты исследования возможностей такого обнаружения, применимого для малоскоростных объектов на фоне МОЗ, не представлены.

При ЛЧМ-пачке МОЗ проявляются во всех дискретах НЗС в рабочей зоне ППИ. Очевидно, что зависший объект может быть обнаружен, если: НЗС в рабочей зоне ППИ; ДДЧ сигнала находится вне границ СЗ по ДДЧ, обусловленных МОЗ по БЛ и/или ГЛ. Тогда в любом дискрете НЗС  $\tau_k$  в рабочей зоне ППИ при крутизне ЛЧМ *S*>0 (см рис. 6) обнаружение объекта при МОЗ по ГЛ возможно на дальностях

$$R_{ob}(r^*) = \frac{c}{2} \left[ r^* T_r + \tau_k \right] \forall r^* \in [0; (r_{min} - 1)].$$
(10)

При присутствии МОЗ по первым БЛ в зависимости от размеров облучаемой БЛ поверхности определяется диапазон [ $r_{min \ sll}$ ;  $r_{max \ sll}$ ]. Этой слепой зоне ППИ/ОЗС соответствует СЗ ДДЧ. Она формируется относительно границ спектра ДЧ в БЛ вида (3), (4). Аналогично, СЗ ДДЧ для ГЛ формируется относительно границ спектра ДЧ в БЛ вида (1), (2), не совпадающих с границами ДЧ-спектра БЛ. При этом ДЧ сигнал объекта находится в границах ДЧ-спектра по ГЛ. Из-за отличий ДЧ объекта и ДЧ в БЛ диапазон слепых дальностей при обнаружении не совпадает с диапазоном дальностей до земли в БЛ (см. рис. 6).



Ось однозначной задержки сигнала (ОЗС) /дальности

Рис. 6. Слепые зоны O3C/ДДЧ при МO3 по ГЛ и БЛ; слепые зоны O3C/ дальности для зависшего объекта

Например, при S>0 относительно границ O3C  $T_{sllmin}$  и  $T_{sllmax}$  по облучаемой БЛ поверхности границы C3 O3C для объекта  $T^*_{sllmin}$  и  $T^*_{sllmax}$  смещены «влево» (см. рис. 6), а при S<0 – «вправо»:

$$T^*_{sll\ min} = T_{sll\ min} + \frac{F_{D\ sll} - F_{D\ ml}}{S}; \tag{11}$$

$$T^*_{sll\ max} = T_{sll\ mix} + \frac{F_{D\ sll} - F_{D\ ml}}{S}.$$
 (12)

Из диапазона (10) дальностей обнаружения исключается поддиапазон слепых дальностей с границами (11), (12). В задачах дальнего наблюдения границу (13) можно считать приемлемым ограничением по минимальной дальности обнаружения. Но возможно и раскрытие этих слепых дальностей при следующих пачках – на основе управления ЛЧМ, изменением угла наклона оси БЛ, высоты, скорости.

Для определения дальности/скорости обнаруженного объекта далее излучается пачка с другой крутизной ЛЧМ, используются типовые методы их оценивания по двум ДДЧ-измерениям [3, 4]. Эти же методы могут использоваться и для определения дальности до земли и радиальной проекции скорости ФЦА по заданному направлению оси ГЛ – в интересах задач навигации, микронавигации РЛС и других бортовых приложений. В этом случае, в качестве ДДЧ-измерений используются устойчиво наблюдаемые в границах спектра МОЗ по ГЛ глобальные максимумы. Процедуры измерения ДДЧ/ определения параметров траектории для объекта и ФЦА РЛС совмещаются, но при этом не должна выполняться традиционная режекция МОЗ.

#### III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод обнаружения/измерения дальности и скорости зависшего объекта на фоне подстилающей поверхности в дальней зоне обзора при мешающих отражениях от земли. Метод основан на применении типичных ЛЧМ-излучений при высокой частоте повторения импульсов с управляемыми параметрами, ориентирован для реализации в типовых бортовых РЛС с интегрированной подсистемой (микро)навигации/ориентации диаграммы направленности антенны.

Применение метода позволяет:

- расширить функциональные возможности радара, обеспечивая дальнее наблюдение зависших объектов, в т. ч. маловысотных, в нижней полусфере при мощных пассивных помехах;
- повысить помехоустойчивость наблюдения объекта;
- одновременно измерять/оценивать траекторные параметры объекта (относительно РЛС) и фазового центра антенны РЛС (относительно земли).

Для реализации метода дополнительные требования к аппаратному обеспечению типовых бортовых РЛС не предъявляются.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Справочник по радиолокации. В 2-х кн. / Под ред. М.И. Сколника: Пер. с англ. под общ. ред. В.С. Вербы. Кн. 1. М.: Техносфера. 2015. 672 с.
- [2] Дудник, П.И., Кондратенков, Г.С., Татарский, Б.Г., Ильчук, А.Р., Герасимов, А.А. Авиационные радиолокационные комплексы и системы. М.: Изд. ВВИА им. проф. В.И. Жуковского. 2006. 1112 с.
- [3] Пат. 2 697 509 С2 Российская Федерация, МПК G01S 13/08 (2006/02). Способ обнаружения, измерения дальности и скорости низколетящей малоскоростной цели в импульсно-доплеровских радиолокационных станциях при высокой частоте повторения и инвертируемой линейной частотной модуляции / Коврегин В. Н., Коврегина Г. М.; приор. 25.05.2017; заявитель и патентообладатель Российская Федерация, опубл. 15.08.2019, Бюл. №23.
- [4] Пат. 2 692 912 С2 Российская Федерация, МПК G01S 13/00, G01S 13/00 (2006/01). Способ одновременного измерения дальности, скорости и ускорения малоскоростной маневрирующей воздушной цели в импульсно-доплеровских радиолокационных станциях при высокой частоте повторения импульсов и линейной частотной модуляции / Коврегин В. Н., Коврегина Г. М.; приор. 13.02.2018; заявитель и патентообладатель Российская Федерация, опубл. 01.07.2018, Бюл.№ 19.
- [5] V.N. Kovregin, G.M. Kovregina, Adaptive-robust methods for detecting, capturing and tracking hovering, low- and high-speed objects in integrated radar-inertial systems with quasi-continuous radiation, 28th St Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St Petersburg, CSRI Elektropribor, 2021, pp. 1–4.
- [6] Коврегин В.Н., Коврегина Г.М., Мурзаев А.С. Адаптивноробастное всеракурсное наблюдение разнотипных объектов в главном луче радара с квазинепрерывным ЛЧМ-излучением // Радиотехника. 2023. Т. 87. № 1. С. 69–78.
- [7] V.N. Kovregin, G.M. Kovregina, A.S. Murzaev, A Unified Method for Observation of an Air Object with a Complex Spectrum in Radar with Quasi-Continuous Radiation, 29th St Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St Petersburg, CSRI Elektropribor, 2022, pp. 56–59.
- [8] Чернодаров, А.В., Патрикеев, А.П., Коврегин, В.Н, Коврегина, Г.М., Меркулова, И.И. Летная отработка распределенной системы инерциально-спутниковой микронавигации для радиолокатора с синтезированной апертурой // Научный Вестник МГТУ ГА. 2017. т.20. №1. С. 222-231.

# Разработка концепций конструирования тяжелых экранопланов в России и США

А.В. Небылов

Кафедра аэрокосмических измерительно-вычислительных комплексов, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия <u>nebylov@aanet.ru</u>

Аннотация—В докладе анализируются и сравниваются три концепции построения крупногабаритных транспортных средств, использующих экранный эффект. Эти три оригинальных крупногабаритных морских транспортных средства – российский экраноплан "Орлан", американский летательный аппарат "Пеликан-УЛЬТРА" и еще один американский летательный аппарат «Либерти Лифтер». Их преимущества, недостатки и трудности реализации анализируются с использованием критериев топливной экономичности, скорости, регулярности полетов, показателей мореходности и требований к инфраструктуре. Проанализированы также требования к системам автоматического управления полетом рассматриваемых экранопланов.

#### Ключевые слова—экраноплан, управление полетом, стабилизация высоты, морские волны.

Исследуются варианты конструкции колесного шасси для экраноплана. Показано, что специальное шасси могло бы снизить требуемую мощность стартовых двигателей, необходимую для взлета, а также облегчить взлет с воды и посадку на воду.

Предложен и обоснован список новых задач, которые тяжелый экраноплан может выполнять лучше, чем другие транспортные средства. Исследуется инновационная привлекательность экранопланов. Необходимость установки интеллектуальной системы автоматического управления движением на тяжелый экраноплан, прототип которой был создан 45 лет назад в ЦНИИ "Концерн "Электроприбор", будет обоснована. Согласно опыту прошлых лет утверждается, что для создания совершенной системы автоматического управления финансирование должно составлять не менее 1/10 от общего объема финансирования создания экраноплана или большого беспилотного летательного аппарата.

Каждый из этих трех перечисленных выше проектов был анонсирован и прошел начальную стадию проектирования, но в конечном итоге был остановлен. Анализируются возможные причины принятия такого решения. Основная причина - превышение фактических расходов над первоначально принятым бюджетом, что выявилось на определенном этапе работы. Это часто встречается при разработке новых типов транспортных средств со сложной структурой и множеством факторов неопределенности. При полетах в Арктике при низких ледяных торосах экранный эффект также может быть использован, что обеспечит экономный расход топлива на больших экранопланах за счет наличия дополнительного критерия качества со значительной нелинейностью необходимой мореходности устройства, т.е. способности летать на малой высоте в зоне экранного эффекта при сильных морских волнах. Расчеты обычно проводятся В.А. Небылов Кафедра аэрокосмических измерительно-вычислительных комплексов, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия vladnebylov@gmail.com

для морских волнах в 6-7 баллов, когда высота волн с обеспеченностью 3% составляет 6 м. Показано, какими мореходными качествами может обладать большой экраноплан размером (длиной) около 50-100 м.[1-3]

Это требование часто вступает в противоречие с требованием ограниченной стоимости разработки, поскольку грубая оценка стоимости зависит от размера транспортного средства почти линейно. Вывод из анализа этих сложных зависимостей состоит в том, что построить большой экраноплан с практически неограниченными мореходными качествами возможно только при наличии финансирования в размере около 200 миллионов долларов (двести миллионов долларов США).

Понятно, что такие большие затраты могут быть окуплены только при многоцелевом использовании экраноплана, что исключает его длительный простой. Намечено и проанализировано несколько направлений эффективного использования тяжелых экранопланов в дополнение ко всем известным военным применениям в качестве десантного транспортного средства-амфибии и в ударном варианте в качестве носителя противокорабельных ракет. Последний вариант несколько утратил свою актуальность в последние годы в связи с повышением точности наведения ракет и увеличением дальности их полета. Наземное развертывание противокорабельных ракет в настоящее время часто превышает по эффективности использования экранопланов. Но быстрое наземное десантирование воинских контингентов и техники по-прежнему актуальна. Важно обслуживать военные и гражданские поселения в Арктике без строительства аэродромов. Часть перевозок грузопотоков по Северному морскму пути может быть перенесена на экранопланы.

Среди вариантов гражданского использования тяжелых экранопланов бесспорно эффективной выглядит спасательная миссия, которая заключается в быстром прибытии в район аварии, поиске пострадавших, принятии их на борт (точнее, сначала на крыло, удобно расположенное для этого), обеспечивающее первичную медицинскую помощь и быструю доставку на базу. Количество спасенных может измеряться сотнями и тысячами, в зависимости от размера экраноплана. К сожалению, в описанном варианте большую часть времени экраноплан будет простаивать в ожидании экстренного сообщения об аварии. Более того, вариант с несколькими "спасателями", базирующимися в разных акваториях мирового океана, будет наиболее существенным по расходам. Однако эта опция также способна свести к минимуму времени ожидания помощи.

В последние годы возникла необходимость оказать содействие морской посадке космических кораблей, точнее, найти и быстро эвакуировать посадочную капсулу с экипажем. Для выполнения этой миссии экраноплан или беспилотный летательный аппарат должен быть оснащен специальным радаром, поскольку радиолокационный отклик посадочного модуля, плавающего в воде и, возможно, прикрытого мокрым парашютом, очень мал.

Существует еще один очень выгодный вариант космической посадки: путем стыковки воздушнокосмического самолета с экранопланом на малой высоте полета экраноплана. Этот вариант требует особенно совершенных систем автоматического управления для обоих крыльевых летательных аппаратов.

Наконец, чисто транспортное использование экраноплана или другого скоростного амфибийного транспортного средства неограниченной мореходности может легко найти свою нишу на рынке транспортных услуг. Однако для этого важно найти транспортную линию с постоянным высоким грузопотоком, чтобы большой экраноплан был полностью загружен на каждом рейсе. Уменьшить размеры экраноплана и, соответственно, его грузоподъемность невозможно, так как снизятся его мореходные качества и полеты в штормовом океане станут невозможными. Регулярность рейсов - важнейший показатель конкурентоспособности транспортного средства.

В статье дан количественный анализ всех показателей качества большого экраноплана или другого низковысотного летательного аппарата. Описаны требования к автоматическим системам управления полетом (САУ), способным расширять и улучшать функциональные возможности экраноплана, модели воздействий и элементы неизменяемой части САУ, необходимые для синтеза таких бортовых систем. Предложены приемлемые методы синтеза и оптимизации САУ. Отмечается, что, сейчас наступил четвертый этап развития экранопланов, характеризуемый возрождением интереса к большим экранопланам с неограниченной мореходностью и способностью решать широкий круг специальных задач, в том числе в интересах МО, МЧС и Роскосмоса. В этих условиях можно надеяться на определенное бюджетное финансирование новых разработок, однако только при очень четком бизнес-плане, тщательном выборе исполнителя и безупречной финансовой отчетности. Годом начала 4-го этапа можно считать 2018, когда тогдашний профильный вице-премьер Российской Федерации Юрий Борисов и министр промышленности и торговли Д. Мантуров анонсировали разработку, постройку и испытания экспериментального экраноплана «Орлан» со взлетной массой 600-800 тонн и сроке начала испытаний в 2028г. Правда, через год сочетание «Орлан» 600-800 тонн перестали употреблять и заменили его на «Чайка А-50» со взлетным весом всего 50 т. Скорее всего, это явилось следствием сокращения бюджета, но рассматривать здесь параметры «Чайки» мы не будем, потому что указанный вес не может быть у экраноплана с неограниченной мореходностью - «Чайку» нельзя отнести к большим экранопланам. Поэтому в статье будет рассматриваться условный «Орлан» массой 800 т, а не заявленный вариант облегченной «Чайки». Логика в этом есть, поскольку два американских проекта также пока не рассматриваются «в железе», а лишь как условные проекты. Многофункциональность и всепогодность «Чайки» и в итоге «Орлана» – вот что нас интересует в первую очередь.[4-6]

Начавшаяся на Украине в феврале 2022 г. Специальная военная операция России может скорректировать и сроки постройки экраноплана, и его миссии, в том числе ориентированные на новые интересы Российского МО в Черном и Средиземном морях, в Арктике. Скорее всего при реализации конфигурация «Орлана» будет повторять «Лунь» либо иметь тандемный вариант, имеющий преимущества при большой массе летательного аппарата.

При переходе к четвертому этапу развития экранопланов существенно изменился состав стран и научнопроизводственных центров, играющих в этом процессе решающую роль и способных обеспечить инвестиции в несколько миллиардов долларов США, необходимые для создания нового поколения экранопланов. Важную роль при принятии решения имеют также соображения престижности постройки первого в мире экраноплана с неограниченной мореходностью, что и способствовало уже давно сформировавшейся конкуренции России и США в области экранопланостроения, оттеснив другие страны в позиции догоняющих (если рассматривать трех игроков, то пока третьим является КНР, но в настоящей статье мы ограничимся только двумя конкурентами).

Первая попытка США построить американский аналог «Луня» была предпринята в 1993 г., причем рассматривался вопрос о российско-американском сотрудничестве, а не о конкуренции. Лишенная нормального бюджетного финансирования в связи с распадом СССР ведущая российская фирма «ЦКБ по СПК» была готова продать американской стороне информацию о конструкции «Орленка» и «Луня» с демонстрацией для «Орленка» нескольких режимов полета. Несмотря на то, что до 1992 г. все работы по указанной тематике в России были закрытыми, была создана компания "Российско-американская наука", которая подписала с американской стороной соответствующий Контракт и организовала визит правительственной группы США и специалистов фирмы "Aerocon" для общения и обмена информацией с российскими разработчиками экранопланов. Встречи и демонстрация полета состоялись в 1993 г. в Москве, Нижнем Новгороде и Каспийске. В экспертную группу конгресса США кроме администраторов вошли в частности президент компании "Aerocon" (финансировавшейся МО США) Стефан Хукер - энтузиаст экранопланостроения, знаменитый авиаконструктор Берт Рутан и Фирмы известный гидродинамик Даниэль Савицки. "Aerocon" и "Макдонелл Дуглас Аэроспейс" подписали протокол о совместной работе с «ЦКБ по СПК». Предполагалась совместная разработка и производство экранопланов коммерческого назначения. Этот проект был включен правительством России в число перспективных программ российско-американского сотрудничества в области наукоемких технологий. Стоимость программы с американской стороны продолжительностью до 2010 г. составляла 18 миллиардов долларов. Однако реально за организацию визита специалистов и демонстрационные полеты американцы делегация заплатила менее 300 тыс. долларов, что в несколько раз меньше произведенных расходов на прием делегации. По итогам работы делегации предполагалось, что Конгресс США примет решение о развитии программы экранопланостроения в США, однако этого не произошло по неизвестным авторам причинам. На этом российскоамериканское сотрудничество закончилось и наступил период конфронтации. В российском научнотехническом сообществе описанный эпизод «сотрудничества» трактуется как один из наиболее бездарных примеров сделок в эпоху российской «перестройки».

На границе тысячелетий компания Boeing исследовала возможность создания гигантского грузового самолета Pelican ULTRA (Ultra Large Transport Aircraft), который мог бы летать и как обычный самолет, и как экраноплан. Концепция «Pelican» предполагала построение экраноплана (WIG-craft) с рекордным размахом крыла в 152 м, длиной корпуса 122 м и грузовым отсеком общей площадью 2700 кв. м на двух палубах. При хорде крыла порядка 30 метров крыло должно было иметь площадь порядка 4000 кв. метров, что обеспечивало нормальное для экранопланов давление на крыло при высоте полета 0.4×30=12 м. "Pelican" мог нести 17 танков М1 Abrams и десятки грузовых контейнеров. В случае удачной реализации проекта американская армия получила бы мощное транспортное средство для быстрой межконтинентальной переброски сил быстрого реагирования. В ходе первых исследований сотрудники Boeing Phantom Works pacсматривали и другие классы транспортных средств для этой цели, однако экраноплан был признан наиболее эффективным. Дело в том, что транспортные суда, имея достаточную грузоподъемность, не могут сократить время переброски войск, а самолеты при достаточной скорости проигрывают в грузоподъемности. Рассматривался также предварительный проект грузового дирижабля, но и он не устроил разработчиков, поскольку подобная техника не дает значительных преимуществ по скорости или грузоподъемности, но при этом нуждается в специальной инфраструктуре. Самым подходящим классом транспортного средства был признан экраноплан.

На первом этапе работ над таким экранопланом нового поколения сотрудники компании Boeing создали сразу три эскизных проекта транспортной машины, отличавшихся друг от друга габаритами и весовыми параметрами. Важной особенностью проекта стало стремление минимально использовать новые технологии для удешевления проекта, а также пригодность к коммерческой эксплуатации. Из трех вариантов экраноплана со взлетным весом в 1600, 2700 и 4500 тонн был выбран второй. Именно при таких габаритах перспективное транспортное средство по расчетам разработчиков могло показать наилучшее соотношение грузоподъемности, летных характеристик и экономичности.

Для улучшения характеристик крыла было предложено выполнить концевые части крыла наклоненными вниз. Это позволяло оптимизировать обтекание несущей поверхности и благодаря этому повысить полезную нагрузку. Всю заднюю кромку крыла отдали под развитую механизацию, призванную облегчить устойчивый полет в экранном режиме, взлет и посадку на имеющихся аэродромах с длиной ВПП не менее 2200м и расширить возможности систем автоматического управления.

В ходе конфликтов последнего десятилетия вооруженные силы США тратили на передислокацию одной дивизии несколько недель. Одной из инновационных систем вооружений, привлекающей повышенное внимание в США, теперь является супертяжелый по полезной загрузке военно-транспортный, а в перспективе боевой экраноплан. Этот вид тяжелых летательных аппаратов в последнее время привлекает все большее внимание в промышленных и коммерческих кругах США. В исследовательских структурах военно-промышленной корпорации "Боинг" (ОПК США) возрождена и переведена в плоскость практической разработки концепция гигантского летательного аппарата - суперэкраноплана "Пеликан-Ультра" наземного базирования с полным полетным весом 2700 тонн и грузоподъемностью 1280 тонн, т.е. при коэффициенте полезной нагрузки 1280/2700=0,47. Экраноплан предназначен для военно-транспортных и коммерческих целей, а в перспективе в качестве многофункциональной высокомобильной платформы управляемых транспортных средств различных классов и назначения глобального действия.

Проанализировав потребности армии и возможности современной техники, сотрудники отделения Phantom Works, входящего в состав компании Boeing, определили общие черты нового транспортного средства для военных. Было решено, что наибольшую эффективность при перевозке грузов военного назначения может показать экраноплан. Полет на сравнительно малой высоте способен обеспечить хорошие показатели скорости и дальности, а главное – грузоподъемности. При этом предполагалось, что новое транспортное средство будет представлять собой своеобразный «гибрид» военнотранспортного самолета и экраноплана.

Как и ожидалось, такой грандиозный проект, как «Пеликан», не мог бесследно исчезнуть из планов поиск возможных участников разработки концепции нового большого экраноплана под названием «Liberty Lifter» сейчас начался. Программа «Liberty Lifter» призвана изменить (обосновать) отношение Пентагона к воздушным и морским перевозкам с использованием «давно известного но трудно реализуемого» экранного эффекта. О размерах и весе Liberty Lifter ничего не сообщается, но опубликованное изображение и анимация очень информативны. Проект будет финансироваться за счет «фонда исследований и разработок» 2022 г. DARPA быстро подписало контракт с General Atomics ASI на 8 млн длларов, которая, очевидно, и будет заниматься корректировкой концепции постройки большого американского экраноплана с учетом данных и по "Пеликану", и по "Орлану". General Atomics имеет успешный опыт разработки пилотажно-навигационных комплексов для различных летательных аппаратов, включая тяжелые беспилотники, и этот задел вполне может использоваться при управлении экраноплан а во время тестовых полетов.

Экраноплан «Либерти Лифтер» также может иметь систему автоматического управления (САУ) с ограниченным набором требований, в основном для взлета, посадки и крейсерского полета в зоне экранного режима. Дополнительные трудности могут возникнуть из-за катамаранной схемы этого экраноплана, дающей специфику при выполнении скоординированного разворота. Несмотря на тенденцию удешевления самого аппарата и всех его агрегатов, об отказе от применения САУ речи быть не может. Можно немного сэкономить, возложив часть задач по управлению полетом на пилотов.

Экраноплан «Орлан» требует разработки сложнейшей, почти интеллектуальной САУ в силу широкого круга задач, возлагаемых на этот самолет. Создание АСУ для «Орлана» всегда будет рассматриваться в плане российско-американского соперничеств а по интеллектуальным транспортным системам.

Главное отличие «Liberty Lifter» от «Pelican» и «Orlan» – конфигурация катамарана с двумя корпусами. При использовании катамаранной схемы снижается маневренность экраноплана (увеличивается радиус разворота), но есть и преимущества по сравнению со схемой «центроплан». Одно из них — лучшая отработка конструкции на предыдущих этапах разработки экранопланов. Отметим, что в «катамаранной» схеме обычно необходимо иметь разделяющуюся хвостовую часть для устранения препятствий при стыковке экраноплана с ВКС, однако «Либерти Лифтер» для такой миссии пока не планируется.

Было опубликовано интервью с Александром Валан, официальным представителем DARPA, курирующим программу «Liberty Lifter». Он повторил в принципе уже известные аргументы:

«При реализации концепции экраноплана возникает множество проблем. Например, сильные волны могут привести к турбулентности воздушного потока и локальным колебаниям корпуса и крыла, влияние которых превзойдет любую эффективность использования топлива на основе экранного эффекта. Хотя концепция экраноплана известна давно, освоить ее оказалось непросто.

Чтобы сократить непредвиденные проблемы, размеры «Liberty Lifter» решено сделать подобными тяжёлому американскому самолету «C-17 Globe master». Его сухой вес – между 500 и 600 фунтов (примерно 440т), а стоимость примерно 340 миллионов долларов. Размеры этого американского летательного аппарата: длина 53м, длина крыла 52 м, высота 17м. Таким образом, линейные размеры «Liberty Lifter» (кроме высоты) оказались в два раза меньше, чем у "Pelican ULTRA". «Liberty Lifter» занимает промежуточное положение между «Орланом» и "Pelican ULTRA". Наверное это логично при учете всех факторов российско-американской конкуренции.

#### Благодарность

Работа выполнена за счет средств гранта Российского научного фонда №23-29-00320.

#### Литература

- А.В. Небылов, А.И. Панферов, С.А. Бродский. Оптимизация системы управления сбором группы транспортных средств. 21-й симпозиум IFAC по автоматическому управлению в аэрокосмической отрасли. 27-30 августа 2019 г., Крэнфилд, Великобритания.
- [2] А.Ю. Княжский, В.А. Небылов. Оптимизация трехмерной траектории корабля с динамическим принципом поддержания по критерию минимальной средней истинной геометрической высоты. Достижения в области теоретической и вычислительной физики, том 3, выпуск 3, 2020 г., стр. 78–85.
- [3] А.В. Небылов, Дж. Уотсон, Ред. Аэрокосмические навигационные системы. Дж. Уайли и сыновья. 2016.
- [4] А.В. Небылов, В.А. Небылов Российские экранопланы: новые перспективы международного сотрудничества // Российский инженер. 2013. № 4. С. 33-36. (на русском).
- [5] А.В.Небылов, изд. Аэрокосмические датчики .. Momentum Press. Нью-Йорк, США. 2012. 560 с.
- [6] Лян Юм, Алан Блио, Джонни Ду. Экраноплан и WIG-craft. Спрингер; 2010, 468 стр.

## Методы комплексирования данных в интегрированных навигационных системах по сигналам от ограниченного количества навигационных спутников

А.В. Прохорцов ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» Тула, Россия ProxAV@rambler.ru В.А. Смирнов ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» Тула, Россия veld071@rambler.ru О.В. Минина ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» Тула, Россия OL-within-sun@yandex.ru

Аннотация—Научное исследование заключается в предложении высокоточных методов, позволяющих сократить временные затраты на определение навигационных параметров высокоманевренных летательных аппаратов при использовании алгоритмов определения скорректированных параметров координат и скорости высокоманевренных беспилотных летательных аппаратов по сигналам от двух и одного навигационных спутников и показаниям бесплатформенной инерциальной навигационной системы.

Ключевые слова—бесплатформенная инерциальная навигационная система, навигационный спутник, методы комплексирования, высокоманевренный летательный аппарат.

#### I. Введение

Применение бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) на борту высокоманевренного летательного аппарата (ВЛА) с малым временем эксплуатации обеспечивает повышение точности определения параметров навигации (координат и скорости) ВЛА.

Однако методы для определения координат и скорости ВЛА на основе БИНС, представленные в литературе [1], требуют значительного количества временных и вычислительных ресурсов, что сложно реализовать в современных условиях на отечественной элементной базе.

Кроме того, во время полета ВЛА существует проблема ограниченной видимости навигационных спутников (HC), связанная с наличием различных естественных и искусственных препятствий и радиопомех [2, 3], именно поэтому есть вероятность приема и обработки бортовой аппаратурой, установленной на ВЛА, сигнала только двух от или одного HC. В связи с этим, остается актуальным вопрос, связанный с высокоточным определением координат и скорости ВЛА с минимальными временными затратами при приеме сигналов от спутниковой радионавигационной системы (СРНС).

Целью данного исследования является повышение точностных характеристик ВЛА путем разработки методов комплексирования с использованием сигналов от ограниченного количества НС СРНС [4, 5] и показаний БИНС в части определения координат и скорости ВЛА с сокращением временных затрат.

Таким образом, актуальность научного исследования заключается в предложении высокоточных методов,

позволяющих сократить временные затраты определения навигационных параметров ВЛА при использовании разработанных авторами алгоритмов определения скорректированных параметров координат и скорости ВЛА по сигналам от двух и одного НС и с использованием показаний БИНС.

#### II. Основная часть

В данной статье предлагается два метода комплексирования показаний БИНС и СРНС:

- в части определения координат ВЛА;
- в части определения скорости ВЛА.

Предложенный метод комплексирования БИНС и СРНС в части определения координат ВЛА состоит в том, чтобы, используя информацию от двух или одного НС, на основе вырабатываемых аппаратурой приемника СРНС первичных радионавигационных параметров, а именно псевдодальности до НС, и текущие показания БИНС о параметрах навигации ВЛА, найти скорректированные навигационные параметры, вырабатываемые БИНС, и скорректированные значения параметров навигации, которые затем принимают за величины ошибок БИНС.

Для подтверждения работоспособности предложенного метода определения координат ВЛА было проведено программное моделирование исследовательского эксперимента, в процессе которого определены навигационные параметры с помощью испытательного спутникового навигационного оборудования и аппаратуры БИНС.

За основу сравнения были взяты экспериментальные данные, полученные с имитатора сигналов спутниковых навигационных систем и с датчиков линейного ускорения и гироскопических устройств БИНС при движении ВЛА.

В табл. 1 представлена оценка точности определения координат ВЛА предложенным авторами алгоритмом.

Проведенные экспериментальные исследования доказали, что разработанный алгоритм определения координат ВЛА является работоспособным, позволяет сократить вычислительные ресурсы, дает результат с высокой точностью при использовании сигналов от двух HC, что делает возможным его применение на менее мощных отечественных вычислителях (микропроцессорах) на борту ВЛА.

Таблица I. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ВЛА ПРЕДЛОЖЕННЫМ АЛГОРИТМОМ

Навигационные параметры	Погреш- ность определе- ния коор- динат с помощью БИНС	Погрешность определения координат методом ком- плексирования БИНС и СРНС по сигналам от 2 НС	Погрешность определения координат ме- тодом комплек- сирования БИНС и СРНС по сигналам от 1 НС
$\Delta X(\mathbf{M})$	300	51.118954	210.68554
$\Delta Y(M)$	300	55.4888993	213.35914
$\Delta Z(M)$	300	13.3392264	260.5197
$\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$	519.6152	76.61658	397.22

Предложенный авторами метод комплексирования БИНС и СРНС в части определения скорости ВЛА состоит в том, чтобы, используя информацию о псевдодальности и псевдоскорости только до двух или одного НС, найти с минимальными временными затратами скорректированные значения проекций скорости ВЛА.

Для подтверждения работоспособности предложенного метода было также проведено программное моделирование исследовательского эксперимента в инженерном математическом программном обеспечении. В табл. 2 представлена оценка точности предложенного алгоритма при определении скорости ВЛА.

Таблица II. Оценка точности определения скорости ВЛА предложенным алгоритмом

Навигационные параметры	Погреш- ность опре- деления скорости с помощью БИНС	Погрешность определения скорости методом комплекси- рования БИНС и СРНС по сигналам от 2 НС	Погрешность определения скорости ме- тодом ком- плексирова- ния БИНС и СРНС по сиг- налам от 1 НС
$\Delta \dot{X}$ (м/с)	1	0.17041	0.20621
$\Delta \dot{Y}$ (м/с)	1	0.184979	0.28321
$\Delta \dot{Z}$ (m/c)	1	0.044466	0.26914
$\sqrt{\Delta \dot{X}^2 + \Delta \dot{Y}^2 + \Delta \dot{Z}^2}$	1.7321	0.2554	0.4417

Исходя из данных, представленных в табл. 2, можно сделать вывод, что разработанный авторами алгоритм определения скорости ВЛА является работоспособным и дает результат более точный при использовании сигналов от двух и одного HC чем при использовании информации, получаемой только с БИНС.

По результатам проведенного исследовательского эксперимента были проанализированы погрешности при применении разработанных алгоритмов определения скорректированных параметров скорости ВЛА по сигналам от двух и одного HC, а также по показаниям БИНС и сделано заключение, что эффективным в части определения погрешности расчета координат и скорости ВЛА оказалось применение предложенного авторами алгоритма по сигналам от двух HC.

#### III. Заключение

На основании вышеизложенного, можно сделать вывод, что предложенные методы для определения навигационных параметров ВЛА позволяют упростить вычислительные процессы и сократить временные затраты, необходимые для определения координат и скорости ВЛА, что в дальнейшем обеспечит экономичность использования бортовой приёмной аппаратуры, при этом не ухудшая точностные характеристик ВЛА.

#### Литература

- [1] Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / Г.И. Емельянцев, А.П. Степанов / Под общей редакцией акад. РАН В.Г. Пешехонова – СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. – 394 с.
- [2] Прохорцов А.В. Способы определения параметров ориентации подвижных объектов по сигналам спутниковых навигационных систем. Монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. 80с.
- [3] Али Б., Садеков Р.Н., Цодокова В.В. Алгоритмы навигации беспилотных летательных аппаратов с использованием систем технического зрения // Гироскопия и навигация. 2022. Т.30. №4 (119). С.87-115.
- [4] Прохорцов А.В., Смирнов В.А., Минина О.В. Алгоритмы быстрого вычисления навигационных параметров подвижных объектов по сигналам СНС // XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам (31.05-02.06.2021г.). Сборник материалов.Государственный научный центр Российской ФедерацииАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2021. С. 67-69.
- Прохорцов А.В., Смирнов В.А., Минина О.В. Высокоточный [5] способ определения угловой ориентации беспилотных летательных аппаратов сигналам спутниковой по радионавигационной системы // XXIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным (30.05-01.06.2022г.). навигационным системам Сборник материалов. Государственный научный центр Российской Федерации АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2022. С. 316-318.

### Автоматизация разработки функционального программного обеспечения интегрированных навигационных систем

С.В. Кравчук *МОКБ «Марс» – филиал ФГУП «ВНИИА»* Москва, Россия office@mokb-mars.ru А.Б. Петров *МОКБ «Марс» – филиал ФГУП «ВНИИА»* Москва, Россия office@mokb-mars.ru

И.В. Соловьев *МОКБ «Марс» – филиал ФГУП «ВНИИА»* Москва, Россия office@mokb-mars.ru

Аннотация—В работе представлена технология отработки программного обеспечения интегрированных навигационных систем, внедрённая в МОКБ «Марс». Приведено описание информационных систем, разработанных для автоматизации процессов отладки и испытаний ПО. Описаны этапы работ с учетом выпуска отчётной и программной документации в соответствии с действующей нормативной базой. В настоящее время технология используется для разработки функционального программного обеспечения интегрированных навигационных систем космического назначения.

#### Ключевые слова—интегрированные навигационные системы, программное обеспечение, автоматизация.

#### I. Введение

Интегрированные навигационные системы летательных аппаратов (ИНС ЛА) представляют собой сложный многокомпонентный комплекс, содержащий в себе как аппаратные, так и программные средства. При разработке ИНС космического назначения к их встроенному программному обеспечению (ПО) предъявляются особенно жёсткие требования к точности проводимых расчетов и надёжности функционирования [1], [2]. Требуется учёт ряда особенностей аппаратного состава ИНС, использующего вычислители, основанные на специализированных микропроцессорах, например, специфическую систему команд, небольшие объёмы ОЗУ и ПЗУ, высокую частоту обменов с цифровыми устройствами сопряжения с датчиками и потребителями навигационной информации, высокие требования к точностным характеристикам вычислений, ограничения реального времени и т. п.

Исторически в МОКБ «Марс» накоплен существенный опыт создания и сопровождения бортовых систем для изделий различных классов. Это позволило разработать и внедрить необходимую номенклатуру типовых технологических процессов, соответствующую требованиям различных заказчиков и стандартам. Однако развитие современных информационных технологий позволило модернизировать этот процесс, существенно повысив эффективность как в части временных затрат, так и в части качества отработки ПО. В том числе это относится и к разработке и испытаниям ПО ИНС космического назначения. М.А. Шатский *МОКБ «Марс» – филиал ФГУП «ВНИИА»* Москва, Россия office@mokb-mars.ru

#### II. ПОИСК ПУТЕЙ МОДЕРНИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИИ

Сборка версий ПО для вычислителей разработки МОКБ «Марс» осуществляется с использованием компилятора, обрабатывающего исходные коды бортовых модулей на языке программирования С. Отладка и испытания ПО проводятся с использованием нескольких стендов. Особенности вычислителей и аппаратные ограничения требуют генерации исходных кодов с использованием перемасштабирования параметров и специфической библиотеки стандартных функций, реализующих, например, тригонометрические операции. Такие исходные коды не позволяют эффективно отлаживать сложные математические и логические алгоритмы, поэтому процесс традиционно начинается со стендов математического моделирования (СММ), построенных на базе обычных персональных компьютеров. На СММ используются прототипы модулей ПО, выполненные также на языке С, но без учета особенностей процессоров. Прототипы ПО проходят проверки, в основном, на логическую провязку функциональных трактов и оценку качественных и количественных результатов работы спроектированных алгоритмов.

Для дальнейших отладочных работ со штатной вычислительной системой требуется перекодирование программистами отлаженных на СММ прототипов во встраиваемый код. Для этого алгоритмист разрабатывает технические требования (ТТ) на программирование модуля и сопровождает их контрольными примерами для проверки закодированного модуля и определения фактической точности вычислений со штатным вычислителем. ТТ для каждого модуля ПО представляют собой набор документов с блок-схемой алгоритма и таблицами описания параметров, включённый в соответствии с ЕСПД в состав программной документации.

В течение длительного времени такие операции, как разработка прототипов ПО и кодирование бортового кода, осуществлялись ручным способом с использованием бумажных технологий. Такая технология обладает рядом очевидных недостатков:

 длительное время разработки исходных кодов модулей ПО для разных стендов;

- возможность расхождения документации и текстов программ на различных стендах;
- даже незначительные коррекции ТТ могут потребовать существенного изменения бортового кода с соответствующими потерями времени на повторную отладку;
- возможно дублирование или различная реализация однотипных операций разными программистами;
- ввиду высокой трудоёмкости процесса разработки и отработки модулей количество испытаний ПО на стендах с реальной аппаратурой обычно сокращается до минимально возможного, что не позволяет выявить все алгоритмические или программные ошибки в ПО при наземных испытаниях;
- человеческий фактор на различных этапах ручной разработки может приводить к трудно обнаруживаемым ошибкам в работе модулей.

Помимо субъективных недостатков (существенные затраты времени или сложность повторного использования кода) такой технологии присущ объективный недостаток — чрезвычайно сложно обеспечить требуемый уровень надёжности функционирования ПО (как в части проявления в полёте необнаруженных при наземной отработке ошибок в ПО, так и в части соответствия кода модулей программной документации, что может привести к неверной работе ИНС на этапе штатной эксплуатации).

Разработка систем управления для дорогостоящих аэрокосмических систем, некоторые из которых предназначены для проведения уникальных научных экспериментов, требует помимо минимизации количества ошибок в ПО ещё и освобождения людских ресурсов от трудоёмких ручных операций для разработки, проведения и анализа результатов расширенных программ испытаний версий ПО как с целью тщательной отработки режима штатного функционирования ИНС при различных условиях, так и с целью разработки и отработки логики парирования комбинаций отказов и нештатных ситуаций сверх требований технического задания на разработку ИНС.

### III. Автоматизированная технология разработки ПО ИНС

В результате попыток автоматизации различных операций и поиска путей устранения недостатков традиционных технологий в МОКБ «Марс» была разработана и внедрена автоматизированная технология разработки ПО.

Суть этой новой технологии заключается в формировании исходных данных для программирования в электронном виде, пригодном для последующей машинной обработки в целях автоматизации максимального возможного количества выполнявшихся ранее «вручную» операций, ведения электронного документооборота и создания электронного фонда алгоритмов и программ предприятия, обеспечивающего применение отработанных решений для различных изделий.

Основой для всех этапов разработки и отработки ПО является TT на программирование (программный доку-

мент в электронном виде), на основании которого автоматизированным способом формируются прототипы модулей ПО и собственно модули ПО, пригодные для отработки на различных стендах и в составе штатного вычислителя.

При разработке элементов новой САПР ПО было определено требование выбора базовых программных продуктов из перечня свободного ПО в целях минимизации финансовых затрат на внедрение и поддержку элементов новой САПР на всём предприятии.

По результатам анализа удобства работы, наличия требуемого функционала и долгосрочности сопровождения был выбран следующий ряд программных продуктов:

- OpenOffice.org Draw векторный графический редактор, используемый для создания электронных версий блок-схем алгоритмов;
- PostgreSQL система управления базами данных, обеспечивающая ввод, хранение и обработку базы данных параметров алгоритмов;
- Qt SDK средство разработки приложений, используемое для создания основных элементов САПР (генераторов программного кода, клиентского ПО работы с базами данных и др.).

Данные продукты являются свободным программным обеспечением под лицензиями GPL или LGPL с хорошей поддержкой сообществом разработчиков и глубоким уровнем стандартизации решений, имеют реализации для работы под различными операционными системами.

В соответствии с новой технологией алгоритмист создаёт ТТ на программирование в электронном виде: блок-схемы выполняются в графическом редакторе, используемые переменные заносятся в единую базу данных переменных для конкретного изделия.

Применяемые шаблоны оформления новых документов соответствуют требованиям ГОСТ, распечатанная бумажная копия не отличается от документов, выполнявшихся ранее вручную, и пригодна для постановки в архив предприятия.

Далее электронные версии ТТ обрабатываются двумя программными элементами САПР: на выходе первого (Модуль Аналогизатор) получаются готовые к работе на СММ прототипы программ, на выходе второго (Модуль Транслятор) – готовые к отработке на штатном вычислителе коды программных модулей.

В разработанных элементах САПР используются типизация параметров алгоритмов, чётко ограниченный набор алгоритмических блоков, перекрывающий весь требуемый спектр логических и вычислительных операций, и библиотека стандартных функций и операций, подходы к формированию которой сложились за долгие годы работы программистов.

Источником информации для всех этапов автоматизированного программирования является одна и та же блок-схема алгоритма и единая база данных переменных. Разночтения алгоритмистов и программистов, а также ошибки ручного программирования исчезают как класс, а этап отработки готовых модулей по контрольным примерам исключается за ненадобностью (типовые программные решения автоматизированных элементов САПР прошли тщательную проверку на этапе апробации и тестовой эксплуатации САПР).

С использованием элементов автоматизации скорость формирования сборок ПО выросла на порядки и в пределе ограничивается скоростью работы алгоритмиста на персональном компьютере при подготовке электронных версий ТТ.

Ключевые преимущества новой технологии разработки и отработки ПО:

- многократное увеличение скорости разработки ПО;
- увеличение объёма испытаний взамен потерь времени на ручные операции;
- чёткое соответствие кода программных модулей программной документации;
- существенное ускорение отладки программных модулей за счёт исключения человеческого фактора;
- более полная унификация и стандартизация технической документации и программных модулей;
- общее повышение качества и отработанности ПО.

Ещё одним достоинством является возможность упрощенного перехода к новым аппаратным платформам перспективных систем управления (даже со сменой архитектур центральных процессоров): путём коррекции программных элементов САПР возможно относительно просто реализовать автоматизированную сборку версий ПО по ранее разработанным TT с отработанными алгоритмическими решениями.

Отработка ПО производится последовательно на каждом стенде. Все испытания проводятся в соответствии с разрабатываемой для каждого изделия «Программой и методикой испытаний ПО» (ПиМ), оформленной в соответствии с ЕСПД. Для ИНС ЛА типовым вариантом моделирования является имитация режима полёта, определяемого начальными условиями, траекторией, параметрами работы моделей бортовой аппаратуры, имитируемыми нештатными ситуациями и т. д. Полный набор режимов моделирования разрабатывается с учётом необходимости проверки выполнения всех требований технического задания на разработку ПО, поэтому имеет большой объем и его проведение занимает существенное время как в части собственно моделирования, так и в части оценки и систематизации испытаний. При этом испытания сопровождаются большим количеством ругинных операций, которые возможно автоматизировать. В результате работ по автоматизации процесса разработки ПО в МОКБ «Марс» создана система автоматизации испытаний (САИ).

САИ предназначена для автоматизации процесса организации отладки и испытаний бортового ПО систем управления на всех математических и полунатурных стендах МОКБ «Марс».

Можно выделить следующие основные функции САИ:

- подготовка исходных данных для моделирования автоматизация ввода, хранения, учёта и систематизации всех исходных данных для режимов испытаний;
- планирование испытаний с учётом необходимой последовательности прохождения стендов, оптимальной загрузки стендов и результатов испытаний, полученных на других стендах;
- заказ моделирования на стендах с оповещением операторов стенда и формированием всех необходимых данных;
- сбор и хранение результатов моделирования, в том числе телеметрической информации большого объёма на выделенных серверах общего доступа;
- организация анализа и обобщения результатов, включая оповещение большого числа пользователей о проведении испытаний, сбор данных о результатах анализа и поддержка комплексного анализа результатов испытаний;
- формирование необходимой документации при выполнении всех функций (например, формирование планов-графиков испытаний, отчётов по выполнению работ, заданий на моделирование, перечня замечаний и т.д).

САИ реализована как сетевая система класса клиентсервер. В качестве основы использована СУБД PostgreSQL. Хранение результатов испытаний производится на выделенном FTP-сервере, доступ к которому осуществляется клиентской частью САИ.

#### IV. Заключение

В докладе опущено описание целого ряда других сопутствующих возможностей новой САПР ПО (таких как компонента автоматизированной генерации программной документации на модули ПО для архива; автоматизация процесса внесения коррекций в сборки ПО; организация версионности ПО; процедура согласования и утверждения коррекций модулей с использованием электронной сети предприятия; структура "мастера" по вводу в базу данных описаний параметров алгоритмов; ведение базы данных "типовых" алгоритмических ошибок; автоматизация обработки ТМИ и формирования экспресс-отчётов по испытаниям и др.). Кроме того, на борту летательных аппаратов помимо ИНС установлено достаточно много элементов оборудования, которые фактически можно считать ВУ. Вполне очевидно, что для своей работы они нуждаются в бортовом программном обеспечении. Значительное число микроконтроллеров интегрированы в интеллектуальные датчики и исполнительные блоки, которые имеют собственное встроенное программное обеспечение.

Представленная методика разработки ПО ИНС БПЛА с применением САПР ПО прошла этап тестовой эксплуатации и внедрена в маршрутную технологию разработки и отработки ПО в МОКБ "Марс". С применением новых технологий были разработано ПО для целого ряда ИНС, а также ПО систем управления космическими аппаратами, в настоящий момент успешно проходящих лётные испытания и находящихся в штатной эксплуатации. Представленная технология используется для разработки ПО перспективных ИНС космического назначения.

Данная технология показала свою жизнеспособность и перспективность в современных условиях работы МОКБ «Марс».

#### Литература

- Бортовые системы управления космическими аппаратами / Бровкин А.Г., Бурдыгов Б.Г., Гордийко С.В. и др. Под редакцией А.С. Сырова – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 304 с.: ил. ISBN 978-5-7035-2205-9
- [2] Система управления разгонным блоком /Андреев В.П., Бонк Р.И., Бровкин А.Г. и др. / Под редакцией А.С. Сырова. –М.: Издво МАИ-ПРИНТ, 2010. – 272 с.: ил.
- [3] Проектирование и испытание бортовых систем управления: Учебное пособие / Под ред. А.С.Сырова. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ,2011.–344с.:ил
- [4] Микрин Е.А. Бортовые комплексы управления космическими аппаратами и проектирование их программного обеспечения. – М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2003. – 336 с.
- [5] Эйкхофф Й. Бортовые компьютеры, программное обеспечение и полетные операции. Введение. – М.: ТЕХНОСФЕРА,2014. – 336с., ISBN 978-5-94836-388-2.

### Опыт разработки системы коррекции магнитного компаса

Д.Г. Грязин AO «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО Санкт-Петербург, Россия volnagdg@yandex.ru

Аннотация—В докладе представлен опыт разработки трех вариантов системы коррекции магнитного компаса, предназначенной для подавления его погрешностей, возникающих при воздействии качки. Представлены результаты стендовых испытаний магнитного компаса с реализованными вариантами системы коррекции. Рассматриваются и анализируются их достоинства и недостатки.

Ключевые слова—магнитный компас, система коррекции, переносные ускорения, микромеханический гироскоп.

#### I. Введение

При плавании судна в условиях качки появляются динамические погрешности магнитного компаса (МК), обусловленные действием центростремительного и тангенциального ускорений. Эту совокупность ускорений далее определим как переносные, в основном обусловленные тем, что МК устанавливается на некотором плече относительно центра качания судна. Влияние этих ускорений вызывает воздействие на магнитную систему картушки проекции вертикальной составляющей магнитного поля Земли, приводящее к ее отклонению от направления на магнитный север. Данная погрешность МК может быть определена и скомпенсирована с помощью введения в измерительную схему МК системы коррекции, использующей гироскопический датчик угловой скорости (ДУС) с вертикально расположенной осью чувствительности, установленный на котелок МК. Однако варианты построения системы коррекции могут быть разные.

В течение нескольких лет в АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» производится выпуск магнитного компаса (МК) «Азимут-КМ-05Д», в котором в разные годы применялся свой вариант построения такой системы коррекции.

#### II. ПЕРВАЯ РАЗРАБОТАННАЯ СИСТЕМА КОРРЕКЦИИ МК

Первая разработанная система коррекции, блоксхема которой приведена на рис.1, базировалась на использовании позиционного управления, которое заключалось в следующем:

1. В выработке с помощью датчика магнитного курса (ДМК) сигнала о мгновенных значениях курса, состоящего из магнитного курса  $K_M$ , угла рыскания  $\gamma_p$  и погрешности МК от действия качки  $\delta_p$ :  $K_M + \gamma_p + \delta_p$ .

2. В выработке с помощью ДУС сигнала угловой скорости, состоящего из угловых скоростей изменения курса  $\dot{K}_{M}$ , рыскания  $\dot{\gamma}_{p}$  и погрешности ДУС  $\dot{\Delta}_{\text{ДУС}}$ .

Т.В. Падерина АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» Санкт-Петербург, Россия paderinata@gmail.com

3. Интегрирования сигнала ДУС с помощью апериодического звена  $\frac{K_1}{T_1p+1}$  и формирования на выходе интегратора сигнала  $K_M + \gamma_p + \Delta_{\text{ДУС}}$ .

4. Вычисления разности между выходными сигналами ДМК и интегратора с целью формирования сигнала  $\delta_p - \Delta_{\text{ДУС}}$ .

5. Фильтрации низкочастотной погрешности  $\Delta_{\text{ДУС}}$  с помощью фильтра высоких частот (ФВЧ)  $\frac{K_2 p}{T_2 p+1}$ .

6. Исключения из значений магнитного курса погрешности  $\delta_p$  путем вычисления разности между выходным сигналом ДМК и сигналом с выхода ФВЧ, пропорциональным погрешности  $\delta_p$ .



Рис. 1. Блок-схема позиционной системы коррекции МК: 1 – интегратор, 2 – фильтр высоких частот

В результате проведенных исследований были выбраны следующие численные значения постоянных времени динамических звеньев позиционной системы коррекции (рис. 1)  $T_1$ =7200с,  $T_2$ =40с. В качестве ДУС использовался волоконно-оптический гироскоп (ВОГ) ВОГ ВГ071TS («Физоптика»), в котором превалируют низкочастотные и медленно меняющиеся составляющие ухода.

В 2019 г. данная система позиционной коррекции была запатентована (патент RU 2688900) [1].

Многочисленные данные имитационного моделирования и стендовых испытаний подтвердили эффективность применения такой системы коррекции. В качестве иллюстрации на рис. 2 для сравнения показаны графики стендовых испытаний работы МК с применением этой системы коррекции и без нее. При этом задавались следующие условия курс: Ко = 45°, дифферент  $A_{\psi} = 10^{\circ}$ ,  $T_{\psi} = 10c$ ; крен  $A_{\theta} = 20^{\circ}$ ,  $T_{\theta} = 15c$ .

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ N 23-29-00090.



Рис. 2. Сравнение работы МК с системой позиционной коррекции и без нее

Однако для повышения конкурентоспособности МК потребовалось снизить его цену. Самым дорогим из комплектующих элементов явился применяемый ВОГ, стоимость которого составила 200 т.р. Таким образом, встала задача замены ВОГ на дешёвый микромеханический гироскоп (ММГ).

Применение ММГ в системе позиционной коррекции МК не представилось возможным из-за присутствия в его выходном сигнале флуктуационных составляющих типа белого шума и случайного блуждания угла, которые при интегрировании показаний ММГ могут вызвать появление быстро накапливающейся погрешности.

#### III. ВТОРАЯ РАЗРАБОТАННАЯ СИСТЕМА КОРРЕКЦИИ МК

Второй разработанный вариант системы коррекции МК уже с применением в качестве ДУС ММГ использовал коррекцию по угловой скорости.

На рис. 3 приведена блок-схема системы коррекции МК по угловой скорости, в которой выходные сигналы ДМК и ДУС поступают в вычислительное устройство, где производится их обработка, включающая дифференцирование сигнала ДМК (позиция 3) и формирование далее по полученному после дифференцирования сигналу и показанию ДУС разностного измерения, содержащего погрешность  $\dot{\delta}_p$  МК непосредственно на фоне ухода  $\dot{\Delta}_{dyc}$  ДУС. Дальнейшее применение в рассматриваемой схеме фильтра низких частот (ФНЧ) (позиция 4) позволяет получить искомую погрешность  $\delta_p$ , а также минимизировать влияние высокочастотной составляющей (шума) погрешности ММГ.



Рис. 3 Блок-схема системы коррекции МК по угловой скорости: 3 - дифференцирующее звено, 4 - ФНЧ

Первое динамическое звено, через которое проходит сигнал ДМК (рис.3), является дифференцирующим зве-

ном с замедлением  $\frac{K_3p}{T_3p+1}$  (оно же фильтр высоких частот (ФВЧ)) и его отличие от передаточной функции идеального дифференцирующего звена состоит в наличии постоянной времени Т<sub>3</sub>, выбор которой в первую очередь определяется необходимостью формирования на выходе этого звена неискаженного значения угловой скорости рыскания. Кроме того, при выборе постоянной времени Т<sub>3</sub> следует учитывать ее связь с постоянной времени  $T_4$  второго звена  $\frac{K_4}{T_4 p + 1}$ , представляющего ФНЧ. Обе указанные постоянные времени фильтров должны без искажения выделять погрешность МК б<sub>р</sub> и сглаживать высокочастотную погрешность от шума ДУС. С учетом этого при моделировании режима функционирования системы коррекции в условиях задания качек, значения периодов которых могут изменяться в диапазоне 6 ... 28с, были выбраны следующие значения постоянных времени: Т<sub>3</sub> =1,27с, Т<sub>4</sub> =5с, обеспечивающие наилучшую эффективность системы коррекции в диапазоне периодов качек 10 ... 25с.

В 2021г эта система коррекции была также запатентована (патент RU 2763685) [2].

Полученные на основе компьютерного моделирования результаты работы МК с указанной системой коррекции подтвердили качество работы прибора не хуже, чем с первой системой коррекции. Тем не менее, выяснилось, что для реализации такой системы коррекции требуются достаточно сложный алгоритм устранения разрыва производной при дифференцировании сигналов МК в области перехода 0°→360°.

#### IV. ТРЕТЬЯ РАЗРАБОТАННАЯ СИСТЕМА КОРРЕКЦИИ МК

В связи с этим был предложен третий вариант построения системы коррекции МК на ММГ с применением стационарного фильтра, близкого к комплементарному, блок-схема которого приведена на рис. 4.



Рис. 4. Блок-схема системы коррекции МК на основе комплементарного фильтра

Применение комплементарного фильтра позволяет объединить показания ММГ и МК при помощи ФВЧ и ФНЧ таким образом, чтобы на выходе схемы измерения формировался угол курса и рыскания, представляющий комбинацию низкочастотной и высокочастотной составляющих соответственно МК и ММГ. Такая схема измерения позволяет скомпенсировать дрейф нуля ММГ с помощью ФВЧ и воздействие переносных ускорений от качки судна на МК с помощью ФНЧ. Для того чтобы на выходе схемы измерения формировался оптимальный угол курса и рыскания по показаниям МК и ММГ, необходимо чтобы сигнал ММГ был вначале проинтегрирован, т.е. пропущен через звено  $\frac{1}{p}$ , и только потом к полученному выходному сигналу интегратора может быть применен ФВЧ -  $\frac{p}{Tp+1}$ . Поскольку в результате такого последовательного соединения динамических звеньев  $\frac{1}{p}$ .  $\frac{p}{Tp+1}$  образуется передаточная функция -  $\frac{1}{Tp+1}$ , то, в предлагаемой схеме измерения выходной сигнал ММГ может быть подан, также как и выходной сигнал МК, непосредственно на вход апериодического звена  $\frac{1}{Tp+1}$ .

В комплементарном фильтре должно выполняться условие инвариантности, при выполнении которого применяемые в схеме ФВЧ и ФНЧ не влияют на полезный сигнал – вырабатываемый угол курса и рыскания. Для этого необходимо, чтобы выполнялось следующее условие – сумма передаточных функций ФВЧ и ФНЧ должна всегда равняться 1. Для выполнения принципа инвариантности в схему вводятся два дополнительных усилителя: усилитель сигнала датчика магнитного курса компаса (ДМК) с коэффициентом усиления  $K_1$ , и усилитель сигнала ММГ с коэффициентом усиления  $K_2$  (см. рис. 4) и обеспечивается следующее соотношение:  $\frac{K_2}{K_1} = T$  (при выборе  $K_1=1$ ,  $K_2=T$ ).

Представленная система коррекции работает следующим образом:

1. Выходной сигнал с ДМК поступает на усилитель с коэффициентом усиления К<sub>1</sub>, а выходной сигнал с ММГ на усилитель с коэффициентом усиления К<sub>2</sub>.

2. Сигнал с усилителя ДМК  $K_1 \cdot (K_M + \gamma_p)$  суммируется с сигналом с усилителя ММГ –  $K_2 \cdot p(K_M + \gamma_p)$ .

3. Полученная сумма сигналов подаётся на вход апериодического звена  $\frac{1}{T p+1}$  ( $T = \frac{K_2}{K_1}$ ). Сигнал с выхода апериодического звена  $K_M + \gamma_p$ , в котором отсутствует

погрешность МК от качки, подаётся на выносной индикатор.

С применением моделирования были выбраны следующие значения параметров фильтра:  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 10$ , T = 10. На рис. 5 приведены графики стендовых испытаний с результатами сравнения коэффициентов эффективности работы системы коррекции МК на ВОГ (позиционной) и системы коррекции МК на ММГ (на основе комплементарного фильтра) в функции заданных периодов качки, подтверждающие близость результатов работы представленных систем коррекции.



Рис. 5. Сравнение коэффициентов эффективности системы коррекции МК с применением ВОГ и ММГ (60° с. ш.)

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В докладе представлен опыт разработки трех вариантов системы коррекции магнитного компаса, предназначенной для подавления его погрешностей, возникающих при воздействии качки.

Показано, что первая система коррекции, названная позиционной, может эффективно использоваться при применении ВОГ, а третья, названная системой коррекции на основе комплементарного фильтра, – при применении ММГ, при этом обе системы коррекции имеют близкие значения коэффициентов эффективности.

#### Литература

- [1] Зиненко В. М., Грязин Д. Г., Молочников А. А., Сергачев И. В., Матвеев Ю. В., Короленко И. В. Способ измерения магнитного курса судна в высоких широтах и устройство для его реализации, патент RU 2688900, дата регистрации 22.05.2019
- [2] Грязин Д. Г., Падерина Т. В.Способ измерения магнитного курса судна в высоких широтах патент RU 2763685, дата регистрации 30.12.2021Г.
- [3] Правила по оборудованию морских судов. Часть V. Навигационное оборудование. Российский морской регистр судоходства СПб. 2016

# Решение позиционной задачи для автоматической посадки беспилотного летательного аппарата на взлётно-посадочную полосу с помощью технического зрения

А.Н. Алексеев *АО «Раменское* приборостроительное конструкторское бюро» Раменское, Россия AAlexeev@rpkb.ru Е.С. Земляный *АО «Раменское* приборостроительное конструкторское бюро» Раменское, Россия EZemlyany@rpkb.ru К.А. Чеканов АО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро» Раменское, Россия KChekanov@rpkb.ru

Аннотация—В статье рассматривается задача позиционирования беспилотного летательного аппарата (БЛА) на этапе посадки путём распознавания взлётно-посадочной полосы (ВПП). Разработаны алгоритмы на основе методов технического зрения (ТЗ) и фотограмметрии, позволяющие восстановить собственные координаты БЛА по изображению ВПП. Проведено моделирование посадки с помощью открытого авиасимулятора «FlightGear», которое показало, что точность предлагаемых алгоритмов соответствует посадке по Ш категории.

#### Ключевые слова—беспилотный летательный аппарат, взлётно-посадочная полоса, техническое зрение, нейронные сети, фотограмметрия.

#### I. Введение

В последние годы возрос интерес к повышению автономности работы беспилотных летательных аппаратов (БЛА). В частности, это касается отказа от спутниковых навигационных систем на различных этапах полёта, включая посадку, из-за возможной постановки помех длительного действия. Решением данной проблемы может служить система технического зрения: БЛА оборудуется видеокамерой и на основе анализа её изображения производится посадка. Такая система не подвержена искусственным помехам и достаточно компактна. Целью представленной работы являлось создание навигационного алгоритма на основе технического зрения, позволяющего вычислять собственные координаты БЛА на этапе посадки в условиях отсутствия спутникового сигнала.

Техническое зрение в задаче посадки служит для поиска на изображении некоторых особых точек, координаты которых заранее известны и записаны в память бортового вычислителя БЛА. Одним из вариантов может служить установка в районе ВПП характерных визуальных маркеров, технически представляющих собой инфракрасные (ИК) излучатели. Координаты этих ИКмаркеров рассчитываются с высокой точностью и заносятся в память бортового вычислителя БЛА. Затем во время посадки образы ИК-маркеров детектируются на изображении с помощью бинаризации по цвету, а собственные координаты восстанавливаются методами фотограмметрии. Такой способ определения координат на этапе посадки рассмотрен в [1]. Он имеет свои достоинства (простое распознавание особых точек, независимость от условий освещения), однако обладает серьёзным недостатком – это усложнение наземной инфраструктуры, которое требует постоянного обслуживания.

Учитывая недостатки описанного метода, хотелось бы в качестве характерных наземных ориентиров иметь не искусственные, а априорно существующие особые точки. Поэтому в данной работе в качестве особых приняты угловые точки полотна взлётно-посадочной полосы (ВПП): они удобны для детектирования на изображении (вокруг этих точек имеется характерный перепад яркости) и их географические координаты содержатся в аэронавигационных атласах аэродромов.

#### II. СЕГМЕНТИРОВАНИЕ ОБРАЗА ВПП

Существуют альтернативные способы ориентирования по изображению ВПП. Например, в [2] предлагается находить боковые границы и рассчитывать управление таким образом, чтобы наклоны левой и правой границы по отношению к ближнему порогу были равными по модулю и противоположными по знаку. Такой подход обеспечивает стремление ошибки по боковому отклонению к нулю, однако требует разработки дополнительного контура управления, преобразующего разность наклонов боковых границ в значение заданного траекторного управляющего воздействия (например, в значение заданного крена). Это обстоятельство не позволяет применять данный метод в связке с готовыми автопилотами, осуществляющими управление по ошибке классического линейного бокового отклонения. Поэтому в представленной работе, исходя из соображений информационного обеспечения алгоритмов управления, ставится задача определения собственных координат БЛА относительно ВПП. Во-первых, такой подход не требует вмешательства в бортовую систему траекторного управления, а во-вторых, позволяет оператору контролировать текущие координаты местоположения БЛА даже в условиях отсутствия сигнала СНС.

Для решения позиционной задачи с помощью анализа изображения, требуется, чтобы в кадре присутствовали объекты, координаты которых заранее известны. В качестве таких объектов выступают особые точки – угловые точки полотна ВПП. Чтобы найти эти точки, предлагается сначала выделить область интереса, содержащую образ ВПП, а затем методами технического зрения найти её очертания.

#### А. Детектирование области интереса

Перед использованием методов технического зрения необходимо выделить область интереса на снимке, содержащую искомый объект. Это позволяет снизить вычислительную нагрузку на алгоритмы ТЗ, а также уменьшить число их ошибочных срабатываний. Для решения задачи детектирования была выбрана нейронная сеть с архитектурой «YOLO 7». Нейросетевые архитектуры семейства «YOLO» показывают наилучшее быстродействие среди других архитектур, поэтому они хорошо подходят для использования во встраиваемых системах с ограниченной вычислительной мощностью (которую представляет собой бортовой цифровой вычислитель БЛА). В [3] приведен график сравнения кривых Парето-оптимальностей различных нейросетевых архитектур, который показывает, что архитектура «YOLO-7» наиболее оптимальна по соотношению точности и быстродействия. Для корректной работы нейросети требуется обучающая выборка с изображениями ВПП на разной дальности, с разных ракурсов и разными условиями освещённости. Такой обширный набор данных можно получить только с помощью авиасимулятора. Для цели сбора обучающих изображений был разработан программный стенд имитационного моделирования, в котором использовался открытый авиасимулятор «FlightGear» [4]. На данных, полученных с этого авиасимулятора и производилось обучение нейронной сети. Динамику основных метрик обучения демонстрирует график на рис. 1



Рис. 1. Изменение метрик в процессе обучения

Здесь «loss» - значение функции потерь, «mAP» значение средней точности. «mAP» - основной показатель точности для оценки обнаружения объектов [5] был достигнут на уровне 76,9%.

#### В. Контурирование

Следующим этапом является поиск особых точек в области интереса методами технического зрения. Перед непосредственным поиском этих точек решается вспомогательная задача: выделяются боковые границы ВПП с помощью преобразования Хафа [6]. Отрезки, полученные указанным преобразованием, можно интерпретировать как примерные границы ВПП. На реальном изображении полотно ВПП из-за перепадов высоты представляет форму неправильного четырёхугольника, боковые границы которого плохо аппроксимируются лишь двумя прямыми линиями. Проблема преобразования Хафа состоит в том, что вместе с искомыми детектируются шумовые линии (спам). Чтобы отфильтровать спам было разработано следующее решение. Каждую линию можно представить в форме нормального уравнения, в котором она характеризуется длиной ( $\rho$ ) и углом наклона ( $\vartheta$ ) перпендикуляра, опущенного из начала координат. На плоскости  $\vartheta - \rho$  линия трансформируется в точку. Затем весь набор детектированных линий кластеризуется методом «k-means» по параметрам  $\rho$  и  $\vartheta$ . Результат кластеризации демонстрируется на рис. 2:



Рис. 2. Кластеризация линий методом «k-means»

Здесь зелёные и красные линии искомые, в то время как линия, обозначенная голубым цветом, является спамом. Многочисленные кластеры содержат искомые линии, а малочисленные – только случайный шум. Исходя из этого условия выявляется спам и удаляется из общего набора. Внутри оставшихся кластеров выделяются средние линии и принимаются за боковые границы.

Для выделения особых точек применяется детектор Харриса [7], который находит все контрастные углы на изображении. В результате получается облако точек. Чтобы выбрать только те точки, которые относятся к углам ВПП, применяется метод экспертных оценок: для каждой точки рассчитывается взвешенная сумма нормализованных метрик близости к примерным боковым границам в нижней и в верхней части области интереса. Точки, с наибольшими значениями взвешенных сумм считаются искомыми. Результат работы такого алгоритма показан на рис. 3:



Рис. 3. Поиск угловых точек ВПП в облаке, полученном через детектор Харриса

Соединив найденные точки, получим контур, который наиболее близко аппроксимирует изображение полотна ВПП.

#### III. РЕШЕНИЕ ПОЗИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Чтобы получить полное навигационное решение (координаты и углы ориентации) позиции съёмки по известным пиксельным и линейным координатам ориентиров в фотограмметрии [8] предлагается решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x_{K1} - x_c}{f} = \frac{a_{31}(X_{K1} - X) + a_{32}(Y_{K1} - Y) + a_{33}(Z_{K1} - Z)}{a_{11}(X_{K1} - X) + a_{12}(Y_{K1} - Y) + a_{13}(Z_{K1} - Z)} \\ \frac{(y_{K1} - y_c) \cdot \cos dx_1}{f} = \frac{a_{21}(X_{K1} - X) + a_{22}(Y_{K1} - Y) + a_{23}(Z_{K1} - Z)}{a_{11}(X_{K1} - X) + a_{12}(Y_{K1} - Y) + a_{13}(Z_{K1} - Z)} \\ & \cdots \\ \frac{x_{Kn} - x_c}{f} = \frac{a_{31}(X_{Kn} - X) + a_{32}(Y_{Kn} - Y) + a_{33}(Z_{Kn} - Z)}{a_{11}(X_{Kn} - X) + a_{12}(Y_{Kn} - Y) + a_{13}(Z_{Kn} - Z)} \\ \frac{(y_{Kn} - y_c) \cdot \cos dx_n}{f} = \frac{a_{21}(X_{Kn} - X) + a_{22}(Y_{Kn} - Y) + a_{23}(Z_{Kn} - Z)}{a_{11}(X_{Kn} - X) + a_{22}(Y_{Kn} - Y) + a_{13}(Z_{Kn} - Z)} \end{cases}$$
(1)

где  $x_{Ki}, y_{Ki}$  - пиксельные координаты ориентиров;  $X_{Ki}, Y_{Ki}, Z_{Ki}$  - линейные координаты ориентиров;  $a_{11}...a_{33}$  - элементы матрицы направляющих косинусов углов ориентации; f - фокус (фокусное расстояние оптической видеокамеры);  $dx_i, dy_i$  - левые части нечётных и чётных уравнений соответственно;  $D_{xi}, D_{yi}$  - правые части нечетных и чётных уравнений соответственно, X, Y, Z - координаты позиции съёмки.

Введём допущение о том, что позиция съёмки совпадает со связанной системой координат БЛА. В системе уравнений (1) приравниваются углы визирования (азимут и угол места) рассчитанные через смещение пиксельных координат относительно центра изображения (левые части уравнений) и рассчитанные через геометрические преобразования (правые части уравнений). Поскольку неизвестные углы ориентации входят в систему через тригонометрические функции (направляющие косинусы), то система (1) решается численно.

#### А. Линейное решение

На практике углы ориентации на борту БЛА рассчитываются бесплатформенной инерциальной навигационной системой (БИНС) с высокой точностью. Рассчитывать их повторно из системы (1) нет необходимости. Поэтому, примем, что углы ориентации известны, тогда в системе (1) остаётся 3 неизвестных (координаты позиции съёмки) в 8 уравнениях (каждая особая точка даёт 2 уравнения) – система избыточна. Традиционно системы с избыточностью решаются методом наименьших квадратов (МНК).

Чтобы систему (1) решить с помощью МНК, её нужно привести к канонической форме:

$$A \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = B$$

где *А*, *В* – некоторые матрицы. Преобразуем систему (1) к виду:

 $\begin{cases} (a_{11}dx_1 - a_{31}) \cdot (X_{K1} - X) + (a_{12}dx_1 - a_{32}) \cdot (Y_{K1} - Y) + (a_{13}dx_1 - a_{33}) \cdot (Z_{K1} - Z) = 0\\ (a_{11}dy_1 - a_{21}) \cdot (X_{K1} - X) + (a_{12}dy_1 - a_{22}) \cdot (Y_{K1} - Y) + (a_{13}dy_1 - a_{23}) \cdot (Z_{K1} - Z) = 0 \end{cases}$ 

Обозначим левый сомножитель каждого слагаемого как  $A_{ii}$ :

$$\begin{cases} A_{11} \cdot (X_{K1} - X) + A_{12} \cdot (Y_{K1} - Y) + A_{13} \cdot (Z_{K1} - Z) = 0 \\ A_{21} \cdot (X_{K1} - X) + A_{22} \cdot (Y_{K1} - Y) + A_{23} \cdot (Z_{K1} - Z) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Полученное выражение можно преобразовать к каноническому виду:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}X_{K1} & A_{12}Y_{K1} & A_{13}Z_{K1} \\ A_{21}X_{K1} & A_{22}Y_{K1} & A_{23}Z_{K1} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} (2)$$

В левой части (2) явно выделяется матрица *A*, а в правой – матрица *B*. Решение системы (2) через МНК будет найдено в виде:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \cdot B$$

#### В. Нелинейное уточнение

С помощью нелинейного МНК [9] можно уточнить ранее полученное решение:

$$\overline{X}_{i+1} = \overline{X}_i + \delta \overline{X}_i 
\delta \overline{X}_i = K_i \cdot (\overline{l} - \overline{r})$$
(3)

где  $\overline{X}_i = \begin{bmatrix} X_i & Y_i & Z_i \end{bmatrix}$  - вектор состояния;  $\delta \overline{X}_i$  - нелинейная поправка;  $K_i$  - коэффициент поправки;  $\overline{l} = \begin{bmatrix} dx_1 & dy_1 & \dots & dx_n & dy_n \end{bmatrix}^T$  - левые части системы уравнений (1);  $\overline{r} = \begin{bmatrix} D_{x1} & D_{y1} & \dots & D_{xn} & D_{yn} \end{bmatrix}^T$  - правые части системы уравнений (1).

Начальным приближением вектора состояния в выражении (3) выступает линейное решение, рассчитанное ранее. Коэффициент поправки рассчитывается через Якобиан:

$$K_{i} = (J^{T}J)^{-1}J^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{x1}}{\partial X} & \frac{\partial D_{x1}}{\partial Y} & \frac{\partial D_{x1}}{\partial Z} \\ \frac{\partial D_{y1}}{\partial X} & \frac{\partial D_{y1}}{\partial Y} & \frac{\partial D_{y1}}{\partial Z} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial D_{xn}}{\partial X} & \frac{\partial D_{xn}}{\partial Y} & \frac{\partial D_{xn}}{\partial Z} \\ \frac{\partial D_{yn}}{\partial X} & \frac{\partial D_{yn}}{\partial Y} & \frac{\partial D_{yn}}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

.)

#### IV. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для тестирования разработанных алгоритмом проведён следующий эксперимент. С помощью авиасимулятора «FlightGear» моделировалась посадка в аэропорту Шереметьево. Вводилась система координат (СК), связанная с ВПП, которая изображена на рис. 4.



Рис. 4. Система координат, связанная с ВПП

БЛА производил посадку, а его координаты в описанной СК рассчитывались точными геодезическими методами, которые были приняты за эталон. В то же время, координаты БЛА рассчитывались с помощью новых алгоритмов, описанных в этой статье. Погрешность оценивалась как разность расчётных координат с эталонными. Графики погрешностей по всем трём осям, полученные в ходе эксперимента, представлены на рис. 5. По оси абсцисс отложена дальность относительно точки начала глиссады (ТНГ), поскольку относительно неё регистрируется погрешность на высотах принятия решений для дальнейшей оценки категории посадки.



Рис. 5. Погрешность решения позиционной задачи

Здесь красным цветом обозначена погрешность линейного решения, а синим – погрешность после нелинейного уточнения. Прирост точности при использовании нелинейного уточнения оценивался как отношение площадей под графиками кривых и составил:

X	:12.1%
Y	:13.0%
Ζ	:19.6%

Предложенный способ использования линейного решения в качестве начального приближения для нелинейного уточнения обеспечивает хорошую сходимость и составляет 3-4 итерации.

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны алгоритмы для решения позиционной задачи на этапе посадки БЛА по видеоизображению, получаемому с установленной на борту видеокамеры. Проведённый эксперимент показал, что предложенное решение на заключительном этапе планирования по глиссаде (на высоте принятия решений 15 м) даёт по-грешность 0,2 м по высоте (координата Y) и 0,4 м по боковому отклонению (координата Z). Такие показатели удовлетворяют требованиям для III категории точности посадки [10]. В таблице 1 приведены допустимые отклонения от глиссады для всех категорий:

Категория	Высота при- нятия реше- ний, м	Боковое от- клонение, м	Продольное отклонение, м
Ι	60	7,7	5,1
Π	30	5,0	2,5
III	15	3,7	1,3

#### Литература

- [1] Лукьянов В.В., Алексеев А.Н., Земляный Е.С., Чеканов К.А. Автоматическая посадка крылатого БЛА по визуальным маркерам // Технический журнал «Автоматизация. Современные технологии». – 2023. – №3. – С. 121–127.
- [2] Jiajia Shang, Zhongke Shi Vision-based Runway Recognition for UAV Autonomous Landing // IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security. - 2007. - №3. - C. 112-117.
- [3] YOLOv7: Trainable bag-of-freebies sets new state-of-the-art for realtime object detectors // arXivLabs URL: https://arxiv.org/abs/2207.02696 (дата обращения: 14.04.2023).
- [4] Introduction to FlightGear // FLIGHTGEAR FLIGHT SIMULATOR URL: https://www.flightgear.org/about/ (дата обращения: 14.04.2023).
- [5] Mark Everingham, S. M. Ali Eslami, Luc Van Gool, Christopher K. I. Williams, John Winn, Andrew Zisserman The PASCAL Visual Object Classes Challenge: A Retrospective // International Journal of Computer Vision. - 2015. - №111. - C. 98-136.
- [6] Ершов Е.И. Быстрое преобразование Хафа как инструмент анализа двухмерных и трёхмерных изображений в задачах поиска прямых и линейной кластеризации: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. М., 2018. 118 с.
- [7] Tinne Tuytelaars, Krystian Mikolajczyk Local invariant feature detectors: a survey // Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision. – 2008. – №3. – C. 177–280.
- [8] Краснопевцев Б.В. Фотограмметрия. М.: УПП "Репрография" МИИГАиК, 2008. - 160 с.
- [9] Алгоритм Левенберга Марквардта для нелинейного метода наименьших квадратов и его реализация на Python // Хабр URL: https://habr.com/ru/articles/308626/ (дата обращения: 14.04.2023).
- [10] Лукьянов В.В., Алексеев А.Н., Земляный Е.С., Чеканов К.А. Методика оценки точности посадки БЛА на взлетно-посадочную полосу // Автоматизация. Современные технологии. – 2022. – №12. – С. 551–554.

### • ЗАСЕДАНИЕ II – ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ДАТЧИКИ •

## О гарантирующих допусках на систематические инструментальные погрешности датчиков первичной информации БИНС

А.Г. Кузнецов Московский институт электромеханики и автоматики Москва, Россия inbox@aomiea.ru А.В. Козлов Лаборатория управления и навигации, МГУ им. М.В. Ломоносова Москва, Россия <u>a.kozlov@navlab.ru</u>

А.В. Фомичев Московский институт электромеханики и автоматики Москва, Россия В.М. Железнов Лаборатория управления и навигации, МГУ им. М.В. Ломоносова Москва, Россия <u>a.kozlov@navlab.ru</u>

А.В. Молчанов Московский институт электромеханики и автоматики Москва, Россия <u>a.v.molchanov@mail.ru</u> рой траектории или набора траект

Аннотация—Навигационные погрешности автономной бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) практически точно описываются линейной системой дифференциальных уравнений ошибок. Ее общее решение выражается через начальные условия и переходную матрицу, которая может быть найдена численно для любой траектории движения. Это позволяет использовать методы линейной алгебры для построения областей в пространстве инструментальных погрешностей, гарантирующих нахождение навигационных ошибок в допуске на заданном наборе траекторий объекта-носителя, и соотнести полученные оценки с характерными погрешностями инерциальных датчиков современных БИНС.

a.fomichev@aomiea.ru

Ключевые слова—бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС); инструментальные погрешности; навигационные погрешности; гарантирующие оценки.

#### I. Введение

Задача назначения допусков на инструментальные погрешности инерциальных датчиков БИНС, обеспечивающих заданную точность автономного навигационного решения летательного аппарата (ЛА) или другого подвижного объекта, представляет интерес как для инженерной практики, так и для теоретического анализа. Она может рассматриваться в статистической постановке или как задача построения области в пространстве инструментальных погрешностей, обеспечивающей нахождение навигационных ошибок в заданном допуске для некоторой траектории или набора траекторий. Допуски на инструментальные погрешности, соответствующие решению второй задачи, будем называть гарантирующими.

Статистические оценки допусков получаются в результате обработки экспериментальных данных, либо путем численного моделирования по наборам траекторий и сочетаний инструментальных ошибок. Если БИНС в экспериментах подтверждает заявленные точности, то оценки соответствующих инструментальных ошибок можно получать при комплексной обработке информации (КОИ) БИНС и эталонного средства, например, спутниковой навигационной системы. Однако данные оценки будут косвенными и зависят, в том числе, от их наблюдаемости [1] на конкретных траекториях. Корректность косвенных оценок инструментальных ошибок, полученных при решении задачи КОИ, можно проверить подстановкой в уравнения ошибок БИНС и сравнением навигационных ошибок с допусками.

Допуски могут назначаться, исходя из частных решений уравнений ошибок на некотором наборе траекторий и инструментальных ошибок или исходя из решения дисперсионного уравнения. Дисперсионное уравнение, записанное для некоторой траектории, автоматически учитывает всевозможные сочетания знаков инструментальных ошибок при заданных среднеквадратических отклонениях (СКО). Потому его решение предпочтительнее прямого перебора сочетаний инструментальных ошибок. Для получения оценок допусков с приемлемой доверительной вероятностью любым статистическим методом требуется достаточно большое число реализаций. Вероятностные оценки зависят от гипотез о законах распределения инструментальных погрешностей и не гарантируют, что навигационные ошибки будут всегда находиться в допуске. Чаще всего считается приемлемой вероятность нахождения в допуске, превышающая 0.95.

Гарантирующие допуски на инструментальные погрешности для заданного набора траекторий обеспечивают нахождение навигационных ошибок в допуске с единичной вероятностью и, конечно, оказываются жестче статистических оценок. Построение гарантирующей области в пространстве инструментальных погрешностей и является основным предметом настоящего исследования.

#### II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ БИНС

Принимается следующая стандартная модель инструментальных погрешностей для акселерометров и гироскопов (датчиков угловой скорости, ДУС), соответственно [1–3]:

$$\Delta f_{z} = \Delta f_{z}^{0} + \Gamma f_{z}', \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23}\\ \Gamma_{31} & 0 & \Gamma_{33} \end{bmatrix}, \\ v_{z} = v_{z}^{0} + \Theta \omega_{z}', \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13}\\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23}\\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{bmatrix}.$$
(1)

Здесь:

 $\Delta f_z, v_z$  – погрешности акселерометров и гироскопов,

 $\Delta f_z^0$ ,  $v_z^0$  – погрешности смещений нулей акселерометров и гироскопов,

 $\Gamma_{ii}, \Theta_{ii}, i = 1, 2, 3$  – погрешности масштабных коэффициентов,

 $\Gamma_{ij}, \Theta_{ij}, i = 1, 2, 3, i \neq j$  – погрешности ортогональности осей чувствительности (перекосы),

Параметры  $\Delta f_z^0$ ,  $v_z^0$ ,  $\Gamma_{ij}$ ,  $\Theta_{ij}$ , i, j = 1,2,3 считаются постоянными. Шумовые составляющие погрешностей не рассматриваются.

Частичное заполнение матрицы  $\Gamma$  объясняется тем, что приборные оси *z* блока чувствительных элементов связаны с осью одного из акселерометров и плоскостью соответствующей пары акселерометров.

Величины  $\Delta f_z$  и  $v_z$  из левой части формулы (1) называются суммарными погрешностями акселерометров и ДУС.

#### III. УРАВНЕНИЯ ОШИБОК БИНС, НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ, ПЕРЕХОДНАЯ МАТРИЦА

Уравнения ошибок БИНС для горизонтальных каналов, соответствующие принятой модели инструментальных ошибок, в географическом трехграннике с относительно свободной ориентацией в азимуте имеют вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}_1 &= \delta V_1 + \beta_3 V_2', \\ \Delta \dot{r}_2 &= \delta V_2 - \beta_3 V_1', \end{aligned}$$

$$\begin{split} \delta \dot{V}_{1} &= 2u'_{3} \delta V_{2} - g\alpha_{2} - V_{2}' v_{21}^{0} d'_{31} - V_{2}' v_{22}^{0} c'_{32} - V_{2}' v_{23}^{0} c'_{33} + \\ &+ \Delta f_{z1}^{0} c'_{11} + \Delta f_{z2}^{0} c'_{12} + \Delta f_{z3}^{0} c'_{13} + \\ &+ \Gamma_{11} c'_{11} f'_{z1} + \Gamma_{21} c'_{12} f'_{z1} + \Gamma_{22} c'_{12} f'_{z2} + \\ &+ \Gamma_{23} c'_{12} f'_{z3} + \Gamma_{31} c'_{13} f'_{z1} + \Gamma_{33} c'_{13} f'_{z3} - \\ &- \Theta_{11} V_{2}' c'_{31} \omega'_{z1} - \Theta_{12} V_{2}' c'_{31} \omega'_{z2} - \Theta_{13} V_{2}' c'_{31} \omega'_{z3} - \\ &- \Theta_{21} V_{2}' c'_{32} \omega'_{z1} - \Theta_{22} V_{2}' c'_{32} \omega'_{z2} - \Theta_{23} V_{2}' c'_{32} \omega'_{z3} - \\ &- \Theta_{31} V_{2}' c'_{33} \omega'_{z1} - \Theta_{32} V_{2}' c'_{31} \omega'_{z2} - \Theta_{33} V_{2}' c'_{33} \omega'_{z3} + \Delta f_{1}^{S} \end{split}$$

$$\begin{split} \delta \dot{V}_2 &= -2 u_3' \delta V_1 + g \alpha_1 + V_1' v_{21}^0 c_{31}' + V_1' v_{22}^0 c_{32}' + V_1' v_{23}^0 c_{33}' + \\ &+ \Delta f_{21}^0 c_{21}' + \Delta f_{22}^0 c_{22}' + \Delta f_{23}^0 c_{23}' + \\ &+ \Gamma_{11} c_{21}' f_{21}' + \Gamma_{21} c_{22}' f_{21}' + \Gamma_{22} c_{22}' f_{22}' + \\ &+ \Gamma_{23} c_{22}' f_{23}' + \Gamma_{31} c_{23}' f_{21}' + \Gamma_{33} c_{23}' f_{23}' + \\ &+ \Theta_{11} V_1' c_{31}' \omega_{21}' + \Theta_{12} V_1' c_{31}' \omega_{22}' + \Theta_{13} V_1' c_{31}' \omega_{23}' + \\ &+ \Theta_{21} V_1' c_{32}' \omega_{21}' + \Theta_{22} V_1' c_{32}' \omega_{22}' + \Theta_{23} V_1' c_{32}' \omega_{23}' + \\ &+ \Theta_{31} V_1' c_{33}' \omega_{21}' + \Theta_{32} V_1' c_{33}' \omega_{22}' + \Theta_{33} V_1' c_{33}' \omega_{23}' + \Delta f_2^s \end{split}$$

$$\begin{split} \dot{\alpha}_{1} &= -u_{3}' \frac{\Delta r_{1}}{R_{1}} - \frac{\delta V_{2}}{R_{2}} + u_{3}' \alpha_{2} - u_{2}' \beta_{3} + \\ &+ v_{z1}^{0} c_{11}' + v_{z2}^{0} c_{12}' + v_{z3}^{0} c_{13}' + \\ &+ \Theta_{11} c_{11}' \omega_{z1}' + \Theta_{12} c_{11}' \omega_{z2}' + \Theta_{13} c_{11}' \omega_{z3}' + \\ &+ \Theta_{21} c_{12}' \omega_{z1}' + \Theta_{22} c_{12}' \omega_{z2}' + \Theta_{23} c_{12}' \omega_{z3}' + \\ &+ \Theta_{31} c_{13}' \omega_{z1}' + \Theta_{32} c_{13}' \omega_{z2}' + \Theta_{33} c_{13}' \omega_{z3}' + v_{1}^{5} \end{split}$$

$$\dot{\alpha}_{2} = -u'_{3}\frac{\Delta r_{2}}{R_{2}} + \frac{\delta V_{1}}{R_{1}} - u'_{3}\alpha_{1} + u'_{1}\beta_{3} + + v^{0}_{z1}c'_{21} + v^{0}_{z2}c'_{22} + v^{0}_{z3}c'_{23} + + \Theta_{11}c'_{21}\omega'_{z1} + \Theta_{12}c'_{21}\omega'_{z2} + \Theta_{13}c'_{21}\omega'_{z3} + + \Theta_{21}c'_{22}\omega'_{z1} + \Theta_{22}c'_{22}\omega'_{z2} + \Theta_{23}c'_{22}\omega'_{z3} + + \Theta_{31}c'_{23}\omega'_{z1} + \Theta_{32}c'_{23}\omega'_{z2} + \Theta_{33}c'_{23}\omega'_{z3} + v^{5}_{23}$$

$$\dot{\beta}_{3} = \omega_{z1}^{\prime} \frac{\Delta r_{1}}{R_{1}} + \omega_{z2}^{\prime} \frac{\Delta r_{2}}{R_{2}} + \omega_{x2}^{\prime} \alpha_{1} - \omega_{x1}^{\prime} \alpha_{2} + + v_{z1}^{0} c_{31}^{\prime} + v_{22}^{0} c_{32}^{\prime} + v_{23}^{0} c_{33}^{\prime} + + \Theta_{11} c_{31}^{\prime} \omega_{z1}^{\prime} + \Theta_{12} c_{31}^{\prime} \omega_{z2}^{\prime} + \Theta_{13} c_{31}^{\prime} \omega_{z3}^{\prime} + + \Theta_{21} c_{32}^{\prime} \omega_{z1}^{\prime} + \Theta_{22} c_{32}^{\prime} \omega_{z2}^{\prime} + \Theta_{23} c_{32}^{\prime} \omega_{z3}^{\prime} + + \Theta_{31} c_{33}^{\prime} \omega_{z1}^{\prime} + \Theta_{32} c_{33}^{\prime} \omega_{z2}^{\prime} + \Theta_{33} c_{33}^{\prime} \omega_{z3}^{\prime} + v_{3}^{S}$$

Здесь:

*V<sub>i</sub>*<sup>'</sup> – проекции скорости ЛА на оси модельного (вычисленного) географического трехгранника,

 $u'_i$  – проекции угловой скорости Земли на оси этого трехгранника,

*g* – номинальное значение ускорения силы тяжести,

 $f'_{zi}$  – проекции удельной внешней силы, измеренные блоком акселерометров в приборных осях БИНС,

 $\omega'_{zi}$  – проекции абсолютной угловой скорости приборного трехгранника БИНС в собственных осях,

*R<sub>i</sub>* – радиусы кривизны сечений поверхности земного эллипсоида,

 $\omega'_{xi}$  – проекции абсолютной угловой скорости модельного географического трехгранника на собственные оси,

*c*<sub>*ij*</sub> – элементы модельной (вычисляемой) матрицы ориентации *C* приборного трехгранника БИНС относительно модельного географического:

$$\begin{bmatrix} s_{\psi'_g} c_{\vartheta'} & c_{\psi'_g} s_{\gamma'} - s_{\psi'_g} s_{\vartheta'} c_{\gamma'} & c_{\psi'_g} c_{\gamma'} + s_{\psi'_g} s_{\vartheta'} \\ c_{\psi'_g} c_{\vartheta'} & -s_{\psi'_g} s_{\gamma'} - c_{\psi'_g} s_{\vartheta'} c_{\gamma'} & -s_{\psi'_g} c_{\gamma'} + c_{\psi'_g} s_{\vartheta'} \\ s_{\vartheta'} & c_{\gamma'} c_{\vartheta'} & -s_{\gamma'} c_{\vartheta'} \end{bmatrix},$$

где  $\psi'_{g}$ ,  $\vartheta'$ ,  $\gamma'$  — углы гироскопического курса, тангажа и крена, s, c – синус и косинус соответственно.

Вектор состояния уравнений ошибок включает в себя переменные:

 $\Delta r_1$ ,  $\Delta r_2$  – ошибки определения местоположения в горизонтальной плоскости в осях модельного географического трехгранника с относительно свободной ориентацией в азимуте [2,3],

 $\delta V_1$ ,  $\delta V_2$  – динамические ошибки [2,3] определения горизонтальных составляющих относительной скорости в этих же осях,

 $\alpha_1, \alpha_2$  – утловые ошибки построения приборной вертикали в тех же осях,  $\beta_3$  – азимутальная кинематическая ошибка [2,3].

Уравнения ошибок замыкаются при помощи формирующих уравнений для инструментальных погрешностей датчиков БИНС:

$$\Delta \dot{f}_{zi}^{0} = 0, \dot{v}_{zi}^{0} = 0, \dot{\Theta}_{ij} = 0, \dot{f}_{ij} = 0.$$
(3)

Для получения гарантирующих оценок необходимо учесть, что инструментальные погрешности БИНС не только входят в модельные уравнения движения при их интегрировании, но и приводят к ошибкам начальной выставки. В идеальном случае постоянных инструментальных погрешностей и отсутствии возмущений, действующих в процессе выставки, известны [3] следующие соотношения:

$$\alpha_1(0) = \frac{-\Delta f_2}{g}, \, \alpha_2(0) = \frac{\Delta f_1}{g}, \, \beta_3(0) = \frac{\nu_1}{u \cos\varphi} + \frac{\Delta f_1}{g} \operatorname{tg} \varphi, \qquad (4)$$

где  $\Delta f_i$  – проекции суммарных погрешностей акселерометров на оси географического трехгранника,  $v_1$  – проекция суммарного дрейфа гироскопов на первую ось географического трехгранника  $\varphi$  – широта места выставки, u – модуль угловой скорости Земли, g – модуль силы тяжести. В начальный момент времени географический трехгранник с полусвободной азимутальной ориентацией обычно ориентирован по сторонам света. Таким образом, можно считать, что в формуле (4) индекс 1 – это направление на восток, 2 – направление на север в плоскости местного горизонта. Все приведенные ниже результаты получены для системы уравнений ошибок (2) с начальными условиями (4).

Система уравнений ошибок (2) с формирующими уравнениями (3) допускает следующее векторноматричное представление:

$$\dot{x} = Ax,\tag{5}$$

где *А* – матрица системы, а фазовый вектор *x* разбивается на компоненты, соответствующие навигационным и инструментальным ошибкам:

$$x = [y^T, z^T]^T, y = [\Delta r_1, \Delta r_2, \delta V_1, \delta V_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_3]^T,$$
  
$$z = [\nu_i, \Delta f_i, \Gamma_{ij}, \Theta_{ij}]^T.$$

Моделирование показывает, что для траекторий, выбранных для исследования, численное интегрирование системы (5) простейшим методом Эйлера

$$x_{i+1} = [E + A(t_i)\Delta t]x_i = \Phi_{i+1,i}x_i$$
(6)

оказывается достаточно точным для такта  $\Delta t$  порядка секунды и менее. Далее номер такта i удобно называть также моментом времени.

С учетом нулевой правой части формирующих уравнений для инструментальных ошибок переходная матрица системы (6) имеет следующую блочную структуру:

$$\Phi_{i+1,i} = \begin{bmatrix} \Phi_{i+1,i}^1 & \Phi_{i+1,i}^2 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$
(7)

Применяя две последовательные итерации в системе (6), можно получить рекуррентную формулу для элементов переходной матрицы

$$\Phi^{1}_{i,i-2} = \Phi^{1}_{i,i-1} \Phi^{1}_{i-1,i-2}, \Phi^{2}_{i,i-2} = \Phi^{1}_{i,i-1} \Phi^{2}_{i-1,i-2} + \Phi^{2}_{i,i-1},$$

позволяющую вычислить значение переходной матрицы  $\Phi_{i,0}$  на любом шаге и связать текущее значение фазового вектора  $x_i$  с начальным значением  $x_0$ :

$$x_i = \Phi_{i,0} x_0 = \begin{bmatrix} \Phi_i^1 & \Phi_i^2 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Начальное значение фазового вектора (2) связано с инструментальными погрешностями формулами (4), допускающими следующую матричную запись:

$$y_{0} = Bz_{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4 \times 6}{4 \times 15} \\ B_{1} & 0 \\ \frac{3 \times 6}{3 \times 15} \end{bmatrix} z_{0},$$
$$B_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c'_{21}/g & -c'_{22}/g & -c'_{23}/g \\ 0 & 0 & 0 & -c'_{21}/g & -c'_{22}/g & -c'_{23}/g \\ \frac{1}{2} \frac{c'_{11}}{12} \frac{c'_{12}}{12} \frac{c'_{13}}{12} \frac{c'_{13}$$

Таким образом, текущее значение фазового вектора системы уравнений ошибок (2) связано с вектором инструментальных погрешностей формулой

$$y_i = (\Phi_i^2 + \Phi_i^1 B) z_0.$$
 (8)

Выражение (8) задает линейное отображение из пространства инструментальных погрешностей в фазовое пространство системы уравнений ошибок. Первые два уравнения образуют подсистему, связывающую позиционные ошибки с инструментальными погрешностями. Запишем ее явно:

$$\Delta r_i = \begin{bmatrix} \Delta r_{1i} \\ \Delta r_{2i} \end{bmatrix} = \underbrace{F_i}_{2 \times 21} z_0. \tag{9}$$

Линейное преобразование (9) отображает 21-мерное пространство инструментальных ошибок  $z_0$  в двумерное пространство позиционных погрешностей. Поскольку dim  $\Delta r_i < \dim z_0$ , для любого *i* отображение (9) имеет ненулевое ядро  $z_i^- = \ker F_i$ , причем dim  $z_i^- \ge 19$  (равенство достигается при rank  $F_i = 2$ ) [4].

Итак, для каждого момента времени *i* существует линейное подпространство  $z_i^- \in z_0$  такое, что  $\Delta r_i = F_i z_i^- \equiv 0$ . То есть для любого набора сколь угодно больших по величине инструментальных погрешностей из  $z_i^-$  позиционные погрешности будут тождественно нулевыми. Пространство  $z_0$  раскладывается в прямую сумму  $z_0 = z_i^- \bigoplus z_i^+$ , где  $z_i^+$  – линейное подпространство  $z_0$ , отображаемое в ненулевые позиционные погрешности. В ситуации общего положения rank  $F_i = 2$  и dim $z_i^+ = 2$ .

Важно отметить, что установленный результат сохраняется при любой модификации модели погрешностей (1) если dim  $z_0 > 2$ . При этом случай двух и менее инструментальных погрешностей dim  $z_0 \le 2$  не представляет практического интереса. При модификации модели (1) dim  $z_0$  изменится, однако представление  $z_0 = z_i^- \bigoplus z_i^+$  и равенство dim  $z_i^+ = 2$  останутся верными. Например, для редуцированной модели, в которой учитываются только смещения нулевых сигналов  $\Gamma_{ij} = \Theta_{ij} = 0$ ,

$$z_0 = [\nu_i^0, \Delta f_i^0]^T$$
, dim  $z_0 = 6$ .

Поэтому далее считается, что dim  $z_0 = m$ , где число m > 2 зависит от принятой модели инструментальных погрешностей.

Погрешность положения будем характеризовать евклидовой нормой

$$\|\Delta r_i\| = \sqrt{\Delta r_{1i}^2 + \Delta r_{2i}^2},$$

выражающей круговую ошибку. Пусть  $R_i$  – допуск на круговую ошибку на момент времени *i* (в частности, для фиксированного допуска  $R_i = R = \text{const}$ ). Кругу  $||\Delta r_i|| = R_i$  в пространстве координат соответствует некоторый эллипс в плоскости  $z_i^+$  пространства инструментальных погрешностей, что следует из линейности отображения (9). Если отображение (9) имеет неполный ранг, то эллипс вырождается в отрезок или пустое множество, но эта ситуация имеет практически нулевую вероятность и не будет рассматриваться.

Итак,  $\forall i$  и  $R_i$  прообраз множества  $\|\Delta r_i\| \le R_i$  в пространстве инструментальных ошибок  $z_0$  является внутренностью некоторого эллиптического цилиндра  $Z_i$  с двумерным поперечным сечением в плоскости  $z_i^+$  и m-2 мерной осью, образованной пространством  $z_i^-$ . Устройство этого геометрического объекта проще понять из приводимой ниже формулы (14) и последующих комментариев к ней.

Заметим, что матрица преобразования (9) зависит от i, а значит направления оси цилиндра и главных полуосей эллипса в сечении будут зависеть от времени. Область, гарантирующая нахождение круговой ошибки в допуске на всем интервале времени  $i = \overline{1, n}$ , представляет собой пересечение Z цилиндров  $Z_i$ , построенных для всех моментов времени i:

$$Z = \bigcap_{i=1}^{n} Z_i. \tag{10}$$

#### IV. ОСОБЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ОШИБОК И ГАРАНТИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО

Установленные выше результаты, допускают следующее представление. Зафиксируем момент времени i, допуск R и введем масштабы линейного размера R и времени T по формулам

$$R = a, T = \sqrt{a/g_e},$$

где a – экваториальный радиус Земли,  $g_e$  – значение удельной силы тяжести на экваторе. Заметим, что величина T отличается от периода Шулера множителем  $2\pi$ , не существенным с точки зрения масштабирования.

Безразмерные инструментальные погрешности к вводятся по формуле

$$\kappa = Dz_0, D = \text{diag}\left[T, T, T, \frac{T^2}{R}, \frac{T^2}{R}, \frac{T^2}{R}, 1, \dots, 1\right].$$
 (11)

Это масштабирование позволяет добиться совпадения порядков всех инструментальных погрешностей. Введем также безразмерные позиционные погрешности

$$\Delta \rho_i = \frac{\Delta r_i}{R} \tag{12}$$

в радианной мере. Из формул (9), (11) и (12) следует, что

$$\Delta \rho_i = \frac{1}{R} F_i D^{-1} \kappa = N_i \kappa,$$

а условие пребывания погрешностей в допуске записывается в виде

$$\|\Delta \rho_i\| \le \frac{R_i}{R} = \rho_i.$$

Из линейной алгебры [4] известно, что любая действительная матрица А представима в виде

$$\underbrace{A}_{m \times n} = \underbrace{U}_{m \times m} \underbrace{S}_{m \times n} \underbrace{V}_{n \times n}^{T}, \qquad (13)$$

где U и V – ортогональные матрицы (квадратные матрицы, удовлетворяющие свойству  $U^T U = E, V^T V = E$ ), а S – матрица, у которой на главном миноре расположены положительные величины, называемые сингулярными числами. Традиционно под сингулярным разложением понимают такое разложение, в котором сингулярные числа на диагонали S не возрастают.

Столбцы ортогональных матриц U и V образуют ортонормированные базисы  $\{q_k\}$  и  $\{e_k\}$  в пространствах  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$  соответственно:

$$U = [q_1, \dots, q_m], V = [e_1, \dots, e_n],$$

причем базисные векторы связаны формулами

$$Ae_{k} = \begin{cases} s_{k}q_{k}, k \leq r, r \leq \min\{m, n\} \\ 0, k > r. \end{cases}$$
(14)

Этому соответствует следующая матрица *S* в преобразовании (13):

$$S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma = \text{diag}[s_1, \dots, s_r],$$

где нулями в матрице *S* обозначены блоки соответствующей размерности. Для матрицы максимального ранга нулевые блоки частично или полностью отсутствуют.

Сингулярные числа характеризуют минимальные и максимальные растяжения, осуществляемые оператором *А*. Покажем это. Разложим вектор *x* по базису  $e_k$ :  $x = \sum_{k=1}^n x^k e_k$  и с учетом (14) получим:

$$Ax = A\sum_{k=1}^{n} x^k e_k = \sum_{k=1}^{r} x^k s_k q_k,$$

поскольку базис  $\{q_k\}$  ортонормированный, имеем:

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^r (x^k)^2 s_k^2.$$
(15)

Находя максимум (15) на сфере  $||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 = 1$ , получаем, что максимальное сингулярное число  $s_1$  характеризует максимальное растяжение оператора A:

$$\max_{x \parallel = 1} \|Ax\| = s_1.$$

Можно показать [4], что базис  $\{e_k\}$  образован собственными векторами матрицы  $A^T A$ :

$$A^T A e_k = s_k^2 e_k,$$
 где  $s_k^2$  – квадраты сингулярных чисел.

Применим установленные результаты к анализу максимальной круговой ошибки положения. Для этой задачи получим  $A = N_i$  и

$$N_{i} = U_{i}S_{i}V_{i}^{T}, \qquad (16)$$
  
где  $U_{i} = \begin{bmatrix} u_{11}^{i} & u_{12}^{i} \\ u_{21}^{i} & u_{22}^{i} \end{bmatrix}, \quad \underbrace{S_{i}}_{2\times m} = \begin{bmatrix} s_{1}^{i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{2}^{i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{2}^{i} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underbrace{V_{i}}_{m \times m} = [v_{1}, \dots, v_{m}].$ 

Ввиду ортогональности матрицы  $U_i$  условие нахождения позиционных погрешностей в допуске  $||\Delta \rho_i|| \le R_i/R$  эквивалентно условию  $||U_i^T \Delta \rho_i|| \le R_i/R$ . Границей прообраза множества  $||U_i^T \Delta \rho_i|| = ||S_i V_i^T \kappa_i|| = \rho$  в пространстве инструментальных ошибок к будет цилиндр

$$\kappa_{i} = \rho \left( \frac{v_{1}^{i}}{s_{1}^{i}} \cos p + \frac{v_{2}^{i}}{s_{2}^{i}} \sin p + C_{3} v_{3}^{i} + \dots + C_{m} v_{m}^{i} \right),$$
(17)

где  $p, C_i$  – произвольные параметры. В этом нетрудно убедиться подстановкой  $\kappa_i$  в  $S_i V_i^T \kappa$ . Векторы  $\{v_i\}$ , из которых построены столбцы матрицы  $V_i$ , образуют ортонормированный базис, поэтому

$$\|S_i V_i^T \kappa_i\| = \rho \|v_1 \cos p + v_2 \sin p\| = \rho.$$

Описанные вычисления дают конструктивный способ построения многомерного цилиндра и поясняют его геометрическое устройство. Взаимно ортогональные направления  $v_1^i$  и  $v_2^i$  соответствуют главным полуосям в эллиптическом поперечном сечении цилиндров. Двумерное подпространство  $z_i^+$ , натянутое на эти векторы, задает плоскость поперечного сечения. Всевозможные линейные комбинации  $C_3v_3^i + \dots + C_mv_m^i$  задают m - 2 мерное подпространство  $z_i^-$ , являющееся осью цилиндра.

Матрица  $N_i$  находится численно из приведенных выше формул, после чего для нее определяются сингулярные числа и соответствующие особые направления. Численные алгоритмы сингулярного разложения реализованы во многих вычислительных пакетах.

Особенностью задачи является большая размерность пространства инструментальных погрешностей, затрудняющая визуализацию результатов. Гарантирующая область в пространстве инструментальных ошибок допускает наглядное представление только для трехмерной модели инструментальных погрешностей.

Приведем соответствующую иллюстрацию. Редуцируем модель инструментальных погрешностей (1), оставив в ней только три дрейфа гироскопов:

$$\Delta f_z = \Delta f_z^0 + \Gamma f_z' = 0, \Gamma = 0, \Delta f_z^0 = 0,$$
  
$$\nu_z = \nu_z^0 = \text{const}$$

Моделирование на траектории, зарегистрированной для маневренного самолета, приводит к гарантирующему

множеству в пространстве дрейфов, представленному на рис. 1.



Рис. 1. Гарантирующая область в пространстве дрейфов, образованная пересечением цилиндров

Из рис. 1 видно, что с ростом времени характерный размер поперечного сечения цилиндра уменьшается, а ось меняет направление. Эволюция цилиндра существенно зависит от траектории движения.

Представленная картина качественно сохраняется для любой размерности пространства инструментальных ошибок, однако при размерности больше трех уже не допускает столь наглядной визуализации. Соответствующие цилиндры строятся численно, а их пересечение может быть найдено, например, методом Монте Карло, и затем спроектировано на плоскости пространства инструментальных ошибок.



Рис. 2. Проекция пересечения цилиндров на плоскость  $v_{z_1}^0, v_{z_3}^0$ 

Однако при большой размерности пространства инструментальных ошибок число таких плоскостей также оказывается достаточно большим и генерация точек, попадающих в гарантирующее множество, требует значительных вычислительных ресурсов. Таким образом, возможно практически точное построение гарантирующей области численными методами, однако техническая реализация вычислений и визуализация результатов при большой размерности представляет собой довольно сложную задачу.

Один из способов обойти описанные сложности состоит в нахождении более простого подмножества гарантирующей области. Например, в пересечение цилиндров вписывается некоторый шар. Либо для локализации области она вписывается в некоторый параллелепипед, в котором затем выбираются пробные точки, генерируемые случайно или образующие равномерную сетку. При этом существенно, что цилиндр является (не строго) выпуклым множеством и потому пересечение цилиндров, образующее гарантирующее множество, также выпукло и симметрично относительно начала координат. Это обстоятельство существенно для построения вписанных или описанных аппроксимирующих множеств.

Однако при этом надо иметь в виду, что объем отсекаемой (при вписывании фигуры) или добавляемой (при описывании) области в многомерном случае может быть существенно больше объема самой области [5].

При большой размерности соотношения объемов геометрических фигур плохо соотносятся с интуитивными представлениями, известными для трехмерного и плоского случаев. Например, объем шара радиуса 0.5, вписанного в единичный n – мерный куб (для которого объем равен единице, а диагональ равна  $\sqrt{n}$ ), равен

$$V = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)} 2^{-n}$$

что для n = 21 составляет всего лишь  $6.65 \cdot 10^{-9}$  и, таким образом, вписанный шар занимает лишь малую часть объема куба. Аналогичный эффект будет наблюдаться и при вписывании шара в пересечение цилиндров.

Тем не менее, приведем оценку радиуса сферы и вычислим точку на сфере, максимизирующую круговую позиционную погрешность. Для оценки выбрана одна из траекторий маневренного самолета. Вычисления показывают, что безразмерный радиус сферы, характеризующий порядок безразмерных погрешностей, равен  $1.1 \cdot 10^{-5}$ , а точка, максимизирующая круговую ошибку на момент t = 3600с, оказывается следующей:

ТАБЛИЦА 1. НАИХУДШЕЕ СОЧЕТАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТНОЙ ТРАЕКТОРИИ

$v_{z_1}^0 = -3.4 \cdot 10^{-4^\circ}$ /час	$\Theta_{23} = -1.5 \cdot 10^{-1}{}^{\prime\prime}$
$v_{z_2}^0 = -6.1 \cdot 10^{-6^\circ}$ /час	$\Theta_{31} = -7.0 \cdot 10^{-1\prime\prime}$
$v_{z_3}^0 = 3.6 \cdot 10^{-4^\circ}/\text{vac}$	$\Theta_{32} = -8.7 \cdot 10^{-2}$
$\Delta f_{z_1}^0 = 4.1 \cdot 10^{-6}  \mathrm{m/c^2}$	$\Theta_{33} = 4.5 \text{ ppm}$
$\Delta f_{z_2}^0 = -6.2 \cdot 10^{-7} \mathrm{m/c^2}$	$\Gamma_{23} = -7.5 \cdot 10^{-5''}$
$\Delta f_{z_3}^0 = 3.2 \cdot 10^{-6}  \mathrm{m/c^2}$	$\Gamma_{31} = 6.5 \cdot 10^{-3''}$
$\Theta_{11} = -7.7 \text{ ppm}$	$\Gamma_{33} = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ ppm}$
$\Theta_{12} = 9.4 \cdot 10^{-2''}$	$\Gamma_{11} = 1.7 \cdot 10^{-2} \text{ppm}$
$\Theta_{13} = -7.6 \cdot 10^{-1''}$	$\Gamma_{21} = -1.6 \cdot 10^{-3''}$
$\Theta_{21} = 6.2 \cdot 10^{-2''}$	$\Gamma_{22} = -2.8 \cdot 10^{-2} \text{ppm}$
$\Theta_{22} = -4.6 \text{ ppm}$	

Из таблицы видно, что наихудшее направление локализовано вблизи погрешностей масштабов гироскопов, откуда следует, что данная группа инструментальных ошибок наиболее существенно влияет на позиционные погрешности для выбранной траектории. Наихудший набор инструментальных погрешностей, приводящий к выходу на границу допуска, состоит из достаточно малых инструментальных ошибок.

В частности, этой малостью могут объясняться наблюдаемые на практике эпизодические выходы навигационных погрешностей за допуск на отдельных траекториях, если инструментальные погрешности для таких траекторий находятся вблизи наихудших направлений.

На следующем рис. З представлены результаты моделирования (интегрирования уравнений ошибок БИНС), подтверждающие, что к моменту t = 3600 с круговая позиционная погрешность для представленных в таблице 1 инструментальных ошибок выходит на границу допуска. При этом возможно составить такую комбинацию параметров модели инструментальных погрешностей, в которой величины некоторых из них будут существенно больше указанных, но позиционная ошибка останется прежней. Данный контринтуитивный вывод демонстрирует фактическую сложность взаимосвязи между рассматриваемыми величинами в пространствах больших размерностей.



Рис. 3. Моделирование круговой позиционной ошибки при наихудшем сочетании инструментальных погрешностей

Качественно картина сохраняется и для других траекторий. Радиус сферы может меняться в несколько раз, однако его порядок не меняется.

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан подход к построению области в пространстве инструментальных погрешностей, гарантирующей нахождение позиционных погрешностей в допуске для любой траектории движения. Установлено, что для любого момента времени кругу на горизонтальной плоскости, радиус которого равен допуску на позиционные погрешности, соответствует некоторый эллиптический цилиндр в пространстве инструментальных ошибок.

Ось цилиндра образована набором инструментальных ошибок, не влияющих на позиционные погрешности для данного момента времени. Поперечное сечение цилиндра, представляющее собой двумерный эллипс, состоит из направлений в пространстве инструментальных ошибок, которые влияют на позиционные ошибки. Одно из направлений на эллипсе задает максимизирует позиционные погрешности. Для построения цилиндра используется сингулярное разложение линейного оператора, отображающего инструментальные ошибки на позиционные погрешности, которое строится по переходной матрице системы уравнений ошибок.

Гарантирующая область представляет собой пересечение всех цилиндров, построенных для каждого момента времени. Это множество может иметь достаточно сложную форму. Описаны проблемы, возникающие при описании этого множества при большой размерности пространства инструментальных ошибок. Как один из способов решения проблем рассмотрено вписывание сферы в пересечение цилиндров, упрощающее форму, но приводящее к потере части гарантирующей области.

Разработанный подход не зависит от типа БИНС и может быть обобщен для исследования допусков на погрешности скорости и ориентации.

#### Литература

[1] Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Часть II: Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. - 2-е изд., испр. и доп. Москва: МАКС Пресс, 2012. 172 с.

- [2] Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть I: Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп. Москва: МАКС Пресс, 2011. 136 с.
- [3] Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы инерциальных навигационных систем. Москва: Издательство МГУ, 2020, 164 с.
- [4] Хорн Р. Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Книга по требованию. 2012. 667 с.

## Малогабаритная навигационная система для беспилотного летательного аппарата

Д.Б. Пазычев ООО «Интеграл» Москва, Российская Федерация d.pazychev@integral-group.pro К.С. Бакулев *НИТУ «МИСИС»* Москва, Российская Федерация bakulev.ks.@misis.ru Р.Н. Садеков *НИТУ «МИСИС»* Москва, Российская Федерация r.sadekov@misis.ru

Аннотация—В работе рассматривается малогабаритная навигационная система «НВ-микро» компании ООО «Интеграл». В статье будет представлена конструкция рассматриваемой системы, описан алгоритм ее работы, а также приведены результаты испытаний навигационной системы на легкомоторном самолете, дающие представление о точности предлагаемой навигационной системы.

Ключевые слова—навигационная система, алгоритм навигации, БПЛА.

#### I. Введение

В настоящее время в нашей стране наблюдается потребность в создании большого числа беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) различной компоновки и различного назначения [1]. Решение подобной задачи включает в себя не только разработку системы радиосвязи и системы управления БПЛА, но и системы навигации, определяющей текущее местоположение и ориентацию БПЛА для последующего управления. Данная задача, в свою очередь, накладывает существенные ограничения на массово-габаритные характеристики бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) из-за малых габаритов и веса самого БПЛА.

Применение в составе навигационной системы компактных и недорогих микро-электро механических (МЭМС) датчиков приводит к быстрому накоплению погрешностей навигационной системы из-за высоких нестабильностей погрешностей ДУСов и акселерометров, что возможно компенсировать только использованием корректирующих сигналов с дополнительных систем: системы спутниковой навигации (СНС), системы воздушных сигналов (СВС) и прочих [2]. Вместе с тем, использование более точной и, соответственно, более габаритной элементной базы датчиков первичной информации на малогабартных БПЛА попросту невозможно из-за ограничений, в первую очередь, по габаритам и массе.

#### II. Существующие подходы

На сегодняшний момент в архитектуре построения авионики БПЛА существует два подхода:

 Система управления БПЛА и система навигации БПЛА являются отдельными и обособленными модулями, осуществляющими коммутацию сигналов между собой. В этом случае навигационная система оформляется в отдельное изделие, которое размещается ближе к центру масс БПЛА для наилучшей точности измерений угловых скоростей и ускорений (рис. 1).



Рис. 1. Малогабаритная навигационная система Ellipse-D компании SBG Systems

Подобный подход к построению архитектуры БПЛА в основном используется на больших по размеру БПЛА в виду высокой точности и габаритов системы навигации и невозможности ее размещения внутри блока системы автоматического управления БПЛА.

 Система управления БПЛА и система навигации БПЛА являются одним модулем: система навигации БПЛА входит в состав системы управления БПЛА (рис. 2).



Рис. 2. Полетный контроллер Pixhawk с системой навигации Cube Orange

Подобный подход к построению архитектуры БПЛА в основном используется как раз на малогабаритных БПЛА и позволяет существенных образом снизить габариты и вес всего комплекса управления. Однако, это накладывает определенные особенности на систему навигации:

- Система навигации должна крепиться непосредственно на плату автопилота и иметь минимальные габариты и вес.
- Системе навигации не требуется иметь в своем составе сложную систему стабилизации электропитания, позволяющую ей работать в широком диапазоне входного питания. Так, на малогабаритных БПЛА питание всего комплекса управления, в большинстве случаев, осуществляется от общей аккумуляторной батареи.

 Системе навигации не требуется иметь в своем составе защищенные интерфейсы передачи информации с гальванической изоляцией сигнала. Поскольку система навигации располагается в непосредственной близости от контроллера системы управления в этом случае возможно использовать передачу по интерфейсам UART, SPI или I2C.

#### III. Особенности малогабаритных БИНС

Основной особенностью использования МЭМС датчиков на малогабаритных БПЛА является высокое влияние на их показания внешней вибрации и температуры [3],[4].

Первая часть погрешностей вызывается наличием быстровращающихся двигателей, создающих высокочастотную вибрацию на корпусе БПЛА, которая передается в том числе и на бортовую электронику, закрепленную внутри обшивки. Данные погрешности обусловлены наложением внешних высокочастотных колебаний, действующих на МЭМС датчик, с внутренней частотой вынужденных колебаний кремниевой пластины. В большинстве случаев, основным способом борьбы с данными погрешностями служит использование амортизирующих вибрационных подставок, имеющих определенную частоту среза, ограничивающую попадание высокочастотных вибраций на бортовую электронику БПЛА.

Вторая же часть погрешностей, вызванная температурой, в большинстве случаев, компенсируется программным образом - методом проведения температурной тарировки МЭМС датчика с наложением температурной модели погрешностей датчиков (1):

$$\vec{\omega}_{B}^{Err} = \begin{bmatrix} \beta_{XX}(t) & \beta_{XY}(t) & \beta_{XZ}(t) \\ \beta_{YX}(t) & \beta_{YY}(t) & \beta_{YZ}(t) \\ \beta_{ZX}(t) & \beta_{ZY}(t) & \beta_{ZZ}(t) \end{bmatrix} \cdot \vec{\omega}_{B}^{Tr} + \begin{bmatrix} \beta_{X}(t) \\ \beta_{Y}(t) \\ \beta_{Z}(t) \end{bmatrix}$$
(1)  
$$\vec{a}_{B}^{Err} = \begin{bmatrix} \alpha_{XX}(t) & \alpha_{XY}(t) & \alpha_{XZ}(t) \\ \alpha_{YX}(t) & \alpha_{YY}(t) & \alpha_{YZ}(t) \\ \alpha_{ZX}(t) & \alpha_{ZY}(t) & \alpha_{ZZ}(t) \end{bmatrix} \cdot \vec{a}_{B}^{Tr} + \begin{bmatrix} \alpha_{X}(t) \\ \alpha_{Y}(t) \\ \alpha_{Z}(t) \end{bmatrix}$$

где  $\beta_{ii}(t)$  и  $\alpha_{ii}(t)$  – ошибки масштабных коэффициентов ДУСов и акселерометров, соответственно;

 $\beta_{ii}(t)$  и  $\alpha_{ii}(t)$  – ошибки неортогональностей осей ДУ-Сов и акселерометров, соответственно;

 $\beta_i(t)$  и  $\alpha_i(t)$  – ошибки смещений нулей ДУСов и акселерометров, соответственно.

 $\vec{\omega}_{B}^{Tr}$  и  $\vec{a}_{B}^{Tr}$  – вектора истинных угловых скоростей и линейных ускорений объекта.

 $\vec{\omega}_{B}^{Err}$  и  $\vec{a}_{B}^{Err}$  – ошибки показаний ДУСов и акселерометров, соответственно.

Каждый из представленных выше коэффициентов модели погрешностей датчика (1) может быть, в свою очередь, представлен в виде степенной функции высокого порядка (2), коэффициенты которой и подлежат определению в процессе калибровки датчика:

$$f_{i}(T_{i}) = K_{i,N} \cdot T_{i}^{N} + K_{i,N-1} \cdot T_{i}^{N-1} + \dots + K_{i,0}$$
(2)

Идентификация коэффициентов указанной выше математической модели погрешностей датчиков может быть выполнена в два этапа:

- Определение ошибок масштабных коэффициентов и неортогональностей осей ДУСов и акселерометров. В этом случае для определения коэффициентов ошибок модели погрешностей (2) необходимо производить изменение измеряемых датчиком параметров (угловых скоростей и ускорений) и температуры самого датчика. Данное обстоятельство потребует использования специализированного оборудования, стоимость которого во много раз превышает стоимость рассматриваемых компактных и недорогих МЭМС датчиков, что является абсолютно нецелесообразным. Именно поэтому в большинстве случае этот этап температурной калибровки опускается, что снижает точность МЭМС датчиков на критических температурах их использования.
- Определение ошибок смещений нулей ДУСов и акселерометров. В этом случае для определения коэффициентов ошибок модели погрешностей (2) при неподвижности самого датчика необходимо изменять лишь его внутреннюю температуру, что может быть выполнено с использованием недорогой и компактной температурной камеры. Для определения указанных выше коэффициентов потребуется проведение длительных натурных испытаний, в ходе которых температура датчика должна изменяться между наименьшим и наибольшим для эксплуатации значением.

Рассмотренная выше математическая модель погрешностей датчиков (1) не является полной: в представленной модели присутствуют лишь коэффициенты зависимости ошибок датчиков от их текущих температур  $T_i$ . В то же время можно сказать, что на показания компактных и недорогих МЭМС датчиков огромное влияние оказывает и скорость изменения внешней температуры

 $T_i$ , что, несомненно, должно быть отражено в математической модели погрешностей датчиков. Однако, данное обстоятельство приведёт к еще большему усложнению процедуры идентификации коэффициентов в процессе калибровки навигационной системы.

#### IV. МАЛОГАБАРИТНАЯ БИНС «НВ-МИКРО»

Для использования на компактных и сверхкомпактных БПЛА в компании ООО «Интеграл» [5] была разработана навигационная система «НВ-микро» (рис. 3).



Рис. 3. Навигационная система «НВ-микро», расположенная на плате включения и проверки, входящей в комплект поставки

Навигационная система «НВ-микро» представляет собой сверхкомпактный навигационный прибор на базе МЭМС датчиков для определения углов крена, тангажа и путевого угла подвижного объекта, предполагающий размещение на плату системы управления. При наличии устойчивого сигнала внешнего приемника СНС, «НВмикро» дополнительно рассчитывает линейную скорость объекта, координаты и высоту, а также поддерживает расчёт координат объекта в течении ограниченного времени после пропадания сигнала СНС. «НВ-микро» допускает возможность коррекции выходных параметров от внешнего магнитометра, системы воздушных сигналов или внешнего датчика пройденного пути, которые являются отдельными изделиями, производящимися компанией ООО «Интеграл». Отличительной особенностью рассматриваемой навигационной системы является наличие сразу двух МЭМС датчиков для осреднения и резервирования сигналов. Кроме того, в состав навигационной системы «НВ-микро» входит система термостабилизации каждого из МЭМС датчиков, позволяющая повысить точность и стабильность их показаний во всем диапазоне температур использования навигационной системы. Система температурной стабилизации удерживает температуру датчика на уровне +50°С и представляет собой систему нагрева с одним нагревательным транзистором, расположенным под МЭМС датчиком (рис. 4).



Рис. 4. Система термостабилизации навигационной системы «НВ-микро»

Применение навигационной системы возможно в условиях эксплуатации, представленных в таблице 1.

ТАБЛИЦА І. Условия эксплуатации навигационной системы «НВ-микро»

Параметр	Значение	
Температура окружающей	от минус 50°С до плюс 70°С	
среды		
Относительная влажность	от 5% до 98%	
воздуха		
Атмосферное давление	от 450 мм. рт. ст. до 850 мм. рт. ст.	
Диапазон широт использования	±70°	
Диапазон долгот использования	±180°	
Угловая скорость вращения подвижного объекта	± 250°/сек (диапазон может быть изменен на ± 500°/сек, ± 1000°/сек или ± 2000°/сек)	
Линейное ускорение объекта	± 2g (диапазон может быть изменен на ± 4g, ± 8g или ± 16g)	

Технические характеристики навигационной системы «НВ-микро» представлены в таблице 2.

ТАБЛИЦА II. ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ «НВ-МИКРО»

Параметр	Значение
Габаритные размеры	25 х 25 х 25 мм
Bec	20 г
Напряжение питания	= 5 B (НЕ защищенное)

Потребляемая мощность	не более 3 Вт (разогрев датчиков)	
Диапазон измерений угла	±180 °	
крена		
Диапазон измерений угла	±90 °	
тангажа		
Диапазон измерений азиму-	0 <sup>°</sup> 360 <sup>°</sup>	
тального угла		
Buyonuoù uurendeŭo	UART, гальванически НЕ изолиро-	
выходной интерфене	ванный, до 1 Мбит/сек	
Частота расчета данных	50200 Гц	
	Не входит в состав Прибора	
СИС призиции	(требуется передача данных с внеш-	
спс приемник	него СНС приемника по средствам	
	интерфейса UART)	

Точностные характеристики навигационной системы «НВ-микро» в доверительном интервале 1 сигма представлены в таблице 3.

ТАБЛИЦА III.	Точностные характеристики навигационной
	СИСТЕМЫ «НВ-МИКРО»

Параметр	Значение при наличии сигнала СНС	Значение при пропадании сиг- нала СНС
Крен, Тангаж (статика)	0.5°	1.0°
Крен, Тангаж (динамика)	1.0°	3.0°
Путевой угол (при наличии скорости объекта более 5 м/с)	0.3°	уход 6° за первые 10 минут без СНС
Линейная скорость	0.1 м/с	не поддерживается
Координаты	6 м	500 м за первые 3 минуты потери связи с СНС
Высота	6 м	10 м

V. АЛГОРИТМ МАЛОГАБАРИТНОЙ БИНС

Комплексирование систем инерциальной навигации с системами глобального позиционирования, а также датчиками воздушной скорости, в большинстве случаев ведется с применением фильтров Калмановского типа. В этом случае в качестве математической модели фильтра рассматривается математическая модель погрешностей инерциальной навигационной системы (3), параметры которой и необходимо идентифицировать для повышения точности выходного сигнала БИНС [6]:

$$\begin{cases} \delta \dot{E} = \delta V_E \\ \delta \dot{N} = \delta V_N \\ \delta \dot{V}_E = -g \Phi_N + a_N \Phi_{up} + B_E + w(t) \\ \delta \dot{V}_N = -g \Phi_E + a_E \Phi_{up} + B_N + w(t) \\ \dot{\Phi}_E = -\frac{\delta V_N}{R} + \omega_E^{dr} + w(t) \\ \dot{\Phi}_N = \frac{\delta V_E}{R} + \omega_N^{dr} + w(t) \\ \dot{\Phi}_{up} = \frac{\delta V_E}{R} tg \varphi + \omega_{up}^{dr} + w(t) \\ \omega_E^{dr} = \omega_{xB}^{dr} \cdot \cos H + \omega_{yB}^{dr} \cdot \sin H \\ \omega_N^{dr} = \omega_{yB}^{dr} \cdot \cos H - \omega_{xB}^{dr} \cdot \sin H \\ \dot{\omega}_{xB}^{dr} = -\beta \omega_{xB}^{dr} + A \sqrt{2\beta} w(t) \\ \dot{\omega}_{yB}^{dr} = -\beta \omega_{xB}^{dr} + A \sqrt{2\beta} w(t) \end{cases}$$
Представленная модель является наиболее полной с точки зрения описания ошибок БИНС, поскольку предполагает оценку смещений нулей ДУСов в связанной системе координат на основании формирующего фильтра с заданной корреляционной функцией, что позволяет использовать данную модель для БИНС различного класса точности. В качестве измерений данный фильтр использует разность показаний навигационной системы и опорной системы по скоростям и координатам, в которых роль низкочастотных (медленно меняющихся во времени, с периодом Шулера 84.4 минуты) ошибок играют ошибки БИНС, а высокочастотных – ошибки опорной системы, от показаний которой и производится коррекция показаний БИНС.

Данный подход в решении поставленной выше задачи с применением БИНС, построенной на базе микромеханических датчиков, будет сопровождаться рядом следующих проблем:

- Указанная выше модель фильтра Калмана является 10-ти компонентной, т.е. для корректной работы фильтра на ее основе потребуется настройка большого числа входных и измерительных шумов и, самое главное, длительное время сходимости фильтра до наиболее важных компонент, определяющих точность системы – дрейфов ДУСов. В условиях высокой нестабильности дрейфов микромеханических ДУСов (в пределах от 20 до 100°/ч) меняющейся на периоде времени порядка от 1 секунды до 500 секунд данная оценка постоянно будет запаздывать по времени, по отношению к актуальному значению дрейфа ДУСов в конкретный момент времени.
- Указанная выше модель описана в предположении, что ошибки расчета положения навигационной системы координат Ф<sub>E</sub>, Ф<sub>N</sub> и Ф<sub>Up</sub> малы по значениям, а для БИНС на базе микромеханических датчиков такое предположение несправедливо
- Указанная выше модель описана в терминах ошибок самой БИНС и не содержит в себе критичные для указанной выше задачи ошибки СНС. Расширение же модели фильтра Калмана с добавление указанных ошибок только увеличит его размерность, что приведет к еще большей его сложности и еще большему запаздыванию его оценок по времени.

#### VI. АЛГОРИТМ МАЛОГАБАРИТНОЙ БИНС «НВ-МИКРО»

Основой алгоритма навигационной системы «НВмикро» является классический алгоритм БИНС, основанный на расчете координат методом двойного интегрирования ускорений акселерометров, пересчитанных в навигационную систему координат с использованием матрицы направляющих косинусов, обновляемой в уравнении Пуассона (рис. 5).

В качестве управляющих сигналов на алгоритм используются ошибки по скорости между скоростями БИНС и СНС. Указанные ошибки через коэффициент обратной связи  $K_1$  подаются как добавки к ускорениям объекта в навигационной системе координат и через коэффициент  $K_2$  подаются как дополнительные угловые скорости движения навигационной системы координат. Введение подобных обратных связей приводит к изменению уравнению ошибок БИНС к виду (4).

$$\begin{cases} \delta \dot{V}_{E} = -g \Phi_{N} + a_{N} \Phi_{up} + B_{E} - K_{1} \delta V_{E} \\ \delta \dot{V}_{N} = g \Phi_{E} + a_{E} \Phi_{up} + B_{N} - K_{1} \delta V_{N} \\ \dot{\Phi}_{E} = -\frac{\delta V_{N}}{R} + \omega_{E}^{dr} - K_{2} \delta V_{N} \\ \dot{\Phi}_{N} = \frac{\delta V_{E}}{R} + \omega_{N}^{dr} + K_{2} \delta V_{E} \end{cases}$$

$$\tag{4}$$

где  $\delta V_i$  – суммарные ошибки по скорости, содержащие как погрешность ИНС, так и погрешности опорного источника информации (запаздывание и экранирование сигнала СНС). Разрешая данные уравнения относительно скоростей и углов получим уравнения (5).

$$\begin{cases} \vec{\delta V_E} + K_1 \delta \vec{V_E} + (v^2 + K_2 g) \delta V_E = -g \omega_E^{dr} + \dot{B}_E \\ \vec{\phi}_N + K_1 \dot{\phi}_N + K_2 g \phi_N = K_2 B_E + K_1 \omega_N^{dr} \end{cases}$$
(5)

Полученные уравнения показывают, что введенные обратные связи приводят к затухающим колебаниям второго порядка ошибок ИНС по углам горизонта и скоростям, причем период данных колебаний определяется коэффициентом  $K_2$ , а диссипативная составляющая зависит от коэффициента  $K_1$ . Таким образом, варьируя данные коэффициенты в реальном времени, можно добиваться как изменения времени переходного процесса, так и степени сглаживания сигнала ошибки по скорости и ошибки угла отклонения плоскости горизонта.



Рис. 5. Алгоритм навигационной системы «НВ-микро»

Для устранения ошибки по углу курсу ИНС в алгоритм дополнительно вводится обратная связь с коэффициентом  $K_3$ , которая рассчитывается на основании рассогласования текущих показаний ИНС по курсу и путевому углу СНС (6).

$$\dot{\Phi}_{up} = \frac{\delta V_E}{R} t g \varphi + \omega_{up}^{dr} - K_3 \cdot \delta \Phi_{up}$$
(6)

Как видно из представленного уравнения, введение подобной обратной связи также приводит к затухающе-

му переходному процессу, но уже апериодического рода, где коэффициент  $K_3$  также влияет на его длительность и сглаживание параметров.

Введение описанных выше обратных связей приводят к существенному уменьшению погрешностей ИНС по углам ориентации и скоростям, однако не охватывают расчет координат ИНС, который, по-прежнему, может накапливать погрешности из-за не полной компенсации погрешностей ИНС по скорости. Для устранения указанных погрешностей в алгоритм вводится дополнительный блок коррекции координат, в который дополнительно передаются сигналы ИНС по скорости для компенсации запаздывания координат СНС по времени.

#### VII. НАТУРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

Натурные испытания навигационной системы «НВмикро» (рис. 6) производились в составе системы «ВПНП-В1» (рис. 7) компании АО «Навигатор» на летательном аппарате (ЛА) АН-2 ТВС 2МС (рис. 8).



Рис. 6. Плата навигации блока «ВПНП-В1». В состав платы навигации входит навигационная система «НВ-микро», система спутниковой навигации UBlox-8M и встроенная система воздушных сигналов.

Система «ВПНП-В1» имеет в составе жидкокристаллический индикатор, на котором отображается текущие параметры ориентации ЛА, параметры скорости и высоты, а также параметры работы внутренних систем ЛА: двигателя, электропитания и прочих (рис. 9).

Система «ВПНП-В1» позиционируется компанией AO «Навигатор» как отечественный аналог замены системы индикации G1000 компании Garmin и может быть установлена практически на любой летательный аппарат в качестве бортовой системы индикации.



Рис. 7. Блок «ВПНП-В1», размещенный внутри самолета АН-2 ТВС 2МС



Рис. 8. Летательный аппарат АН-2 ТВС 2МС в ангаре



Рис. 9. Панель индикации системы «ВПНП-В1» в процессе полета на самолете «Икарус С-42»

Для анализа точности параметров ориентации и навигации, в состав испытательного оборудования дополнительно была включена курсовертикаль «HB-3» компании ООО «Интеграл», построенная на базе волоконно-оптических ДУСов с уходом порядка 0.03°/час и кварцевых акселерометров с уходом порядка 10<sup>-4</sup> м/с<sup>2</sup> (рис. 10).



Рис. 10. Внешний вид курсовертикали «НВ-3»

Курсовертикаль «HB-3» имеет существенно более высокие параметры точности в части определения углов ориентации и использовалась в качестве опорной системы для проверки точности системы «HB-микро».

В общей сложности было выполнено три полета описанного выше ЛА, в ходе которых выполнялись развороты ЛА с углами крена и тангажа порядка 30 градусов (рис. 11).

В процессе полетов проверялась точность отработки углов ориентации системой «НВ-микро» в условиях устойчивого приема сигнала СНС и наличии маневрирования ЛА.



Рис. 11. Поведение углов ориентации в процессе одного из полетов

#### А. Результаты испытаний

Результаты трех полетов сведены в итоговую таблицу 4. Как видно из представленной таблицы, даже при условии выполнения фигур пилотажа с большими значениями углов ориентации навигационная система «НВмикро» показывает приемлемые для выполнения пилотажа точности: погрешности системы практически не заметны глазу летчика.

Кроме того, в процессе проведения натурных испытаний, летчиком также были отмечены высокие динамические показатели навигационной системы «НВ-микро»: изменения углов крена и тангажа, фактически, не отставали от показаний штатной системы \$1000 компании Garmin, которая была установлена на борт в составе штатного оборудования. Данное обстоятельство говорит о высоком быстродействии расчета углов ориентации даже в условиях быстрых маневров и отсутствии запаздываний в сигналах.

ТАБЛИЦА IV. Точностные характеристики навигационной системы «НВ-микро» в проецссе натруных испытаний на летательном аппарате АН-2 ТВС 2МС

Параметр	Значения в полете №1	Значения в полете №2	Значения в полете №3
Крен, Тангаж (ста- тика)	0.4 °	0.6 °	0.3 °
Крен, Тангаж (ди- намика)	0.8 0	1.2 °	0.9 <sup>0</sup>
Путевой угол	0.2 0	0.3 °	0.2 °
Линейная скорость	0.1 м/с	0.2 м/с	0.1 м/с
Координаты	5 м	4 м	6 м

Дополнительно, анализ записанных в процессе натурных испытаний данных продемонстрировал, что погрешности датчиков навигационной системы «НВмикро» в режиме работающей температурной стабилизации составляли порядка 50...60 °/час для ДУСов и порядка 0.01 м/с<sup>2</sup> для акселерометров.

Данное обстоятельство говорит о целесообразности применения температурной стабилизации даже для таких компактных навигационных систем, как предложенная, поскольку обычный уровень погрешностей для сверхкомпактных МЭМС датчиков составляет порядка 100...200 °/час для ДУСов и порядка 0.05 м/с<sup>2</sup> для акселерометров.

#### VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная в рамках данной статьи навигационная система «НВ-микро» отличается сверхкомпактными габаритами и массой. Не смотря на данные особенности, система включает в себя сразу два МЭМС датчика, температура каждого из которых поддерживается на уровне +50 ПС аппаратной системой температурной стабилизации на базе разогревающего транзистора. Данное обстоятельство позволяет существенно повысить точностные характеристики используемых МЭМС датчиков и избежать сложной и трудоемкой процедуры их тарировки.

Алгоритм предложенной навигационной системы использует в своем составе классический алгоритм БИНС с управляющими сигналами, пропорциональными разности ошибок БИНС и СНС. Изменение коэффициентов коррекции сигналов в процессе работы алгоритма позволяет добиваться не только оптимальных с точки зрения точности результатов, но и выполнять расчет параметров навигационного алгоритма с минимальными задержками для получения наиболее высокодинамичных показателей.

Проведенные натурные испытания на легкомоторном летательном аппарате продемонстрировали приемлемые для пилотажа точности и высокие динамически характеристики навигационной системы «НВ-микро».

#### Литература

- [1] Али Б., Садеков Р.Н., Цодокова В.В. Алгоритмы навигации беспилотных летатель-ных аппаратов с использованием систем технического зрения. Гироскопия и навигация. 2022. Т. 30. № 4 (119). С. 87-105.
- [2] Salychev, O.S., MEMS-based inertial navigation: Expectations and reality, Moscow: Bauman MSTU Press, 2012, 207 p.
- [3] Пазычев Д.Б., Садеков Р.Н. Температурная стабилизация МЭМС датчика. В сборнике: XXVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. 2020. С. 295-298.
- [4] Пазычев Д.Б., Садеков Р.Н. Имитационное моделирование ошибок инс различного класса точности. В сборнике: XXVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. 2020. С. 189-192.
- [5] https://www.integral-group.pro/
- [6] Кузовков Н.Т., Карабанов С.В., Салычев О.С. Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.

## Результаты разработки и тестирования алгоритма авиационной курсовертикали на базе микромеханических датчиков

Н.Б. Вавилова Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова Москва, Россия nb-vavilova@yandex.ru

И.А. Папуша Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова Москва, Россия ipapusha@yandex.ru

А.Ю. Куликова Ульяновское конструкторское бюро приборостроения г. Ульяновск, Россия nio25@ukbp.ru А.А. Голован Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова Москва, Россия aagolovan@yandex.ru

В.А. Павлинов Ульяновское конструкторское бюро приборостроения г. Ульяновск, Россия nio25@ukbp.ru

А.А. Ефимочкин Ульяновское конструкторское бюро приборостроения г. Ульяновск, Россия nio25@ukbp.ru

Аннотация—В статье приводятся результаты разработки алгоритма авиационной курсовертикали на базе микромеханических датчиков, входящей в состав системы резервных приборов. Описываются особенности построения алгоритма определения ориентации. Демонстрируются результаты оценки точности определения углов ориентации по материалам полетов.

Ключевые слова—курсовертикаль, инерциальные микромеханические датчики, интегрированная система резервных приборов, система воздушных сигналов, фильтр Калмана, обратные связи.

#### I. Введение

Для определения ориентации летательного аппарата (ЛА) в качестве резервной системы используются курсовертикали, построенные на базе инерциальных микромеханических датчиков – датчиков угловой скорости (ДУС) и акселерометров. Такие системы получают широкое распространение благодаря своей компактности, надежности, низкому энергопотреблению, стоимости.

Разработанная в АО «УКБП» интегрированная система резервных приборов (ИСРП) предназначена для автономного определения параметров ориентации, высотно-скоростных параметров и индикации их на собственном ЖК-дисплее. В состав системы входит блок инерциальных микромеханических датчиков, а также измерительный канал системы воздушных сигналов (СВС), датчик магнитного курса и резервный источник питания (опционально). Стойкость системы к воздействию внешних факторов подтверждена многочисленными испытаниями, что гарантирует высокую надежность прибора. При этом система отличается небольшими габаритами. В вычислителе ИСРП определяются, в частности, параметры ориентации ЛА (крен, тангаж, курс) и высотно-скоростные параметры (барометрическая высота, истинная воздушная скорость, приборная скорость, вертикальная скорость). Основной информацией для оценки параметров ориентации служат данные блока микромеханических датчиков, а дополнительная А.В. Козлов Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова Москва, Россия a.kozlov@navlab.ru

М.А. Шафеев Ульяновское конструкторское бюро приборостроения г. Ульяновск, Россия nio25@ukbp.ru

Т.В. Рашкина Ульяновское конструкторское бюро приборостроения г. Ульяновск, Россия nio25@ukbp.ru

информация привлекается для построения интегрированного решения.

АО «УКБП» совместно с лабораторией управления и навигации МГУ им. М.В. Ломоносова разработан и внедрен алгоритм курсовертикали для ИСРП. Основу алгоритма составляет коррекция низкоточной бескарданной инерциальной навигационной системы (БИНС) на базе микромеханических датчиков при помощи информации об истинной воздушной скорости, полученной путем обработки данных СВС, в сочетании с коррекцией при помощи внешней информации о курсе. Средством коррекции могут также служить данные о нулевой скорости во время остановок ЛА в процессе руления. Отметим, что алгоритм остаётся жизнеспособным для определения ориентации и при отсутствии какой-либо внешней скоростной информации. В алгоритме предусматриваются различные режимы работы, связанные с наличием средств коррекции (интегрированный с коррекцией от СВС и автономный).

В работе дается краткое описание алгоритма, основу которого составляют процедуры калмановской фильтрации с введением корректирующих обратных связей. Представлены результаты оценки точности алгоритма определения ориентации при помощи ИСРП на основе данных, полученных в ходе испытательных полетов самолета MC-21. В качестве эталонной информации использовалось независимое решение от БИНС навигационного класса точности.

#### II. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Общая последовательность этапов алгоритма следующая:

 начальная выставка – определение углов крена и тангажа при помощи данных от акселерометров, определение курса при помощи внешней информации о курсе;

- решение динамических уравнений для определения скорости и кинематических уравнений для определения ориентации на одном такте;
- определение оценки ошибок определения скорости, ориентации и оценки инструментальных погрешностей датчиков (нулей акселерометров и дрейфов ДУС) в текущий момент времени при помощи информации об истинной воздушной скорости ЛА, истинном курсе, а также нулевой скорости на остановках во время руления;
- компенсация ошибки определения траекторных параметров и инструментальных погрешностей датчиков при помощи корректирующей обратной связи в фильтре Калмана.

При постановке задачи стохастического оценивания в алгоритме используется упрощенная модель погрешностей информации об истинной воздушной скорости в виде белого шума с нулевым средним и известной интенсивностью. На реальные погрешности определения скорости при помощи СВС влияют многочисленные факторы, прежде всего, наличие ветра. Тем не менее, использование измерений СВС с погрешностью в виде шума с интенсивностью порядка 10 м/сек оказывается эффективным для оценки ошибок определения ориентации на основе данных от грубых микромеханических датчиков.

#### III. РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНКИ КУРСОВЕРТИКАЛИ В ПОЛЕТАХ

Ниже приводятся оценки точности алгоритма определения ориентации при помощи ИСРП на основе данных, полученных в ходе испытательных полетов самолета МС-21. В качестве эталонной информации использовалось независимое решение от БИНС навигационного класса точности. Входные параметры, используемые в алгоритме ИСРП, вместе с полученным решением регистрировались на борту с частотой 75 Гц. Также регистрировались данные эталонной системы. Для оценки точности алгоритма курсовертикали использовались данные 35 полетов одного борта.

Значения СКО показаний датчиков, реализовавшиеся на стоянке в одном из летных экспериментов, приведены в табл. 1.

ТАБЛИЦА I. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРЕНИЙ ДАТЧИКОВ КУРСОВЕРТИКАЛИ В СТАТИКЕ

		Характ	еристика	шума изм	иерений	
		ДУС [°/с]		Акс[g]		
СКО	1	2	3	1	2	3
на 75Гц	0.18	0.19	0.20	0.0029	0.0072	0.0071

На рис. 1 приведен график эталонного крена и крена на выходе ИСРП в одном из полетов.

На рис. 2–4 представлены графики значений статистических параметров погрешностей определения тангажа, крена и курса – среднего значения (*m*), СКО ( $\sigma$ ) и характеристики  $|m|+2\sigma$  для множества из 35 полетов в зависимости от номера полета.



Рис. 1. Угол крена по данным ИСРП и эталонной системы



Рис. 2. Статистические характеристики погрешностей определения тангажа по данным 35 полетов



Рис. 3. Статистические характеристики погрешностей определения крена по данным 35 полетов



Рис. 4. Статистические характеристики погрешностей определения курса по данным 35 полетов

Результаты статистической обработки материалов полетов для оценки точности определения ориентации при помощи ИСРП показывают, что  $|m|+2\sigma$  ошибок определения углов имеют значение порядка 1°, что является приемлемой величиной.

#### IV. Выводы

В работе представлены результаты разработки алгоритма курсовертикали на базе микромеханических датчиков с использованием информации СВС и внешнего курса. Разработанный алгоритм основан на фильтре Калмана в варианте обратных связей. Полученные в ходе испытательных полетов самолета MC-21 данные показали приемлемую точность алгоритма курсовертикали. Достигнутые характеристики достаточны для выполнения испытательных полетов самолетов во всех режимах.

#### Литература

- Козицин В. К., Кожевников В. И.,.Макаров Н. Н., Новоселов О.Н. Интегрированная система резервных приборов. Патент RU 2337315.
- [2] Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. Краткий курс теории инерциальной навигации. . М.:ИПУ РАН, 2022. 148 с

## Обзор и сравнительный анализ алгоритмов компенсации методических погрешностей от некоммутативных явлений

С.В. Смирнов АО «ЦНИИАГ» Москва, Россия 1410@cniiag.ru

М.Н. Сильчук АО «ЦНИИАГ» Москва, Россия 1412@cniiag.ru А.И. Карачков АО «ЦНИИАГ» Москва, Россия 1412@cniiag.ru

Г.Ю. Киряченко *АО «ЦНИИАГ»* Москва, Россия 1412@cniiag.ru

Аннотация—Целью работы поставлено проведение обзора и сравнительного анализа алгоритмов компенсации погрешностей от некоторых видов некоммутативных эффектов – конического движения или «конинга» (от англ. «Coning motion») и «скаллинга» (от англ. «Sculling motion»). Сравнивались известные методы и вновь разработанные.

Ключевые слова—некоммутативные явления, предварительное интегрирование, коническое движение, «скаллинг», алгоритмическая компенсация.

#### I. Введение

В бесплатформенных инерциальных навигационных системах (БИНС), алгоритм которых построен на использовании матрицы направляющих косинусов, способом решения задачи ориентации является решение уравнения Пуассона:

$$\dot{C} = C \cdot \omega \tag{1}$$

Для анализа взаимосвязи угловой скорости и приращения угла, рассмотрим дифференциальное уравнение Бортца [1].

$$\dot{\varphi} = \omega + \frac{1}{2}\varphi \times \omega + \frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi}{2} ctg \frac{\varphi}{2} \right) \varphi \times \left(\varphi \times \omega\right)$$
(2)

где  $\dot{\phi}$  – производная от вектора приращения угла;

ω – вектор угловой скорости;

φ – вектор приращения угла.

В самом простом случае, когда направление вектора угловой скорости  $\omega$  не меняет своего положения в пространстве за один такт решения задачи ориентации, приращение углов ориентации объекта за один такт есть интеграл от угловой скорости движения связанной системе координат (СК) за один такт работы вычислителя [1].

$$\varphi = \int_{t}^{t_{k+1}} \omega dt \tag{3}$$

В данном случае, уравнение (3), примет вид:

$$\dot{\phi} = \omega$$
 (4)

Ю.Г. Егоров АО «ЦНИИАГ» Москва, Россия 1412@cniiag.ru

Г.С. Тараненко *АО «ЦНИИАГ»* Москва, Россия grigoriy1702@gmail.com

Однако в реальности невозможно точно определить приращение угла путём простого интегрирования показаний датчиков угловой скорости (ДУС), так как вектор угловой скорости, в большинстве случаев, изменяет своё направление в пространстве за время одного такта работы бортовой цифровой вычислительной машины (БЦВМ). При определённых условиях, это может повлечь за собой значительные погрешности в решении задачи ориентации, величина которых может быть сравнима со случайными погрешностями гироскопов и даже превышать их.

#### А. Кинематика конического движения

Одной из самых наглядных ситуаций, в которых могут проявиться данные погрешности, является коническое движение или явление некоммутативности конечных поворотов. При коническом движении твёрдого тела, два из трёх его углов ориентации изменяются по периодическому закону, причём фазы этих колебаний имеют сдвиг друг относительно друга. В результате, третья ось тела, вокруг которой колебания не совершаются, описывает в пространстве конус [2].

Кинематические уравнения конического движения могут быть представлены следующим образом. Пусть объект совершает угловые колебания с частотой f вокруг осей X и Y связанной с объектом СК. Амплитуды колебаний по осям X и Y обозначим  $\theta_x$  и  $\theta_y$  соответственно. Также, существует фазовый сдвиг  $\phi$  между этими колебаниями.

С учётом этого, вектор угловой скорости объекта в связанной СК будет иметь вид:

$$\omega = 2\pi f \left[ \theta_x \cos 2\pi f t \quad \theta_y \cos \left( 2\pi f t + \varphi \right) \quad 0 \right]^T \tag{5}$$

При совершении объектом конического движения вокруг осей X и Y, возникает ошибка определения угла ориентации вокруг оси Z. Скорость нарастания этой ошибки будет иметь следующую зависимость [2]:

$$\delta \dot{\alpha}_{z} = \pi f \theta_{x} \theta_{y} sin \varphi \left[ 1 - \frac{sin 2\pi f \, \delta t}{2\pi f \, \delta t} \right] \tag{6}$$

где  $\delta t$  – дискрета времени работы БЦВМ.

#### В. Кинематика «скаллинга»

Ещё одним типом движения, которое может приводить к погрешностям подобного рода, является «скаллинг». «Скаллинг» это движение твёрдого тела, при котором оно одновременно совершает поступательные и вращательные колебания, по двум ортогональным осям, например, X и Y соответственно. Такой вид движения вызывает ошибку линейной скорости вдоль оси Z [2].

Кинематика этого движения может быть описана следующим образом: пусть тело совершает угловые колебания вокруг оси Х, при одновременных линейных колебаниях вдоль оси Ү. Частота линейных и угловых колебаний одинакова. В этом случае, угловая скорость  $\omega$  колебаний тела будет иметь следующий вид [2]:

$$\omega = \begin{bmatrix} 2\pi f \, \theta_x \cos 2\pi f t & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{7}$$

где *f* – частота колебаний;

θ<sub>x</sub> – амплитуда угловых колебаний вокруг оси Х.

Закон изменения ускорения  $a^b$  тела при линейных колебаниях будет описываться следующим выражением:

$$a^{b} = \begin{bmatrix} 0 & A_{y} \sin\left(2\pi f t + \varphi\right) & 0 \end{bmatrix}^{T}$$
(8)

где  $A_y$  – амплитуда линейных колебаний тела вдоль оси Y;  $\varphi$  – разность фаз между линейными и угловыми колебаниями тела.

Влияние погрешности от «скаллинга» может быть значительным, если частота решения задачи навигации соизмерима с частотой этих колебаний. Согласно [2], ошибка линейной скорости по оси Z может быть выражена следующим образом:

$$\delta u_z^n = \frac{1}{2} \Theta_x A_y \delta t \cos \varphi \left( 1 - \frac{\sin 2\pi f \, \delta t}{2\pi f \, \delta t} \right) \tag{9}$$

Исходя из причин данных погрешностей, существует два основных способа их минимизации: увеличение частоты решения задачи ориентации или применение специальных алгоритмов компенсации без повышения частоты БЦВМ, обзор и сравнительный анализ которых и представлен в данной работе.

#### II. Сравнительный анализ алгоритмов компенсации «конинга»

#### А. Метод Бортца

Первый метод основан на предположении, что вектор угловой скорости объекта меняет своё направление с постоянной скоростью на каждом такте интегрирования [3]. Математически, это выражается в учёте второго слагаемого при численном решении уравнения (2). Данный метод работает с любой кратностью частот ДУС/БЦВМ.

Кратность частот – отношение частоты опроса ДУС к частоте решения задачи ориентации (рис. 1).

Математически, метод Бортца описывается следующими соотношениями [4]:

$$\theta(p,m) = \sum_{n=1}^{p} \Delta \theta(n,m)$$
(10)

где  $\theta(p,m)$  – приращение угла за р тактов работы ДУС;  $\Delta \theta(n,m)$  – приращение угла, полученное от ДУС в момент времени между (mN+n-1) -м и (mN+n) -м тактом опроса ДУС.



Рис. 1. Временная диаграмма работы БИНС с понижением частоты.  $\theta(m)$  – приращение угла за один такт работы БЦВМ, в который входит к тактов работы ДУС.  $\Delta\theta(k,m)$  – приращение угла за один такт опроса гироскопов

$$R(m) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2} \Big[ \theta(p,m) \times \Delta \theta(p,m) \Big]$$
(11)

где R(m) – слагаемое, являющееся компенсацией погрешности от некоммутативности конечных поворотов (так называемая «коническая поправка»);

 $\Delta \theta(p,m)$  – приращение угла, полученное от ДУС в момент времени p.

Следовательно, в общем виде, алгоритм предварительного интегрирования сигналов с гироскопов в общем виде может быть записан следующим образом [4]:

$$\varphi(m) = \theta(N, m) + R(m) \tag{12}$$

где  $\varphi(m)$  – приращение углов в связанной СК за один такт работы БЦВМ, с учётом конической поправки;

 $\theta(N,m)$  – приращение углов в связанной СК за один mй такт работы БЦВМ;

Индексы m, n и N – целые числа, a n принимает значения от 1 до N;

Все описанные далее алгоритмы компенсации погрешности от конического движения будут различаться лишь видом конической поправки.

#### В. Метод МакКерна–Эдвардса

Данный метод так-же, как и предыдущий, инвариантен к отношению частот опроса ДУС и работы БЦВМ. Коническая поправка данного алгоритма описывается следующим образом [4]:

$$R(m) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2} \Big[ \theta(p,m) \times \Delta \theta(p,m) \Big] + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{12} \Big[ \Delta \theta(p-1,m) \times \Delta \theta(p,m) \Big]$$
(13)

где  $\Delta \theta(p-1,m)$  – импульс с ДУС за предыдущий такт его работы.

#### С. Метод Гилмора–Джордана

Алгоритм Гилмора–Джордана описывается следующими соотношениями [4]:

$$\theta(p,m) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{2} \Delta \theta(k,n,m)$$
(14)

$$R(m) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \theta(p,m) \times \sum_{k=1}^{2} \Delta \theta(k,p,m) \right] + \left\{ \frac{2}{3} \left[ \Delta \theta(1,p,m) \times \Delta \theta(2,p,m) \right] \right\}$$
(15)

$$\varphi(m) = \theta(N, m) + R(m) \tag{16}$$

#### D. Метод Иньяни

Математически, данный метод формулируется следующим образом [5]:

$$\theta(p,m) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{5} \Delta \theta(k,n,m)$$
(17)

$$R(m) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \theta(p,m) \times \sum_{k=1}^{5} \Delta \theta(k,p,m) \right] + \\ \left[ \frac{125}{252} \Delta \theta(1,p,m) + \frac{25}{24} \Delta \theta(2,p,m) + \\ \frac{325}{252} \Delta \theta(3,p,m) + \frac{1375}{504} \Delta \theta(4,p,m) \right] \\ \times \Delta \theta(5,p,m) \end{cases}$$
(18)

#### E. Вывод предложенного алгоритма компенсации конического движения

Далее, выведем новый алгоритм компенсации «конинга» для кратности понижения частоты равной 10.

В общем виде второе слагаемое конической поправки R(m) может быть описано следующим образом [6]:

$$R^{*}(\mathbf{m}) = \begin{bmatrix} k_{2n-j} \Delta \theta_{m-1}(j) + \\ \sum_{j=n-p+1}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} k_{n-i} \Delta \theta_{m}(i) \end{bmatrix} \times \Delta \theta_{m}(n) \quad (19)$$

где n – кол-во измерений с ИИБ, обрабатывающееся на текущем такте работы БЦВМ;

р – кол-во измерений с ИИБ (выходных измерений гироскопа) с предыдущего такта работы БЦВМ, включённое в слагаемое компенсации «конинга» на текущем такте; k – неизвестные коэффициенты;  $\Delta \theta_{m-1}(j)$  – приращение угла (выходной сигнал с гироскопа) за предыдущий такт работы БЦВМ;

 $\Delta \theta_m(j)$  – приращение угла (выходной сигнал с гироскопа) за текущий такт работы БЦВМ;

 $\Delta \theta_m(n)$  – последний сигнал с гироскопа, приходящийся на текущий такт работы БЦВМ.

Для получения конической поправки для желаемой кратности частот ДУС/БЦВМ необходимо найти соответствующие коэффициенты, которые вычисляются при помощи предложенной в [6] методики.

В результате применения алгоритма [6] для кратности частот равной 10, получим следующие коэффициенты:

$$k_{1} = \frac{40476195}{6541381} = 6.1877$$

$$k_{2} = \frac{23238021}{7075015} = 3.2845$$

$$k_{3} = \frac{48388682}{12766065} = 3.7904$$

$$k_{4} = \frac{10424399}{3597462} = 2.8977$$

$$k_{5} = \frac{20791553}{8219697} = 2.5295$$

$$k_{6} = \frac{28917973}{14506735} = 1.9934$$

$$k_{7} = \frac{17398237}{11590625} = 1.5011$$

$$k_{8} = \frac{209517778}{209540713} = 0.99989$$

$$k_{9} = \frac{764020520}{1528024499} = 0.50001$$

Следовательно, коническая поправка, использующая выведенные выше коэффициенты будет выглядеть следующим образом:

$$R(m) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[ \theta(p,m) \times \sum_{k=1}^{10} \Delta \theta(k,p,m) \right] + \\ \sum_{p=1}^{n} \left\{ \begin{array}{l} k_{9} \Delta \theta_{m}(1) + k_{8} \Delta \theta_{m}(2) + k_{7} \Delta \theta_{m}(3) + \\ k_{6} \Delta \theta_{m}(4) + k_{5} \Delta \theta_{m}(5) + k_{4} \Delta \theta_{m}(6) + \\ k_{3} \Delta \theta_{m}(7) + k_{2} \Delta \theta_{m}(8) + k_{1} \Delta \theta_{m}(9) \end{array} \right] \times \right\}$$

$$(21)$$

Или, что эквивалентно:

$$R(m) = \sum_{p=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \theta(p,m) \times \sum_{k=1}^{10} \Delta \theta(k,p,m) \right] + \left\{ \sum_{i=1}^{9} k_{10-i} \Delta \theta_m(i) \right\} \times \Delta \theta_m(10) \right\}$$
(22)

Затем проведём сравнительный анализ рассмотренных алгоритмов компенсации «конинга». На рис. 2 представлена зависимость относительной ошибки, вызванной коническим движением, от отношения частот конического движения и решения навигационной задачи.

На рис. 2 можно видеть, что разработанный алгоритм имеет наименьшую ошибку по сравнению с известными представленными ранее алгоритмами.



Рис. 2. Сравнительный анализ методов компенсации «конинга». По оси абсцисс отложено отношение частоты конического движения к частоте опроса датчиков БИНС. По оси ординат – относительная ошибка того или иного алгоритма предварительного интегрирования показаний ДУС

#### III. Вывод методов компенсации «скаллинга»

Далее, на основе метода, описанного в [7] было произведено предобразование вышеописанных алгоритмов компенсации «конинга», включая вновь разработанный, в алгоритмы компенсации «скаллинга». Результаты преобразований представлены ниже.

#### А. Метод Бортца

$$v_{scul}(m) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta(p,m) \times \Delta v(p,m) \\ + v(p,m) \times \Delta \theta(p,m) \end{bmatrix}$$
(23)

где  $\Delta v(p,m)$  – приращение скорости объекта в связанной СК за один такт опроса датчиков БИНС в момент времени р;

v(p,m) – приращение скорости объекта в связанной СК за р тактов опроса датчиков БИНС.

В. Метод МакКерна – Эдвардса

$$v_{scul}(m) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta(p,m) \times \Delta v(p,m) + \\ v(p,m) \times \Delta \theta(p,m) \end{bmatrix} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} \Delta \theta(p-1,m) \times \Delta v(p,m) + \\ \Delta v(p-1,m) \times \Delta \theta(p,m) \end{bmatrix}$$
(24)

где  $\Delta v(p-1,m)$  – приращение скорости объекта в связанной СК за один так опроса датчиков БИНС в момент времени p-1.

#### С. Метод Гилмора-Джордана

$$v_{scul}(m) = \sum_{p=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta(p,m) \times \sum_{k=1}^{2} \Delta v(k,p,m) + \\ v(p,m) \times \sum_{k=1}^{2} \Delta \theta(k,p,m) \end{bmatrix} + \\ \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \Delta \theta(1,p,m) \times \Delta v(2,p,m) + \\ \Delta v(1,p,m) \times \Delta \theta(2,p,m) \end{bmatrix} \right\}$$
(25)

D. Метод Иньяни

$$v_{scul}(m) = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta(p,m) \times \sum_{k=1}^{5} \Delta v(k,p,m) + \\ v(p,m) \times \sum_{k=1}^{5} \Delta \theta(k,p,m) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} k_{5-i} \Delta \theta_m(i) \end{bmatrix} \times \Delta v_m(5) + \\ \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} k_{5-i} \Delta v_m(i) \end{bmatrix} \times \Delta \theta_m(5) \end{bmatrix}$$
(26)

где

$$k_1 = \frac{125}{252}; \quad k_2 = \frac{25}{24}; \quad k_3 = \frac{325}{252}; \quad k_4 = \frac{1375}{504}.$$
 (27)

Е. Разработанный метод

$$v_{scul}(m) = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta(p,m) \times \sum_{k=1}^{10} \Delta v(k, p, m) + \\ v(p,m) \times \sum_{k=1}^{10} \Delta \theta(k, p, m) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \Delta v_m (10) + \\ \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \Delta \theta_m (10) \end{bmatrix}$$
(28)

#### F. Сравнительный анализ алгоритмов компенсации погрешности от «скаллинга»

Далее, был также произведён сравнительный анализ полученных алгоритмов с точки зрения точности, результаты которого приведены на рис. 3.



Рис. 3. Сравнительный анализ алгоритмов компенсации погрешности от «скаллинга»

Как можно видеть из рис. 3, частотные характеристики алгоритмов компенсации скаллинга такие-же, как и у исходных алгоритмов компенсации «конинга» из которых они были получены, что подтверждает достоверность предложенного в [7] способа.

#### IV. Заключение

В данной работе проведён обзор и сравнительный анализ различных по своей точности и структуре алгоритмов компенсации погрешностей от «конинга» и «скаллинга». Рассмотрена кинематика движения, вызывающего эти погрешности. На основе существующей методики вывода коэффициентов для алгоритма компенсации «конинга» для любого соотношения частот ДУС/БЦВМ, был разработан алгоритм, работающий с кратностью отношения частот равной 10. Разработана имитационная математическая модель БИНС, с помощью которой было произведено сравнение разработанного алгоритма с уже существующими, с точки зрения точности. Выведены алгоритмы компенсации «скаллинга» с использованием существующей методики. В результате, были преобразованы все рассмотренные алгоритмы компенсации «конинга», включая вновь разработанный. Проведён сравнительный анализ полученных алгоритмов компенсации «скаллинга».

#### Литература

- Bortz, J. E., "A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-7, No. 1, 1971, pp. 61–66.
- [2] D. Titterton and J. Weston, "Strapdown inertial navigation technology - 2nd edition, 2004.
- [3] Ignagni, M. B., "Optimal Strapdown Attitude Integration Algorithms," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 13, No. 4, 1990, pp. 738–743.
- [4] D.A. Tazartes, J.G. Mark, "Coning compensation in strapdown inertial navigation systems", United States Patent, №5828980, 27.10.1998.
- [5] Ignagni, M. B., "Efficient Class of Optimal Coning Compensation Algorithms," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 19, No. 2, 1996, pp. 424–429.
- [6] Chan Gook Park, Kwang Jin Kim, Jang Gyu Lee, Dohyoung Chung, "Formalized Approach to Obtaining Optimal Coefficients for Coning Algorithms", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 22, No. 1, 1999, pp. 165–168.
- [7] Roscoe, Kelly M., "Equivalency Between Strapdown Inertial Navigation Coning and Sculling Integrals/Algorithms." Journal of Guidance Control and Dynamics, Vol. 24, No. 2, 2001, pp. 201–205.

# Сравнительный анализ алгоритмов начальной выставки БИНС с помощью платформенной ИНС

Л.В. Водичева *АО «НПО автоматики* им. академика Н.А. Семихатова» Екатеринбург, Россия <u>avt@npoa.ru</u> Ю.В. Парышева АО «НПО автоматики им. академика Н.А. Семихатова» Екатеринбург, Россия Я.С. Савельева АО «НПО автоматики им. академика Н.А. Семихатова» Екатеринбург, Россия

Аннотация—Рассматривается метод начальной выставки БИНС для космических средств выведения (КСВ) по информации платформенной ИНС, установленной на том же носителе. Обсуждаются три варианта метода, основанные на обработке фильтром Калмана разности измерений кажущегося ускорения акселерометрами БИНС и платформенной ИНС и отличающиеся способом формирования разностного сигнала измерения. Приводятся результаты сравнительной оценки точности вариантов метода.

Ключевые слова—космическое средство выведения, трехосный гиростабилизатор, бесплатформенный инерциальный измерительный блок, начальная выставка, фильтр Калмана.

#### I. Введение

Одним из вариантов построения инерциальных измерительных систем для перспективных КСВ, системы управления которых разрабатываются в Научнопроизводственном объединении автоматики (НПОА) им. академика Н.А. Семихатова, является комбинированная схема. Такая схема содержит трехосный гиростабилизатор (ТГС), включающий гиростабилизированную платформу (ГСП) с установленными на ней тремя маятниковыми акселерометрами, и бесплатформенный инерциальный измерительный блок (БИИБ) на базе трех волоконно-оптических гироскопов (ВОГ) и трех маятниковых акселерометров. Одним из проблемных вопросов использования БИИБ для КСВ является обеспечение точности автономной начальной азимутальной выставки. ВОГ, точностные характеристики которых удовлетворяют полетным требованиям, позволяют обеспечить точность азимутальной выставки на уровне 20' (35) при требовании не более 4'.

Наличие в составе измерительной системы ТГС, с помощью которого азимутальная выставка платформенной ИНС осуществляется с точностью 1.5', позволяет существенно повысить точность азимутальной выставки БИИБ. Необходимым условием для этого является горизонтальное положение изделия на техническом комплексе, где осуществляется калибровка ТГС. В этом случае на стартовом комплексе при вертикальном положении изделия азимутальная ориентация БИИБ может быть определена через азимутальную ориентацию ГСП, ориентацию ГСП относительно корпуса ТГС, рассчитываемую по показаниям датчиков углов (ДУ), установленных по осям карданова подвеса (КП) ТГС, и ориентацию корпуса ТГС относительно приборной системы координат БИИБ. Взаимная ориентация ТГС и БИИБ может быть определена по измерениям их акселерометрами нормальной реакции опоры на ускорение силы тяжести

(далее – ускорение силы тяжести) при двух различных ориентациях согласуемых систем координат относительно измеряемого вектора: горизонтальной на техническом комплексе и вертикальной на стартовом комплексе. С учетом погрешностей начальной выставки ГСП и расчета ориентации ГСП относительно корпуса ТГС погрешность определения взаимной ориентации БИИБ и корпуса ТГС не должна превышать 3.4'. Задача усложняется влиянием ветровых воздействий на стартовом комплексе, которые искажают измеряемый вектор.

Этот метод, который можно отнести к классу методов векторного согласования [1], был рассмотрен в докладе авторов, представленном на XXVII Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам [2]. В данном докладе обсуждаются три варианта доработанных алгоритмов его реализации и результаты сравнительной оценки погрешностей, обусловленных инструментальными погрешностями приборов и угловыми колебаниями корпуса КСВ.

#### II. Описание метода

Введем следующие системы координат:

*ONHE* – географическая система координат (ГСК) (*ON* – на север, *OH* – вертикально вверх, *OE* – на восток);

ОХҮZ – инерциальная стартовая система координат (ИССК), оси которой на момент старта параллельны осям ГСК, повернутой вокруг вертикальной оси на угол, определяющий плоскость полета КСВ;

 $OX_SY_SZ_S$  – ортогональная приборная система координат (ПСК) БИИБ, привязанная к осям чувствительности (ОЧ) акселерометров БИИБ;

 $OX_BY_BZ_B$  – ортогональная система координат, связанная с корпусом КСВ и с корпусом ТГС (КСК ТГС); ось  $OY_B$  направлена вдоль продольной оси корпуса КСВ;

 $OX_PY_PZ_P$  – ортогональная платформенная система координат (ПлСК), привязанная к ОЧ акселерометров, установленных на ГСП; в полете и при решении задач начальной выставки номинально совпадает с ИССК.

Рассогласование между КСК ТГС  $OX_BY_BZ_B$  и ПСК БИИБ  $OX_SY_SZ_S$  задается с помощью вектора ориентации [3], определяющего поворот от  $OX_SY_SZ_S$  к

 $OX_B Y_B Z_B$  и имеющего одинаковые проекции на оси обеих систем координат:  $\vec{\mu}^B = \vec{\mu}^S = [\mu_x, \mu_y, \mu_z]^T$ .

При установке приборов на КСВ соответствующие оси ПСК БИИБ и КСК ТГС ориентируются параллельно и углы рассогласования между ними не более 30'. Матрица перехода от ПСК БИИБ к КСК ТГС с точностью до членов второго порядка имеет вид:

$$\Delta M \approx E - \begin{bmatrix} 0 & -\mu_z & \mu_y \\ \mu_z & 0 & -\mu_x \\ -\mu_y & \mu_x & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\mu_z & \mu_y \\ \mu_z & 0 & -\mu_x \\ -\mu_y & \mu_x & 0 \end{bmatrix}^2 (1)$$

Поскольку углы рассогласования между согласуемыми системами координат малы, этапа грубой выставки не требуется. При решении задач точного определения взаимной ориентации используется методика, разработанная и используемая в НПОА для решения задач начальной выставки и калибровки ИНС [2,4,5,6]. Методика включает двойное интегрирование измеряемого разностного сигнала кажущегося ускорения и его обработку четырехмерным фильтром Калмана по каждой составляющей отдельно. Элементы вектора состояния фильтра включают обобщенные параметры, представляющие собой функции углов рассогласования и инструментальных погрешностей приборов и эквивалентные линейному ускорению и угловой скорости. По обобщенным параметрам оцениваются выходные параметры решаемой задачи, в нашем случае - углы рассогласования между ПСК БИИБ и КСК ТГС. Оценка фильтром погрешностей, эквивалентных угловой скорости, позволяет исключить их влияние на точность определения углов рассогласования, рассчитываемым по обобщенным параметрам, эквивалентным ускорению.

По измерениям ускорения силы тяжести в одной ориентации можно определить только горизонтальные составляющие вектора рассогласования  $\mu_N, \mu_E$ , вертикальная составляющая  $\mu_H$  не наблюдается. Горизонтальные составляющие вектора рассогласования, оцененные в первой, горизонтальной ориентации, пересчитываются в оси ПСК БИИБ и по ним формируется первое приближение матрицы рассогласования:

$$\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} = R_H \cdot \Delta R \cdot \begin{bmatrix} \mu_N \\ 0 \\ \mu_E \end{bmatrix}; \ \Delta M_H = \begin{bmatrix} 1 & \mu_z & -\mu_y \\ -\mu_z & 1 & \mu_x \\ \mu_y & -\mu_x & 1 \end{bmatrix}, \ r \pi e$$
(2)

 $\Delta R$  – матрица углов заклона и разворота корпуса КСВ вокруг продольной оси, определяемая до начала решения рассматриваемой задачи;  $R_H$  – номинальная матрица перехода от вертикального положения к горизонтальному, которое получается поворотом корпуса КСВ вокруг оси  $OZ_R$  на 90°.

Полная оценка матрицы (1) осуществляется итерационно: сначала при горизонтальной, затем при вертикальной ориентации корпуса КСВ. Оцененная в горизонтальной ориентации матрица рассогласования  $\Delta M_H$ учитывается при формировании разностного сигнала во второй, вертикальной предстартовой ориентации, где аналогично (2) по горизонтальным составляющим вектора рассогласования формируется матрица  $\Delta M_V$ . Результирующая матрица рассогласования определяется как произведение:  $\Delta M = \Delta M_V \cdot \Delta M_H$ .

Вышеописанная схема решения задачи реализуется для всех трех вариантов исследуемых алгоритмов; циклическая обработка информации осуществляется с частотой 20 Гц. Различие между вариантами заключается в способе формирования разностного сигнала измерения.

#### III. ФОРМИРОВАНИЕ РАЗНОСТНОГО СИГНАЛА ИЗМЕРЕНИЯ

В терминах метода векторного согласования [1] ПСК БИИБ является «ведомой» системой, а КСК ТГС – «ведущей». Однако ОЧ акселерометров ТГС жестко связаны не с «ведущей» КСК ТГС, а с ПлСК, оси которой в обеих ориентациях корпуса КСВ номинально ориентированы параллельно осям ИССК, что усложняет задачу. Ориентация между КСК и ПлСК меняется не только при переходе от горизонтального положения КСВ к вертикальному, но и на интервале наблюдения, поскольку ПлСК стабилизирована относительно инерциального пространства, а КСК в идеале неподвижна относительно Земли.

Для формирования разностного сигнала ускорения необходимо показания акселерометров ТГС и БИИБ пересчитать в одну и ту же базовую систему координат. Исследовались три возможных варианта.

1. Система координат, связанная с корпусом ТГС  $OX_BY_BZ_B$ . В этом случае информация акселерометров БИИБ не пересчитывается, а информация акселерометров ТГС пересчитывается с помощью ДУ ТГС, поэтому уходы ГСП и погрешности ВОГ БИИБ на формирование разностного сигнала не влияют. При этом сама базовая система координат является подвижной, что может привести к дополнительным погрешностям.

2. Платформенная система координат  $OX_PY_PZ_P$ . В этом варианте не пересчитывается информация акселерометров ТГС, а информация акселерометров БИИБ пересчитывается с помощью информации ДУ ТГС. Как и в предыдущем случае, ни уходы ГСП, ни погрешности ВОГ на формирование разностного сигнала не влияют и основным источником инструментальных погрешностей являются погрешности ДУ.

3. Инерциальная система координат, совпадающая с ПлСК ТГС на момент начала интервала наблюдения. В этом случае информация акселерометров ТГС пересчитывается по известным значениям систематических уходов ГСП, а информация акселерометров БИИБ пересчитывается с помощью двух матриц: матрицы ориентации, рассчитываемой по показаниям ВОГ БИИБ, и начальной матрицы, формируемой по показаниям ДУ ТГС в начальный момент времени. В этом случае пересчет информации в одну систему координат является достаточно сложным и содержит погрешности, обусловленные случайными уходами ГСП и погрешностями ВОГ БИИБ.

#### IV. МОДЕЛЬ И УРОВЕНЬ ЗАДАВАЕМЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

При сравнительной оценке точности вариантов метода рассматривались следующие источники погрешностей. Инструментальные погрешности ТГС. Эти погрешности можно разделить на четыре группы: погрешности акселерометров, уходы ГСП, погрешности датчиков угла и углы неортогональности осей КП. Модель эксплуатации системы управления КСВ предусматривает предстартовую калибровку параметров акселерометров (смещений нуля, масштабных коэффициентов и углов взаимной ориентации осей чувствительности) и составляющих уходов ГСП. Для этих погрешностей, модель которых приведена в [5], задавались только значения нестабильностей в запуске ( $3\sigma$ ). Для акселерометров: смещения нуля  $2 \cdot 10^{-4}$  м/с<sup>2</sup>, масштабные коэффициенты  $2 \cdot 10^{-3}$ %, углы неортогональности ОЧ 20". Для уходов, не зависящих от линейного ускорения 0.02"/с; линейно зависящих от ускорения 0.003"/с/g.

Смещения нуля датчиков углов и углы неортогональности осей КП ТГС в процессе эксплуатации не калибруются, их постоянные значения задавались нестабильностями от запуска к запуску, равными 40". В модели погрешностей ДУ, кроме смещения нуля, учитывалась динамическая погрешность преобразования угла в код.

Неортогональность осей КП формализуется следующим образом. Матрица перехода от КСК ТГС к ПлСК строится как матрица трех последовательных поворотов на углы, измеряемые ДУ, но не вокруг осей поворачиваемой ортогональной системы координат, а вокруг осей, ориентация каждой из которых задается двумя углами отклонения от номинального положения.

Все погрешности задавались постоянными значениями, за исключением погрешности ДУ преобразования угла в код, которая в каждом цикле моделировалась как случайная величина с равномерным законом распределения в диапазоне ±2'.

Инструментальные погрешности БИИБ. Соответствующие оси чувствительности акселерометров и ВОГ БИИБ параллельны, образуют ортогональную триаду и расположены симметрично относительно оси  $OY_S$  ПСК, которая номинально параллельна продольной оси корпуса КСВ. БИИБ в процессе эксплуатации не калибруется, его погрешности задавались постоянными величинами, имеющими уровень нестабильности от запуска к запуску. Для акселерометров: смещения нуля  $\Delta \dot{w}$   $6 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>, масштабные коэффициенты  $\Delta k^A$  0.06%, углы неортогональности  $\Delta \phi^A$  45″. Для ВОГ: смещения нуля 0.05″/с, масштабные коэффициенты 0.05%, углы ориентации относительно ПСК 1′.

Постоянные составляющие углов заклона корпуса КСВ относительно вертикального положения и угла разворота корпуса вокруг продольной оси. В горизонтальное положение корпус КСВ устанавливается менее точно и значения этих углов могут достигать 2°, в вертикальном положении не превышают 1°.

Ветровые возмущения. Угловое движение корпуса КСВ из-за ветра задавалось как конические колебания [6]. Горизонтальные составляющие угловой скорости моделировались гармониками с частотами и амплитудами, характерными для рассматриваемого класса КСВ. Частота и амплитуда основной гармоники задавались равными 0.2 Гц и 40'; максимальная частота 1.6 Гц с амплитудой 1.5'.

#### V. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Погрешности определения углов рассогласования между ПСК БИИБ и КСК ТГС оценивались методом математического моделирования с помощью программы на языке С++. Матрица перехода от ПСК БИИБ к КСК ТГС задавалась соотношением (1). Предполагалось, что погрешности измерения, рассматриваемые как случайные величины, некоррелированы, поэтому влияние каждого фактора на точность оценивалось отдельно, а дисперсия суммарной погрешности рассчитывалась как сумма дисперсий погрешностей оценки углов рассогласования.

В Табл. І приведены погрешности оценки углов рассогласования  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$ , обусловленные погрешностями ТГС, для всех трех вариантов алгоритмов. Погрешности акселерометров, за исключением смещений нуля горизонтальных акселерометров  $A_{X_p}$ ,  $A_{Z_p}$ , на точность оценок практически не влияют.

ТАБЛИЦА I

Погрешности оценки углов рассогласования, обусловленные									
погрешностями ТГС, '									
	Вариант І		Ba	Вариант II		Вариант III			
	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_z$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_z$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_z$
См. нуля акс.		0.07							
Уходы ГСП	1	$.3 \cdot 10^{-1}$	1	$7.1 \cdot 10^{-12}$		$1.3 \cdot 10^{-3}$			
См. нуля ДУ					0.67				
Стат. погр. ДУ	0.02	0.005	0.004	0.06	0.006	0.01		0.00	
Неорт. осей КП	0.93	1.3	0.93	0.94	1.3	0.93	0.94	1.3	0.93
Σ	1.15	1.48	1.15	1.16	1.49	1.16	1.16	1.49	1.16

Влияние погрешностей ТГС на точность для всех трех углов рассогласования практически одинаково. Исключение составляет только неортогональность осей карданова подвеса, которая проявляется при ненулевых углах поворота. Для угла рассогласования вокруг продольной оси  $\mu_y$ , который и определяет точность азимутальной выставки БИИБ, эта погрешность в 1.4 раза больше, чем для углов рассогласования вокруг поперечных осей  $\mu_x$ ,  $\mu_z$ . Это связано с тем, что угол  $\mu_y$  наблюдается при горизонтальном положении корпуса КСВ, когда угол поворота ГСП вокруг наружной оси КП равен 90° и соответствующие углы неортогональности вносят максимальный вклад в погрешность оценки.

Влияние погрешностей ТГС на точность оценки углов рассогласования практически одинаково и для всех трех вариантов. Здесь исключение составляют уходы ГСП, влияние которых для третьего варианта на несколько порядков больше, чем для первых двух. Это также объяснимо. В третьем варианте разностный сигнал формируется в инерциальной системе координат, куда информация акселерометров ТГС из-за наличия случайных уходов ГСП пересчитывается с погрешностями. Горизонтальные уходы оцениваются четырехмерным фильтром и учитываются в алгоритмах. Однако эта оценка осуществляется с погрешностью, к которой приводит вертикальный уход и которую можно оценить аналитически [5]. Аналитические оценки совпадают с расчетными с точностью до трех знаков после запятой.

Как видно из табл. 1, из погрешностей ТГС основной вклад в погрешности оценки углов рассогласования вносят смещения нуля датчиков углов и неортогональности осей карданова подвеса.

В табл. 2 приведены погрешности оценки углов рассогласования, обусловленные погрешностями БИИБ. Очевидно, что для первых двух вариантов алгоритмов погрешности ВОГ на точность оценок углов рассогласования не влияют. Для третьего варианта это влияние также мало, поскольку эквивалентные уходы оцениваются фильтром и учитываются в алгоритмах.

Наибольший вклад в погрешности оценки, одинаковый для всех углов рассогласования и всех вариантов алгоритмов, вносят смещения нуля акселерометров. Влияние погрешностей масштабных коэффициентов и углов неортогональности осей акселерометров также одинаково для всех трех вариантов алгоритмов, но для различных углов различно, что связано с геометрией взаимного расположения осей датчиков и осей ПСК БИИБ. Результаты расчетов хорошо согласуются с аналитическими оценками, которые легко получить в условиях неподвижного основания.

ТАГЛИНА	n
І АБЛИЦА	11

Погрешности оценки углов рассогласования, обусловленные										
	погрешностями БИИБ, '									
	B	ариант	ı I	Ba	Вариант II			Вариант III		
	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_z$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_z$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_z$	
$\Delta \dot{w}$	2.11	2.10	2.10	2.11	2.10	2.10	2.11	2.10	2.10	
$\Delta k^A$	1.19	0.84	1.19	1.19	0.84	1.19	1.19	0.84	1.19	
$\Delta \phi^A$	0.53	0.65	0.31	0.53	0.65	0.31	0.53	0.65	0.31	
Погр. ВОГ	0.00						0.002			
Σ	2.48	2.36	2.44	2.48	2.36	2.44	2.48	2.36	2.44	

Постоянные составляющие углов заклона и разворота корпуса вокруг продольной оси известны и учитываются в алгоритмах. Тем не менее, они влияют на точность оценок углов рассогласования, поскольку оцениваются с погрешностями. Эти погрешности имеют уровень произведения углов заклона и разворота на оцениваемые углы рассогласования КСК ТГС и ПСК БИИБ. Максимальную погрешность, которая может достигать 0.5', имеет угол рассогласования  $\mu_y$ , поскольку он оценивается только при горизонтальном положении изделия, когда углы заклона и разворота могут достигать 2°.

Максимальные погрешности из-за ветровых колебаний проявились в поперечных составляющих вектора рассогласования и составили для первого варианта алгоритмов  $1.85 \cdot 10^{-2'}$ , для второго  $5.8 \cdot 10^{-3'}$ , для третьего  $7.5 \cdot 10^{-3'}$ . На оценку продольной составляющей, которая определяется при горизонтальном положении изделия, ветровые колебания не влияют.

Суммарные погрешности оценки имеют практически одинаковый уровень для всех трех вариантов метода и составляют для поперечных составляющих 2.7', для продольной составляющей 2.8' при требовании 3.4'.

#### VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенных исследований показали, что при ожидаемых точностных характеристиках датчиков ТГС и БИИБ и параметрах ветровых колебаний все три варианта метода позволяют обеспечить требуемую точность азимутальной выставки БИИБ. Параллельное их использование в процессе начальной выставки БИИБ может быть использовано для дополнительного контроля оцениваемого азимутального угла.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Липтон А. Выставка инерциальных систем на подвижном основании. – М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1971, 168 с.
- [2] Водичева, Л.В. Повышение точности начальной азимутальной выставки БИНС с помощью платформенной ИНС / Л.В. Водичева, Ю.В. Парышева, Л.Н. Бельский, Е.А. Кокшаров // XXVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2020, С. 213–216.
- [3] Bortz, J.E. A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, vol. 7, no. 1, pp. 61-66.
- [4] Бельский, Л.Н. Ускоренная прецизионная начальная выставка и калибровка ИНС летательного аппарата на подвижном основании / Л.Н. Бельский, Л.В. Водичева // Гироскопия и навигация. 2001. № 4(35). С. 3–18.
- [5] Бельский, Л.Н. Оценка обобщенных параметров в задаче начальной выставки и калибровки ИНС для космических средств выведения / Л.Н. Бельский, Л.В. Водичева, Ю.В. Парышева // XXVIII Санкт Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2021. С. 181–184.
- [6] Водичева, Л.В. Особенности автономной начальной выставки БИНС для космических средств выведения / Л.В. Водичева, Л.Н. Бельский, Ю.В. Парышева // ХХІХ Санкт Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2022, С. 159–162.

## Исследование аварийного режима бесплатформенной инерциально-спутниковой навигационной системы БИНС-500НС по полетным данным

А.В. Чернодаров Научно-производственное объединение «НаукаСофт», Университет МАИ, Москва, Россия e-mail: chernod@mail.ru

А.П. Патрикеев Научно-производственное объединение «НаукаСофт» Москва, Россия, e-mail: apatrikeev@naukasoft.ru

Аннотация—Рассматривается аварийный режим функционирования инерциально-спутниковой навигационной системы БИНС-500НС, связанный с потерей пилотажно-навигационной информации. Такая потеря возможна, например, при кратковременном отключении питания, а также при превышении диапазонов измерений датчиками первичной информации: гироскопами и акселерометрами. В этом случае необходимо решать задачу начальной выставки БИНС в полете. Предлагается решение такой задачи с использованием спутниковой информации и специальных режимов полета. Приводятся результаты полунатурной отработки аварийного режима по зарегистрированным полетным данным.

Ключевые слова—инерциальная навигационная система, спутниковая навигационная система, аварийный режим, обобщенный фильтр Калмана.

#### I. Введение

Современное состояние авиационной техники характеризуется применением интегрированных инерциально-спутниковых навигационных систем (ИСНС) [1,2]. В ИСНС глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС) обеспечивают высокоточное позиционирование, а инерциальные (ИНС) - определение угловой ориентации. Кроме того, в ИСНС реализуется взаимная информационная поддержка ГНСС и ИНС в аварийных режимах.

Инерциальная информация может быть использована для парирования естественных и имитационных помех в ГНСС [3]. В то же время по спутниковой информации представляется возможным восстанавливать параметры ИНС при их потере в сложных нештатных условиях эксплуатации. Такие условия связаны, например, с потерей электрического питания, а также с превышением диапазонов измерений датчиков первичной информации (ДПИ) ИНС: гироскопов и акселерометров. Превышение диапазонов измерений ДПИ может быть обусловлено маневрированием летательных аппаратов (ЛА).

Основными режимами ИСНС являются начальная выставка ИНС и навигация. В режиме выставки ИНС определяются начальные углы ориентации, скорости и координаты, необходимые для счисления пилотажнонавигационных параметров полета (ПНПП). Типовым при решении задачи начальной выставки на неподвижном основании является метод гирокомпасирования П.С. Горшков

Научно-производственное объединение «НаукаСофт», Москва, Россия e-mail: contacts@naukasoft.ru

Н.П. Старостин Раменское приборостроительное конструкторское бюро, Раменское, Московская область, Россия e-mail: stark201288@gmail.com

[2,4]. В бесплатформенных ИНС (БИНС) ориентация инерциального измерительного модуля (ИИМ) относительно опорного навигационного трехгранника определяется аналитически по сигналам ДПИ. При полетах в околоземном пространстве опорными являются соответствующие сопровождающие трехгранники [5]. Навигационный режим может быть реализован в автономном инерциальном и инерциально-спутниковом вариантах.

Режимы функционирования ИНС в нештатных условиях являются аварийными. Их реализация предусматривает повторное включение электрического питания и выполнение начальной выставки БИНС в полете.

Цель работы – исследование по зарегистрированным данным ДПИ и ГНСС режима начальной выставки и навигации БИНС в полете после потери пилотажнонавигационной информации.

В соответствии с инструкциями по летной эксплуатации [6] в аварийной ситуации БИНС должна функционировать в режиме инерциальной курсовертикали, когда потребителям выдаются только углы ориентации. В то же время при наличии ГНСС, кроме пилотажных, может также поддерживаться инерциально-спутниковое определение остальных навигационных параметров.

Начальная выставка и навигация ИСНС после восстановления электрического питания могут быть реализованы в двух вариантах:

- с использованием информации от ГНСС, а именно: геодезических координат ЛА, путевого угла, а также проекций вектора траекторной скорости на оси опорного сопровождающего трехгранника;
- с использованием телеметрической информации, регистрируемой на flash-память в процессе функционирования ИСНС.

С учетом указанной информации определяются необходимые приближенные начальные условия для перевода БИНС в режим инерциально-спутниковой начальной выставки и навигации. Рассматриваются возможные наблюдения для оценки ошибок БИНС после начальной выставки и восстановления пилотажно-навигационных параметров.

### II. Инерциально-спутниковая навигационная система БИНС-500НС как объект исследования

В качестве объекта исследований рассматривается ИСНС БИНС-500НС [7] на волоконно-оптических гироскопах. В такой системе реализуются два этапа начальной выставки: грубый и точный, а также режимы инерциальной и инерциально-спутниковой навигации. На этапе грубой начальной выставки [8] по сигналам ДПИ приближенно определяются начальные значения углов ориентации ИИМ. Режимы точной начальной выставки и навигации опираются на всещиротный алгоритм счисления координат [9] и обобщенный фильтр Калмана (ОФК) [10]. В системе БИНС-500НС такой алгоритм реализуется на основе раздельного решения уравнений ориентации (1) и навигации (2)

$$2\dot{\bar{q}}_0 = \Pi_0 \bar{q}_0, \qquad (1)$$

$$2\dot{\bar{P}}_{\mu} = \Pi_{\mu}\bar{P}_{\mu}, \qquad (2)$$

где 
$$\Pi_{0} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Theta}_{x} & -\dot{\Theta}_{y} & -\dot{\Theta}_{z} \\ \dot{\Theta}_{x} & 0 & \dot{\Theta}_{z} & -\dot{\Theta}_{y} \\ \dot{\Theta}_{y} & -\dot{\Theta}_{z} & 0 & \dot{\Theta}_{x} \\ \dot{\Theta}_{z} & \dot{\Theta}_{y} & -\dot{\Theta}_{x} & 0 \end{bmatrix};$$
$$\Pi_{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{\xi} & -\omega_{\eta} & 0 \\ \omega_{\xi} & 0 & 0 & -\omega_{\eta} \\ \omega_{\eta} & 0 & 0 & \omega_{\xi} \\ 0 & \omega_{\eta} & -\omega_{\xi} & 0 \end{bmatrix};$$

 $\dot{\Theta} = [\dot{\Theta}_x \dot{\Theta}_y \dot{\Theta}_z]^T$  – вектор сигналов датчиков угловой скорости;  $\bar{\omega} = [\omega_{\xi} \omega_{\eta} \omega_{\zeta}]^T$  – вектор угловой скорости вращения опорного сопровождающего трехгранника  $o\xi\eta\zeta$  в геодезической системе координат. Всеширотный алгоритм счислении координат опирается на полусвободный в азимуте трехгранник, у которого  $\omega_{\zeta} = 0$  [9]. Элементы вектора  $\bar{\omega}$  определяются по проекциям  $V_{\xi}, V_{\eta}, V_{\zeta}$  вектора относительной скорости  $\bar{V}$  из решения основного уравнения инерциальной навигации [9]

$$\dot{\overline{V}} = C_3^{\ T} \overline{a} + \overline{g} - 2\overline{\Omega} \times \overline{V} - \overline{\omega} \times \overline{V} - \overline{\Omega} \times (\overline{\Omega} \times \overline{R}), \quad (2)$$

где  $\bar{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$  – вектор сигналов акселерометров;  $\bar{g} = [g_{\xi} \ g_{\eta} \ g_{\zeta}]^T$  – вектор гравитационного ускорения;  $\bar{\Omega} = [\Omega_{\xi} \ \Omega_{\eta} \ \Omega_{\zeta}]^T$  – вектор угловой скорости вращения Земли;  $\Omega = \|\overline{\Omega}\|_2^2$ ;  $\bar{R} = [0 \ 0 \ R]^T$  – радиус-вектор местоположения ИИМ; (×) – оператор векторного произведения;  $\bar{q}_0 = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$  – кватернион, характеризующий угловую ориентацию ИИМ относительно инерциальной системы координат,  $\bar{P}_r = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  – кватернион, характеризующий

угловую ориентацию трехгранника οξηζ относительно земной геоцентрической системы координат О<sub>1</sub> Х<sub>Е</sub> Ү<sub>Е</sub> Z<sub>Е</sub>; С<sub>3</sub> – матрица направляющих косинусов (МНК), характеризующая угловую ориентацию связанной с ИИМ системы координат относительно опорного трехгранника οξηζ. По элементам кватернионов  $\overline{q}_0$  и  $\overline{P}_r$  определяются необходимые для ИСНС МНК, углы ориентации ψ, 9, γ ИИМ относительно сопровождающего трехгранника oENH геодезической системы координат, а также геодезические широта ф, долгота  $\lambda$  и азимут A трехгранника  $o\xi\eta\zeta$  относительно репера *oENH* [4]. МНК С<sub>0</sub>, соответствующая кватерниону  $\overline{q}_0$ , является базовой при выполнении векторноматричных операций в системе БИНС-500НС. По элементам МНК Со могут быть найдены углы ориентации  $\overline{\psi}, \overline{\vartheta}, \overline{\gamma}$  связанной системы координат *охуг* относительно инерциальной О<sub>1</sub> Х<sub>1</sub> У<sub>1</sub> Z<sub>1</sub>. В этом случае полагается, что начальные направления осей указанных трехгранников совпадают, а повороты выполняются против часовой стрелки следующим образом [5]: первый на угол  $\overline{\psi}$  вокруг третьей оси  $O_I Z_I$ , второй – на угол 9 вокруг нового положения первой оси О , Х , третий – на угол  $\overline{\gamma}$  вокруг нового положения второй оси  $O_I Y'_I$ . Соответствующие МНК формируются путем присвоения углам  $\overline{\psi}, \overline{\vartheta}, \overline{\gamma}$  конкретных значений.

Применяемые в системе БИНС-500НС МНК представлены в таблице 1, где ψ<sub>г</sub> – угол гироскопического курса ИИМ относительно трехгранника *ο*ξηζ.

Таблица 1.1	Матрицы направляющи	х косинусов
-------------	---------------------	-------------

<i>C</i> <sub>0</sub>	$C_1$	<i>C</i> <sub>2</sub>	<i>C</i> <sub>3</sub>	Ĉ <sub>3</sub>	<i>C</i> <sub>4</sub>	<i>C</i> <sub>5</sub>
Ψ	$\Omega\Delta t$	λ	$\psi_{r}$	ψ	A	π/2
$\overline{\theta}$	0	0	θ	θ	0	π/2
$\overline{\nu}$	0	- <b>0</b>	γ	γ	0	0
r		т	1	1	Ť	Ŭ

Например, МНК  $C_3$  формируется путем следующей замены углов в элементах МНК  $C_0: \overline{\psi} = \psi_{\Gamma}, \overline{\vartheta} = \vartheta, \overline{\gamma} = \gamma$ .

#### III. Режимы начальной выставки и навигации системы БИНС-500НС в полете

Традиционно начальная выставка в полете опирается на внешнюю по отношению к БИНС информацию. При этом наиболее критичной является задача определения начальных значений углов ориентации ИИМ. Известный метод векторного согласования [11] предполагает только уточнение углов ориентации ИИМ, введенных извне, например, от ведущей БИНС [12] или магнитометра [6]. Такое уточнение выполняется, как правило, с использованием позиционных и скоростных наблюдений, а также ОФК. Однако в аварийных ситуациях в полете получить начальные углы ориентации извне не всегда представляется возможным. В этом случае начальная выставка БИНС может быть реализована путем вывода летательного аппарата в горизонтальный полет с приблизительно нулевыми значениями углов крена, тангажа и скольжения, а также с использованием следующих параметров, определяемых с помощью ГНСС: геодезических координат, проекций вектора траекторной скорости на оси трехгранника *оENH* и путевого угла ЛА  $A_{\Gamma HCC}$ . С учетом указанных параметров определяются необходимые начальные условия для перевода БИНС в режим навигации, а именно:

$$\psi_{\text{БИНС}}(t_0) \approx A_{\text{БИНС}}(t_0) \coloneqq -A_{\text{ГНСС}}(t_0) \ ; \ \psi_{\Gamma}(t_0) = 0 \ ; \ (5)$$

$$\tilde{C}_{3}(t_{0}); C_{0}(t_{0}) = \tilde{C}_{3}(t_{0})C_{5}C_{2}(t_{0});$$
(6)

$$C_r(t_0) = C_4(t_0)C_5C_2(t_0); \qquad (7)$$

$$V_{\xi\eta\zeta(\text{БИНС})}(t_0) = C_4(t_0) V_{ENH(\Gamma\text{HCC})}(t_0) .$$
 (8)

Выражения для начальных значений кватернионов  $\bar{q}_0(t_0)$  и  $\bar{P}_r(t_0)$  имеют идентичный вид:

$$q_{0} = 0.5\sqrt{1 + C_{0(0,0)} + C_{0(1,1)} + C_{0(2,2)}};$$
(9)

$$q_{1} = 0.25 [C_{0(1,2)} - C_{0(2,1)}] / q_{0};$$
(10)

$$q_{2} = 0.25 [C_{0(2,0)} - C_{0(0,2)}]/q_{0};$$
 (11)

$$q_{3} = 0.25 [C_{0(0,1)} - C_{0(1,0)}]/q_{0}.$$
 (12)

Параметры (5) – (12) используются для формирования начальных условий для ОФК.

В режиме навигации решаются уравнения (1) и (2), а также обратная задача ориентации

$$C_3 = C_0 C_1^T C_r^T \,,$$

где МНК  $C_0$  и  $C_r$  определяются по кватернионам с использованием идентичным соотношений [13].

По элементам МНК  $C_r$  определяются геодезические широта  $\varphi$ , долгота  $\lambda$  и азимут A опорного сопровождающего трехгранника

$$\begin{split} \phi &= \arctan \frac{C_{r(2,2)}}{\sqrt{C_{r(0,2)}^2 + C_{r(1,2)}^2}} \; ; \; \lambda = \arctan \frac{C_{r(2,1)}}{C_{r(2,0)}} \; ; \\ A &= \arctan \frac{C_{r(0,2)}}{C_{r(1,2)}} \; . \end{split}$$

По элементам МНК C<sub>3</sub> определяются углы ориентации ИИМ относительно трехгранника οξηζ с использованием следующих соотношений

$$\begin{split} \psi_{\Gamma} &= arctg[-\frac{C_{3(1,0)}}{C_{3(1,1)}}]; \ \gamma = arctg[-\frac{C_{3(0,2)}}{C_{3(2,2)}}]; \\ \vartheta &= arctg \frac{C_{3(1,2)}}{\sqrt{C_{3(0,2)}^{2} + C_{3(2,2)}^{2}}}; \\ \psi_{\rm EVHC}(t) &= A_{\rm EVHC}(t) + \psi_{\Gamma}(t) \,. \end{split}$$

В навигационном режиме после формирования начальных условий (5) – (8) ошибки БИНС оцениваются путем обработки инерциально-спутниковых наблюдений

$$Z_{K(i)} = \left[\varphi_i \lambda_i\right]_{\text{БИНС}}^{\text{T}} - \left[\varphi_i \lambda_i\right]_{\text{ГНСС}}^{\text{T}};$$
(13)

$$Z_{V(i)} = C_4^T [V_{\xi} V_{\eta} V_{\zeta}]_{\text{БИНС}(i)}^{\text{T}} - [V_E V_N V_H]_{\text{ГНСС}(i)}^{\text{T}}, \quad (14)$$

а также наблюдений геофизических инвариантов [14], связанных с неизменностью проекций вектора угловой скорости вращения Земли на оси инерциальной системы координат

$$Z_{\dot{\Theta}(i)} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{C_{0(i)}^T \dot{\bar{\Theta}}(\tau) d\tau - C_{2(i)}^T [\bar{\omega}_i(\tau) + \dot{\bar{\delta}}_i(\tau)]\} d\tau - [0!0! \Omega \Delta t_i]^T, \qquad (15)$$

где  $\dot{\bar{\delta}} = [\dot{\delta}_{\xi} \dot{\delta}_{\eta} \dot{\delta}_{\zeta}]^{T}$  – вектор угловой скорости вращения ИИМ относительно опорного трехгранника;

$$\begin{split} \dot{\delta}_{\xi} &= \dot{9}\cos\psi_{\Gamma} - \dot{\gamma}\sin\psi_{\Gamma}\cos\vartheta;\\ \dot{\delta}_{\eta} &= \dot{9}\sin\psi_{\Gamma} + \dot{\gamma}cos\psi_{\Gamma}\cos\vartheta;\\ \dot{\delta}_{\zeta} &= \dot{\psi}_{\Gamma} + \dot{\gamma}sin\vartheta. \end{split}$$

Производные  $\dot{\psi}_{\Gamma}$ ;  $\dot{\gamma}$ ;  $\dot{9}$  углов ориентации определяются из решения следующего уравнения:

$$\dot{C}_{3} = \dot{C}_{0}C_{1}^{T}C_{r}^{T} + C_{0}\dot{C}_{1}^{T}C_{r}^{T} + C_{0}C_{1}^{T}\dot{C}_{r}^{T}$$

В соответствии с инструкциями по летной эксплуатации в аварийной ситуации БИНС должна функционировать в режиме инерциальной курсовертикали (ИКВ), когда потребителям выдаются только углы ориентации. Однако при наличии ГНСС, кроме пилотажных, поддерживается также инерциально-спутниковое определение навигационных параметров.

#### IV. Анализ результатов исследований

Эксперименты проводились по зарегистрированным на flash-память полетным данным ИИМ и ГНСС. На рис. 1 показана траектория полета вертолета в плане, определенная ГНСС, где  $\Delta \phi_R = [\phi(t) - \phi(t_0)]R$ ;  $\Delta \lambda_R = [\lambda(t) - \lambda(t_0)]R \cos \phi$ ; R – величина радиус-вектора местоположения БИНС. На 2767-й секунде имитировался отказ, связанный с кратковременным пропаданием напряжения, обнулением и дальнейшим восстановлении всех параметров БИНС. На рис. 2-4 показаны графики определения углов соответственно истинного курса, тангажа и крена в аварийном  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\gamma$  и штатном (без нарушений)  $\psi_{\Im}$ ,  $\vartheta_{\Im}$ ,  $\gamma_{\Im}$  режимах. Графики красного цвета соответствуют штатному режиму функционирования БИНС без нарушений, графики черного цвета – аварийному режиму.

 $Δφ_R$ , KM



Рис. 2. Угол истинного курса

9, угл. град.





Рис. 4. Угол крена

Можно видеть, что ошибки определения углов ориентации после информационного сбоя и начальной выставки в полете находятся в допустимых для режима ИКВ пределах, а именно: не хуже десяти угловых минут. Наблюдаемость углов ориентации может быть повышена при маневрировании ЛА после грубой начальной выставки (5)–(8).

#### V. Заключение

Проведенные полунатурные исследования рассмотренного подхода к реализации аварийного режима функционирования системы БИНС-500НС подтвердили возможность выполнения начальной выставки в полете после кратковременного пропадания питания и потери пилотажно-навигационной информации. Необходимая точность восстановления пилотажной информации в режиме ИКВ может быть достигнута с использованием инерциально-спутниковых и геофизических наблюдений, а также математического аппарата ОФК.

#### Литература

- [1] Емельянцев, Г.И. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / Г.И. Емельянцев, А.П. Степанов, под общей ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. 394с.
- [2] Noureldin, A., Karamat, T., Georgy, J. Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
- [3] Chernodarov, A.V. Monitoring and Adaptive Robust Protection of the Integrity of GNSS/SINS Observations in Urban Environments // 11th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes (SAFEPROCESS 2022), IFAC-PapersOnLine, 2022, 55(6), pp. 378–383.
- [4] Августов, Л.И. Навигация в околоземном пространстве / Л.И. Августов, А.В. Бабиченко, М.И. Орехов и др., под ред. Г.И. Джанджгавы, 2-е издание, М.: Издательство «Грани успеха», 2022, 548с.
- [5] Бромберг, П.В. Теория инерциальных систем навигации. М.: Наука, ГРФМЛ, 1979. 296 с.
- [6] Rogers, R.M. Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems, Second Edition. AIAA Education Series, 2003.
- [7] Чернодаров, А.В. Летная отработка инерциально-спутниковой навигационной системы БИНС-500НС в высоких широтах / А.В. Чернодаров, А.П. Патрикеев, О.А. Карпов // XXV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2018. С. 296 - 299.
- [8] Groves, P.D. Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Boston: Artech House, 2008.
- [9] Бабич, О.А. Обработка информации в навигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991. 512 с.
- [10] Maybeck, P.S., Stochastic Models, Estimation and Control. N.Y., Academic Press, 1982, vol. 2.
- [11] Липтон, А. Выставка инерциальных систем на подвижном основании / Пер. с англ. Л.Г. Клибанова под ред В.Л. Леонидова. М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. 168 с.
- [12] Titterton, D.H., and Weston, J.L. Strapdown Inertial Navigation Technology, Reston, AIAA, 2004.
- [13] Онищенко, С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. Киев: Наукова думка, 1983. 208 с.
- [14] Пат. 2725029 Российская Федерация, МПК G01C 23/00. Способ повышения точности бесплатформенной инерциальной навигационной системы / Чернодаров А.В., Патрикеев А.П., Халютина О.С.; приор. 06.02.19; опубл. 29.06.20, Бюл. № 19.

## Разработка модели погрешностей электросейсмокардиоблока

М.Е. Рулев ОАО «НПО ГЕОФИЗИКА-НВ» Мытицинский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана Москва, Россия email: maxxim98@yandex.ru В.М. Ачильдиев ОАО «НПО ГЕОФИЗИКА-НВ» Мытицинский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана Москва, Россия email: glmnems@gmail.com

Н.А. Бедро ОАО «НПО ГЕОФИЗИКА-НВ» Москва, Россия email: job\_nick@mail.ru

Аннотация—Статья посвящена разработке модели погрешностей электросейсмокардиоблока, регистрирующего биофизические сигналы и применяемого для неинвазивной диагностики заболеваний человека. Выполнена оценка влияния систематических погрешностей электросейсмокардиоблока на вычисляемые параметры кардиоимпульсов. Изложен анализ влияния случайных погрешностей и внешних возмущений, действующих на сейсмокардиоблок и электрокардиоблок. Представлен разбор погрешностей электрокардиоблока. Предложены способы минимизации погрешностей, влияющих на регистрацию кардиосигналов.

Ключевые слова—кардиосигнал, электросейсмокардиоблок, микромеханический акселерометр, микромеханический гироскоп, погрешности; фильтрация.

#### I. Введение

Теория информационной функции сердца позволяет проводить неинвазивную диагностику неинфекционных заболеваний внутренних органов человека на основе анализа электрокардиограммы (ЭКГ), регистрируемой электрокардиоблоком (ЭКБ). В частности, оценивая вариабельности таких характерных параметров электрокардиоциклов, как амплитуда  $R_n$ , период  $T_n$  и «фазовый угол»  $\alpha_n$ , а также соответствующие приращения параметров  $\Delta R_n$ ,  $\Delta T_n$  и  $\Delta \alpha_n$ , говорят о текущем функциональном состоянии организма путем сравнения полученных приращений с эталонными вариантами комбинаций, представленными в закодированном виде [1].

Разработав сейсмокардиоблок (СКБ), обеспечили регистрацию механических колебаний грудной клетки по трем ортогональным осям. Так, микромеханическим акселерометром (ММА) в составе СКБ фиксируется сейсмокардиограмма (СКГ), а микромеханическим гироскопом (ММГ) идентифицируется гирокардиограмма (ГКГ). В процессе исследований было установлено, что для анализа вариабельности СКГ и ГКГ необходимо проводить оценку таких параметров, представленных в безразмерном виде, как амплитуды  $R_{norm}$ , периоды  $T_{norm}$ , площади  $S_{norm}$  и соответствующие приращения  $\Delta R_{norm}$ ,  $\Delta T_{norm}$  и  $\Delta S_{norm}$  сейсмо- и гирокардиоциклов [2].

Соединив ЭКБ с СКБ, обеспечили одновременную идентификацию ЭКГ, СКГ и ГКГ, а полученное устройство назвали электросейсмокардиоблоком (ЭСКБ). В этом случае рекомендуется определять параметры  $R_{norm}$ ,  $T_{norm}$  и  $S_{norm}$  и их приращения не только применительно к СКГ и ГКГ, но и к ЭКГ. Такая обработка трех типов кардиосигналов позволит получить максимально полную

информацию о физиологических процессах в организме, которая необходима для достоверной диагностики методикой [1].

Более того, помимо кардиосигналов ЭСКБ чувствителен к респираторным (дыхательным) циклам, которые обладают определенной информативностью и, вероятно, могут нести сведения об инфекционных заболеваниях человека. Установлено, что для оценки вариабельности респираторных циклов по аналогии с кардиоциклами предложено исследовать такие параметры дыхания и их приращения, как общая продолжительность респираторного цикла  $T_{obx}^{norm}$ , длительность вдоха  $T_{e0}^{norm}$  и площадь под кривой дыхательного цикла  $S_{obx}^{norm}$  [3].

Учитывая особенности биофизических сигналов по отведениям ЭКГ и проекциям СКГ и ГКГ показано, что для информационного анализа кардиосигналов оправдано использование 2-го отведения ЭКГ, 2 проекций СКГ (проекция на ось Y для исследования дыхания и проекция на ось Z для исследования кардиоимпульсов), а также проекции ГКГ на ось X [3]. Такой выбор позволяет получать всю необходимую информацию о деятельности сердца и дыхательном процессе и одновременно увеличить частоту опроса, сократив более чем в 2 раза количество каналов ЭСКБ.

При регистрации биофизических сигналов важно учитывать вклад внешних воздействий и внутренних шумов в измеряемый сигнал. В связи с этим необходимо разработать модель погрешностей ЭСКБ и проанализировать, в какой степени те или иные внешние возмущения, действующие на ЭСКБ, и собственные шумы СКБ и ЭКБ отражаются на регистрируемых кардиосигналах. Актуальность подобной задачи дополнительно подтверждается относительно небольшими по модулю значениями снимаемой информации, в связи с чем вклад других паразитных сигналов в записываемый кардиосигнал достаточно высок.

#### II. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

По закономерности проявления различают систематические и случайные погрешности ММА и ММГ [4]. Все систематические погрешности при измерениях кардиосигналов в модели погрешности ЭСКБ будут отсутствовать благодаря следующему методу обработки и анализа кардиосигналов.

Параметры *R<sub>norm</sub>*, *T<sub>norm</sub>* и *S<sub>norm</sub>* по ЭКГ рассчитываются по формулам:

Ю.К.Грузевич ОАО «НПО ГЕОФИЗИКА-НВ» МГТУ им. Н.Э. Баумана Москва, Россия email: yukg@mail.ru

$$\{R_{norm}^{j}\}_{\mathcal{K}\Gamma} = \frac{y_{\text{max}}^{j} - y_{\text{min}}^{j}}{D_{R}^{\mathcal{K}\Gamma}},\qquad(1)$$

$$\{T_{norm}^{j}\}_{\mathcal{H}\Gamma} = t_{\mathcal{H}\Gamma}(R_{norm}^{j+1}) - t_{\mathcal{H}\Gamma}(R_{norm}^{j}), \quad (2)$$

$$\{S_{norm}^{j}\}_{\mathcal{H}\Gamma} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{D_{R}^{\mathcal{H}\Gamma}} \left(\frac{y_{i} + y_{i+1}}{2} - y_{\min}^{j}\right), \quad (3)$$

где *j* – номер кардиоцикла; *y*<sub>max</sub>, *y*<sub>min</sub> и *y* – максимальные, минимальные и текущие значения кардиоцикла соответственно;  $D_R^{3KT} = 2,5$  мВ – номинальный диапазон изменения ЭКГ;  $t_{3KT}(R_{norm})$  – время, соответствующее  $y_{max}$  по ЭКГ; k – количество отсчетов в кардиоцикле; *i* – номер отсчета, соответствующего текущему моменту.

Аналогичным образом находят характерные параметры сейсмо- и гирокардиоциклов с использованием номинальных диапазонов  $D_R^{CKT} = 0,075$  g и  $D_R^{TKT} = 5$  °/с. Начало каждого кардиоцикла в СКГ и ГКГ определяется началом кардиоцикла в ЭКГ, поэтому значения  $T^{i}_{norm}$ для всех трех типов биофизических сигналов одинаковы. Таким образом, в соответствии с выражениями (1)-(3) все параметры ЭКГ, СКГ и ГКГ получаются безразмерными, и приращения  $\Delta R_{norm}$ ,  $\Delta T_{norm}$  и  $\Delta S_{norm}$  для *j*-го кардиоцикла каждого биофизического сигнала можно представить следующим образом:

$$\Delta R_{norm}^{j} = R_{norm}^{j+1} + \delta(R_{norm}^{j+1}) - \left(R_{norm}^{j} + \delta(R_{norm}^{j})\right), (4)$$

$$\Delta T_{norm}^{j} = T_{norm}^{j+1} + \delta(T_{norm}^{j+1}) - \left(T_{norm}^{j} + \delta(T_{norm}^{j})\right), \quad (5)$$

$$\Delta S_{norm}^{j} = S_{norm}^{j+1} + \delta(S_{norm}^{j+1}) - \left(S_{norm}^{j} + \delta(S_{norm}^{j})\right), \quad (6)$$

где  $\delta(R^{i+1}_{norm})$ ,  $\delta(T^{i+1}_{norm})$  и  $\delta(S^{i+1}_{norm})$  – суммарные погрешности определения параметров *j*+1-го кардиоцикла,  $\delta(R^{j}_{norm})$ ,  $\delta(T^{j}_{norm})$  и  $\delta(S^{j}_{norm})$  – суммарные погрешности определения параметров *j*-го кардиоцикла.

В свою очередь, погрешности  $\delta(R^{j}_{norm})$ ,  $\delta(T^{j}_{norm})$  и  $\delta(S^{j}_{norm})$  могут быть расписаны в виде:

$$\delta(R_{norm}^{j}) = \delta_{S}(R_{norm}^{j}) + \delta_{R}(R_{norm}^{j}), \qquad (7)$$

$$\delta(T_{norm}^{j}) = \delta_{S}(T_{norm}^{j}) + \delta_{R}(T_{norm}^{j}), \qquad (8)$$

$$\delta(S_{norm}^{j}) = \delta_{S}(S_{norm}^{j}) + \delta_{R}(S_{norm}^{j}), \qquad (9)$$

где  $\delta_S(R^{j}_{norm})$ ,  $\delta_S(T^{j}_{norm})$  и  $\delta_S(S^{j}_{norm})$  – систематические погрешности при вычислении параметров кардиоциклов,  $\delta_R(R^{j}_{norm})$ ,  $\delta_R(T^{j}_{norm})$  и  $\delta_R(S^{j}_{norm})$  – случайные погрешности при вычислении параметров кардиоциклов.

Аналогичный вид принимают выражения для кардиоцикла j+1. А поскольку систематические погрешности  $\delta_S$  для каждого параметра кардиоцикла с любым номером j постоянны, то окончательно приращения (4)-(6) можно записать так:

$$\Delta R_{norm}^{j} = R_{norm}^{j+1} + \delta_R(R_{norm}^{j+1}) - \left(R_{norm}^{j} + \delta_R(R_{norm}^{j})\right), (10)$$

$$\Delta T_{norm}^{J} = T_{norm}^{J+1} + \delta_R(T_{norm}^{J+1}) - \left(T_{norm}^{J} + \delta_R(T_{norm}^{J})\right), \quad (11)$$

$$\Delta S_{norm}^{j} = S_{norm}^{j+1} + \delta_R(S_{norm}^{j+1}) - \left(S_{norm}^{j} + \delta_R(S_{norm}^{j})\right).$$
(12)

Из полученного результата следует, что приращения  $\Delta R_{norm}$ ,  $\Delta T_{norm}$  и  $\Delta S_{norm}$  содержат только случайные составляющие погрешности  $\delta_R$ . Таким образом, любые систематические погрешности датчиков СКБ и ЭКБ, к каковым относятся систематические погрешности смещения нулей и масштабных коэффициентов ММГ и ММА, а также систематические погрешности смещения нуля отведения ЭКБ, не оказывают существенного влияния при оценке вариабельности параметров как кардиоимпульсов, так и респираторных циклов, и далее они не упоминаются.

## III. Анализ случайных погрешностей и внешних возмущений

СКГ и ГКГ фиксируются СКБ на основе цифровых ММА и ММГ. Для цифровых измерителей угловых скоростей и линейных ускорений основными составляющими погрешности, требующими учета в модели погрешности, являются случайные погрешности смещения нулей  $\delta_R(U_{0g})$ ,  $\delta_R(U_{0a})$  и масштабных коэффициентов  $\delta_R(K_g)$ ,  $\delta_R(K_a)$  в запуске [5].

Случайные погрешности смещения нулей  $\delta_R(U_{0g})$  и  $\delta_R(U_{0a})$  в запуске появляются в основном в виде теплового шума. Такой шум распространен равномерно на всей полосе частот и по своему значению на порядки ниже прочих шумовых составляющих [6]. Случайные погрешности масштабных коэффициентов  $\delta_R(K_g)$ ,  $\delta_R(K_a)$  в запуске определяются погрешностью аналого-цифрового преобразования и зависят от величины младшего значащего бита (LSB) [7].

К числу внешних возмущений, измеряемых ММА и ММГ, стоит отнести микровибрации и микроудары, а также весь спектр акустических, инфразвуковых и инфранизких частот. Основными источниками шумов и микровибраций являются компрессоры, вентиляции, трубопроводы, работающие станки и транспортные средства [8]. В качестве примера на рис. 1 продемонстрирована амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) нулевого сигнала ускорения в запуске в дневное время за один час методом быстрого преобразования Фурье [9]. Из представленного рисунка видно, что в сигнале на частотах до 50 Гц присутствуют внешние воздействия в диапазонах 1-5 Гц, 9-12 Гц, 14-16 Гц и 36-41 Гц с амплитудами до 6·10<sup>-6</sup> g. Уровень собственных (тепловых) внутренних шумов ММА составляет примерно 4·10<sup>-7</sup> g. Таким образом, регистрацию кардиосигналов рекомендуется проводить в специальном изолированном помещении, где риск подобного рода помех минимален.



Рис. 1. АЧХ нулевого сигнала ММА

В ЭКБ случайная погрешность смещения нуля отведения ЭКБ  $\delta_R(U_{0e})$ , требующая учета в модели погрешности, равна уровню собственных (тепловых) шумов ЭКБ, которые возникают в электронных компонентах (в первую очередь – на резисторах) [6]. В связи с этим она существенно ниже погрешностей, вызываемых внешними воздействиями. Так, по рис. 2*a*, отражающему АЧХ нулевого сигнала ЭКГ, можно определить, что уровень теплового шума находится на уровне 1,2-1,5 мкВ.



Рис. 2. АЧХ нулевого сигнала ЭКГ по 2 отведению: a) исходный сигнал; б) отфильтрованный сигнал

Среди других случайных погрешностей, влияющих на запись ЭКГ, стоит выделить сетевые наводки, постоянную составляющую амплитуды напряжения, суммарную погрешность аналого-цифрового преобразования, а также мышечный тремор и артефакты движения.

#### IV. Способы минимизации погрешностей

ММА и ММГ по сравнению с классическими инерциальными измерителями обладают повышенной чувствительностью к изменениям температуры и напряжения питания. Поскольку частота опроса СКБ по всем измерительным каналам составляет 1000 Гц, а кардиоциклы продолжаются не более 1 с, то температура окружающей среды по причине ее медленного изменения не оказывает заметного влияния на приращения параметров кардиосигналов, поэтому в модели погрешности ею можно пренебречь. Более того, чувствительность к температурным градиентам снижена применением компаунда внутри корпуса СКБ. Для задания стабильного малошумящего напряжения питания используется опорный стабилизатор напряжения как в СКБ, так и в ЭКБ.

Если заранее известны источники паразитных наводок и помех в электросети, то для минимизации таких флюктуаций используют различные цифровые фильтры. В частности, частота сетевой помехи на 50 Гц (рис. 2а) устраняется вырезающим (режекторным, или полоснозаграждающим) фильтром.

Нижнюю  $f_1$  и верхнюю  $f_2$  частоты среза такого фильтра можно определить из соотношений:

$$f_1 = f_n - \Delta^*, \tag{13}$$

$$f_2 = f_n + \Delta^*, \tag{14}$$

где  $f_n$  – частота помехи (50 Гц),  $\Delta^* = 0,4$  Гц – максимально допустимое отклонение значения частоты [10].

Таким образом, для идеального возмущения на частоте 50 Гц вырезающий фильтр должен иметь полосу задерживания шириной  $2\Delta^* = 0,8$  Гц, а нижняя  $f_1$  и верхняя  $f_2$  частоты среза будут равны 49,6 Гц и 50,4 Гц соответственно. Однако, как видно на рис. 2а, ширина спектра зарегистрированной помехи составляет около 10 Гц. При этом на частоте  $f_n \approx 50$  Гц амплитуда спектра составляет около 1,4·10<sup>-4</sup> В, а на частоте 55 Гц – примерно 1,4·10<sup>-6</sup> В. Отсюда следует, что для устранения такой помехи необходим вырезающий фильтр с крайними частотами  $f_1 = 45$  Гц и  $f_2 = 55$  Гц, имеющий порядок

$$K = \lg \frac{U_n}{U_\Delta} = \lg \frac{1.4 \cdot 10^{-4}}{1.4 \cdot 10^{-6}} = 2 , \qquad (15)$$

где  $U_n$  – амплитуда помехи;  $U_{\Delta}$  – амплитуда сигнала на отклонении  $\Delta$  = 5 Гц от частоты помехи.

В результате использования такого фильтра происходит уменьшение амплитуды сигнала в полосе задерживания (на частоте помехи) в 50-100 раз, что наглядно продемонстрировано на рис. 26.

Известно, что потенциал кожи человека выше, чем потенциалы, проявляющиеся при работе сердца, в связи с чем любая запись ЭКГ имеет высокую постоянную составляющей на частоте до 1 Гц в спектре ЭКГ наблюдается дрейф изолинии, что проиллюстрировано на рис. За. Непостоянство изолинии влияет на погрешность измерения амплитуд электрокардициклов, т. к. именно от нее ведется отсчет. Для снижения дрейфа изолинии необходимо применение слабополяризующихся электродов, а также надежное и плотное их крепление. Постоянная составляющая и дрейф изолинии удаляются фильтром высоких частот (ФВЧ) Баттерворта 2-го порядка с частотой среза 1 Гц.

Кроме того, на частотах 0,1-0,4 Гц на АЧХ СКГ и ГКГ прослеживаются респираторные составляющие, которые можно увидеть на рис. Зб и Зв. Артефакты дыхания в СКГ и ГКГ при анализе кардиосигналов устраняются при помощи ФВЧ Баттерворта 2-го порядка с частотой среза 0,5 Гц, но не подвергаются фильтрации при анализе дыхательного процесса [11]. Также изображенные на рис. З АЧХ отражают вариабельность сердечного ритма, которая проявляется в полосе частот 1,2-1,7 Гц с центральной частотой около 1,45 Гц.



Рис. 3. АЧХ нефильтрованных кардиосигналов в полосе частот до 3 Гц: а) ЭКГ; б) СКГ; в) ГКГ

Вместе с тем цифровые фильтры вносят достаточно серьезные искажения в форму биофизического сигнала. Например, при использовании ФВЧ для стабилизации изоэлектрической линии происходит искажение сегмента ST на ЭКГ, а фильтры низких частот, часто используемые для фильтрации высокочастотных помех, уменьшают амплитуду биофизического сигнала [12].

Для минимизации погрешности аналого-цифрового преобразования ЭКГ необходимы аналого-цифровые преобразователи (АЦП) с минимальной ценой младшего разряда LSB (ценой импульса) и минимальным временем преобразования. При этом для сокращения времени преобразования для каждого электрода используется свой АЦП.

Мышечный тремор на ЭКГ возникает в результате высокой электрической активности тканей и представляет собой хаотические колебания изоэлектрической линии в частотном диапазоне от 30 до 60 Гц. Обычно тремор появляется и накладывается на ЭКГ у пациентов с дрожательным параличом, паркинсонизмом и т. п. Артефакты движения в ЭКГ проявляются как одиночные или циклические всплески, спектр которых похож на спектр QRS-комплексов. Частота таких помех находится в диапазоне от 1 до 40 Гц, а возникают они в результате изменения положения пациента или электрода, а также из-за икоты, кашля и т. д. Как правило, участки записи, на которых проявляются артефакты движения или мышечный тремор, не подлежат фильтрации, вырезаются из записи и не обрабатываются. Чтобы свести к минимуму возникновение подобных искажений, важно обеспечить пациенту комфортные условия для уменьшения выраженности тремора или озноба, что также применимо для снижения таких флюктуаций в сигналах СКГ и ГКГ [11].

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показали, что систематические погрешности датчиков ЭСКБ не влияют на вариабельность параметров кардиоимпульсов благодаря используемому методу обработки и анализа биофизических сигналов на основе приращений характерных параметров кардиоциклов. Исходя из этого, модель погрешности ЭСКБ включает только случайные составляющие погрешности датчиков ЭСКБ на частоте опроса в 1 кГц:

$$\delta_{\text{ЭСКБ}} = \{ \delta_R(U_{0e}), \, \delta_R(U_{0a}), \, \delta_R(U_{0g}), \, \delta_R(K_a), \, \delta_R(K_g) \},\$$

 $\delta_R(U_{0e})$  – случайная погрешность смещения нуля отведения ЭКБ в запуске,  $\delta_R(U_{0a})$  – случайная погрешность смещения нуля ММА в запуске,  $\delta_R(U_{0g})$  – случайная погрешность смещения нуля ММГ в запуске,  $\delta_R(K_a)$  – случайная погрешность масштабного коэффициента ММА в

запуске,  $\delta_R(K_g)$  – случайная погрешность масштабного коэффициента ММГ в запуске.

Заранее известные помехи и наводки уменьшают за счет применения цифровых фильтров. Влияние других внешних возмущений и случайных погрешностей сводят к минимуму рассмотренными конструктивными и техническими решениями.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Успенский В.М. Информационная функция сердца. Теория и практика диагностики заболеваний внутренних органов методом информационного анализа электрокардиосигналов / Под ред. В.Б Симоненко. 2-е дополненное изд. М.: «ПЛАНЕТА», 2016. 296 с.
- [2] Рулев М.Е, Ачильдиев В.М., Грузевич Ю.К., Бедро Н.А. Первичная обработка биофизических сигналов электросейсмокардиоблока // Сборник материалов XXIX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, 2022. С. 26-29.
- [3] Рулев М.Е, Ачильдиев В.М., Грузевич Ю.К., Бедро Н.А. Оценка вариабельности дыхания человека по данным электросейсмокардиоблока. Сборник тезисов Российского форума «Микроэлектроника-2022» // Наноиндустрия, 2022. С. 419-420.
- [4] Матвеев В.В. Инерциальные навигационные системы: Учебное пособие. Изд-во ТулГУ, 2012. 199 с.
- [5] Алешин Б.С., Веремеенко К.К., Черноморский А.И. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 424 с.
- [6] Якимов А.В. Физика шумов и флуктуаций параметров: Электронное учебное пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. 85 с.
- iNEMO inertial module: always-on 3D accelerometer and 3D gyroscope with embedded ISPU intelligent sen-sor processing unit. URL: https://www.st.com/en/mems-and-sensors/ism330is.html (дата обращения 31.03.2023).
- [8] Soldatenkov V.A., Gruzevich Yu.K., Achildiev V.M., Esakov V.A., Bedro N.A., Komarova M.N., Levkovich A.D. Some features of micromechanical accelerometers errors identification inside the microvibration sensor and cardioseismometer unit. Nanoindustry, 2019. No. S89. Pp. 569-576.
- [9] Soldatenkov V.A., Gruzevich Yu.K., Achildiev V.M., Mariya Komarova M.N., Bedro N.A., Levkovich A.D. Tilt and microvibration sensor for condition monitoring of buildings. 26th Anniversary Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, 2019, p. 348-351. DOI: 10.23919/ICINS.2019.8769397.
- [10] Межгосударственный стандарт ГОСТ 32144-2013 от 22 июля 2013 г. Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения.
- [11] Achil'diyev V.M., Bedro N.A., Komarova M.N., Rulev M.E., Evseeva Yu.N., Uspenckiy V.M., Gruzevich Yu.K. Gyrocardiography unit for non-invasive human diseases diagnosis. 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, 2020. DOI: 10.23919/ICINS43215.2020.9133891.
- [12] Дроздов Д.В. Влияние фильтрации на диагностические свойства биосигналов // Функциональная диагностика, 2011. С. 75-78.

## Калибровка БИНС по разностям кажущегося ускорения

Б.В.Климкович *НПО «ОКБ ТСП» Минск, Беларусь* e-mail: <u>klimkovich\_boris@mail.ru</u>

Аннотация—Рассмотрен метод калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС), основанный на оценках изменения кажущегося ускорения в плоскости горизонта до и после вращения поворотного стенда. Рассмотренный метод учитывает фактические вращения и положения поворотного стенда, что позволяет проводить калибровку БИНС навигационного класса точности на грубых стендах. Метод позволяет также проводить калибровку с учетом изменения положения модуля чувствительных элементов БИНС в амортизаторах относительно поворотной платформы стенда.

Ключевые слова—бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС), калибровка, инерциальный режим.

#### I. Введение

Калибровка БИНС предназначена для определения параметров математических моделей чувствительных элементов БИНС таких как нелинейность, неортогональность их установки, неточность масштабных коэффициентов и т.п. Использование полученных в процессе калибровки математических моделей позволяет скомпенсировать систематические погрешности чувствительных элементов и уменьшить погрешности БИНС в процессе эксплуатации [1].

Для проведения калибровки БИНС используют поворотные стенды, как правило, оснащенные температурной камерой для определения температурной зависимости параметров калибровки в рабочем диапазоне температур.

В литературе известны методы, основанные на усредненных показаниях акселерометров и гироскопов при определенных статических положениях и вращениях БИНС. При этом параметры калибровки сравниваются с известными значениями силы тяжести в месте проведения калибровки и заданными углами поворотов [2].

Известным методом оценки погрешности калибровки является калибровка по навигационному решению с применение фильтра Калмана и линейной скорости, вычисляемой навигационным алгоритмом БИНС [3].

Рассматриваемый в настоящей работе метод калибровки БИНС является доработкой предложенного в [4] метода (см. также [5–10]), основанного на том, что БИНС, не имеющая систематических погрешностей смещений нулей акселерометров, масштабных коэффициентов и углов рассогласования акселерометров и гироскопов не изменит направление вектора кажущегося ускорения, вычисляемого навигационным алгоритмом БИНС после произвольного поворота.

Важным преимуществом метода калибровки [4] по сравнению с методами [2,3] является независимость оценки указанных выше погрешностей от погрешностей калибровки size- эффекта и запаздываний показаний от чувствительных элементов.

Это обстоятельство является следствием того, что информация о погрешностях кажущегося ускорения оценивается при неподвижном БИНС до и после ее поворота на поворотном стенде.

Следует учесть, что калибровка size-эффекта и запаздываний показаний от чувствительных элементов проводится с учетом выбранных моделей [1, 3]. Приближенный характер этих моделей может приводить к появлению систематических погрешностей в оценке смещений нулей акселерометров, масштабных коэффициентов и углов рассогласования акселерометров и гироскопов при их оценке во время вращения БИНС.

При проведении калибровки предлагаемым в настоящей работе методом необходимо обеспечить наличие начального и конечного неподвижных участков, как и в работах [4–10]. Между ними стенд должен совершить заданное вращение.

Время начального и конечного неподвижных участков выбирается малым по сравнению с периодом Шулера, что позволяет считать кажущиеся ускорения на неподвижных участках постоянными.

Разницы оценок кажущегося ускорения до и после поворота БИНС служат элементами вектора измерения для оценки линейных параметров калибровки.

В отличие от работ [4–10] в рассматриваемом методе калибровки при расчете поправок к параметрам калибровки учитывается не углы, заданные поворотному стенду, а фактические вращения БИНС с учетом нежесткости положения модуля чувствительных элементов в амортизаторах.

В настоящей работе используется правая горизонтная сопровождающая система координат ENU с осями: E(«Х») – на восток, N(«Y») – на север, U(«Z») – вверх по геодезической вертикали места.

#### II. КАЛИБРОВКА ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БИНС

Поскольку настоящая работа посвящена калибровке коэффициентов линейной модели погрешностей все нелинейные коэффициенты моделей чувствительных элементов, нестационарности и неоднородности температуры должны быть получены заблаговременно [1, 11].

Калибровка состоит в нахождения смещений нулей  $B_i^a$  [3],  $B_i^g$  [3] и матриц  $M_{i,j}^a$ [3×3],  $M_{i,j}^g$ [3×3], позволяющих навигационному алгоритму БИНС по показаниям акселерометров  $a_i$  [3] и изменениям ориентации от гироскопов  $\Delta \varphi_i$  [3] за время  $\Delta t$  рассчитать истин-

ные значения кажущегося ускорения  $A_i$  [3] и малых углов поворота  $\Delta \Phi_i$  [3] модуля чувствительных элементов БИНС.

Линейные уравнения расчета кажущегося ускорения и малых углов поворота будут иметь следующий вид:

$$A_{i} = B_{i}^{a} + \sum_{j=1}^{3} M_{i,j}^{a} a_{j} + v_{i}, \qquad (1)$$

$$\Delta \Phi_i = B_i^{\,g} \Delta t + \sum_{j=1}^3 M_{i,j}^{\,g} \Delta \varphi_j + \chi_i \,, \tag{2}$$

где i = 1,2,3 (оси – «Х», «У», «Z»);  $M_{i,j}^{a}$  ( $M_{i,j}^{g}$ ) – при i=j – масштабные коэффициенты соответствующих акселерометров (гироскопов); при  $i \neq j$  – углы рассогласования оси чувствительности *i*-го акселерометра (гироскопа) с *j* осью связанной системы координат; случайные величины  $V_i$ ,  $\chi_i$  имеют нулевое среднее значение:  $\langle v_i \rangle = \langle \chi_i \rangle = 0$ .

Начальные значения смещений нулей  $B_i^a$  и  $B_i^g$  в начале итерационного расчета следует положить равными нулю, а матрицы  $M_{i,j}^a$  и  $M_{i,j}^g$  единичными. Произвольность ориентации связанной системы координат относительно приборного трехгранника в выражении (1) позволяет выбрать:

$$M_{1,2}^a = M_{2,3}^a = M_{3,1}^a = 0.$$

Ниже приведен алгоритм определения погрешностей смещений нулей акселерометров  $B_i^a$  и матриц  $M_{i,i}^a$  и  $M_{i,i}^g$ .

Известно, что максимальная наблюдаемость параметров калибровки БИНС  $B_i^a$  и матриц  $M_{i,j}^a$  и  $M_{i,j}^g$ обеспечивается при вращении БИНС относительно горизонтальной оси [12].

Тогда для проведения калибровки необходимо поочередно проводить тестирование БИНС вокруг горизонтально лежащих осей *X*, *Y*, *Z* связанной системы координат на углы  $90^{\circ}+360^{\circ}n \rightarrow 180^{\circ}+360^{\circ}n \rightarrow 90^{\circ}+360^{\circ}n$  с начальным неподвижным положением, вращением вокруг оси на указанный угол и конечным неподвижным положением с записью выходных данных чувствительных элементов в файл (*n* - целое число. В данной работе *n* = 5).

Из работ [4–10] следует, что изменение кажущегося ускорения в плоскости горизонта до и после вращения  $\delta \dot{v_1}$ ,  $\delta \dot{v_2}$  состоит из двух слагаемых – слагаемого, связанного с погрешностью калибровки акселерометров  $\delta \alpha_1$ ,  $\delta \alpha_2$  и слагаемого, связанного с погрешностью калибровки гироскопов, приводящего к ошибкам ориентации  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ :

$$\delta V_1 = \delta \alpha_1 - g_0 \theta_2, \qquad (3)$$

$$\delta V_2 = \delta \alpha_2 + g_0 \theta_1, \tag{4}$$

где  $g_0$  – ускорение силы тяжести в месте проведения калибровки.

В уравнениях (3,4) левые части зависят от оценок изменения кажущегося ускорения в плоскости горизонта на неподвижных участках теста, а именно интервалах времени от 0 до  $t_1$  и от  $t_2$  до окончания теста:

$$\delta V_i = V_i(t_2) - V_i(t_1).$$
(5)

Элементы вектора измерений Z[18] формируются в режиме постобработки методом наименьших квадратов из оценок по формуле (5). Численные значения элементов вектора измерений Z полученные по результатам навигационного счета на указанных выше интервалах времени, дают следующие элементы вектора измерений Z:

$$Z_{2N-1} = \delta V_1, \qquad (6)$$

$$Z_{2N} = \delta V_2 , \qquad (7)$$

где номер теста N = 1...9.

Для получения оценок погрешности калибровок необходимо записать аналитические выражения для правых частей уравнений (3,4) через погрешности калибровки  $b^{a}[3]$ ,  $m^{a}[3\times3]$ ,  $m^{g}[3\times3]$  погрешности смещений нулей акселерометров и матриц  $M^{a}_{i,j}$  и  $M^{g}_{i,j}$  соответственно.

Запишем для них следующие выражения:

$$\delta \alpha_i = \alpha_i(t_2) - \alpha_i(t_1), \qquad (8)$$

$$\alpha_{i}(t_{1(2)}) = \sum_{p=1}^{3} C_{i,p}(t_{1(2)}) (b_{p}^{a} + \sum_{j=1}^{3} m_{p,j}^{a} \bar{A}_{j}(t_{1(2)})), \quad (9)$$

$$\theta_i = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k,j=1}^{3} C_{i,k}(t) m_{k,j}^g \omega_j(t) dt, \qquad (10)$$

где  $i = 1,2; j = 1,2,3; \bar{A}_j(t_{1(2)}) = \langle A_j \rangle_{0-t1(t2-t_{finish})}$  усредненные значения показаний акселерометров на интервалах времени от 0 до  $t_1$  (от  $t_2$  до  $t_{\text{finish}}$ ), с учетом предыдущий итераций,  $\omega_j(t)$  – проекция мгновенной скорости вращения на *j*-ю координату связанного базиса.

Представим интеграл (10) в виде конечной разности и изменим порядок суммирования:

$$\theta_i \cong \sum_{k,j=1}^3 \left( \sum_{p=t_1/\Delta t}^{t_2/\Delta t} C_{i,k}(p) \Delta \Phi_j(p) \right) m_{k,j}^g = \sum_{k,j=1}^3 \Theta_{i,k,j} m_{k,j}^g, \quad (11)$$

где величины  $\Theta_{i,k,j}$  определяются суммой на интервале времени вращения БИНС от  $t_1$  до  $t_2$  и означают проекции фактических углов поворота модуля чувствительных элементов БИНС вокруг осей k и j на ось i:

$$\Theta_{i,k,j} = \sum_{p=t_1/\Delta t}^{t_2/\Delta t} C_{i,k}(p) \Delta \Phi_j(p), \qquad (12)$$

где *i* = 1, 2; *j*, *k* = 1, 2, 3.

Приведенные выше выражения позволяют сформировать задачу оптимальной оценки вектора состояния X [15], образованного из оценок погрешностей трех элементов матрицы  $M_{i,j}^{a}$ , матрицы  $M_{i,j}^{g}$  и смещений нулей акселерометров:

$$X^{T} = [m_{1,3}^{a}, m_{2,1}^{a}, m_{3,2}^{a}, m_{1,1}^{g}, m_{1,2}^{g}, m_{1,3}^{g}, m_{2,1}^{g}, m_{2,2}^{g}, m_{2,3}^{g}, m_{3,1}^{g}, m_{3,2}^{g}, m_{3,3}^{g}, b_{1}^{a}, b_{2}^{a}, b_{3}^{a}].$$
(13)

Для элементов матрицы измерений *H*[18x15]можно записать следующие выражения:

$$H_{2N-1,i} = C_{1,i}(t_2) \bar{A}_{q(i)}(t_2) - C_{1,i}(t_1) \bar{A}_{q(i)}(t_1) , \qquad (14)$$

$$H_{2N-1,(3i+j)} = g_0 \Theta_{2,i,j} \quad , \tag{15}$$

$$H_{2N-1,(i+12)} = C_{1,i}(t_2) - C_{1,i}(t_1) , \qquad (16)$$

$$H_{2N,i} = C_{2,i}(t_2)\bar{A}_{q(i)}(t_2) - C_{2,i}(t_1)\bar{A}_{q(i)}(t_1) , \qquad (17)$$

$$H_{2N,(3i+j)} = -g_0 \Theta_{1,j,j} \quad , \tag{18}$$

$$H_{2N,(i+12)} = C_{2,i}(t_2) - C_{2,i}(t_1) \quad , \tag{19}$$

где функция перестановки q(i) имеет вид: q(1) = 3, q(2) = 1, q(3) = 2; i, j=1,2,3, N=1,2...9 – номер теста.

Задача оптимальной оценки вектора состояния X при известной матрице измерений H и известном векторе измерений Z имеет вид:

$$Z = HX + r , \qquad (20)$$

где *r* [18] – случайный вектор с нулевым математическим ожиданием.

Предполагая гауссово распределение случайных величин *r* можно получить оценку вектора *X* по измерениям *Z* и известных матрицах *H* и *R* методом наименьших квадратов [12]:

$$X = (H^{+}R^{-1}H)^{-1}H^{+}R^{-1}Z.$$
 (21)

Погрешности масштабных коэффициентов акселерометров, не входящих в вектор состояния *X*, находят с учетом средних значений оценки вертикального кажущегося ускорения при ориентации акселерометров осью чувствительности вверх и вниз [4,5]:

$$m_{p,p}^{a} = (V_{3}(t_{2}) + V_{3}(t_{1}))/2g_{0}, \qquad (22)$$

где *p*=1,2,3.

Для p = 1 величины справа берутся на тесте 8, для p = 2 на тесте 2, для p = 3 на тесте 5.

Оценка погрешностей параметров калибровки  $b^{a}[3]$ ,  $m^{a}[3 \times 3]$ ,  $m^{g}[3 \times 3]$  полученная из выражений (21, 22) должна быть вычтена из соответствующих элементов смещений нулей и матриц  $M_{i,j}^{a}$  и  $M_{i,j}^{g}$ .

Итерационное повторение описанной выше процедуры устранения систематических погрешностей калибровки дают возможность получать БИНС навигационного класса точности.

#### III. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ РАССМОТРЕННОГО МЕТОДА

На рис. 1 и 2 представлены зависимости скоростей БИНС в плоскости горизонта  $V_x$ ,  $V_y$  от времени выполнения теста на первой итерации (рис. 1) и восьмой итерации (рис. 2).

Из рис. 1 следует, что наклоны зависимостей скоростей  $V_x$ ,  $V_y$  от времени до вращения значительно отличаются от соответствующих наклонов после вращения. Это означает, что в связанной системе координат вектор кажущегося ускорения после совершения поворота БИНС заметно изменил свою ориентацию, что связано с наличием погрешностей в параметрах  $B_i^a$ ,  $M_{i,j}^a$  и  $M_{i,j}^g$ .

Из рис. 2 следует, что после проведения итерационного уточнения параметров калибровки, наклоны зависимостей скоростей  $V_x$ ,  $V_y$  от времени до и после вращения не изменили свои значения.



Рис. 1. Временная зависимость скоростей на первой итерации



Рис. 2. Временная зависимость скоростей на восьмой итерации.

На рис. 3 представлена зависимость среднеквадратичной погрешности измерений *RMS* =  $\sqrt{\langle Z^2 \rangle} \equiv (\sum_{i=1}^{18} Z_i^2 / 18)^{1/2}$  от номера итерации *N*. Кривая 1 рис. 3 рассчитана для матрицы измерений *H* в соответствии с работами [4–10]. Кривая 2 рассчитана в соответствии с методом, изложенным в настоящей работе.



Рис. 3. Зависимость среднеквадратичной погрешности измерений *RMS<sub>z</sub>* от номера итерации *N*: 1 – в соответствии с работами [4–10], 2 – в соответствии с настоящей работой.

Из рис. 3 следует, что скорость сходимости итераций по методу, изложенному в настоящей работе выше, чем в соответствии с работами [4–10]. Также видно, что остаточная погрешность измерений в настоящем методе меньше.

На рис. 4 представлены зависимости оценки погрешности корректирующих поправок параметров акселерометров  $RMS_m^a = \sqrt{((m_{1,3}^a)^2 + (m_{2,1}^a)^2 + (m_{3,2}^a)^2)/3}$  (кривые 1 и 4), параметров гироскопов  $RMS_m^g = \sqrt{(\sum_{i,j=1}^3 (m_{i,j}^s)^2)/9}$  (кривые 2 и 5), смещения нулей акселерометров  $RMS_b^a = \sqrt{(\sum_{i=1}^3 (b_i^a)^2)/3}$  (кривые 3 и 6, в единицах измерения, м/c<sup>2</sup>) в соответствии с работами [4–10] и настоя-





Рис. 4. Зависимость оценок погрешности от номера итерации N: 1 –  $RMS\_m^a$ , 2 –  $RMS\_m^g$ , 3 –  $RMS\_b^a$  в соответствии с работами [4-10], 4 –  $RMS\_m^a$ , 5 –  $RMS\_m^g$ , 6 –  $RMS\_b^a$  в соответствии с настоящей работой

#### IV. Заключение

В методе калибровки, предложенном в настоящей работе, для оценки погрешности и коррекции смещений нулей акселерометров и матриц акселерометров и гироскопов используется оценка изменения кажущегося ускорения на неподвижных участках до и после вращения стенда также, как и в работах [4–10]. Этим исключается влияние погрешностей моделей по запаздываниям показаний от акселерометров и гироскопов и sizeэффекту на оценку смещений нулей акселерометров и матриц акселерометров и гироскопов.

Отличие предложенного метода от метода, приведенного в [4-10] состоит в исключении предположения о заданных значениях матрицы поворота, кажущегося ускорения и одноосных углов вращений, задаваемых поворотному стенду.

В предлагаемом методе используются фактические величины значения матрицы поворота, кажущегося ускорения, получаемые на основе показаний гироскопов и акселерометров. Ранее проведенные итерации приближают указанные величины к своим реальным значениям.

Следует отметить, что в рассмотренном методе погрешность работы стенда и (или) упругость амортизаторов модуля чувствительных элементов с увеличением числа итераций перестают влиять на погрешность результирующей калибровки БИНС, проявляясь только в конечном общем повороте ориентации гироскопов и акселерометров.

#### Литература

- IEEE Recommended Practice for Inertial Sensor Test Equipment, Instrumentation, Data Acquisition, and Analysis. IEEE Aerospace and Electronic System Society. IEEE Std. 1554, 2005.
- [2] Е.А. Измайлов, С.Н. Лепе, А.В. Молчанов, Е.Ф. Поликовский Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатфоренных инерциальных навигационных систем. // Гироскопия и навигация. 2019. № 2 (105). с. 162-177. XV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ «ЦНИИ Электроприбор», 2008. С. 145–154.
- [3] Г.И. Емельянцев, Б.А. Блажнов, Е.В. Драницына, А.П. Степанов. О калибровке измерительного модуля прецизионной БИНС и построении связанного с ним ортогонального трехгранника // Гироскопия и навигация. 2016. № 1 (92). -с. 36-48.
- [4] P. G. Savage, "Calibration Procedures For Laser Gyro Strapdown Inertial Navigation Systems", 9th Annual Electro-Optics / Laser Conference and Exhibition, Anaheim, California, October 25-27, 1977.
- [5] J. W. Diesel, Calibration of a ring laser gyro inertial navigation system. Proc. of the 13<sup>th</sup> Biennial Guidance Test Symposium, vol. 1, Holloman AF, New Mexico, pp. SO1A.1-SO.1A.37, 1987.
- [6] P. G. Savage, Strapdown analytics. Second Edition. Strapdown Associated. Minnesota. Part 2, 2000.
- [7] R. M. Rogers, Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems. Second Edition. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 2nd ed, 2003.
- [8] A. Brown, R. Ebner, J. Mark, A calibration technique for laser gyro strapdown inertial navigation system. DGON Proceedings. Gyro Technology Symposium, 1982, Stuttgart.
- [9] G. Wei, C. Gao, Wang Qi., Quin Wang, Z. Xiong, X. Long, A new systematic calibration method of ring laser gyroscope inertial navigation system. Electro-Optical and Infrared Systems. Proc. of SPIE Vol. 9987, doi: 10.1117/12.2241253, 2016.
- [10] T.G. Lee, C.K. Sung, Estimation Technique of Fixed Sensor Error for SDINS Calibration. International Journal of Control, Automation, and System. Vol. 2, №. 4, 2004, pp. 536–541.
- [11] Б. В. Климкович, Влияние случайной погрешности температурных датчиков на качество температурной компенсации смещения нуля ВОГ нейронной сетью. // Гироскопия и навигация, 2020, т. 28 - № 4 (111), с. 53–67.
- [12] А.А. Голован, Н. А. Парусников, Математические основы навигационных систем. Часть II-2-е изд. испр. и доп. – М.: МАКС Пресс, 2012.

# Алгоритмы калибровки блока гироскопов как решения задач минимаксного оценивания

П.А. Акимов Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова Москва, Россия akmpavel@rambler.ru

Аннотация—Представлена методика калибровки блока датчиков угловой скорости (гироскопов), основанная на методе минимаксного (гарантирующего) оценивания. При калибровке решается задача выбора режимов вращения и обработки полученных сигналов. Метод гарантирующего оценивания состоит в определении неизвестных параметров таким образом, чтобы минимизировать гарантированную ошибку оценки, т.е. ошибку при наихудших реализациях погрешностей измерений. Получаемые данным методом решения не только формируют алгоритм оценивания, но и явным образом описывают оптимальные режимы движения блока гироскопов на стенде.

Ключевые слова—калибровка, метод минимаксного оценивания, блок гироскопов, негладкая оптимизация.

#### I. Введение

Цель рассматриваемой задачи калибровки состоит в оценке параметрических погрешностей - сдвигов нулей, масштабных коэффициентов и углов перекоса - в блоке, состоящем из трех датчиков угловой скорости (гироскопов, ДУС). Оценка производится на основании выходных сигналов гироскопов и информации с калибровочного стенда. Для определения этих параметров производится серия измерений на стенде, позволяющем с высокой точностью управлять скоростью вращения и ориентацией блока [1-3]. Модель стендовых испытаний блока ДУС, вообще говоря, является нелинейной, и наряду с параметрическими определяемыми погрешностями включает в себя иные ошибки датчиков и погрешности стенда, поэтому в работе отдельное внимание уделено вопросам правильного учета погрешностей и снижению их влияния на результаты оценки. Зачастую выбор угловых скоростей вращения инерциальной системы на стенде производится экспертно, а основное внимание при решении задачи калибровки уделяется численной обработке сигналов. В данной работе при помощи метода гарантирующего оценивания [4, 5] найдена оптимальная стратегия стендовых испытаний, т.е. при помощи вариационной задачи определена наилучшая последовательность режимов вращения и соответствующий ей алгоритм оценивания.

#### II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАЛИБРОВКИ

#### А. Кинематические соотношения для стендовых испытаний

Опишем модель выходных сигналов блока, состоящего из трех гироскопов, на стенде [1, 2, 6]:

$$\zeta(t) = \omega_z(t) + \Gamma \omega_z(t) + v_0 + \delta v(t),$$

где  $\zeta(t) \in \mathbf{R}^3$  – вектор-столбец, составленный из показаний гироскопов в момент времени t;  $\omega_z(t)$  – вектор

А.И. Матасов Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова Москва, Россия alexander.matasov@gmail.com

абсолютной угловой скорости блока ДУС в проекциях на оси приборной системы координат;  $\Gamma \in \mathbb{R}^{3\times 3}$  – неизвестная симметричная матрица систематических погрешностей, диагональными элементами которой являются ошибки масштабных коэффициентов гироскопов, а внедиагональными – углы перекосов между осями чувствительности;  $v_0$  – неизвестный вектор-столбец сдвигов нулей гироскопов,  $\delta v(t)$  – вектор случайных непараметрических погрешностей ДУС. Цель калибровки состоит в оценке параметров  $\Gamma, v_0$  на основании измерений  $\zeta(t)$ . С учетом того, что угловой скоростью вращения на стенде можно управлять, уравнение измерений записывается в виде

$$\zeta(t) = (I_3 + \Gamma)D(t)((s(t) + \varepsilon(t))(I_3 + \hat{\alpha})y(t) + u_x)$$
(1)  
+  $v_0 + \delta v(t)$ 

Здесь  $u_x$  – угловая скорость вращения Земли в географической системе координат, s(t), y(t) – задаваемые экспериментатором величина и направление (единичный вектор) угловой скорости вращения блока ДУС на стенде,  $\varepsilon(t)$  – погрешность в задании величины скорости вращения,

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} -$$

неизвестная кососимметрическая матрица, описывающая неточности (малые углы поворота  $\alpha_i$ ) в задании направления вращения на стенде (здесь и далее символ  $\hat{\alpha}$  обозначает матрицу, построенную на основании вектора малых углов  $\alpha$ , а  $I_3$  – единичную матрицу). Ортогональная матрица D(t) задает переход от географической системы координат к приборной, связанной с вращающимся блоком ДУС. В первоначальный момент времени D(0) определена с неизвестной погрешностью, задаваемой малыми углами поворота  $\beta$ :  $D(0) = D_{init}(I_3 + \hat{\beta})$ , ортогональная матрица  $D_{init}$  – доступная благодаря первоначальной выставке блока на стенде информация о матрице ориентации.

Далее будем предполагать, что погрешности стенда ограничены по абсолютной величине известными константами, которые могут быть определены из документации о характеристиках стенда

 $|\alpha_i| \le \alpha_{\max}, |\beta_i| \le \beta_{\max}, |\varepsilon(t)| \le \varepsilon_{\max}, i = 1,2,3.$ 

Рассмотрим частный случай движения блока ДУС на стенде, при котором в течение определенного отрезка

времени вращение производится с постоянной угловой скоростью, а затем направление и величина меняются и снова запускается режим вращения, т.е. функции s(t), y(t) являются кусочно-постоянными.

#### В. Модель измерений

Получим осреденный аналог уравнения измерений (1), т.е. уравнение, описывающее взаимосвязь осреденного во времени сигнала  $\zeta(t)$  и параметров задачи, на отрезке времени, где *s*, *y* постоянны. Для этого введем несколько допущений.

1. В предположении о малости  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\varepsilon(t)$ ,  $\Gamma_{ij}$ , можно пренебречь слагаемыми второго и третьего порядка малости в формуле (1).

2. Может быть доказано, что  $u^{\perp}$  – неизвестная погрешность модели, возникающая при осреднении измерений угловой скорости вращения Земли, удовлетворяет равенству  $y^T D_{init} u^{\perp} = 0$  и компоненты ограничены известной константой  $|u_i^{\perp}| \le u_{\text{max}}$ .

3. Флуктуационные погрешности  $\delta v(t)$  при осреднении не превышают некоторой известной константы:  $|\delta \widetilde{v}_i| \leq v_{max}$ .

4. Авторами показано, что при выполнении определенных ограничений на управляющий параметр  $s \in [s_{\min}, s_{\max}]$  ( $s_{\min}, s_{\max}$  определены аналитически), можно пренебречь нелинейными слагаемыми вида  $s\hat{\beta}\hat{\alpha}y$ ,  $\Gamma u^{\perp}$ . Таким образом, вращение блока гироскопов на стенде с меньшей угловой скоростью позволяет снизить влияние погрешностей на результат оценивания, но если вращение будет слишком медленным, то может оказаться, что ошибка осреднения превосходит требуемую точность оценки.

В сделанных предположениях, получим формулу для осредненного сигнала  $\widetilde{\zeta}$ :

$$\begin{split} \widetilde{\zeta} &= D_{init} \left( s(I_3 + \hat{\alpha} + \hat{\beta})y + \varepsilon y + (I_3 + \hat{\alpha} + \hat{\beta})yy^T u_x + yy^T \hat{\alpha} u_x \right) + u^{\perp} + \Gamma D_{init} \left( sy + yy^T u_x \right) + v_0 + \delta \widetilde{v}, \end{split}$$
(2)

где є, бі – результаты осреднения соответствующих погрешностей стенда и датчиков.

Для ограничения влияния погрешностей применим метод скаляризации: домножим уравнения измерений (2) на заданный вектор  $D_{init}y$ , и, воспользовавшись кососимметричностью нескольких слагаемых, получим одномерную модель измерений:

$$z(y,s) = y^T D_{init}^T \Gamma D_{init} (sy + yy^T u_x) + y^T D_{init}^T v_0 + r,$$
  

$$z(y,s) = y^T D_{init}^T \widetilde{\zeta} - s - y^T u_x,$$
  

$$r = \varepsilon - y^T \hat{\alpha} u_x + y^T D_{init}^T \delta \widetilde{v}.$$
(3)

Таким образом, целевая стратегия стендовых испытаний будет состоять из нескольких этапов, на каждом из которых будет происходить вращение блока ДУС на стенде с фиксированной угловой скоростью, и на основании выходных сигналов будут формироваться измерения, описываемые формулами (3).

#### III. Минимаксное оценивание

Представим оцениваемые параметры в виде 12мерного вектора  $q = (\Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \Gamma_{21}, \dots, \Gamma_{33}, v_{01}, v_{02}, v_{03})^T$ . Пусть на стенде доступны *К* значений вектора угловой скорости вращения s(k)y(k), которым, в случае проведения эксперимента, будут соответствовать осредненные измерения z(y(k), s(k)). При заданном векторе  $a \in \mathbf{R}^{12}$ необходимо оценить скаляр  $a^T q$  с помощью линейной

функции измерений 
$$\sum_{k=1}^{K} \chi(k) z(y(k), s(k))$$
, где  $\chi(k) \in \mathbf{R}$  –

весовые коэффициенты оценивателя, которые требуется найти. В простейшем случае  $a = (1,0,0,..,0)^T$ ,  $(0,1,0,..,0)^T$  и т.д., т.е. в такой формулировке определение каждой из компонент  $\Gamma_{ij}$ ,  $v_{0j}$  сводится к отдельной задаче оценивания.

Метод минимаксного (гарантирующего) оценивания состоит в том, чтобы определить  $\chi = \{\chi(k)\}_{k=1}^{K}$  как решение оптимизационной задачи

$$\sup_{q,\alpha,\beta,\varepsilon,\delta\widetilde{v}} \left| \sum_{k=1}^{K} \chi(k) z(y(k), s(k)) - a^{T} q \right| \to \inf_{\chi \in \mathbb{R}^{K}},$$
(4)

здесь точная верхняя грань ищется при ограничениях

$$q \in \mathbf{R}^{12}, \quad |\alpha_i| \le \alpha_{\max}, \quad |\beta_i| \le \beta_{\max}, \\ |\varepsilon| \le \varepsilon_{\max}, \quad |\delta \widetilde{\nu}_i| \le \nu_{\max}, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

а измерения z(y(k), s(k)) определены формулой (3).

Тем самым χ минимизирует максимальную (гарантированную) ошибку оценки неизвестного параметра.

Важно подчеркнуть, что минимаксная задача используют не конкретные измерительные данные, а лишь структуру измерений (3) и доступное множество векторов угловой скорости  $\{s(k)y(k)\}_{k=1}^{K}$  (например, дискретное множество возможных направлений и величин вращения блока на стенде), поэтому может быть решена до проведения стендовых испытаний. Оптимальное решение  $\chi$  задает "веса", с которыми надо просуммировать измерения, а соответствующие наборам измерений с индексами k ненулевые веса задают те направления, вдоль которых требуется вращать блок на стенде. Таким образом, при заданном множестве допустимых векторов угловой скорости, решение минимаксной задачи (4) определяет оптимальный набор векторов угловой скорости для оценки неизвестного параметра  $a^T q$  (как правило, таких "ненулевых" направлений существенно меньше K).

Авторами доказано, что вектор  $\chi$  является решением минимаксной задачи (4) тогда и только тогда, когда  $\chi$  является решением проблемы  $l_1$  – аппроксимации

$$\sum_{k=1}^{K} (v_{\max} \| D_{init} y(k) \|_{1} + \alpha_{\max} \| \hat{u}_{x} y(k) \|_{1} + \varepsilon_{\max}) \| \chi(k) | \rightarrow \inf_{\gamma \in \mathbf{R}^{K}}$$
(5)

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{K} \chi(k) \begin{pmatrix} \left( D_{init}(s(k)y(k) + y(k)y^{T}(k)u_{x}) \right) \otimes D_{init}y(k) \\ D_{init}y(k) \end{pmatrix} = a,$$

где символ ⊗ обозначает произведение Кронекера.

Данная задача является выпуклой и может быть решена при помощи различных программных пакетов [7], в частности, авторы использовали пакет CVXPy и реализацию описанной модели средствами языка Python.

#### IV. МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Для иллюстрации предложенного метода рассмотрим пример определения оптимального оценивателя. Параметры  $\alpha_{\max}$ ,  $\beta_{\max}$ ,  $\varepsilon_{\max}$ ,  $\nu_{\max}$  были заданы исходя из характеристик одного из распространенных калибровочных стендов, рассматривались две возможных величины угловой скорости  $s_1 = 0.017 \cdot 1/c$ ,  $s_2 = 0.034 \cdot 1/c$ , а доступные направления угловой скорости вращения y(k)равномерно расположены на единичной сфере.

В результате численного решения задачи (5) получено, что оптимальные оцениватели для диагональных компонент Г<sub>*ii*</sub> имеют вид:

$$\chi_{ii}(y,s) = \kappa_0 \delta(y - e_i, s - s_2) + \kappa_0 \delta(y + e_i, s - s_2) \,.$$

Здесь и далее, для краткости использовано обозначение y = y(k), s = s(k),  $e_i$  – единичный вектор с i – й компонентой, равной 1, скаляр  $\kappa_0$  определяется в решении оптимизацинной задачи, а  $\delta(y - e_i, s - s_2)$  – индикаторная функция, принимающая значение 1 только при  $y = e_i$ ,  $s = s_2$ , и 0 в остальных случаях. Иными словами, чтобы оценить, к примеру, компоненту  $\Gamma_{11}$  – масштабный коэффициент ошибки первого гироскопа, необходимо провести две серии измерений, вращая блок вдоль оси чувствительности этого гироскопа с максимальной угловой скоростью сначала в одну сторону, затем в другую.

Для внедиагональных элементов  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$  оптимальные оцениватели описываются формулами:

$$\begin{split} \chi_{12}(y,s) &= \kappa_0 \delta(y - e(\pi/4), s - s_2) + \kappa_0 \delta(y - e(3\pi/4), s + s_2) + \\ &+ \kappa_0 \delta(y - e(5\pi/4), s - s_2) + \kappa_0 \delta(y - e(7\pi/4), s + s_2), \end{split}$$

где  $e(9) = (\cos 9, \sin 9, 0)^T$  – единичные векторы, соответствующие повороту на угол 9 в плоскости  $e_1e_2$ . Аналогично, с точностью до перестановки индексов в соответствующих векторах, определяются оцениватели для компонент  $\Gamma_{13} = \Gamma_{31}, \Gamma_{23} = \Gamma_{32}$ . Таким образом, оптимальный эксперимент для оценки углов перекоса между осями чувствительности гироскопов состоит в проведении четырех серий измерений, при каждой из которых вращение происходит вдоль биссектрисы угла между соответствующими координатными осями, с максимальной по величине допустимой угловой скоростью.

Оптимальные оцениватели для сдвигов нулей v<sub>oi</sub> имеют следующую структуру:

$$\chi_{\nu i}(y,s) = \kappa_1 \delta(y - e_i, s - s_1) - \kappa_2 \delta(y + e_i, s - s_1) + \kappa_3 \delta(y - e_i, s - s_2) - \kappa_4 \delta(y + e_i, s - s_2),$$

где значения к<sub>*j*</sub> численно определяются при решении задачи (5) и близки к величине 1/4.

Рассмотрим "модельные" примеры обработки сигналов ДУС. Случайным образом выбирались "истинные" значения систематических погрешностей  $\Gamma_{ij}^{true}$ ,  $v_{0i}^{true}$ . Для каждой компоненты определялся оптимальный оцениватель, которому соответствовали 2-4 значения угловой скорости s(k)y(k). Затем для каждого из них генерировалось по 20 независимых экспериментов, соответствующих стендовым испытаниям, при которых вращение происходит с найденной угловой скоростью. После чего для каждого из 20 экспериментов независимо результаты полученных выходных "сигналов" ДУС преобразовывались согласно формуле (3) и использовались для оценки неизвестных погрешностей.

Графики моделируемого сигнала  $\zeta_i(t)$  (signal), компоненты угловой скорости  $sy_i$  (Ang. velocity), и угловой скорости с учетом сдвига нуля  $sy_i + v_{oi}$  (Ang. velocity+bias) показаны на рис.1.



В таблице 1 приведены средние по 20 сериям относительные ошибки оценки параметров (например, Rel. Error =  $|v_{0i}^{est} - v_{0i}^{true}| / v_{0i}^{true}$ ) и характерные масштабы

(Magnitude) этих параметров.

ТАБЛИЦА 1. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ

Variable	Rel. Error	Magnitude
$\Gamma_{11},\Gamma_{22},\Gamma_{33}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
$\Gamma_{12},\Gamma_{23},\Gamma_{13}$	$1.88 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
$v_{01}, v_{02}, v_{03}$	0.14	$3 \cdot 10^{-7}$ 1/sec

Также моделирование показывает, что предлагаемый метод нечувствителен к заданию верхних границ для шумов  $\varepsilon_{max}$ ,  $v_{max}$ , т.е. при решении задачи оценивания

параметры модели  $\varepsilon_{\rm max}$ ,  $v_{\rm max}$  можно довольно грубо задать существенно превосходящими средний наблюдаемый уровень шума либо принять их равными характерным масштабам погрешностей из документации о блоке ДУС и стенде. С другой стороны, точность оценки критически зависит от модуля угловой скорости s. На рис. 2 показано, как относительная точность оценки  $v_{oi}$  меняется при варьировании s и при разных значениях  $v_{\rm max}$  $(1\cdot10^{-8}, 2\cdot10^{-7}, 4\cdot10^{-6}$  – сценарии 1-3 соответственно). Это наблюдение подтверждает, что слишком медленное и слишком быстрое вращение делает невозможным применение линейных моделей измерений.

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена методика применения минимаксных методов оценивания в задаче калибровки блока ДУС. Показано, что при введении дополнительных ограничений на управляющие параметры задачи, исходную нелинейную модель измерений можно свести к линейной без существенной потери точности. Результатами численного моделирования подтверждено, что данный подход позволяет сформировать оптимальные планы калибровки, имеющие простую физическую интерпретацию (блок ДУС необходимо вращать вдоль 2-4 направлений, естественным образом связанных с его осями чувствительности). А получаемые алгоритмы оценивания демонстрируют высокую точность определения ошибок масштабных коэффициентов и углов перекоса, и приемлемую точность в определении сдвигов нулей. Рассмотренный подход может быть распространен на другие задачи обработки сигналов, предполагающие оптимальный выбор плана эксперимента.



Рис. 2. Точности оценивания при разных угловых скоростях

#### ЛИТЕРАТУРА

- N.B. Vavilova, I.A. Vasineva, A.A. Golovan, A.V. Kozlov, I.A. Papusha, N.A. Parusnikov, The Calibration Problem in Inertial Navigation, Journal of Mathematical Sciences, vol. 253, no. 6, 2021, pp. 818-836.
- [2] Тарыгин И. Е. Методика калибровки тепловой модели блока чувствительных элементов, состоящего из трех датчиков угловой скорости // Гироскопия и навигация. №4. 2019. С. 88-102.
- [3] Веремеенко К.К., Галай И.А. Разработка алгоритма калибровки инерциальной навигационной системы на двухосном испытательном стенде // Труды МАИ. №6. 2013. С. 1-14.
- [4] Лидов М.Л. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космические исследования. 1964. Т. 2, № 5. С. 713-715.
- [5] Матасов А.И. Вариационные задачи для калибровки блока ньютонометров // Автоматика и телемеханика. №12. 2019. С. 59-79.
- [6] Голован А.А., Парусников Н.А, Математические основы навигационных систем. Ч. І. Математические модели инерациальной навигации. М.: МАКС Пресс, 2011. 110 с.
- [7] Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И. Гарантирующий подход и 11-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012. 296 с.

# Повышение эффективности бесплатформенных инерциальных навигационных систем за счет использования типовых замкнутых угловых движений

С.Ю. Перепелкина *АО «НПО автоматики имени академика Н.А. Семихатова»* г. Екатеринбург, Россия <u>avt@npoa.ru</u>

Аннотация-Рассматриваются два типа замкнутых угловых движений объекта управления на базе бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Указанные движения задаются в виде определенной последовательности пространственных разворотов относительно связанных (приборных) осей. Исследуются изменения в структуре погрешностей углового положения объекта управления относительно приборных осей по результатам таких типовых движений. При этом предполагается, что в углоизмерительных каналах преобладают погрешности, пропорциональные измеряемому сигналу. Показана возможность перераспределения погрешностей в приборных осях путем задания параметров типовых замкнутых угловых движений. Описаны направления улучшения основных характеристик объекта управления на базе бесплатформенной инерциальной навигационной системы за счет использования таких типовых движений. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова—бесплатформенная инерциальная навигационная система, структура погрешностей в приборных осях, перераспределение погрешностей в приборных осях, типовые замкнутые угловые движения, углоизмерительные погрешности масштаба.

#### I. Введение

Одним из основных сдерживающих факторов широкого использования бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) в авиационной и ракетно-космической технике является отсутствие возможности полноценного решения задачи тарировки БИНС в составе объекта управления. Комплексирование с привлечением спутниковой или какой-либо другой внешнетраекторной информации отчасти позволяет решить задачу тарировки БИНС в полете («в запуске»). Тем не менее, в целом, данная проблема остается актуальной и сейчас. Это выражается в том, что не всегда удается компенсировать погрешности БИНС «от запуска к запуску», которые могут значительно превышать соответствующие погрешности БИНС «в запуске».

Погрешности определения параметров навигации и угловой ориентации при использовании БИНС в значительной степени связаны с условиями эксплуатации самого объекта управления. В частности, многое зависит от характера его движения по траектории с ограничениями по уровню линейных перегрузок и угловой скорости. На активном участке движения на первый план выходят погрешности, пропорциональные сигналу, накопленному в углоизмерительных каналах БИНС. Снижение указанного показателя и/или его перераспределение между приборными осями является одним из де́йственных направлений повышения эффективности А.А. Федотов *АО «НПО автоматики имени академика Н.А. Семихатова»* г. Екатеринбург, Россия <u>аvt(@проа.ru</u>

БИНС. Этого можно достичь в том числе за счет использования специальных замкнутых угловых движений на установившемся (крейсерском) участке траектории. При этом форма траектории в целом не меняется, и целевая задача сохраняется.

В результате становится возможным исключить или существенно снизить влияние одного или двух (из трех) углоизмерительных каналов БИНС на погрешность углового положения объекта управления относительно заданной приборной оси. Как следствие, это позволяет, с одной стороны, повысить наблюдаемость параметров модели измерений БИНС, а с другой – отказаться от уточнения отдельных параметров по внешнетраекторной информации из-за снижения их веса (влияния).

#### II. Описание замкнутых угловых движений

Направление повышения эффективности БИНС за счет использования специальных замкнутых угловых движений рассматривается нечасто, поскольку требует ощутимого усложнения программно-алгоритмического обеспечения системы управления, обусловленного следующими факторами. Появляется необходимость использования накопленного по измерительным осям датчиков сигнала для расчета соответствующих матриц ошибок в углоизмерительных каналах БИНС, известным образом ориентированных относительно приборных осей. Кроме того, возникают затраты из-за собственно организации специальных замкнутых угловых движений объекта управления. При этом основной особенностью указанной постановки задачи является то, что вопросы навигации и управления уже нельзя рассматривать независимо друг от друга.

В публикациях [1–4] исследовались близкие задачи. В работе [4] для улучшения характеристик БИНС рассматривались конические движения относительно вертикальной оси объекта управления. В рамках развития указанной темы авторами [5] в качестве типовых замкнутых угловых движений были предложены Nобразные и M-образные развороты.

Для определенности примем, что приборные оси правой ортогональной системы координат  $X_{\Pi}Y_{\Pi}Z_{\Pi}$  сонаправлены соответствующим связанным осям (крен, рыскание, тангаж) объекта управления. Схематично N-разворот (пунктирная линия) и M-разворот (сплошная линия) представлены на рис. 1 для случая, когда повороты по тангажу и крену в сумме заменяют поворот по рысканию. Заключительный поворот непосредственно по рысканию обеспечивает возврат в исходное по угловому положению.



Рис. 1. Общий вид N-и М-разворотов

Как следует из рисунка, указанные NM-развороты задаются двумя поворотами против часовой стрелки – поворот по тангажу на угол «a» и поворот по крену на угол « $\beta$ ». Далее идут два поворота по часовой стрелке на углы, вычисляемые на основе заданных значений – поворот по тангажу на угол «2c» и поворот по рысканию на угол «2b» для N-разворота и на угол «4b» для М-разворота. Величины «c» и «b» рассчитываются с использованием следующих формул:

$$tg\mathbf{a} = tg\mathbf{c} \cdot \cos\beta, \qquad tg\mathbf{b} = \sin\mathbf{a} \cdot tg\beta.$$

В первом приближении уменьшение накопленного по измерительным осям БИНС сигнала, составляющего в пересчете на ось рыскания угол «2b» для N-разворота и угол «4b» для M-разворота, в обоих случаях приводит к соответствующему увеличению ошибки в канале рыскания, эквивалентной накопленному сигналу по тангажу. Кроме того, происходит увеличение ошибки в канале рыскания за счет поворотов по крену на величину, пропорциональную «2b» (или «4b») с коэффициентом пересчета  $\approx \cos a$ . Благодаря этому перераспределение погрешностей при NM-разворотах осуществляется в рамках одной из связанных осей, при этом влияние на другие оси минимально (что подтверждается далее результатами численного моделирования).

В целом, реализация NM-разворотов целесообразна на установившихся (крейсерских) участках движения без существенного повышения линейных нагрузок. Использование NM-разворотов позволяет добиться перераспределения погрешностей в связанных осях.

Далее приведены результаты моделирования и численные исследования влияния типовых замкнутых движений на ошибки в связанных осях.

#### III. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Исследование изменений в структуре погрешностей углового положения объекта управления на базе БИНС относительно связанных осей при использовании предложенных к рассмотрению NM-образных разворотов проводилось путем численного моделирования. При этом рассматривалась модель БИНС на базе трех углоизмерительных каналов, где измерительные оси сонаправлены соответствующим приборным осям БИНС. Приборные оси образуют правую ортогональную систему координат  $X_{\Pi}Y_{\Pi}Z_{\Pi}$ , поворот вокруг оси  $X_{\Pi}$  соответ-

ствует развороту объекта управления по крену (угол  $\phi$ ), вокруг оси  $Y_{\Pi}$  – по рысканию (угол  $\psi$ ) и вокруг оси  $Z_{\Pi}$  – по тангажу (угол  $\vartheta$ ). Положительным считается поворот против часовой стрелки, если смотреть из положительного направления оси поворота.

Численные значения погрешностей, пропорциональных измеряемому сигналу (погрешность масштаба), моделировались с использованием датчика случайных чисел. Объем выборки, распределенной по равномерному закону в заданном диапазоне изменения, составлял 1000 элементов для каждого углоизмерительного канала БИНС.

В качестве замкнутых угловых движений объекта управления на базе БИНС рассматривались повороты по крену и тангажу, замещающие поворот по рысканию. При этом N- и M-развороты описывались соотношениями, представленными в виде последовательности произведений матриц перехода:

$$[M_N] = [M_{2\psi^*}]^T [M_{\vartheta}] [M_{\varphi}]^T [M_{2\vartheta^*}]^T [M_{\varphi}] [M_{\vartheta}],$$
  

$$[M_M] = [M_{4\psi^*}]^T [M_{\vartheta}]^T [M_{\varphi}] [M_{2\vartheta^*}] [M_{2\vartheta}]^T [M_{2\vartheta^*}]^T [M_{\varphi}] [M_{\vartheta}],$$

где нижний индекс у матриц перехода в правой части равенств указывает на угол поворота вокруг текущего направления соответствующей приборной оси, символ транспонирования «Т» указывает на то, что поворот осуществляется по часовой стрелке,

 $\vartheta = \vartheta_H (1 + \Delta \rho_\vartheta), \varphi = \varphi_H (1 + \Delta \rho_\varphi)$  – задаваемые в качестве начальных данных параметры поворота по тангажу и крену соответственно с учетом погрешности маснитаба  $\Delta \rho$ ,

 $\vartheta^* = Arctg(tg\vartheta/cos\varphi), \vartheta^* = Arctg(sin\vartheta \cdot tg\varphi)$  – параметры промежуточных поворотов по тангажу и рысканию соответственно, вычисляемые из соотношений для сферического прямоугольного треугольника Эйлера.

На рис. 2 и 3 показан средний вклад (уровень сигнала, эквивалентный накопленной ошибке) каждого углоизмерительного канала в ошибку по рысканию после завершения N-разворота для двух вариантов расчета: для фиксированного значения  $\vartheta_H = 5$  угл.град при варьировании  $\varphi_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град и для фиксированного значения  $\varphi_H = 10$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град вальи варьировании  $\vartheta_H = (2, 5, 10, 20, 30, 40, 50)$  угл.град вальи варьировании варьировании варьи



Рис. 2. Средний вклад в ошибку по рысканию при N-развороте для фиксированного угла  $\vartheta_H = 5$  угл.град при варьировании  $\phi_H$ 



Рис. 3. Средний вклад в ошибку по рысканию при N-развороте для фиксированного угла  $\phi_H = 10$  угл.град при варьировании  $\vartheta_H$ 

Для М-разворота вклад каждого углоизмерительного канала в ошибку по рысканию вдвое больше, чем для N-разворота (с теми же начальными поворотами по  $\vartheta_H$  и  $\varphi_H$ ) за счет амплитуды по рысканию.

Средние сопутствующие вклады в ошибки по тангажу и крену для указанных реализаций N- и M-разворотов приведены в таблицах I и II соответственно.

ТАБЛИЦА I.	СРЕДНИЙ СОПУТСТВУЮЩИЙ ВКЛАД ПРИ N-РАЗВОРОТЕ
	УГЛ.ГРАД

	$\varphi_{_{H}}$	5	10	20	30	40	50
2 5		в ошибк	у по танга	ажу			
гра	θ	-3,9E-04	-1,6E-03	-6,7E-03	-1,7E-02	-3,5E-02	-7,1E-02
Bal	ψ	4,8E-13	2,7E-13	-6,8E-14	6,8E-14	4,1E-13	6,7E-14
трqи =5 у	φ	4,9E-02	2,0E-01	8,1E-01	1,9E+00	3,7E+00	6,6E+00
akc J <sub>H</sub> =		в ошибк	у по крен	у			
цфі	θ	-1,7E-06	-1,4E-05	-1,2E-04	-4,9E-04	-1,5E-03	-4,3E-03
дл5 УГ.	ψ	-9,5E-15	2,5E-13	-1,5E-13	2,5E-14	1,4E-13	1,1E-13
	φ	5,8E-04	4,7E-03	4,0E-02	1,5E-01	4,2E-01	1,1E+00
	$\boldsymbol{\vartheta}_{H}$	5	10	20	30	40	50
010 Dag		в ошибк	V ПО ТАНГ	эжv			
ΞĘ		b omnon	y no runne	ing			
35	θ	-1,6E-03	-1,2E-02	-9,6E-02	-3,0E-01	-6,5E-01	-1,1E+00
ован угл	θ Ψ	-1,6E-03 2,7E-13	-1,2E-02 2,7E-13	-9,6E-02 0,0E+00	-3,0E-01 4,2E-15	-6,5E-01 5,4E-13	-1,1E+00 1,1E-12
сирован = 10 угл	θ Ψ φ	-1,6E-03 2,7E-13 2,0E-01	-1,2E-02 2,7E-13 3,9E-01	-9,6E-02 0,0E+00 7,3E-01	-3,0E-01 4,2E-15 9,8E-01	-6,5E-01 5,4E-13 1,1E+00	-1,1E+00 1,1E-12 1,1E+00
иксирован <i>ф<sub>H</sub> = 10</i> угл	ϑ Ψ φ	-1,6Е-03 2,7Е-13 2,0Е-01 в ошибк	-1,2E-02 2,7E-13 3,9E-01 у по крен	-9,6E-02 0,0E+00 7,3E-01 y	-3,0E-01 4,2E-15 9,8E-01	-6,5E-01 5,4E-13 1,1E+00	-1,1E+00 1,1E-12 1,1E+00
ія фиксирован <b>ла ф</b> <sub>H</sub> = 10 угл	ϑ Ψ Φ	-1,6E-03 2,7E-13 2,0E-01 в ошибк -1,4E-05	-1,2E-02 2,7E-13 3,9E-01 у по крен -2,2E-04	-9,6E-02 0,0E+00 7,3E-01 y -3,4E-03	-3,0E-01 4,2E-15 9,8E-01 -1,6E-02	-6,5E-01 5,4E-13 1,1E+00 -4,3E-02	-1,1E+00 1,1E-12 1,1E+00 -8,8E-02
для фиксирован угла ф <sub>н</sub> = 10 угл	θ           ψ           φ           θ           ψ           ψ	-1,6Е-03 2,7Е-13 2,0Е-01 в ошибк -1,4Е-05 2,5Е-13	-1,2E-02 2,7E-13 3,9E-01 у по крен -2,2E-04 1,0E-13	-9,6E-02 0,0E+00 7,3E-01 y -3,4E-03 5,1E-14	-3,0E-01 4,2E-15 9,8E-01 -1,6E-02 7,2E-14	-6,5E-01 5,4E-13 1,1E+00 -4,3E-02 -9,2E-14	-1,1E+00 1,1E-12 1,1E+00 -8,8E-02 -2,2E-13

ТАБЛИЦА II. СРЕДНИЙ СОПУТСТВУЮЩИЙ ВКЛАД ПРИ М-РАЗВОРОТЕ, УГЛ.ГРАД

	$\varphi_{_{H}}$	5	10	20	30	40	50
5 E		в ошибк	у по танга	ажу			
нно rba	θ	-9,0E-08	-1,5E-06	-2,7E-05	-1,7E-04	-7,5E-04	-3,0E-03
)Bal	ψ	0,0E+00	-6,8E-14	-1,4E-13	1,3E-13	-6,5E-14	-1,4E-13
-S=	φ	1,1E-05	1,9E-04	3,3E-03	1,9E-02	7,9E-02	2,8E-01
икс 9 <sub>н</sub> =		в ошибк	у по крен	у			
афі Ла	θ	3,4E-06	2,8E-05	2,5E-04	9,7E-04	3,0E-03	8,4E-03
JUL J	ψ	1,6E-13	9,5E-14	-2,3E-13	-4,1E-14	-1,5E-13	-1,1E-12
	φ	-1,2E-03	-9,4E-03	-8,0E-02	-3,0E-01	-8,4E-01	-2,1E+00
	$\vartheta_H$	5	10	20	30	40	50
ого рад	θ <sub>Η</sub>	<b>5</b> в ошибк	<b>10</b> у по танга	<b>20</b> ажу	30	40	50
инного л.град	<b>୬</b> <sub>H</sub> ୬	5 в ошибк -1,5E-06	<u>10</u> у по танга -4,7Е-05	20 ажу -1,4E-03	<b>30</b> -9,3E-03	<b>40</b> -3,3E-02	50 -8,0E-02
ованного угл.град	<b>θ</b> <sub>H</sub> θ Ψ	<u>5</u> в ошибк -1,5E-06 -6,8E-14	<u>10</u> у по танга -4,7Е-05 2,0Е-15	20 ажу -1,4E-03 7,9E-15	30 -9,3E-03 -2,7E-13	40 -3,3E-02 2,7E-13	50 -8,0E-02 2,7E-13
сированного = 10 угл.град	<b>θ</b> <sub>H</sub> θ Ψ φ	5 в ошибк -1,5Е-06 -6,8Е-14 1,9Е-04	<u>10</u> у по танга -4,7Е-05 2,0Е-15 1,4Е-03	20 awy -1,4E-03 7,9E-15 1,0E-02	30 -9,3E-03 -2,7E-13 3,0E-02	40 -3,3E-02 2,7E-13 5,6E-02	50 -8,0E-02 2,7E-13 7,8E-02
инсированного Ф <sub>Н</sub> = 10 угл.град	<b>θ</b> <sub>H</sub> θ ψ	5 в ошибк -1,5E-06 -6,8E-14 1,9E-04 в ошибк	10 у по танга -4,7E-05 2,0E-15 1,4E-03 у по крен	20 ажу -1,4E-03 7,9E-15 1,0E-02 у	30 -9,3E-03 -2,7E-13 3,0E-02	40 -3,3E-02 2,7E-13 5,6E-02	50 -8,0E-02 2,7E-13 7,8E-02
ія фиксированного <b>ла ф</b> <sub>н</sub> = 10 угл.град	<b>ϑ</b> <sub>H</sub> ϑ Ψ Φ	5 в ошибк -1,5Е-06 -6,8Е-14 1,9Е-04 в ошибк 2,8Е-05	10 у по танга -4,7Е-05 2,0Е-15 1,4Е-03 у по крен 4,4Е-04	20 ажу -1,4E-03 7,9E-15 1,0E-02 y 6,6E-03	30 -9,3E-03 -2,7E-13 3,0E-02 3,0E-02	40 -3,3E-02 2,7E-13 5,6E-02 8,3E-02	50 -8,0E-02 2,7E-13 7,8E-02 1,7E-01
для фиксированного угла ф <sub>н</sub> = 10 угл.град	<b>θ</b> <sub>H</sub> Ψ φ θ	5 в ошибк -1,5E-06 -6,8E-14 1,9E-04 в ошибк 2,8E-05 9,5E-14	10 у по танга -4,7E-05 2,0E-15 1,4E-03 у по крен 4,4E-04 1,5E-13	20 axy -1,4E-03 7,9E-15 1,0E-02 y 6,6E-03 -3,4E-15	30 -9,3E-03 -2,7E-13 3,0E-02 3,0E-02 -4,1E-13	40 -3,3E-02 2,7E-13 5,6E-02 8,3E-02 0,0E+00	50 -8,0E-02 2,7E-13 7,8E-02 1,7E-01 0,0E+00

Как следует из рис. 2, 3 и табл. 1, 2, перераспределение ошибок осуществляется в рамках одной из приборных осей (для рассмотренного примера – это рыскание). Влияние на две другие оси (для рассмотренного примера – это крен и тангаж) минимально. При этом сопутствующие вклады в ошибки по тангажу и крену для М-разворота существенно ниже по сравнению с N-разворотом.

#### IV. МОДИФИКАЦИЯ N-РАЗВОРОТА

Представленные выше теоретические и расчетные оценки позволяют рассмотреть возможность использования N-разворотов для регулирования ошибок по рысканию, вызванных поворотами по крену. Для этого можно взять несколько незамкнутых (без завершающего разворота по рысканию) N-разворотов с изменяющейся величиной поворота по крену. На рис. 4 показан пример такого модифицированного (замкнутого) разворота Nтипа, образованного последовательностью из четырех незамкнутых N-разворотов.



Рис. 4. Модифицированный разворот N-типа

Представленный пример углового замкнутого движения не содержит непосредственно поворотов по рысканию. Тем не менее за счет поворотов по тангажу и крену (три ма́лых незамкнутых N-разворота) в целом происходит поворот по рысканию против часовой стрелки. Обратное движение (по рысканию по часовой стрелке) идет по большому незамкнутому N-развороту. Здесь ошибка по рысканию, вызванная поворотами по крену, в первом приближении меняется на величину  $48b\alpha^2 \cdot sin\alpha$ .

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование предложенных ранее NMразворотов, которые представляют собой замкнутые угловые движения БИНС в виде последовательности поворотов относительно связанных (приборных) осей. Предложен вариант использования последовательности из ряда незамкнутых N-разворотов, образующих в совокупности модифицированный разворот N-типа. Для оценки распределения ошибок, пропорциональных накопленному сигналу в измерительных осях, проведено численное моделирование. В соответствующих расчетах рассмотрены NM-развороты с привязкой к оси рыскания. Получены сравнительные статистические оценки влияния NM-разворотов на структуру ошибок в приборных осях. Показано перераспределение ошибок накопленного сигнала измерительных каналов по оси рыскания. Также сделаны сравнительные оценки сопутствующих ошибок в осях по крену и тангажу.

#### Литература

- Емельянцев Г.И. О наблюдаемости восточного дрейфа инерциального измерительного модуля в условиях специального маневрирования объекта / Г.И. Емельянцев, Ц. Тицин // Гироскопия и навигация. 2005. № 4(51). С. 32–41.
- [2] Матвеев, В.В. Исследование погрешностей бесплатформенной инерциальной навигационной системы высокодинамичного летательного аппарата / В.В. Матвеев // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2012. № 12-1. С. 165–173.
- [3] Емельянцев, Г.И. Об использовании маневрирования для повышения точности корабельной автономной БИНС / Г.И. Емельянцев, А.П. Степанов, Б.А. Блажнов // Гироскопия и навигация. 2020. №2 (109). С. 37–53.
- [4] Васинева, И.А. Анализ точности калибровки бескарданной инерциальной навигационной системы в полете в зависимости от некоторых типов эволюций самолетов / И.А. Васинева, А.О. Кальченко // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2014. № 1. С. 65–68.
- [5] Перепелкина, С.Ю. Определение значимых характеристик бесплатформенных инерциальных навигационных систем в составе объекта управления с использованием типовых участков движения / С.Ю. Перепелкина, А.А. Федотов // XXIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2022.

## Компенсация избыточного шума интенсивности источника излучения в показаниях волоконно-оптического гироскопа

М.А. Белоусов Научно-технический центр ПАО «Пермская научно-производственная приборостроительная компания» Пермь BelousovMA@pnppk.ru

Аннотация—В работе рассмотрен один из возможных вариантов повышения точности показаний волоконнооптических гироскопов. Предложен способ компенсации основной шумовой составляющей показаний гироскопа, ограничивающей его возможности применения. Представлены результаты проведенных экспериментов. Показано, что предложенный способ позволяет значительно снизить вклад шумов интенсивности источника излучения в показаниях волоконно-оптического гироскопа.

Ключевые слова—волоконно-оптический гироскоп, шумовая составляющая, источник излучения.

#### I. Введение

В настоящее время в мире ведется постоянная работа по совершенствованию свойств датчиков измерения угловой скорости, применяемых в составе бесплатформенных инерциальных навигационных систем и инерциальных измерительных блоков [1, 4]. Одним из таких датчиков является волоконно-оптический гироскоп (ВОГ), имеющий свои преимущества и недостатки в сравнении с датчиками других конструкций.

Для расширения возможностей применения датчика, была поставлена задача по оценке возможностей модернизации серийного ВОГ с целью снижения шумовой составляющей показаний. С этой целью был предложен и опробован один из возможных вариантов, позволяющий снизить шумовую составляющую за счет компенсации шума интенсивности источника излучения света (RIN).

#### II. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В качестве теоретической оценки, шумовой составляющей показаний ВОГ в работе использована величина коэффициента случайного блуждания угла (ARW). Как описано в литературе данная величина состоит из квадратного корня суммы квадратов трех независимых шумовых составляющих ВОГ: дробового шума фотоприемника (SHOT NOISE), теплового шума предварительного усилителя фотоприемника (THERMAL NOISE), шума интенсивности источника излучения (RIN) [2, 5]. Формулы расчета показаны в источнике [3].

Существуют различные способы снижения RIN составляющей шумов ВОГ, такие как: изменение глубины модуляции, увеличение эффективной ширины спектра источника излучения и компенсация RIN составляющей. Каждый из способов обладает рядом достоинств и недостатков.

В данной работе рассматривается возможность компенсации RIN составляющей, которая вносит основной А.И. Кривошеев Научно-технический центр ПАО «Пермская научно-производственная приборостроительная компания» Пермь KrivosheevAI@pnppl.ru

вклад (≈90%) в общую величину шумов ВОГ. За основу взят принцип оптической компенсации, описанный в источнике [5]. По результатам анализа был предложен собственный вариант схемы компенсации шума интенсивности источника излучения, показанный на рис. 1. В табл. 1 представлены параметры элементов ВОГ, использованного в предложенной схеме.



Рис. 1. Схема ВОГ с компенсацией шума интенсивности источника излучения

ТАБЛИЦА I. ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕМЕНТОВ ГИРОСОКПА ДЛЯ КОМПЕНСАЦИИ RIN

Параметр	Единица изме-	Значение
	рения	
Диаметр волоконной катушки	М	0,1
Длина волоконного световода	М	1000
катушки		
Глубина вспомогательной фазо-	рад	1,57
вой модуляции		
Средневзвешенная длина волны	МКМ	1,53
источника излучения		
Эффективная ширина спектра	МКМ	0,01

Основным преимуществом данного способа компенсации RIN составляющей является возможность встраивания данной схемы без внесения серьёзных конструктивных изменений и изменений платы обработка как одного из самых сложных узлов ВОГ.

Основным недостатком является необходимость обеспечения баланса мощностей между плечом измерения и плечом компенсации на протяжении всего периода эксплуатации.

Для оценки шумовой составляющей показаний ВОГ использовалась методика расчета девиации Аллана. В качестве оцениваемого параметра использован коэффициент случайного блуждания угла (angle random walk – ARW) показаний ВОГ. Для достоверной оценки ARW производились длительные прописи показаний ВОГ в неподвижном состоянии.
# III. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Для оценки эффективности компенсации RIN составляющей производились измерения с различным балансом мощностей:

- 0 (без компенсации)
- 0.25 (отношение плеча компенсации к измерительному 25%)
- 0.5 (отношение плеча компенсации к измерительному 50%)
- 0.75 (отношение плеча компенсации к измерительному 75%)
- 1 (баланс мощностей плеча компенсации к измерительному приблизительно 100%)

Результаты в виде графиков девиации Аллана относительно времени осреднения показаны на рис. 2.



Рис. 2. Графики девиации Аллана по результатам испытаний ВОГ с компенсацией RIN

Из графиков видно, что полученный уровень общей шумовой составляющей показаний ВОГ с полной компенсацией составил  $\approx 0,00058$  °/√ч. Данное значение на  $\approx 80\%$  меньше, чем величина шумовой составляющей показаний ВОГ без предложенной компенсации равная 0,00297 °/√ч.

В табл. 2 приведены сводные данные по уровням расчетных и экспериментальных значений ARW а зависимости от баланса мощностей в схеме компенсации RIN. Наблюдается сходимость полученных результатов испытаний ВОГ с расчетными значениями ARW.

ТАБЛИЦА II. ARW показаний гиросокпа с различным уровнем компенсации RIN

Баланс мощностей (уровень компенсации RIN)	Расчетный ARW, °/√ч	Эксперим. ARW, °/√ч
1 (≈100%)	0.00056	0.00058
0.75 (75%)	0.00097	0.00097
0.5 (50%)	0.00162	0.00156
0.25 (25%)	0.00238	0.00225
0 (без компенсации)	0.00315	0.00297

В данном случае, остаточный уровень шумовой составляющей после полной компенсации RIN, обусловлен наличием в сигнале увеличенных значений дробового и теплового шумов фотоприёмного устройства. Увеличение уровня данных шумовых составляющих показаний ВОГ связано с наличием в сигнале дополнительной оптической мощности из плеча компенсации, которая не является измерительной. Для снижения данного эффекта требуется уменьшать уровень оптических потерь в измерительном плече ВОГ, для чего в данной схеме был применен оптический циркулятор.

# IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам данной работы предложен один из возможных вариантов снижения шумовой составляющей показаний ВОГ за счет компенсации RIN. Проведены эксперименты, по результатам которых была получена сходимость экспериментальных данных с расчетными значениями. Таким образом подтверждена эффективность предложенного метода снижения шумовой составляющей показаний ВОГ.

#### Литература

- А.И. Телига, В.Г. Сиренко, П.А. Осетров, А.П. Колеватов / Маршрутно-навигационная система топопривязки и ориентирования подвижных объектов зенитных ракетных систем и комплексов. Наукоёмкие технологии, 2011, № 12, стр. 21-26.
- [2] А.М. Курбатов, Р.А. Курбатов / Патент на изобретение RU 2495376 С1. Источник излучения с низким уровнем шумов интенсивности для волоконно-оптического гироскопа / зарег. В Федеральной службе по интеллектуальной собственности РФ 10.10.2013, приоритет от 11.05.2012
- [3] М.А. Белоусов, Д.Ю. Зобачев / Методика гибкой рабочей конфигурации волоконно-оптических гироскопов для применения в БИНС. Материалы XXXI конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова, 2018, стр. 318-325.
- [4] U. Probst, M. Deck, S. Voigt / LFK-150: Development of a highaccuracy Marine Inertial Reference System. // Proc. DGON Inertial Sensors and Systems - Symposium Gyro Technology 2017, Karlsruhe, Germany, 19-20 September 2017, pp.P21.1-P21.17.
- [5] Guattari F., Chouvin S., Moluçon C., Lefèvre «A Simple Optical Technique to Compensate for Excess RIN in a Fiber-Optic Gyroscpe» - IXBlue France - Karlsruhe 2014

# Ускоренные испытания на сохраняемость кольцевых лазерных гироскопов

А.О. Синельников *АО «ГосНИИП», Российский университет дружбы народов* Москва, Россия https://orcid.org/0000-0002-5579-3509 Я.А. Зубарев *АО «НИИ «Полюс» им. М.Ф. Стельмаха»* Москва, Россия https://orcid.org/0000-0002-4492-338X Д.А. Терещенко *АО «НИИ «Полюс» им. М.Ф. Стельмаха», МГТУ им.Н.Э.Баумана* Москва, Россия rainbowdr@yandex.ru

Аннотация—В работе представлена методика и результаты ускоренных испытаний на сохраняемость кольцевых лазерных гироскопов с магнитооптической частотной подставкой на эффекте Зеемана. Выявлены незначительные изменения напряжения горения и амплитуды частотной подставки, не влияющие на работоспособность кольцевого лазерного гироскопа. По результатам ускоренных испытаний подтвержден срок сохраняемости кольцевого лазерного гироскопа в 18 лет.

Ключевые слова—кольцевой лазерный гироскоп, магнитооптическая частотная подставка, эффект Зеемана, сохраняемость, надежность

# I. Постановка задачи

В настоящий момент кольцевые лазерные гироскопы (КЛГ) [1, 2] и приборы на их основе находят широкое применение в различных областях техники – от авиации до корабельных систем [3, 4]. Они предназначены для высокоточных измерений углов поворота и угловых скоростей объекта, на котором установлены. Учитывая стоимость и область их применения [5, 6], к КЛГ предъявляются особые требования по параметрам надежности [7]: сохраняемости, ресурсу, безотказной работе и другим [8–10].

Постоянно растущие требования к КЛГ и систем на их основе по повышению надежности [11] определяют актуальность данной работы и необходимость разработки новых методов контроля.

Сохраняемость является одним из важнейших параметров надежности, отражающим максимально возможное время хранения КЛГ в определенных условиях без потери его работоспособности [12,13]. При этом испытания по подтверждению сохраняемости КЛГ являются наиболее длительными и нуждаются в ускорении [14, 15].

Целью настоящей работы является разработка методики ускоренных испытаний на сохраняемость КЛГ с магнитооптической подставкой на эффекте Зеемана [16].

Для достижения поставленной цели в работе были решены следующие задачи:

- проведена оптимизация существующей методики [10] в части повышения коэффициента ускорения;
- определены требования, повышающие степень ускорения испытаний;
- выбраны ключевые параметры КЛГ для контроля его работоспособности;
- разработана структура рабочего места для испытаний;

• проведены испытания на ускоренную сохраняемость по оптимизированной методике.

# II. Описание методики и объекта исследования

Объектом для испытаний был выбран четырехзеркальный Не-Ne КЛГ с неплоским оптическим контуром длиной 24 см, круговой поляризаций генерируемого излучения, магнитооптической частотной подставкой на эффекте Зеемана, током накачки 0,7 мA [17] с горением разряда в одном плече каждого разрядного промежутка [18, 19].

В качестве контрольных параметров [10, 20], объективно характеризующих работоспособность КЛГ и его внутренне состояние, выбраны: напряжение горение U, B; амплитуды сигналов вращения (sin-cos) A, B; амплитуда частотной подставки f, кГц.

Требования на эти параметры нормируются техническими условиями (ТУ) на КЛГ. В процессе испытаний регистрируются количество отказов. Критерием отказа является выход контролируемых параметров за пределы допустимых значений [10].

Ускоренные испытания на сохраняемость обеспечивают получение необходимой информации о надёжности КЛГ в более короткий срок и показывают процесс хранения прибора в течении требуемого срока в составе конечного изделия.

Испытания проходят циклами, при этом каждый цикл испытаний эквивалентен одному году хранения в отапливаемом помещении. С учетом специфики работы прибора, в качестве форсирующего фактора принята повышенная температура окружающей среды [21–23].

Продолжительность ускоренных испытаний КЛГ на сохраняемость, эквивалентная сроку хранения в заданных условиях,  $\tau_y$  [20] рассчитывается в часах и определяется по формуле:

$$\tau_{y} = H \cdot e^{-B\left(\frac{1}{T_{e}} - \frac{1}{T_{y}}\right)} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\phi_{e}}{\phi_{y}}\right) \Delta \tau_{o}$$

где: H – продолжительность хранения в заданных условиях, лет;

В – энергетический параметр, характеризующий способность отдельного блока, составной части или изделия в целом изменять свой определяющий показатель под влиянием температуры при старении, К;

 $\Delta \tau_{o}$  – продолжительность существования за год интервала относительной влажности (не более 5%) с ее средним значением  $\phi_{e}$ ;

 k – количество интервалов относительной влажности в соответствующих условиях хранения;

Т<sub>е</sub> – значение эквивалентной температуры, К;

T<sub>v</sub> – температура ускоренных испытаний, К;

 $\phi_e$  – значение эквивалентной относительной влажности, %;  $\phi_y$  – относительная влажность во время ускоренных испытаний;

i – индекс суммирования, эквивалентный порядковому номеру интервала относительной влажности в соответствующих условиях хранения, меняющийся в диапазоне от i=1 до i=k.

Продолжительность ускоренных испытаний КЛГ на сохраняемость  $\tau_y$  рассчитываем по приведенной выше формуле с учетом принятых на основании нормативных документов (ГОСТ, ТУ и т.д.) значений параметров: Н = 18 лет или 157680 часов, В = 10000 К,  $\Delta \tau_0 = 8760$  ч, k=1,  $T_e$ = 293 К или 20°С, Ту = 358 К или 85°С,  $\phi_e = \phi_y = 10\%$ . В результате получено общее время ускоренных испытаний на сохраняемость  $\tau_y = 324$  часа. Это позволяет добиться коэффициента ускорения  $c_a = 468$ , что более чем в 9 раз превышает показатели предыдущей методики [10].

# III. Экспериментальная часть

Герметично упакованный КЛГ устанавливают в камеру тепла и холода температуру 85°С. После выхода камеры на заданный режим КЛГ выдерживают при этих условиях в течение 18 часов, затем понижают температуру до нормальных климатических условий (НКУ) и выдерживают КЛГ не менее 2 ч.

Графическое отображение годового цикла испытаний приведено на рис. 1. Вышеизложенные действия повторяют еще 17 раз (всего 18 годовых циклов хранения).



Рис. 1. Графическое отображение годового цикла испытаний КЛГ

После каждого второго годового цикла и по завершении испытаний проводят проверку параметров КЛГ в НКУ при помощи контрольно-измерительной аппаратуры.

Таким образом, за сутки удается провести двухгодовой цикл испытаний с последующим контролем основных параметров КЛГ. Испытываемый КЛГ считают выдержавшим испытания, если при проверках после каждого второго годового цикла и по завершении всех испытаний его параметры соответствуют установленным нормам.

# IV. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

В ходе проведённых экспериментов получены временные зависимости контрольных параметров КЛГ

(напряжение горения U, амплитуды сигналов вращения A и амплитуда частотной подставки f) представленные на рис. 2, 3 и 4.



Рис. 2. Изменение напряжения горения КЛГ



Рис. 4. Изменение амплитуды сигналов вращения КЛГ



Рис. 4. Изменение амплитуды частотной подставки КЛГ

Представленные графики показывают, что напряжение горения КЛГ изменилось на 1 В и составило U = 626 В, амплитуда сигналов вращения не изменились и составила A = 1,5 В, амплитуда частотной подставки уменьшилась 400 Гц и составила 27 кГц.

Как видно из полученных зависимостей незначительные изменения напряжения горения и амплитуды частотной подставки произошли в течение первых четырех лет ускоренного хранения и стабилизировались к шестому году.

Таки образом произошла приработка КЛГ, а изменения контрольных параметров не выходят за нормы ТУ и не являются критичными [24].

Полученные результаты отражают незначительное снижение усиления в резонаторе КЛГ [23], а срок сохраняемости данного КЛГ составляет не менее 18 лет.

# V. Выводы

В ходе данной работы была разработана методика ускоренных испытаний на сохраняемость КЛГ с магнито-оптической частотной подставкой на эффекте Зеемана, определен объем испытаний и способ их ускорения.

Полученный Коэффициент ускорения составляет 468 относительно стандартного хранения, что в 9 раз превышает показатели предыдущих методик [10, 20].

По результатам контроля показано, что для данного КЛГ [18, 19] подтверждена сохраняемость в 18 лет, так как после 18 годовых циклов значительных изменений контрольных параметров объекта испытаний не зафиксировано.

Обнаружено незначительное снижение амплитуды частотной подставки, что отражает незначительное падение усиления [23] в резонаторе при постоянном токе накачки 0,7 мА после четырех лет хранения, с последующей стабилизацией основных параметров КЛГ к шестому году.

#### Литература

- F. Aronovitz, "Fundamentals of the ring laser gyro," in Optical Gyros and their Application, Ed. by D. Loukianov, R. Rodloff, H. Sorg, and B. Stieler, RTO-AG-339 (1999), pp. 3-1–3-45.
- [2] K.N. Chopra "Ring Laser Gyroscopes". In: Optoelectronic Gyroscopes. Progress in Optical Science and Photonics, 2021, vol 11. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-15-8380-3\_1
- [3] Passaro Vittorio M. N., Antonello Cuccovillo, Lorenzo Vaiani, Martino De Carlo, and Carlo Edoardo Campanella, "Gyroscope Technology and Applications": A Review in the Industrial Perspective Sensors 17, no. 10: 2284, 2017. https://doi.org/10.3390/s17102284
- [4] D. Lukyanov, Yu. Filatov, Yu. Golyaev, ... U. Schreiber, M. Perlmutter, "50th anniversary of the laser gyro", 20th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2013 -Proceedings, 2013, pp. 36–49.
- [5] S. Wang, & Z. Zhang, "Research on Principle, Application and Development Trend of Laser Gyro". Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1549(2), 022118. <u>https://doi.org/10.1088/1742-6596/1549/2/022118</u>
- [6] N. Barbour, G. Schmidt, "Inertial sensor technology trends", IEEE Sensors Journal, 2001, 1(4), pp. 332–339.
- [7] ГОСТ 27.002-89. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения.
- [8] В. Д. Голубев, Н. Е. Мерзликина, А. О. Синельников [и др.] Ресурсные испытания зеемановских лазерных датчиков угловых скоростей // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2020. – № 1. – С. 78-83.
- [9] Б. Г. Архипов, В. Н. Горшков, М. Е. Грушин, А. О. Синельников Исследование надёжности включения зеемановских лазерных датчиков угловой скорости с твердотельным геттером // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 5. – С. 104-113.

- [10] М. В. Медяник, И. И. Савельев, Исследование надёжности зеемановских лазерных датчиков вращения, Материалы XVII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением», 2015 г. С. 324-330.
- [11] Гиясов Б. И., Серегин Н. Г., Серегин Д. Н., Беляков В. А. Стендовые ускоренные испытания технических систем на надежность: Учеб. пособие. – М.: Издательство АСВ, 2017.– 74 с.
- [12] Демиденков Ю.В., Пролейко Э.П., Шитова Н.А., Пузанов А.Г. Некоторые вопросы сохраняемости. // Электронная промышленность, 1975, N5.
- [13] Галишников И.В., Маш Л.Д., Игнатович Н.В., Рысь С.В., Серегин С.Л., Щетинин А.И., Шитова Н.А. К расчету оптимального наполнения гелий-неоновых лазеров с большим сроком службы // Электронная техника. Сер. 11. Лазерная техника и оптоэлектроника, 1989, в. 1(49), С. 33-37.
- [14] ГОСТ В 25976-83. Порядок назначения норм и проведения ускоренных испытаний на сохраняемость при хранении.
- [15] ГОСТ Р 51372-99. Методы ускоренных испытаний на долговечность и сохраняемость при воздействии агрессивных и других специальных сред для технических изделий, материалов и систем материалов.
- [16] В. В. Азарова, Ю. Д. Голяев, И. И. Савельев, Зеемановские лазерные гироскопы // Квантовая электроника. 2015. Т. 45. № 2. С. 171–179.
- [17] I. Savelyev, A.Sinel'nikov, "The influence of the pumping current on the Zeeman lasesr rotation sensors output parameters," 22nd St-Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2015 – Proceedings, 2015, pp. 421-424.
- [18] Савельев И.И., Синельников А.О. Кольцевой газовый моноблочный лазер // Патент на полезную модель RU 169447 U1, 17.03.2017. Заявка № 2016134438 от 24.08.2016.
- [19] Савельев И.И., Синельников А.О., Грушин М.Е. Лазерный датчик угловой скорости // Патент на полезную модель RU 172111 U1, 28.06.2017. Заявка № 2017109483 от 22.03.2017
- [20] Пролейко Э.П. Испытания газовых лазеров на ускоренную сохраняемость. // Межотраслевая методика. - М.: НИИ "Полюс", 1985.
- [21] Голяев Ю.Д., Запотылько Н.Р., Недзвецкая А.А., Синельников А.О. Термостабильные оптические резонаторы для зеемановских лазерных гироскопов // Оптика и спектроскопия. 2012. Т. 113. № 2. С. 253.
- [22] Y. A. Zubarev, A. O. Sinelnikov and N. E. Fetisova, "A study of the Temperature Stability of the Zeeman Laser Gyro Ring Resonator," 2022 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), Saint Petersburg, Russian Federation, 2022, pp. 1-4, doi: 10.23919/ICINS51784.2022.9815336.
- [23] Мерзликина Н.Е., Грушин М.Е., Синельников А.О., Сухов Е.В. Динамика температурной зависимости амплитуды частотной подставки зеемановского лазерного гироскопа в процессе его эксплуатации // Физическое образование в ВУЗах. 2019. Т. 25. №2. С. 325
- [24] Е. Сухов, В. Бруггер, Л. Маш, Н. Истомина. Оценка герметичности и внутреннего газоотделения газоразрядных приборов // Фотоника. - 2011. - 29 № 5. - С. 42.
- [25] Golyaev Yu. D., Zapotyl'ko N. R., Nedzvetskaya A. A., Sinel'nikov A. O. Thermally stable optical cavities for Zeeman laser gyroscopes. Optics and Spectroscopy. 2012; 113(2):227–229. https://doi.org/10.1134/S0030400X12070090

# Взаимодействие виброподвеса кольцевого лазерного гироскопа с внешним механическим возмущением

А.О. Синельников *AO «Государственный научноисследовательский институт* приборостроения», Российский университет дружбы народов Москва, Россия <u>https://orcid.org/0000-0002-5579-3509</u> Н.В. Тихменев *AO «Государственный научно*исследовательский институт приборостроения» Москва, Россия <u>nik-tikhmenev@yandex.ru</u>

С.И. Назаров *AO «Государственный научноисследовательский институт приборостроения»* Москва, Россия <u>https://orcid.org/0000-0002-2452-9457</u> А.А. Ушанов *AO «Государственный научноисследовательский институт приборостроения»* Москва, Россия <u>https://orcid.org/0009-0009-3703-9981</u>

Аннотация—В настоящей работе экспериментально исследовано взаимодействие виброподвеса кольцевого лазерного гироскопа с внешним механическим возмущением. Подтверждено отсутствие зависимости смещения нуля кольцевого лазерного гироскопа на виброподвесе от биений амплитуды частотной подставки при правильном выборе закона ошумления. Показано, что значение амплитуды частотной подставки в момент возникновения динамической синхронизации частот встречных волн может являться критерием прекращения взаимодействия виброподвесов кольцевых лазерных гироскопов между собой и с внешним возмущающим воздействием.

Ключевые слова—кольцевой лазерный гироскоп, выходная характеристика, частотная подставка, захват частот, виброподвес, инерциальный измерительный блок, динамические зоны синхронизации, механическое возмущение.

# I. Постановка задачи

Связь встречных волн через обратное рассеяние в кольцевом лазерном гироскопе (КЛГ) приводит к появлению области нечувствительности к малым угловым скоростям вращения, называемой статической зоной захвата [1, 2] или захватом частот встречных волн  $\Omega_L$ .

Использование КЛГ в инерциальных навигационных системах в качестве чувствительного элемента обеспечивает им широкий диапазон измерения угловых скоростей  $\Omega$  [3, 4], включая малые значения  $\Omega < \Omega_L$ , находящихся в области статической зоны захвата  $\Omega_L$ .

Несмотря на достигнутый прогресс в технологии изготовления лазерных зеркал [4, 5] проблема преодоления захвата частот встречных волн  $\Omega_L$  и сопутствующих паразитных эффектов имеет первостепенное значение для лазерной гироскопии и является наиболее актуальной.

В настоящий момент предложено множество способов уменьшения влияния связи встречных волн через обратное рассеяние на работу КЛГ. Наибольшее распространение получил метод «частотной подставки» (ЧП) за счет создания искусственного знакопеременного начального смещения  $\Omega_b$ , позволяющий вывести рабочую точку лазера из зоны захвата  $\Omega_L$  на линейный участок выходной характеристики КЛГ [1–6].

Выходная характеристика КЛГ представляет собой зависимость разностной частоты встречных волн f от угловой скорости  $\Omega$ , как показано на рис. 1. Период коммутации частотной подставки  $T_s$ , ее амплитуда  $f_b$  и закон изменения (синусоидальный либо прямоугольный) выбираются индивидуально для каждого типа КЛГ, так чтобы рабочая точка лазера была максимально удалена от зоны захвата ( $\Omega_b >> \Omega_L$ ), а время прохождения через нее было минимальным.



Рис. 1. Выходная характеристика КЛГ и знакопеременная частотная поставка: 1 – идеальная характеристика, 2 – реальная характеристика

По способу создания начального смещения в КЛГ ЧП делятся на магнитооптические [7–9] и механические [10, 11]. Применение магнитооптической ЧП в зеемановских КЛГ с круговой поляризацией излучения [7] обеспечивает им устойчивость к внешним вибрационным воздействиям, но существенно ограничивает их точностные характеристики из-за влияния внешних магнитных полей и тепловых дрейфов нуля [12, 13].

Преимуществом КЛГ с линейной поляризацией излучения и механической ЧП («виброподвесом») является высокая точность, позволяющая применять их в авто-

номных навигационных системах для объектов дальнего действия [4, 11]. Однако, режим крутильных колебаний виброподвеса чувствителен к внешним возмущениям, в том числе к механическим [14]. Это обстоятельство накладывает определенные ограничения на возможные применения КЛГ на виброподвесе.

В большинстве используемых автономных навигационных систем применяется инерциальноизмерительный блок (ИИБ), содержащий триаду ЛГ на виброподвесе [2, 4, 11]. В процессе его работы возникают в внешние и внутренние механические возмущения, действующие на блок трех одноосных КЛГ, установленных на общей раме. Это приводит к возникновению биений крутильных колебаний виброподвесов КЛГ δf<sub>d</sub> и быстрым изменениям амплитуды ЧП δf<sub>b</sub> [10, 14].

Чтобы избежать низкочастотных биений  $\delta f_d$  в раме и взаимного влияния КЛГ, резонансные частоты виброподвесов  $f_d$  принято разносить на 10-20 Гц, а в некоторых случаях до 50 Гц [11]. Биения затухают медленно и до конца остается неясным момент прекращения взаимодействия между КЛГ.

Целью работы является установление критерия, позволяющего судить о прекращении взаимодействия между КЛГ в составе ИИБ при внешних механических возмущениях.

### II. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Известно, что использование знакопеременной ЧП приводит к возникновению динамических зон синхронизации  $\Omega_{\text{Di}}$  на выходной характеристике КЛГ [15, 16], как показано на рис. 2.

Для эффективной десинхронизации динамических зон захвата  $\Omega_{Di}$  в КЛГ применяют ошумление ЧП [17, 18] колебаниями по случайному закону с меньшим периодом коммутации ( $T_{sn} \ll T_s$ ) и амплитудой ( $f_n \ll f_b$ ). Это позволяет линеаризовать выходную характеристику, но приводит к некоторому увеличению случайной составляющей погрешности измерений.



Рис. 2. Ошумление динамических зон синхронизации на выходной характеристике КЛГ

В отсутствии шумовой составляющей  $f_n$ , при определенных значениях амплитуды ЧП  $f_b$  кратной периоду ее коммутации  $T_s$ , будет наблюдаться нелинейность выходной характеристики КЛГ, вызываемая динамической синхронизацией частот.

На основе явления динамической синхронизации частот встречных волн разрабатывают различные методики измерения и контроля параметров КЛГ, например, определения ширины статической зоны захвата Ω<sub>L</sub> [19, 20] и нелинейности масштабного коэффициента [21].

Этот эффект можно использовать и для исследования взаимодействия КЛГ на виброподвесе между собой или с внешним механическим возмущением.

Чтобы КЛГ вошел в режим динамической синхронизации частот, в нем должны отсутствовать какие-либо внешние возмущения, а амплитуда ЧП  $f_b$  должна быть строго стабилизирована.

В результате взаимодействия между КЛГ в составе ИИБ или при внешнем возмущении возникают биения крутильных колебаний виброподвесов  $\delta f_d$ , которые в данном случае выполняют роль десинхронизатора.

В таком режиме работы изменения амплитуды ЧП  $\delta f_b$  относительно резонансной частоты виброподвеса  $f_d$  будут приводить к динамической синхронизации частот встречных волн в КЛГ, следовательно, вход и выход из динамической зоны захвата  $\Omega_D$  может служить критерием наличия или отсутствия взаимодействия КЛГ между собой или с внешним механическим возмущением.

#### III. Экспериментальная часть

# *А.* Исследование дрейфа нуля КЛГ при изменениях амплитуды ЧП в статическом режиме

Для исследования был выбран КЛГ с линейной поляризацией излучения на упругом виброподвесе, периметром резонатора L = 28 см, собственной резонансной частотой колебаний подставки  $f_d$  = 393 Гц (периодом колебаний  $T_s$  = 0,0025 с) и шириной статической зоны захвата  $\Omega_L$  = 0,02 °/с (40 Гц).

В работе были проведены эксперименты, направленные на изучение влияния внешнего механического возмущения на режим работы вибрационной частотной подставки в КЛГ и динамическую синхронизацию частот встречных волн.

В теории нет механизма, вызывающего зависимость смещения нуля КЛГ  $\Omega$  от модуляции амплитуды ЧП  $f_b$ . Поскольку в зеемановских КЛГ такая зависимость существует [7, 12, 13], было проведено экспериментальное исследование показаний КЛГ на виброподвесе.

На рис. 3 и 4 представлены временные зависимости смещения нуля КЛГ  $\Omega$  с усреднением за 4 секунды, без вычета скорости вращения Земли для трех значений амплитуды ЧП  $f_b$  при включенном и выключенном ошумлении соответственно.

Как видно из представленных на рис. 3 графиков, изменение амплитуды ЧП  $f_b$  при наличии ошумления не оказывает влияния на смещение нуля КЛГ  $\Omega$  на виброподвесе.

Отсутствие ошумления ЧП приводит к выраженной нестабильности смещения нуля КЛГ  $\Omega$  при нормальном значении амплитуды ЧП  $f_b = 91$  кГц, сильному росту ошибки измерения угловой скорости при среднем значении  $f_b = 28$  кГц и пропаданию выходной информации при низком  $f_b = 14$  кГц. Это наглядно продемонстрировано на графиках рис. 4.



Рис. 3. Зависимость дрейфа нуля КЛГ для ошумленной ЧП разной амплитуды



Рис. 4. Зависимость дрейфа нуля КЛГ для неошумленной ЧП разной амплитуды

В табл. 1 представлены результаты среднего значения смещения нуля КЛГ  $\Omega$  для разных значений амплитуды ЧП  $f_b$  при наличии и отсутствии ошумления, обобщающие результаты эксперимента.

N₂	Параметры КЛГ с ошумлением ЧП		Параметры КЛГ без ошумления ЧП	
	f <sub>b</sub> , kHz	Ω, %h	f <sub>b</sub> , kHz	Ω, %h
1.	91	12,45	93	11,16
2.	27	12,50	28	10,31
3.	7,5	12,51	14	0,04

ТАБЛИЦА І. СУММАРНЫЙ ДРЕЙФ НУЛЯ КЛГ НА ВИБРОПОДВЕСЕ

Это говорит о наличии динамических зон синхронизации  $\Omega_{Di}$  в выходной характеристике КЛГ и необходимости эффективного ошумления ЧП. При этом зависимость смещения нуля  $\Omega$  КЛГ на виброподвесе от изменения амплитуды ЧП f<sub>b</sub> в статическом режиме отсутствует.

# В. Исследование характеристики КЛГ при биениях амплитуды ЧП кратных частоте ее коммутации

Биения амплитуды ЧП  $\delta f_b$  наблюдаются также на частотах f, кратных частоте ее коммутации  $f_d$ , то есть при  $f = n \cdot f_d$ , где n – натуральное число.

На рис. 5 приводятся результаты обработки первичной информации (пачек импульсов), полученных от КЛГ при биениях амплитуды ЧП  $\delta f_b$  под воздействием на виброподвес внешнего возмущающего сигнала с удвоенной частотой  $f_g = 2f_d$ .

Диапазон сканирования  $\Delta f_g = 766...786$  Гц в близи удвоенной частоты центрального резонанса кругильных колебаний виброподвеса  $f_d = 393$  Гц, ошумление ЧП отсутствует.



Рис. 5. Амплитуда ЧП и накопленный угол КЛГ при биениях на двойной частоте крутильных колебаний виброподвеса

Из графиков на рис. 5 видно, что при уменьшении амплитуды биений ЧП  $\delta f_b$ , то есть при больших отличиях внешней возмущающей частоты  $f_g$  от собственной  $f_d$  либо кратной частоты виброподвеса ( $f_g \neq n \cdot f_d$ ), биения перестают играть роль десинхронизатора, и в КЛГ возникает динамическая синхронизация частот встречных волн.

Этот эффект наблюдается в окрестностях 20000-го и 40000-го тактов, что наиболее заметно по графику изменения накопленного угла α, усреднённого за 0,5 секунды, как показано на рис. 5.

Таким образом, по входу и выходу КЛГ из динамической зоны захвата  $\Omega_D$  можно определить граничную разность собственных резонансных частот виброподвесов f<sub>d</sub>, за пределами которой нет взаимодействия между крутильными колебаниями КЛГ при работе в составе ИИБ.

#### IV. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В ходе проведённых экспериментов подтверждено отсутствие зависимости смещения нуля КЛГ  $\Omega$  от модуляции амплитуды ЧП  $f_b$  в статическом режиме работы при наличии ошумления ЧП.

Показано, что при малых отличиях частоты внешнего механического возмущения  $f_g$  от собственной частоты резонансных колебаний виброподвеса КЛГ  $f_d$  и кратных ей частот происходит эффективная десинхронизация динамических зон захвата  $\Omega_D$  в отсутствии ошумления ЧП.

При плавной отстройке частоты внешнего возмущения  $f_g$  от резонансной частоты крутильных колебаний виброподвеса  $f_d$  и кратных ей частот, в КЛГ возникает динамическая синхронизация частот встречных волн, вызывающая потерю информации о параметрах вращения.

Значение амплитуды ЧП  $f_b$  в момент входа или выхода в динамическую зону захвата  $\Omega_D$  может являться критерием для определения границ по разнесению собственных резонансных частот виброподвесов  $f_d$  КЛГ в составе ИИБ.

#### V. Выводы

В настоящей работе установлено, что при правильном выборе закона ошумления ЧП, стабильность и воспроизводимость смещения нуля  $\Omega$  КЛГ на виброподвесе не зависит от биений амплитуды ЧП  $\delta f_b$  в статическом режиме.

Показано, что значение амплитуды ЧП  $f_b$  в момент впадения в динамическую зону захвата  $\Omega_D$  может являться критерием прекращения взаимодействия крутильных колебаний КЛГ с внешним возмущающим воздействием. Это необходимо для эффективного выбора разноса собственных резонансных частот  $f_d$  триады КЛГ на виброподвесе в составе ИИБ.

#### Литература

- F. Aronovitz, "Fundamentals of the ring laser gyro," in Optical Gyros and their Application, Ed. by D. Loukianov, R. Rodloff, H. Sorg, and B. Stieler, RTO-AG-339 (1999), pp. 3-1–3-45.
- [2] K.N. Chopra "Ring Laser Gyroscopes". In: Optoelectronic Gyroscopes. Progress in Optical Science and Photonics, 2021, vol 11. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-15-8380-3\_1
- [3] Passaro Vittorio M. N., Antonello Cuccovillo, Lorenzo Vaiani, Martino De Carlo, and Carlo Edoardo Campanella, "Gyroscope Technology and Applications": A Review in the Industrial Perspective Sensors 17, no. 10: 2284, 2017. https://doi.org/10.3390/s17102284
- [4] D. Lukyanov, Yu. Filatov, Yu. Golyaev, U. Schreiber, M. Perlmutter, "50th anniversary of the laser gyro", 20th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2013 -Proceedings, 2013, pp. 36–49.
- [5] S. Wang, & Z. Zhang, "Research on Principle, Application and Development Trend of Laser Gyro". Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1549(2), 022118. <u>https://doi.org/10.1088/1742-6596/1549/2/022118</u>
- [6] N. Barbour, G. Schmidt, "Inertial sensor technology trends", IEEE Sensors Journal, 2001, 1(4), pp. 332–339.
- [7] В.В. Азарова, Ю.Д. Голяев, И.И. Савельев, Зеемановские лазерные гироскопы // Квантовая электроника. 2015. Т. 45. № 2. С. 171–179.
- [8] H. Guerrero, R. Pérez del Real, R. Fernández de Caleya, & G. Rosa, "Magnetic field biasing in Faraday effect sensors". Applied Physics Letters, 1999, 74(24), 3702–3704. doi:10.1063/1.123226
- [9] A D. Andrews, & T.A. King, A Multi-oscillator Ring Laser with Zeeman Bias, Journal of Modern Optics, 1994, 41(10), 2019–2032. doi:10.1080/09500349414551901
- [10] Wang Kedong, Gu Qitai, & Yan Lei. (n.d.), Experimental research on counter-balanced dither mechanism for Ring Laser Gyroscope.

PLANS, Position Location and Navigation Symposium (IEEE Cat. No.04CH37556), 2004. doi:10.1109/plans.2004.1308979

- [11] А.Г. Кузнецов, А.В. Молчанов, М.В. Чиркин, Е.А. Измайлов, Прецизионный лазерный гироскоп для автономной инерциальной навигации // Квантовая электроника, 2015, Т. 45, № 1,С. 78–88.
- [12] А.О. Синельников, А.А. Медведев, Ю.Д. Голяев, М.Е. Грушин, Д.И. Чекалов, Роль тепловых дрейфов нуля в магнитооптических зеемановских лазерных гироскопах // Гироскопия и навигация. Том 29. №4 (115), 2021. С. 46-55. DOI 10.17285/0869-7035.0079.
- [13] I. Savelyev, A.Sinel'nikov, "The influence of the pumping current on the Zeeman lasesr rotation sensors output parameters," 22nd St-Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2015 – Proceedings, 2015, pp. 421-424.
- [14] D.P. Johnson, Frequency Domain Analysis for RLG System Design. Navigation, 1987, 34(3), pp. 179–189. doi:10.1002/j.2161-4296.1987.tb01499.x
- [15] А.М. Хромых. Динамическая характеристика кольцевых лазеров с периодической частотной подставкой // Электронная техника, с.11, Лазерная техника и оптоэлектроника, 1990, в.1(53). С. 76.
- [16] В.В. Азарова, А.П. Макеев, Е.В. Кузнецов, Ю.Д. Голяев, Частотная характеристика ЛГ в широком диапазоне угловых скоростей вращения // Гироскопия и навигация. 2018. Т. 26. №2 (101). С. 3– 14. DOI 10.17285/0869-7035.2018.26.2.003-014.
- [17] Ю.Р. Иваненко, В.Ю. Мишин, А.В. Молчанов [и др.], Компенсация динамического захвата в кольцевом лазерном гироскопе // Навигация и управление летательными аппаратами. 2022. №3(38). С. 12-27.
- [18] J.I. Lahham, D.J Wigent., & A.L. Coleman, (n.d.), Tuned support structure for structure-borne noise reduction of inertial navigator with dithered ring laser gyros (RLG). IEEE 2000. Position Location and Navigation Symposium (Cat. No.00CH37062). doi:10.1109/plans.2000.838334
- [19] I. Khokhlov and A. Sinelnikov, A Method for Measuring the Lock-In Zone in Laser Gyro Sensors, 2021 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), Saint Petersburg, Russia, 2021, pp. 1-3, doi: 10.23919/ICINS43216.2021.9470854.
- [20] A.V. Molchanov, A.E. Serebryakov, V.V. Klimakov, H.N. Dao, V.Yu. Mishin, and M.V. Chirkin, The effect of slow fluctuation processes in the ring laser gyroscope on its bias instability, in Proceedings of the 25th SPb. International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Russia, 2018, pp. 302–305.
- [21] I.N. Khokhlov, A.O. Sinelnikov and N.E. Fetisova, Scale Factor Correction Model for Zeeman Laser Gyroscopes, 2022 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), Saint Petersburg, Russian Federation, 2022, pp. 1-4, doi: 10.23919/ICINS51784.2022.9815382.

# Подавление случайной погрешности лазерного гироскопа без ошумления частотной подставки

М.В. Чиркин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина» Рязань, Россия chirkin.m.v@yandex.ru

А.В. Молчанов ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики» Москва, Россия a.v.molchanov@mail.ru В.Ю. Мишин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина» Рязань, Россия mishvalera@yandex.ru

Ю.Р. Иваненко ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина» Рязань, Россия ivanenko.july@yandex.ru А.Е. Серебряков ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина» Рязань, Россия sea89s@yandex.ru

Г.В. Давыдов ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина» Рязань, Россия georgiy.davydov.93@mail.ru

Аннотация-Рассмотрена задача подавления случайной погрешности лазерного гироскопа (ЛГ) на основе кольцевого гелий-неонового лазера с целью повышения точности бесплатформенных инерциальных навигационных систем. Сформирована математическая модель для первичных квадратурных сигналов ЛГ, которая учитывает механическое вращение корпуса ЛГ, связь встречных оптических волн и аддитивный шум. Исследованы три метода обработки первичных сигналов: метод реверсивного счета импульсов (РСИ), метод вычисления мгновенной фазы Саньяка (МФС) и метод вычисления мгновенной фазы Саньяка с компенсацией динамического захвата (МФСК). Унифицирована процедура вычета частотной подставки из отсчетов угловой скорости вращения ЛГ с помощью режекторного фильтра. Определено влияние на зарегистрированные отсчеты угловой скорости вращения ЛГ. Исключена составляющая случайной погрешности ЛГ, обусловленная модуляцией частотной подставки псевдослучайным сигналом. «Паразитные» скачки фазы Саньяка при слабой связи встречных волн в оптическом резонаторе скомпенсированы с помощью метода МФСК.

Ключевые слова—кольцевой лазер, фаза Саньяка, статический порог захвата, динамический порог захвата, случайная погрешность.

#### I. Введение

Из-за обратного рассеяния лазерного излучения на шероховатых поверхностях зеркал и диафрагме возникает слабая связь между встречными оптическими волнами, генерируемыми кольцевым гелий-неоновым лазером. Данная связь приводит к синхронизации частот указанных выше волн, вследствие чего лазерный гироскоп (ЛГ) становится нечувствительным к малым угловым скоростям вращения. Количественно это явление характеризуется величиной статического порога захвата [1]. Использование гармонической частотной подставки позволяет уйти от данного ограничения, однако может привести к параметрической синхронизации, т.е. к возникновению зон динамического захвата, одна из которых находится в окрестности нуля, а остальные кратны угловой скорости, равной амплитуде подставки. Проблема динамического захвата решается, если амплитуда знакопеременной частотной подставки изменяется по случайному закону с нулевым средним [2]. Однако такой прием приводит к появлению дополнительной шумовой составляющей в выходном сигнале ЛГ. Цель настоящей

работы – использование оригинального способа цифровой обработки квадратурных сигналов, который заключается в вычислении мгновенной фазы Саньяка с компенсацией динамического захвата (МФСК), что создает условия для подавления случайной погрешности ЛГ.

# II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПЕРВИЧНЫХ СИГНАЛОВ ЛАЗЕРНОГО ГИРОСКОПА

Сдвиги интерференционной картины, образованной на поверхности смесительной призмы выведенными из кольцевого резонатора лазерными пучками, являются источником информации о вращении ЛГ [1]. На выходах сдвоенного фотодиода, регистрирующего движение интерференционных полос, первичные информационные сигналы имеют вид:

$$U_{c}(t) = U_{c,0} + U_{c,m} \cos(\psi(t) + \varphi_{c});$$
(1)

$$U_{s}(t) = U_{s,0} + U_{s,m} \sin(\psi(t) + \varphi_{s}), \qquad (2)$$

где  $\psi(t)$  – разность фаз встречных волн, генерируемых кольцевым лазером (фаза Саньяка);  $\varphi_c, \varphi_s$  – дополнительные фазовые сдвиги, обусловленные несовершенством электрооптической системы;  $U_{c,m}, U_{s,m}$  – амплитуды квадратурных сигналов;  $U_{c,0}, U_{s,0}$  – постоянные смещения квадратурных сигналов.

Изменение фазы Саньяка при слабой связи встречных оптических волн в ЛГ с частотной подставкой описывается дифференциальным уравнением [3]:

$$\frac{1}{K}\frac{d\psi}{dt} = \Omega + \omega_d \sin(2\pi f t) - \omega_L \sin(\psi + \rho), \qquad (3)$$

в котором  $\Omega$  – угловая скорость вращения корпуса ЛГ;  $f, \omega_d$  – частота и амплитуда подставки соответственно; K – масштабный коэффициент;  $\omega_L$  – статический порог захвата;  $\rho$  – фазовый сдвиг.

Слагаемое, пропорциональное  $\omega_L$ , в уравнении (3) описывает слабую связь встречных оптических волн в кольцевом лазере. Если частотная подставка ошумлена, то вместо второго слагаемого можно использовать экспериментально зарегистрированный сигнал ЛГ с вибрационной частотной подставкой [4]. В результате числен-

ного решения дифференциального уравнения (3) методом Рунге-Кутта четвертого порядка восстановлен временной ряд для фазы Саньяка с последующим моделированием «идеальных» квадратурных сигналов:  $U_c(t) = \cos(\psi(t)); U_s(t) = \sin(\psi(t))$ . Для приближения к условиям реального эксперимента к указанным выше сигналам добавлен «белый» шум.

До настоящего времени наряду с основным методом извлечения информации об угловой скорости вращения ЛГ – реверсивным счетом импульсов (РСИ) – применяется альтернативный способ расчета угловых перемещений ЛГ, заключающийся в вычислении мгновенной фазы Саньяка (МФС) [5], который включает в себя следующие стадии:

- дискретизацию первичных сигналов ЛГ;
- аппроксимацию эллипсом множества точек, соответствующих парам отсчетов первичных квадратурных сигналов U<sub>c</sub>, U<sub>s</sub>;
- вычисление параметров первичных сигналов *U*<sub>c,0</sub>, *U*<sub>s,0</sub>, *U*<sub>c,m</sub>, *U*<sub>s,m</sub>, ψ<sub>0</sub> = φ<sub>c</sub> - φ<sub>s</sub>, соответствую-щих наилучшей аппроксимации;
- восстановление временного ряда для фазы Саньяка ψ(t);
- удаление частотной подставки из отсчетов угловой скорости вращения ЛГ с помощью узкополосного режекторного фильтра.

# III. Алгоритмическая компенсация паразитных скачков фазы Саньяка

Причиной динамического захвата являются «паразитные» скачки фазы Саньяка, которые возникают из-за связи встречных волн, обусловленной обратным рассеянием лазерного излучения внутри кольцевого резонатора. Схемное представление метода МФСК [6,7] отражает рис. 1. Сигналы  $I_1$  и  $I_2$ , полученные с выходов фотодиодов ФД<sub>1</sub>, ФД<sub>2</sub>, регистрирующих мощность лазерного излучения в каждой из двух встречных волн, генерируемых кольцевым лазером, усиливаются таким образом, чтобы их амплитуды соответствовали амплитудам информационных сигналов U<sub>c</sub>, U<sub>s</sub>. С целью подавления противофазных помех переменные составляющие мощностных сигналов складываются. Далее осуществляется синхронное детектирование сигнала  $v_{ac}$  ( $v_{ac} = v_1 + v_2$  – переменная составляющая суммы мощностных сигналов), при этом в качестве опорных сигналов ( $\cos \psi$ ,  $\sin \psi$ ) используются первичные квадратурные сигналы ЛГ. На выходе фильтра нижних частот (ФНЧ) получаем «косинусный» G и «синусный» Q сигналы, содержащие гармоники в низкочастотной области спектра.

Блок-схема метода МФСК представлена на рис. 2. Восстановление фазы Саньяка  $\psi_{retr}$  происходит по квадратурным сигналам с аддитивным шумом [7].

Сигналы G и Q используются для восстановления мгновенных значений статического порога захвата и фазового сдвига сигнала ошибки с помощью функции четырехквадрантного арктангенса [7]:

$$\omega_L = \sqrt{G^2 + Q^2} ; \qquad (4)$$

$$\rho = \operatorname{atan2}\left(\frac{Q}{G}\right). \tag{5}$$



Рис. 1. Синхронное детектирование переменной составляющей суммы мощностных сигналов кольцевого лазера ( $\psi$  – заданная фаза Саньяка, которая включает в себя три составляющие, связанные с постоянным вращением корпуса ЛГ, использованием частотной подставки и взаимодействием встречных волн;  $I_1, I_2$  – мощностные сигналы)



Рис. 2. Блок-схема алгоритма компенсации динамического порога захвата в выходном сигнале ЛГ (*h* – шаг интегрирования)

Компенсация динамического порога захвата в выходном сигнале ЛГ выполняется на заключительном этапе алгоритма, когда сформированный сигнал ошибки, вызванной связью встречных волн, удаляется из отсчетов восстановленной фазы Саньяка [7]:

$$\Psi_0 = \Psi_{retr} - \Psi_{err} \,. \tag{6}$$

С целью унификации процедуры вычета частотной подставки из отсчетов измеренной угловой скорости параметры режекторного фильтра, применяемого в методах МФСК, МФС и РСИ, выбраны одинаковыми: коэффициент подавления – 60 дБ; полоса подавления – 40 Гц; центральная частота – 400 Гц; переходная область – 20 Гц.

# IV. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Тестовые первичные сигналы были сформированы в результате численного решения дифференциального уравнения (3). Полученные сигналы последовательно обрабатывались тремя методами: РСИ, МФС и МФСК. В первых двух методах использовалась частотная подставка с ошумлением амплитуды колебаний, в методе МФСК модуляция гармонической частотной подставки псевдослучайным сигналом не производилась. Эксперимент проводился со следующими начальными условиями:  $\omega_L = 0,05 \,^{\circ}/c$ ;  $\omega_d = 120 \,^{\circ}/c$ ;  $f = 400 \,\Gamma\mu$ ;  $\rho = 0,1 \,\mathrm{pad}$ ;  $\Omega_0 = 12 \,^{\circ}/\Psi - \,\mathrm{yr}$ ловая скорость равномерного вращения корпуса ЛГ;  $f_s = 2,4 \,\mathrm{M}\Gamma\mu - \,\mathrm{vacrora}$  дискретизации первичных квадратурных сигналов;  $f_{out} = 2,4 \,\mathrm{k}\Gamma\mu - \,\mathrm{vacrora}$ обновления выходной информации;  $t_{max} = 5400 \,\mathrm{c}$  – максимальное время моделирования, задаваемое для построения девиации Аллана;  $L = 0,28 \,\mathrm{m}$  – периметр четырехзеркального кольцевого резонатора;  $\lambda = 632,8 \,\mathrm{mm}$  – длина волны излучения гелий-неонового лазера. К сформированным «идеальным» квадратурным сигналам добавлялся «белый» шум: отношение сигнал/шум было равно 50 дБ.

В случае даже равномерного вращения корпуса ЛГ «паразитные» скачки фазы Саньяка на фоне восстановленной угловой скорости не компенсируют друг друга, вследствие чего угловая скорость ЛГ измеряется с ошибкой (рис. 3). С целью компенсации «паразитных» скачков фазы Саньяка сформированный сигнал ошибки, обусловленной слабой связью встречных волн, удаляется из отсчетов восстановленной фазы Саньяка (см. формулу (6)).



Рис. 3. Восстановленная угловая скорость ЛГ (без фильтрации колебаний гармонической частотной подставки и без коррекции динамического захвата) – кривая 1; «паразитные» скачки фазы Саньяка – кривая 2

На рис. 4 представлены передаточные характеристики ЛГ как зависимость восстановленной угловой скорости, не содержащей колебаний подставки и осредненной на интервале времени, равном 1 секунде, от заданной угловой скорости равномерного вращения корпуса ЛГ. Частота дискретизации полезного сигнала ЛГ равна 2,4 кГц. В численном эксперименте выбрано максимально допустимое значение статического порога захвата ( $\omega_I = 0.05 \circ / c$ ) для серийно выпускаемых кольцевых лазеров, периметр четырехзеркального резонатора которых равен 28 см. Кривая 1 соответствует методу обработки первичных сигналов, заключающемуся в аппроксимации эллипсом последовательности пар отсчетов квадратурных сигналов в ЛГ с гармонической частотной подставкой; она имеет участок нулевых значений полезного сигнала - первую зону динамического захвата, при этом величина статического порога захвата примерно в 32 раза больше значения динамического захвата  $(\omega_{DvnL} = 5,58^{\circ}/\text{y}).$ 

Кривая 2 соответствует методу обработки первичных сигналов с компенсацией «паразитных» скачков фазы Саньяка в ЛГ с гармонической частотной подставкой (она совпадает с идеальной передаточной характеристикой ЛГ). В данном случае происходит искусственная компенсация динамического порога захвата в окрестности нулевого значения измеряемой угловой скорости. Значения восстановленной угловой скорости, полученные при обработке первичных сигналов методом МФС в ЛГ с ошумленной подставкой (кривая 3), близки к значениям измеренной угловой скорости, найденным при обработке первичных сигналов методом РСИ в ЛГ с частотной подставкой, промодулированной псевдослучайным сигналом. В последних двух методах обработки квадратурных сигналов в области малых угловых скоростей появляется ошибка: кривая 3 отклоняется от идеальной передаточной характеристики ЛГ.



Рис. 4. Передаточные характеристики ЛГ при разных методах обработки первичных сигналов: кривая 1 – метод МФС при гармонической частотной подставке; кривая 2 – метод МФСК при гармонической частотной подставке; кривая 3 – метод МФС при ошумленной частотной подставке

Составляющие случайной погрешности ЛГ в условиях искусственной компенсации искажений, вызванных влиянием связи встречных волн на зарегистрированные отсчеты угловой скорости вращения ЛГ, представлены на рис. 5 в форме зависимости квадратного корня из дисперсии Аллана от времени интегрирования отсчетов угловой скорости. Кривая 1 соответствует методу обработки первичных сигналов, заключающемуся в аппроксимации эллипсом квадратурных сигналов в ЛГ с ошумленной частотной подставкой. Обработка первичных сигналов методом РСИ в ЛГ с частотной подставкой, амплитуда колебаний которой изменяется по случайному закону, обозначена цифрой 3. Именно модуляция подставки псевдослучайным сигналом увеличивает случайную погрешность по сравнению с методом обработки первичных сигналов с компенсацией «паразитных» скачков фазы Саньяка в ЛГ с гармонической подставкой (кривая 2) для времен интегрирования, превышающих 0,1 с. При посекундном осреднении среднеквадратичное отклонение (СКО) измеренной угловой скорости для метода МФС по сравнению с методом МФСК увеличивается в 3 раза, СКО для метода РСИ по сравнению с МФСК увеличивается в 4 раза; при стосекундном осреднении СКО для методов МФС и РСИ в 17 раз превышает значение СКО для метода МФСК.



Рис. 5. Девиации Аллана при разных методах обработки первичных сигналов ( $\Omega_0 = 12$  °/ч;  $t_{max} = 5400$  с): кривая 1 – метод МФС при ошумленной частотной подставке; кривая 2 – метод МФСК при гармонической частотной подставке; кривая 3 – метод РСИ при ошумленной частотной подставке

Наличие шумовой составляющей в выходном сигнале ЛГ для методов РСИ и МФС связано и с шумом квантования, обусловленным дискретизацией первичных сигналов, и со случайным блужданием регистрируемого углового положения ЛГ, вызванным модуляцией частотной подставки псевдослучайным сигналом. В случае реализации метода МФСК возмущения полезного сигнала ЛГ обусловлены только шумом квантования.

# V. Выводы

Сравнение результатов решения задачи подавления случайной погрешности ЛГ на базе исследования трех методов обработки первичных сигналов приводит к следующим выводам:

- сформирована математическая модель для первичных квадратурных сигналов ЛГ, которая учитывает механическое вращение корпуса ЛГ, связь встречных волн и аддитивный шум;
- проведен сравнительный анализ трех методов обработки первичных квадратурных сигналов: в методах РСИ и МФС при частотной подставке с рандомизацией амплитуды колебаний компенса-

ция динамического порога захвата не выполняется; в методе МФСК при гармонической частотной подставке производится компенсация «паразитных» скачков фазы Саньяка, вызванных слабой связью встречных оптических волн;

- унифицирована процедура удаления частотной подставки из отсчетов угловой скорости вращения ЛГ с помощью узкополосного режекторного фильтра;
- отказ от модуляции подставки псевдослучайным сигналом позволяет проводить измерения малых угловых скоростей в условиях искусственной компенсации «паразитных» скачков фазы Саньяка, обусловленных обратным рассеянием лазерного излучения внутри кольцевого резонатора, что приводит к уменьшению составляющей случайной погрешности, обратно пропорциональной квадратному корню из времени осреднения, при постоянной угловой скорости вращения корпуса ЛГ.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aronowitz F. Fundamentals of the ring laser gyro // Optical gyros and their application, RTO-AG-339, 1999, pp. 31–34.
- [2] Молчанов А.В., Суминов В.М., Чиркин М.В. Формирование доминирующей погрешности лазерного гироскопа // Авиакосмическое приборостроение, 2004, №9. С. 12–19.
- [3] Kuznetsov A G., Molchanov A.V., Chirkin M.V., Izmailov E.A. Precise laser gyroscope for autonomous inertial navigation // Quantum electronics, 2015, vol. 45, no. 1, pp. 78–88.
- [4] Molchanov A.V., Belokurov V.A., Chirkin M.V., Kagalenko M.B., Koshelev V.I., Mishin V.Yu., Morozov D.A. The application of advanced processing technique to the triad of precision laser gyroscopes // XXIII ICINS 2016 – Proceedings, SPb, May 2016, pp. 120–122.
- [5] Molchanov A.V., Belokurov V.A., Chirkin M.V., Koshelev V.I., Mishin V.Yu., Morozov D.A. Precision laser gyro with a digital channel for quadrature signal processing // XXII ICINS 2015 – Proceedings, SPb, May 2015, pp. 307–314.
- [6] Sin-Woo Song, Ja-Cheul Lee, Suk-Kyo Hong, Dongkyoung Chwa. New random walk reduction algorithm in ring laser gyroscopes // Journal of Optics, 2010, vol. 12, pp. 115501-115509.
- [7] Jae-Cheul Lee, Hyun-Ju Cho, Ho-Soon Yang. Zero lock-in implementation by phase wrapping/unwrapping in a ring laser gyroscope // Applied Optics, 2021, vol. 60, no. 34, pp. 10529–10538.

# Подавление шумов при синхронизации мод в лазерном гироскопе на полупроводниковом оптическом усилителе и волоконном резонаторе с большой длиной

Ю.Ю. Брославец *МФТИ*, *АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия <u>laseruu@mail.ru</u>

А.А. Фомичев *МФТИ, АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия <u>laser@mail.mipt.ru</u> Е.А. Полукеев *МФТИ, АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия epolukeev2105@yandex.ru

В.Г. Семенов *МФТИ*, *АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия <u>valerii.semenov.g@gmail.com</u> Д.С. Редичкина *МФТИ* г. Долгопрудный, Россия <u>dariaredichkina@gmail.com</u>

А.С. Назарова *МФТИ* г. Долгопрудный, Россия <u>nazarova.as@phystech.edu</u>

Аннотация—В работе представлены результаты создания лазерного гироскопа на полупроводниковом оптическом усилителе и волоконном резонаторе. Для улучшения чувствительности лазерного гироскопа использована синхронизация мод путем модуляции тока накачки и, тем самым, усиления в полупроводниковой структуре. Проведено исследование режимов генерации в лазерном гироскопе с полупроводниковым оптическим усилителем и волоконным резонатором большой длины. Определено влияние синхронизации продольных мод на стабильность генерации, ширину линии генерации и шумы, а также область захвата частоты. Выполнено сравнение режимов генерации и возможностей регистрации угловых величин для гироскопа на полупроводниковом оптическом усилителе.

Ключевые слова—твердотельный лазерный гироскоп, кольцевой лазер, синхронизация мод, захват частоты, полупроводниковый оптический усилитель.

# I. Введение

Интенсивное развитие полупроводниковых лазеров на основе квантоворазмерных структур, создание полупроводниковых усилителей на основе гетероструктур с квантовыми ямами привело к появлению компактных высокоэффективных оптических усилителей с высоким коэффициентом усиления [1, 2]. Используя такой усилитель и оптическое волокно в качестве резонатора, можно получить масштабируемый кольцевой лазер и на его основе лазерный гироскоп [1, 2, 9]. Основные трудности при создании гироскопов на твердотельных оптических средах - это конкуренция встречных волн [3, 4]. Одна из проблем в таких лазерных гироскопах - это высокие потери при вводе и выводе излучения, приводящие к необходимости увеличения длины резонатора для обеспечения высокой добротности, позволяющей получать достаточно малую ширину линии генерации каждой продольной моды. При этом надо отметить большую ширину линии усиления и небольшой интервал по частоте между продольными модами, приводящий к многочастотной генерации. В таких гироскопах регистрация сигнала происходит по расщеплению частоты биений продольных мод, что дает невысокую чувствительность к вращению. Тем не менее, создание гироскопа на основе такого подхода имеет много привлекательных сторон и положительных качеств: высокая эффективность, использование накачки электрическим током, маленькие потребляемые мощности и тепловыделение, большой ресурс работы, невысокая стоимость, возможность масштабирования длины резонатора лазера и, тем самым, изменение чувствительности к вращению, технологичность конструкции. При этом в ряде работ получены точности, обеспечивающие измерение скорости вращения Земли.

В работе представлены результаты создания лазерного гироскопа на полупроводниковом оптическом усилителе (ПОУ) и волоконном резонаторе. Для улучшения чувствительности лазерного гироскопа использована активная синхронизация мод путем модуляции тока накачки и, тем самым, усиления в полупроводниковой структуре. В лазерном гироскопе использовался усилитель SOA-1550-14BF на длину волны 1530 нм с волоконным входом и выходом с сохранением поляризации и усилением ~ 20-28 дБ. Усилитель основывается на квантоворазмерных гетероэпитаксиальных структурах на основе InGaAsP-InP с пятью квантовыми ямами. В лазере использовалось одномодовое РМ волокно типа "Панда" с сохранением поляризации. Большая длина (~ 870 м) намотанного в катушку волокна обеспечивала высокую добротность резонатора даже при достаточно больших потерях при вводе и выводе излучения в усилитель. При этом продольные моды отстоят друг от друга по частоте на 226 кГц. Это позволяет использовать достаточно низкие частоты для модуляции усиления на межмодовой частоте при синхронизации мод путем модуляции тока накачки. Регистрация сигнала биений встречных волн происходила благодаря InGaAs фотодиода с волоконным входом, установленного на выходе 50% оптического смесителя, в который встречные волны введены из 5% волоконного делителя, установленного в резонаторе гироскопа.

На созданной экспериментальной установке были проведены исследования, направленные на сокращение спектральной ширины линии генерации отдельных продольных мод. Ширина мод спектра определялась по сигналам их биений с использованием радиотехнического спектроанализатора. Подобрана форма и глубина модуляции тока накачки оптического усилителя для минимизации длительности генерируемых импульсов и

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00234, https://rscf.ru/project/23-22-00234/.

сокращения спектральной ширины биений продольных мод. Изучен спектр генерации при изменении поляризации генерируемого излучения. Также были проведены исследования устойчивости синхронизации мод при вращении гироскопа. Определены характеристики отклика сигнала на оптическом усилителе гироскопа на вращение.

В работе экспериментально и в результате численного моделирования показано, что при синхронизации мод происходит уменьшение флуктуаций параметров излучения, спектр излучения отдельных мод становится уже. На выходе оптического смесителя, с фотоприемника, при больших постоянных времени в усилителе сигнала, можно наблюдать сигнал биений, возникающий в результате интегрирования импульсов, генерируемых при синхронизации мод.

Исследования показали, что для лазерного гироскопа на полупроводниковом оптическом усилителе с волоконным резонатором основным методом, обеспечивающим получение необходимой чувствительности к вращению, при доступных эффективностях ввода и вывода излучения из полупроводниковой структуры в волокно и наоборот, является использование большой длины резонатора и режима синхронизации мод. При этом такой гироскоп обладает определенными преимуществами перед другими гироскопами, а также рядом положительных качеств.

# II. ОЦЕНКА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА НА ОСНОВЕ ПОУ И СВЕРХДЛИННОГО ВОЛОКОННОГО РЕЗОНАТОРА ПРИ СИНХРОНИЗАЦИИ МОД

В режиме синхронизации мод сокращение естественной ширины линии генерации продольной моды "n" при синхронизации "N" мод описывается следующим выражением [5]:

$$\Delta \Omega_{nsynch}^{n} = \left[\frac{1}{N} + \frac{12}{N(N^{2} - 1)}n^{2}\right] \Delta \Omega_{fr}^{n}.$$
 (1)

$$\Delta\Omega_{fr}^{n} = \frac{N_2}{N_2 - N_1} \frac{\hbar\omega(\Delta\omega_c)^2}{2\pi P}.$$
 (2)

Здесь  $\Delta \Omega_{fr}^n$  – спектральная ширина моды в режиме свободной генерации, центральная мода имеет номер  $n = 0; N_1, N_2$ . – населенности рабочих уровней, P – генерируемая мощность,  $\Delta \omega_c$  – ширина резонансной кривой резонатора, *w* – частота генерации. Таким образом, для параметров созданного лазерного гироскопа: L ~ 869 м, потерях при выводе и вводе в волокно  $\tau_1 = 0.5$ , потерях в волокне  $\tau_2 = 0.6$ , потерях на выход излучения из резонатора  $\tau_3 = 0.05$ ,  $n_0 = 1.46$  получаем ширину резонансной кривой  $\Delta v \sim 88$  кГц. При  $P \sim 30*10^{-6}$  Вт,  $h = 6.626*10^{-34}$ Дж\*с,  $\lambda = 1530$  нм,  $\nu \sim 1.959 \times 10^{14}$  Гц, ширина линии генерации (2) обусловленная квантовыми шумами  $\Delta f \sim 2.1*10^{-4}$  Гц. Таким образом, благодаря сверхбольшой длине резонатора, даже при больших потерях, связанных с вводом излучения в волокно и в усилитель, ширина линии генерации оказывается уже, чем даже, например, в гелий-неоновом лазере. Это во многом определяет потенциальные возможности для такого гироскопа. В режиме синхронизации мод ширина линии генерации каждой из мод становится еще уже согласно

(1). В соответствии с (рис. 4, 5) ширина линии усиления достигает величины ~30 нм при  $\lambda = 1530$  нм, поэтому при межмодовом интервале 226 кГц количество генерируемых мод может достигать  $N \sim 1.7*10^7$ . В результате, в режиме синхронизации мод, теоретическое ограничение ширины линии генерации отдельных продольных мод для кольцевого лазера со сверхбольшим резонатором и ПОУ может быть на уровне ~ $1.2*10^{-11}$  Гц. Это может обеспечивать сверхвысокую чувствительность такого лазерного гироскопа. Необходимо отметить, что в оценки не включены технические шумы, связанные с конструкцией гироскопа, внешними воздействиями и другими факторами, поэтому полученные значения могут быть реализованы только при их устранении.

Для моделирования генерации в лазере с волоконным резонатором и полупроводниковым оптическим усилителем при синхронизации мод был использован подход, базирующийся на теории, представленной в [6-8, 10] и описании кольцевого лазера на основе системы уравнений для продольных мод, каждое из которых строилось на основе [7]:

$$\omega_m^2 e + \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{de}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d^2}{dt^2} \int_{V_C} \left( \overline{P}_{pes}(\overline{r}, t) \overline{E}_m(\overline{r}) \right) dV, \quad (3)$$

где e(t) – комплексная амплитуда поля,  $\omega_m$  – резонансная частота резонатора при отсутствии потерь,  $\sigma$  – эффективная проводимость,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\tau_c = \varepsilon/\sigma = Q/\omega_m$  – постоянная времени убывания энергии m – ой моды резонатора с добротностью Q. Правая часть уравнения включает в себя индуцированное и спонтанное излучение возбуждения моды активной средой, где  $\overline{E}_m(\overline{r})$  – поле моды m,  $\overline{P}_{pes}(\overline{r},t) = \varepsilon_o \chi \overline{E}_m(\overline{r},t)$  – поляризация в активной среде,  $V_C$  – объем резонатора. Уравнение (3) может быть упрощено, используя такие величины, как  $g_o$  – ненасыщенный показатель усиления,  $\gamma_n$  – параметр насыщения и  $r = 1/\tau_c$  – потери. В результате, уравнение для комплексной амплитуды поля моды резонатора лазера, приобретает следующий вид [7, 10]:

$$\frac{d^{2}e}{dt^{2}} + \left[r - (g_{o} - \gamma_{H}e^{2})\right]\frac{de}{dt} + \omega_{m}^{2}e = N(t), \quad (4)$$

где N(t) – спонтанное излучение и приводящее к появлению фундаментальной ширины линии генерации одночастотного лазера или каждой моды в многочастотном режиме генерации.

Используя систему на основе (4), аналогично [11], проведено численное моделирование процесса синхронизации мод. В модели учтена неоднородность линии усиления, обусловленная технологическим разбросом параметров квантовых ям. Синхронизация мод получалась за счет захвата частоты соседних мод боковыми компонентами, возникающими в результате амплитудной модуляции усиления. Изучено взаимовлияние встречных волн и их конкуренция при синхронизации мод. Определены оптимальные режимы, обеспечивающие регистрацию вращения.

# III. Экспериментальная установка

В работе была создана экспериментальная установка (рис. 1) [9], позволяющая проводить исследования режимов генерации, обеспечивающих возможность измерения угловых величин кольцевым лазером с полупроводниковым оптическим усилителем и волоконным резонатором в режиме синхронизации мод. В качестве усилителя использовался модуль SOA-1550-14BF на длину волны 1530 нм с волоконным входом и выходом, обеспечивающим сохранение поляризации. Усилитель создан на квантоворазмерных гетероэпитаксиальных структурах на основе InGaAsP-InP с пятью квантовыми ямами (рис. 1).



Рис. 1. Оптическая схема лазерного гироскопа

Коэффициент усиления достигал 20-28 дБ. РМ – одномодовое волокно типа "Панда", используемое в резонаторе, обеспечивало сохранение поляризации. Сверхбольшая длина оптического контура лазера приводит к маленькому интервалу по частоте между продольными модами и достаточно большой добротности, несмотря на потери при вводе и выводе излучения из усилителя в волокно. Так, при общей длине контура ~ 870 м продольные моды и частоты их биений (рис. 2) отстоят друг от друга на ~ 226кГц.



Рис. 2. Радиотехнический спектр сигналов биений продольных мод



Рис. 3. Радиотехнический спектр сигнала биений продольных мод. Полуширина спектра на полувысоте ~2.5 кГц



Рис. 4. Спектр суперлюми<br/>несценции на CW выходе ПОУ (P = 3.8 mW, Ip = 300 mA)



Рис. 5. Спектр суперлюминесценции на ССW выходе ПОУ (P = 3.0 mW, Ip = 300 mA)



Рис. 6. Спектр генерации на ССW выходе ПОУ (Ip = 250 mA)



Рис. 7. Радиотехнический спектр сигналов биений продольных мод. Расщепление обусловлено вращением гироскопа (Δ*f*~3 кГц)

Синхронизация мод достигалась модуляцией тока накачки на частоте соответствующей межмодовому интервалу (рис. 10, 11). Для регистрации сигнала биений встречных волн использовался скоростной InGaAs фотодиод с волоконным входом. Измерения показали, что мощность генерации встречных волн (рис. 8, 9) ввиду различия потерь на ввод излучения в волокно с разных сторон полупроводникового усилителя различна. При этом оптический спектр излучения без синхронизации мод имеет ряд пиков (рис. 6), обусловленных селекций длин волн в резонаторе. На созданной экспериментальной установке были проведены исследования устойчивости синхронизации мод (рис. 11) при вращении гироскопа. Определены характеристики отклика сигнала в гироскопе на вращение (рис. 7).



Рис. 8. Зависимость мощности люминесценции от тока накачки для встречных волн при токах ниже порога генерации



Рис. 9. Зависимость мощности генерации от тока накачки для встречных волн (I,=185 мА)



Рис. 10. Радиотехнический спектр сигналов биений продольных мод с пиками боковых полос возникающих при модуляции тока накачки



Рис. 11. Осциллограмма интенсивности на выходе кольцевого лазера на ПОУ (верхняя зависимость) и модуляции тока усилителя при синхронизации продольных мод (нижняя зависимость)

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследований определено, что максимальное подавление внутренних шумов и внешних возмущений в лазерном гироскопе на ПОУ и волоконном резонаторе можно обеспечить при использовании резонатора с большой длиной и режима синхронизации мод.

Исследования показали сокращение спектральной ширины биений продольных мод при их синхронизации, что улучшает чувствительность и возможность детектирования вращения, как по сигналу биений встречных волн, так и по расщеплению частот биения продольных мод. В целом, гироскоп на полупроводниковом оптическом усилителе с волоконным резонатором показал возможность регистрации вращения и его использования в качестве датчика малой точности.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Акпаров В.В., Дураев В.П., Логгинов А.С., Неделин Е.Т. Кольцевой лазер на основе полупроводникового оптического усилителя. М.: «Фотон-экспресс», №6 2005. 23-26 с.
- [2] Акпаров В.В., Дмитриев В.В. Дураев В.П., Казаков А.А. Полупроводниковый кольцевой лазер и исследование его характеристик в режиме датчика вращения. Квантовая электроника, 40, №10 2010.
- [3] Aronowitz, F., Laser gyros, In: Lasers Applications. Russian edition, M: «Mir», 1974. p. 182-269.
- [4] Голяев Ю.Д., Задерновский А.А., Столяров С.Н. Твердотельный кольцевой лазер и возможности его использования в гироскопии // Эл. техника, №3, Серия 11, 1983.
- [5] Malakhov, A.N. and Mal'tsev, A.A., Width of the spectral lines of an N-mode system which has an equidistant spectrum of natural frequencies and operates in a self-synchronous mode, Radiofizika, 1973. Vol. 16, No. 8, p. 1211-1220.
- [6] Ханин Я.И. Основы динамики лазеров. М.: Наука, Физматлит, 1999.
- [7] Ярив А. Квантовая электроника. Под ред. Я.И. Ханина. М.: Сов. Радио, 1980.
- [8] Квантовая оптика и квантовая радиофизика. Лекции в летней школе теоретической физики Гренобльского университета. Лезуш, Франция. М. Мир, 1966.
- [9] Y.Y. Broslavets, M.A. Georgieva, A.A. Fomitchev, "Generation regimes of laser gyro with solid-state broadband active medium and gyro with semiconductor optical amplifier", 20th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), pp. 63-65, 2013.
- [10] Yu. Yu. Broslavets, D. M. Ambartsumyan, V. G. Semenov, A. A. Fomichev and E. A. Polukeev, "Multifrequency Solid-State Ring Laser Gyroscope Based on YAG:Cr<sup>4+</sup>", 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), 2021, pp. 1-8, doi: 10.23919/ICINS43216.2021.9470867.

# Связь встречных волн через рассеяние на элементах непланарного симметричного резонатора в четырехчастотном зеемановском лазерном гироскопе

Ю.Ю. Брославец *МФТИ*, *АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия <u>laseruu@mail.ru</u>

А.А. Фомичев *МФТИ, АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия <u>laser@mail.mipt.ru</u> Е.А. Полукеев *МФТИ, АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия epolukeev2105@yandex.ru

В.Г. Семенов *МФТИ*, *АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия <u>valerii.semenov.g@gmail.com</u> Д.С. Редичкина *МФТИ* г. Долгопрудный, Россия <u>dariaredichkina@gmail.com</u>

А.С. Назарова *МФТИ* г. Долгопрудный, Россия <u>nazarova.as@phystech.edu</u>

Аннотация—В работе проведено исследование величины связи встречных волн, обусловленной рассеянием излучения, для зеемановских лазерных гироскопов в четырехчастотном режиме генерации при смещении зеркал по измерениям амплитуды сигнала боковой полосы сонаправленных волн ортогональной поляризации. Найденная величина связи встречных волн использовалась для ее минимизации путем синфазного смещения зеркал. Представлены измерения характерного времени восстановления величины связи встречных волн после входа в область захвата и выхода методом восстановления фазы сигнала биений для четырех- и двухчастотного режимов генерации в лазерных гироскопах с разными по частоте межмодовыми интервалам.

Ключевые слова—лазерный гироскоп, четырехчастотный лазерный гироскоп, захват частоты, непланарный резонатор, зеемановская подставка.

# I. Введение

Связь встречных волн в лазерном гироскопе приводит к нелинейности его выходной частотной характеристики и захвату частоты при малом расщеплении частот встречных волн за счет вращения или создаваемой частотной подставки [1, 2, 4, 5]. Данное обстоятельство делает невозможным измерение малых угловых скоростей в области захвата и приводит к ошибкам, связанным с нелинейностью частотной характеристики. Захват частоты в лазерных гироскопах возникает в основном по причине связи встречных волн через рассеяние на зеркалах. При этом наблюдается еще и такое явление как гистерезис, когда вход и выход из области захвата имеет разные значения. Это явление связываают с дополнительным рассеянием, возникающем в результате образования на зеркалах периодической структуры от интерференции при захвате частоты [2]. При этом после включения подставки все параметры начинает возвращаться к исходному состоянию. Достижение высокой точности в лазерных гироскопах возможно только при использовании ряда мер, уменьшающих все эти явления, приводящие к связи волн. Также необходимо отметить, что на сегодняшний день связь встречных волн в четырехчастотных зеемановских лазерных гироскопах мало изучена [5]. Генерация одновременно на двух ортогональных круговых поляризациях в четырехчастотных лазерных гироскопах, в отличие от двухчастотных, может приводить к более сложным явлениям при синхронизации встречных волн. В частности, такое явление как гистерезис при входе и выходе из области захвата, ввиду генерации излучения в гироскопе на двух ортогональных круговых поляризациях, будет определяться одновременно волнами этих поляризаций. Искажение сигнала биений встречных волн вследствие нелинейных эффектов будет зависеть от волн обеих поляризаций. Это приведет к более сложным, по сравнению с двухчастотным гироскопом, формам сигналов биений и необходимости при определении величины связи встречных волн, при работе четырехчастотного лазерного гироскопа, соответствующих физических моделей и новых подходов.

В нашей работе исследовано поведение величины связи встречных волн при изменении параметров нового четырехчастотного зеемановского лазерного гироскопа с симметричным резонатором в форме правильного тетраэдра с периметром 28 см. Угол падения на выходное зеркало в 30° приводит к эллиптичности выходного пучка. Это позволяет, используя компенсирующее диэлектрическое покрытие и поляризатор в смесителе, разделить сигналы биений от ортогональных поляризаций. Выбранный угол излома резонатора приводит к неэквидистантному спектру частот для собственных мод с левой и с правой круговой поляризацией. В этом случае работа гироскопа может происходить либо на паре волн с ортогональной поляризацией с большим расщеплением частоты (~606.5 МГц) или с меньшим (~462.5 МГц). Соответственно и связь волн носит различный характер. Экспериментально обнаружено взаимовлияние волн в четырехчастотном режиме при наличии частотной подставки, когда все четыре волны имеют разные частоты, но при этом происходит синхронизация разностей частот пар встречных волн для волн ортогональной поляризации. Для измерения величины связи использовались три различных метода. Первый путем измерения выходной частотной характеристики и определения области захвата, при этом оценка величины связи проводилась и по нелинейности характеристики. Для работы системы минимизации связи волн величина, пропорциональная связи волн, определялась по величине амплитудной модуляции волн, приводящей к появлению боковой полосы в спектре сигнала биений как встречных волн, так и сонаправленных волн. Для

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00234, https://rscf.ru/project/23-22-00234/.

измерений в динамике изменения величины связи использовался новый [5], разработанный метод, основывающийся на измерении величины искажений сигнала биений путем восстановления фазы сигнала биений встречных волн.

# II. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАХВАТА ЧАСТОТЫ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ СВЯЗИ ГЕНЕРИРУЕМЫХ ВОЛН

Для моделирования динамики генерации и влияния связи волн, обусловленной рассеянием на элементах резонатора на выходную частотную характеристику, использовалась расширенная система уравнений (1), базирующаяся на уравнениях, представленных в работах Ф. Ароновца [1].

$$\begin{aligned} \frac{dI_{1l}}{dt} &= (c/L)I_{1l}[\alpha_{1l} - \beta_{1l}I_{1l} - \vartheta_{12l}I_{2l} - \theta_{12lr}I_{2r} - 2\rho_{2l}\cos(\psi_{l} + \varepsilon_{2l})] \\ \frac{dI_{2l}}{dt} &= (c/L)I_{2l}[\alpha_{2l} - \beta_{2l}I_{2l} - \vartheta_{21l}I_{1l} - \theta_{21lr}I_{1r} - 2\rho_{1l}\cos(\psi_{l} - \varepsilon_{1l})] \\ \frac{d\psi_{l}}{dt} &= \Omega_{l} + \tau_{21l}I_{1l} - \tau_{12l}I_{2l} + (c/L)[\rho_{2l}\sin(\psi_{l} + \varepsilon_{2l}) + \rho_{1l}\sin(\psi_{l} - \varepsilon_{1l})] \\ \frac{dI_{1r}}{dt} &= (c/L)I_{1r}[\alpha_{1r} - \beta_{1r}I_{1r} - \vartheta_{12r}I_{2r} - \theta_{12rl}I_{2l} - 2\rho_{2r}\cos(\psi_{r} + \varepsilon_{2r})] \\ \frac{dI_{2r}}{dt} &= (c/L)I_{2r}[\alpha_{2r} - \beta_{2r}I_{2r} - \vartheta_{21r}I_{1r} - \theta_{21rl}I_{1l} - 2\rho_{1r}\cos(\psi_{r} - \varepsilon_{1r})] \\ \frac{d\Psi_{r}}{dt} &= \Omega_{r} + \tau_{21r}I_{1r} - \tau_{12r}I_{2r} + (c/L)[\rho_{2r}\sin(\psi_{r} + \varepsilon_{2r}) + \rho_{1r}\sin(\psi_{r} - \varepsilon_{1r})] \end{aligned}$$

Интенсивности могут быть найдены как:

$$\begin{split} &I_{1l} = \bigl( \bigl[ \alpha_{1l} + 2\rho_{2l} \text{cos}(\phi_l + \varepsilon_l) \bigr] \beta_{2l} - \vartheta_{12l} \bigl[ \alpha_{2l} + 2\rho_{1l} \text{cos}(\phi_l - \varepsilon_l) \bigr] \bigr) / D_l \,, \\ &I_{2l} = \bigl[ \bigl[ \alpha_{2l} + 2\rho_{1l} \text{cos}(\phi_l - \varepsilon_l) \bigr] \beta_{1l} - \vartheta_{2ll} \bigl[ \alpha_{1l} + 2\rho_{2l} \text{cos}(\phi_l + \varepsilon_l) \bigr] \bigr) / D_l \,, \\ &I_{1r} = \bigl[ \bigl[ \alpha_{1r} + 2\rho_{2r} \text{cos}(\phi_r + \varepsilon_r) \bigr] \beta_{2r} - \vartheta_{12r} \bigl[ \alpha_{2r} + 2\rho_{1r} \text{cos}(\phi_r - \varepsilon_r) \bigr] \bigr) / D_r \,, \\ &I_{2r} = \bigl[ \bigl[ \alpha_{2r} + 2\rho_{1r} \text{cos}(\phi_r - \varepsilon_r) \bigr] \beta_{1r} - \vartheta_{21r} \bigl[ \alpha_{1r} + 2\rho_{2r} \text{cos}(\phi_r + \varepsilon_r) \bigr] \bigr) / D_r \,, \end{split}$$

ГДе  $D_l = \beta_{1l}\beta_{2l} - \vartheta_{12l}\vartheta_{21l}, D_r = \beta_{1r}\beta_{2r} - \vartheta_{12r}\vartheta_{21r}; H \theta_{12lr}, \theta_{21lr}, \theta_{12rl}, \theta_{21rl} = 0$ ,

$$\begin{split} \rho_{1l} &= r_{1l}\sqrt{I_{1l}/I_{2l}}, \quad \rho_{2l} = r_{2l}\sqrt{I_{2l}/I_{1l}}, \quad \Omega_l = \Omega_{2l} - \Omega_{1l} + \sigma_{2l} - \sigma_{1l} \\ \rho_{1r} &= r_{1r}\sqrt{I_{1r}/I_{2r}}, \quad \rho_{2r} = r_{2r}\sqrt{I_{2r}/I_{1r}}, \quad \Omega_r = \Omega_{2r} - \Omega_{1r} + \sigma_{2r} - \sigma_{1r} \end{split}$$

 $I_{1l}, I_{2l}, I_{1r}, I_{2r}$  – безразмерные интенсивности встречных волн ортогональных поляризаций;  $\alpha_{1l}, \alpha_{2l}, \alpha_{1r}, \alpha_{2r}$  – разности коэффициентов усиления и потерь ортогональных поляризаций;  $\beta_{1l}, \beta_{2l}, \beta_{1r}, \beta_{2r}$  – коэффициенты насыщения каждой из волн;  $\vartheta_{1l}, \vartheta_{2l}, \vartheta_{1r}, \vartheta_{2r}$  – коэффициенты кросс-насыщения каждой из волн;  $\theta_{12lr}, \theta_{21lr}, \theta_{12rl}, \theta_{21rl}$  – коэффициенты кросс-насыщения встречных волн ортогональных поляризаций;  $\rho_{1l}, \rho_{2l}, \rho_{1r}, \rho_{2r}$  – коэффициенты связи, обусловленные обратным рассеянием.



Рис. 1. Амплитудная модуляция пар встречных волн ортогональной поляризации для четырехчастотной генерации с учетом связи волн через рассеяние. Наблюдается искажение формы амплитудной модуляции аналогично искажениям сигнала биений

Решение системы уравнений (1) позволяет получить величину амплитудной модуляции интенсивности и сдвиг фазы колебаний амплитуды каждой из встречных волн ортогональных поляризаций (рис. 1). Более полное описание процессов при генерации в четырехчастотном зеемановском лазерном гироскопе дано в работе [3].

В четырехчастотном режиме генерации рассеянное излучение благодаря нелинейности усиления в активной среде, вследствие кросс-насыщения, приводит к связи генерируемых волн и искажению сигналов биений и формы амплитудной модуляции каждой из волн (рис. 1). При этом степень искажения зависит от величины связи волн.

#### III. Экспериментальная установка

Экспериментальные исследования проводились на установках, включающих в себя двух или четырехчастотный гироскоп с зеемановской подставкой, блок управления и питания гироскопа, радиоэлектронные схемы, обеспечивающие управление периметром (СРП), компьютер с платой АЦП и ЦАП, комплекс контрольноизмерительной аппаратуры: осциллографы, мультиметры, блоки питания, радиотехнический спектроанализатор и другие приборы (рис. 2).



Рис. 2. Экспериментальная установка

Периметр используемого двухчастотного гироскопа ~20 см. Для обеспечения работы в четырехчастотном режиме как для двухчастотного, так и для четырехчастотного гироскопов, использовалась ~53/47% смесь изотопов Ne<sup>20</sup> и Ne<sup>22</sup> неона в активной среде. В двухчастотном гироскопе на каждом зеркале происходил поворот плоскости падения на 22.5°. Благодаря большему межмодовому интервалу по частоте (~750 МГц) в этом гироскопе, чем в четырехчастотном (~462.5 МГц и ~606.5 МГц), в нем обеспечивлся и устойчивый четырехчастотный режим генерации и двухчастотный, при соответствующей настройке периметра. Рабочая точка, соответствующая частотам генерации мод излучения с левой и правой поляризацией относительно контура усиления, устанавливалась с помощью системы регулирования периметром, основываясь в начале на равенстве

мощностей генерации волн с левой и правой поляризацией. Затем происходила более тонкая настройка периметра резонатора. Частоты генерации ортогональных мод излучения устанавливались таким образом, чтобы их подставки были равны (рис. 9, 10, 13, 14). Это делает чувствительность к воздействию магнитного поля на расщепление частот генерации ортогонально поляризованных мод излучения одинаковой по величине, но с противоположным знаком. Для двухчастотного режима генерации (рис. 7, 8, 11, 12) периметр настраивался на максимум частоты подставки.

### IV. ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ СВЯЗИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

На двух (рис. 3) и четырехчастотном (рис. 4) гироскопах были проведены измерения выходной частотной характеристики путем изменения величины постоянной зеемановской подставки.



Рис. 3. Выходная частотная характеристика для ортогональных поляризаций гироскопа со смесью <sup>20</sup>Ne и <sup>22</sup>Ne с концентрациями ~53/47% (ортогональные поляризации генерируются в разные моменты времени, границы захвата измерены для входа в захват,  $\Omega_L$ =100 Гц)



Рис. 4. Выходная частотная характеристика четырехчастотного лазерного гироскопа (граница входа в область захвата  $\Omega_L$ =76 Гц). Измерения поводились при одновременной генерации на ортогональных поляризациях

Результаты измерений показали, что вход в область захвата частоты для ортогональных поляризаций имеет близкие значения (рис. 3, 4). В то же время при выходе из области захвата наблюдается гистерезис с близкими величинами. Для измерения величины связи встречных волн при работающей системе стабилизации периметра по амплитуде сигнала боковой полосы биений сонаправленных волн использовался приемник, выделяющий в спектре частоту сигнала и детектирующий его амплитуду (рис. 5, 6). Измеренный сигнал оцифровывался АЦП, что позволяет управлять величиной связи путем смещения зеркала пьезодвигателем. Проведенные измерения величины связи на двухчастотном и четырехчастотном лазерных гироскопах показали, что в четырехчастотном режиме величина гистерезиса существенно меньше, кроме того время восстановления связи после выхода из области захвата также существенно меньше (рис. 7–14).



Рис. 5. Спектр сигнала биений сонаправленных волн ортогональной круговой поляризации и аналогичный, но волн противоположного направления. Межмодовый интервал ~ 606.5 МГц. Два больших пика соответствуют двум встречным направлениям сонаправленных волн. Малые пики возникают в результате взаимодействия волн через рассеяние на элементах резонатора



Рис. 6. Зависимость амплитуды (малый пик рис. 5) сигнала боковой полосы биений сонаправленных волн ортогональных поляризаций от синфазного смещения зеркал пьезодвигателями при работе системы стабилизации периметра по равенству магнитной чувствительности для волн ортогональной поляризации и при знакопеременной зеемановской частотной подставке



Рис. 7. Зависимость величины связи встречных волн (границы входа в область захвата) от времени после включения частотной подставки и выхода из захвата частоты для двухчастотного режима генерации в гироскопе с  $^{20}$ Ne/ $^{22}$ Ne ~ 53/47%



Рис. 8. Зависимость величины частотной подставки от времени после ее включения и выхода из захвата частоты для двухчастотного режима генерации в гироскопе с  $^{20} Ne/^{22} Ne \sim 53/47\%$ 



Рис. 9. Зависимость величины связи встречных волн (границы входа в область захвата) от времени после включения частотной подставки и выхода из захвата частоты для четырехчастотного режима генерации в гироскопе с  $^{20}$ Ne $^{22}$ Ne  $\sim 53/47\%$ 



Рис. 10. Зависимость величины частотной подставки от времени после ее включения и выхода из захвата частоты для четырехчастотного режима генерации в гироскопе с  $^{20}$ Ne/ $^{22}$ Ne  $\sim$  53/47%



Рис. 11. Зависимость величины связи встречных волн (границы входа в область захвата) от времени после включения частотной подставки и выхода из захвата частоты для двухчастотного режима генерации в четырехчастотном гироскопе



Рис. 12. Зависимость величины частотной подставки от времени после ее включения и выхода из захвата частоты для двухчастотного режима генерации в четырехчастотном гироскопе



Рис. 13. Зависимость величины связи встречных волн (границы входа в область захвата) от времени после включения частотной подставки и выхода из захвата частоты для четырехчастотного режима генерации в четырехчастотном гироскопе



Рис. 14. Зависимость величины частотной подставки от времени после ее включения и выхода из захвата частоты для четырехчастотного режима генерации в четырехчастотном гироскопе

# V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных экспериментальных исследований по измерению времени восстановления величины связи в зеемановских лазерных гироскопах в двух и в четырехчастотном режимах генерации обнаружено, что в четырехчастотном режиме, в отличие от двухчастотного режима генерации, после выхода из области захвата характерное время и амплитуда изменения величины связи встречных волн существенно меньше.

Авторы выражают особую благодарность А.И. Варенику и В.С. Суслину за создание электронных блоков для лазерного гироскопа.

#### Литература

- [1] Ароновиц, Ф. Лазерные гироскопы. Применения лазеров. М.: «Мир», 1974. С. 211–221.
- [2] В. А. Зборовский, В. Н. Куликов, А. В. Переверзев, Н. Г. Цигуро, Б. А. Шокин "Влияние взаимодействия излучения с веществом отражателей на характеристики кольцевого лазера" Квантовая электроника», 5, № 3 (1978).
- [3] Назаренко, М.М., Савельев, И.И., Скулаченко, С.С., Хромых, А.М., Юдин, И. И. Исследование зеемановских биений в двухмодовом лазере бегущей волны, Квантовая электроника, 1977, том 4, номер 8, 1738–1746.
- [4] Бессонов, А.С., Макеев, А.П., Петрухин, Е.А. "Измерения комплексных коэффициентов связи в кольцевом резонаторе лазерного гироскопа", Квантовая электроника, 47:7 (2017), 675–682 [Quantum Electron., 47:7 (2017), 675–682].
- [5] Yu. Yu. Broslavets, A. A. Fomitchev, D. M. Ambartsumyan, R. O. Egorov, E. A. Polukeev "Coupling of counterpropagating waves in two- and four-frequency Zeeman laser gyroscopes with a nonplanar cavity" // 26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), 2019. DOI: 10.23919/ICINS.2019.8769372

# Факторы, влияющие на точность твердотельного лазерного гироскопа в режиме синхронизации мод

Ю.Ю. Брославец *МФТИ, АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия <u>laseruu@mail.ru</u>

А.А. Фомичев *МФТИ, АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия <u>laser@mail.mipt.ru</u> Е.А. Полукеев *МФТИ, АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия epolukeev2105@yandex.ru

В.Г. Семенов *МФТИ, АО «Лазекс»* г. Долгопрудный, Россия valerii.semenov.g@gmail.com Д.С. Редичкина *МФТИ* г. Долгопрудный, Россия <u>dariaredichkina@gmail.com</u>

А.С. Назарова *МФТИ* г. Долгопрудный, Россия <u>nazarova.as@phystech.edu</u>

Аннотация—В работе представлены результаты исследования, направленные на изучение основных факторов, влияющих на стабильность и точность работы твердотельного лазерного гироскопа на YAG: $Cr^{4+}$  в режиме синхронизации мод. Определено, что наилучшее подавление внутренних шумов и внешних возмущений в лазерном гироскопе при синхронизации мод обеспечивается при как можно большей величине связи волн одного направления, зависящей как от глубины, так и от сдвига фазы амплитудной модуляции. Рассмотрены метод стабилизации периметра на основе поглощающей ячейки и система создания частотной подставки с использованием электрооптического фазового модулятора, работающего в импульсном режиме.

#### Ключевые слова—твердотельный лазерный гироскоп, кольцевой лазер, синхронизация мод, захват частоты.

#### I. Введение

Высокие требования к навигационным системам авиационно-космического применения по точности навигации, потреблению энергии, габаритам, весу, возможности использования в расширенном температурном диапазоне, а также появление новой технологии создания подложек со сверхмалыми шероховатостями, технологии создания уникальных лазерных зеркал, имеющих сверхмалое поглощение, интегральных микросхем высокой интеграции, новой схемотехники и алгоритмов, обеспечивающих функционирование лазерного гироскопа, новых методов генерации высокостабильного излучения в лазерах стимулируют активное создание лазерных гироскопов на новых активных средах и решениях в квантовой физике [2, 9, 11, 12]. Несомненно, в настоящее время лидирующими по всем параметрам являются He-Ne лазерные гироскопы, обладающие рядом положительных качеств [1]. Тем не менее, их точность приближается к фундаментальному пределу ограниченному квантовыми шумами. Недостатками являются: сложность вакуумных технологий при изготовлении, высокое энергопотребление, невозможность миниатюризации и другие. Это способствует поиску новых активных сред и физических подходов, направленных на создание новых типов лазерных гироскопов. На сегодняшний день большое количество работ направлено на создание лазерных гироскопов, в которых в качестве активной среды используются твердотельные среды. Лидером в этом направлении является фирма THALES. Данной фирмой созданы твердотель-

ные лазерные гироскопы, обладающие основными параметрами, сравнимыми с гелий-неоновыми [9, 12]. В гироскопах используется активная среда YAG:Nd<sup>3+</sup>. В отличие от гелий-неоновой активной среды в твердотельных активных средах, аналогичных YAG:Nd<sup>3+</sup>, уширение линии усиления имеет однородный характер. В таких средах скорость установления инверсной населенности существенно меньше скорости затухания поля излучения в резонаторе. Активные центры при этом не имеют поступательного движения. Это приводит к сильной конкуренции и колебаниям интенсивности при генерации излучения встречных волн. Значительная величина спектральной ширины линии усиления в твердотельных средах приводит к генерации большого количества продольных мод. В ряде работ созданы фемтосекундные лазерные гироскопы с керровской синхронизацией мод с твердотельными активными средами. В частности, в университете University of New Mexico coздан твердотельный лазерный гироскоп на основе Ti<sup>3+</sup>:Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, работающий в режиме синхронизации мод, в котором преодолены основные препятствия для успешной работы твердотельных лазерных гироскопов [2]. Также ведутся работы над высокостабильным фемтосекундным кольцевым лазером с керровской синхронизацией мод на Ti<sup>3+</sup>:Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> в университетах University of Tokyo, University of California.

В нашей работе представлены результаты, полученные при создании лазерного гироскопа на активной среде YAG:Cr<sup>4+</sup> [3-8] с шириной линии усиления ~76 ТГц, а также анализ факторов, существенно влияющих на его точностные параметры. Лазерный гироскоп работает в режиме генерации с большим количеством продольных мод и для увеличения его точности используется синхронизация мод. Это существенно уменьшает шумы как фундаментальные, так и технические, связанные с различными возмущениями в лазере [2, 10, 11], но при этом накладывает ряд требований на параметры кольцевого лазера. Созданный лазерный гироскоп с активной средой на YAG:Cr<sup>4+</sup> [11] обладает рядом особенностей: возможность генерации фемтосекундных импульсов; длина волны вблизи 1.5 мкм, позволяющая генерировать импульсы в солитонном режиме; возможность использования кристаллических зеркал, обладающих рекордно малым поглощением, а также особенности взаимодействия поляризованного излучения с активными

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00234, https://rscf.ru/project/23-22-00234/.

центрами Cr<sup>4+</sup>, приводящие к уменьшению конкуренции встречных волн.

# II. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНХРОНИЗАЦИИ МОД НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВАН ДЕР ПОЛЯ

В кольцевом лазере на YAG:Cr<sup>4+</sup>, благодаря широкой линии усиления, генерируется большое количество продольных мод в каждом из встречных направлений (рис. 1). Амплитудная модуляция излучения, возникающая благодаря наличию керровской линзы и апертуры, ограничивающей пучок, приводит к появлению боковых полос в спектре излучения. При совпадении частоты боковой полосы с соседней модой (рис. 1) происходит захват частоты и фазирование мод. Поскольку это происходят для большинства генерируемых мод одновременно, колебания в модах оказываются сфазированными и в результате, как внешние, так фундаментальные возмущения существенно ослабляются.



Рис. 1. Генерация продольных мод и их синхронизация, благодаря амплитудной модуляции, в широкополосной активной среде

При моделировании, синхронизация мод обеспечивается модуляцией потерь в резонаторе на частоте  $\Delta \omega_l$ , равной межмодовой частоте с учетом фазы  $\varphi_l$  для моды, вследствие чего возникающие боковые полосы с амплитудой, пропорциональной  $E_0 \delta/2$ , синхронизируют колебания соседних продольных мод путем захвата частоты. Для описания многочастотной генерации в режиме синхронизации мод использована система из п уравнений Ван дер Поля для пар встречных волн продольных мод, с учетом их связи через рассеяние на оптических элементах:

$$\begin{split} & \left[\frac{d^2 e_1}{dt^2} + (\omega_{01} + \Delta \omega_t)^2 e_1 = \left[\beta_1(1 - \gamma e_1^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_t)\right] \frac{de_1}{dt} + \Theta_t e_2 + \mathbf{M}_t e_3 + \mathbf{K}_t \frac{de_1}{dt} \qquad CW \Rightarrow \\ & \left[\frac{d^2 e_2}{dt^2} + (\omega_{01} + \Delta \omega_t)^2 e_2 = \left[\beta_2(1 - \gamma e_2^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_2)\right] \frac{de_2}{dt} + \Theta_2 e_1 + \mathbf{M}_t e_4 + \mathbf{K}_t \frac{de_4}{dt} \qquad CCW \Leftrightarrow \\ & \left[\frac{d^2 e_1}{dt^2} + (\omega_{01} + \Delta \omega_t)^2 e_3 = \left[\beta_3(1 - \gamma e_3^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_3)\right] \frac{de_1}{dt} + \Theta_2 e_4 + \mathbf{M}_2(e_1 + e_3) + \mathbf{K}_2\left(\frac{de_1}{dt} + \frac{de_3}{dt}\right) \qquad CW \Rightarrow \\ & \left[\frac{d^2 e_1}{dt^2} + (\omega_{01} + \Delta \omega_t)^2 e_3 = \left[\beta_4(1 - \gamma e_4^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_4)\right] \frac{de_4}{dt} + \Theta_4 e_3 + \mathbf{M}_2(e_2 + e_6) + \mathbf{K}_2\left(\frac{de_1}{dt} + \frac{de_3}{dt}\right) \qquad CCW \Leftrightarrow \\ & \cdots \\ & \cdots \\ & \cdots \\ & \frac{d^2 e_{n+1}}{dt^2} + (\omega_{0(n-1)} + \Delta \omega_t)^2 e_{n-1} = \left[\beta_{n-1}(1 - \gamma e_{n-1}^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_{n-1})\right] \frac{de_{n+1}}{dt} + \Theta_{n-1} e_8 + \mathbf{M}_{n/2} e_{n-3} + \mathbf{K}_{n/2} \frac{de_{n-3}}{dt} \quad CCW \Leftrightarrow \\ & \frac{d^2 e_{n+1}}{dt^2} + (\omega_{0n} + \Delta \omega_t)^2 e_8 = \left[\beta_n(1 - \gamma e_n^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_n)\right] \frac{de_{n+1}}{dt} + \Theta_{n-1} e_8 + \mathbf{M}_{n/2} e_{n-3} + \mathbf{K}_{n/2} \frac{de_{n-3}}{dt} \quad CCW \Leftrightarrow \\ & \frac{d^2 e_{n+1}}{dt^2} + (\omega_{0n} + \Delta \omega_t)^2 e_8 = \left[\beta_n(1 - \gamma e_n^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_n)\right] \frac{de_{n+1}}{dt} + \Theta_n e_{n-1} + \mathbf{M}_{n/2} e_{n-2} + \mathbf{K}_{n/2} \frac{de_{n-3}}{dt} \quad CCW \Leftrightarrow \\ & \frac{d^2 e_{n+1}}{dt^2} + (\omega_{0n} + \Delta \omega_t)^2 e_8 = \left[\beta_n(1 - \gamma e_n^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_n)\right] \frac{de_{n+1}}{dt} + \Theta_n e_{n-1} + \mathbf{M}_{n/2} e_{n-2} + \mathbf{K}_{n/2} \frac{de_{n-3}}{dt} \quad CCW \Leftrightarrow \\ & \frac{d^2 e_{n+1}}{dt^2} + (\omega_{0n} + \Delta \omega_t)^2 e_8 = \left[\beta_n(1 - \gamma e_n^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_n)\right] \frac{de_n}{dt} + \Theta_n e_{n-1} + \mathbf{M}_{n/2} e_{n-2} + \mathbf{K}_{n/2} \frac{de_{n-3}}{dt} \quad CCW \Leftrightarrow \\ & \frac{d^2 e_{n+1}}{dt^2} + (\omega_{0n} + \Delta \omega_t)^2 e_n = \left[\beta_n(1 - \gamma e_n^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_n)\right] \frac{de_n}{dt} + \Theta_n e_{n-1} + \mathbf{M}_{n/2} e_{n-2} + \mathbf{K}_{n/2} \frac{de_{n-2}}{dt} \quad CCW \Leftrightarrow \\ & \frac{d^2 e_{n+1}}{dt^2} + (\omega_{0n} + \Delta \omega_t)^2 e_n = \left[\beta_n(1 - \gamma e_n^2) - \alpha - \delta \cos(\Delta \omega_t t + \varphi_n)\right] \frac{de_{n+1}}{dt} + \Theta_n e_{n-1} + \mathbf{M}_{n/2} e_{n-2} + \mathbf{K}_{n/2} \frac{de_{n-2}}{dt} \quad CCW \Leftrightarrow \\ & \frac{d^2 e_{n+1}}{dt^2} +$$

Здесь  $e_i$  – электрическое поле волн продольных мод ( $e_i$  – в одном направлении (CW),  $e_{i+1}$  – в противоположном (CCW)),  $\Theta_I$  – коэффициенты рассеяния для встречных волн на оптических элементах, приводящие к захвату частоты,  $M_i$ ,  $K_i$  – коэффициенты, описывающие степень связи продольных мод друг с другом (эта связь обусловлена кросс-насыщением активной среды одновременно модой и волной боковой полосы, создаваемой амплитудной модуляцией излучения в резонаторе, возникающей благодаря керровской линзе и диафрагме, на межмодовой частоте и приводит к синхронизации мод),  $\Delta \omega_r$  – случайная составляющая резонансной частоты,  $\Delta \omega_l$  – частота модуляции потерь,  $\varphi_l$  – фазы, соответствующие модуляции потерь для каждой из волн,  $\beta_i$ коэффициенты усиления,  $\gamma$  – коэффициент насыщения усиления,  $\alpha$  – коэффициент потерь,  $\delta$  – глубина модуляции потерь. Разность резонансных частот встречных волн для каждой продольной моды  $\omega_{0(i+1)} - \omega_{0(i)} = \omega_{s}$  , обусловлена эффектом Саньяка и пропорциональна  $\Omega_{rot}$  – угловой скорости вращения:  $\omega_s = 8\pi S\Omega_{rot}/(n_0\lambda L)$ , где L и S – периметр и площадь резонатора,  $\lambda$  – длина волны генерации,  $n_0$  – показатель преломления среды. При численном моделировании в систему уравнений включено 22 уравнения, описывающие 11 пар встречных волн.

Численное моделирование показало, что наличие амплитудной модуляции в системе уравнений (1), обусловленной выражением вида  $\delta \cos(\Delta \omega_l t + \varphi_1)(de_1/dt)$ , а также связь между волнами одного направления в виде  $M_1e_3+K_1de_3/dt$ , моделирующие механизм фазирования волн при синхронизации мод, приводит к появлению области захвата (рис. 2) между волнами одного направления, что вызывает их фазирование и, тем самым, синхронизацию мод и формирование сверхкоротких импульсов.



Рис. 2. Частотная характеристика с областью захвата, обуславливающей связь волн одного направления, возникающей при синхронизации продольных мод

Таким образом, в результате численного моделирования синхронизации мод в лазерном гироскопе, возникающей вследствие захвата частоты мод одного направления, определено, что при увеличении глубины амплитудной модуляции волн область захвата увеличивается (рис. 3). При этом оказалось, что увеличение коэффициентов  $K_i$  приводит не только к увеличению области захвата волн одного направления, но и при достаточно больших величинах  $K_i$  к увеличению захвата волн встречного направления (рис. 4), что ухудшает выходную частотную характеристику лазерного гироскопа. Таким образом, при минимизации области захвата для встречных волн в гироскопе существует оптимальная величина коэффициентов связи  $K_i$ .



Рис. 3. Зависимость области захвата соседних продольных мод от глубины модуляции потерь δ при синхронизации продольных мод (при моделировании частоты продольных мод брались ~1 Гц)



Рис. 4. Зависимость величины области захвата встречных волн от величины коэффициентов K<sub>=</sub>K



Рис. 5. Зависимость величины области захвата соседних продольных мод от сдвига фазы амплитудной модуляции

Для максимального подавления внутренних шумов и внешних возмущений лазерного гироскопа при синхронизации мод требуется максимальная величина связи волн одного направления, определяемая областью их захвата. В этом случае наиболее устойчивая к внешним возмущениям параметров лазера синхронизация мод получается при определенном выборе параметров, задающих величину связи продольных мод. Величина связи (при моделировании пропорциональна коэффициентам К<sub>i</sub>) определяется через нелинейность насыщения активной среды при взаимодействии моды и волны боковой полосы, имеющих одинаковые частоты при синхронизации мод. При этом на величину этой связи будет влиять как глубина амплитудной модуляции (рис. 3), так и сдвиг фазы амплитудной модуляции (рис. 5). Полученная нелинейная зависимость (рис. 4) области захвата встречных волн от коэффициентов K<sub>i</sub> говорит о необходимости работы в области минимума этой зависимости и малых значениях K<sub>i</sub>, когда увеличение связи приводит к более сильному уменьшению области захвата для встречных волн.

# III. Экспериментальная установка

Важнейшим фактором, влияющим на точность и обеспечивающим работу лазерного гироскопа в линейной области его выходной частотной характеристики, является механизм создания частотной подставки. В твердотельном лазерном гироскопе проведено исследование работы системы создания подставки с использованием фазовой задержки импульсов в электрооптическом модуляторе. Подача управляющего напряжения во время прохождения импульса в модуляторе приводит к изменению показателя преломления и к сдвигу частоты генерируемого излучения относительно встречной волны (2, 4). Таким образом, возникает разность частот между встречными пучками. Скоростным InGaAs PINфотодиодом с усилителем регистрировались импульсы на выходе кольцевого лазера (рис. 6). Далее, для формирования управляющего импульса, сигнал с фотоприемника задерживался таким образом, чтобы показатель преломления модулятора достигал максимальной величины в момент его прохождения импульсом.



Рис. 6. Оптическая схема кольцевого лазерного гироскопа на YAG:Cr<sup>4+</sup>, обеспечивающая создание частотной подставки с помощью электрооптического фазового модулятора

$$\Delta \varphi(U) = \frac{\pi n_{\rm e}^3 r_{33} lU}{\lambda D}$$
(2),  
$$\begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(3)

где  $n_e$  — показатель преломления необыкновенной волны,  $r_{ii}$  — тензор электрооптических коэффициентов,  $r_{33}$ =30.8\*10<sup>-12</sup> м/В — электрооптический коэффициент для выбранного направления в кристалле LiNbO<sub>3</sub>), U — напряжение на кристалле, l — длина кристалла,  $\lambda$  — длина волны, D — толщина кристалла. Для изменения частоты генерации при изменении фазы (рис. 7) в кольцевом лазере можно записать:

$$\Delta v(U) = \frac{L}{2\pi c} \Delta \varphi(U) \,. \tag{4}$$

Таким образом, в результате модуляции оптической длины резонатора, синхронно с прохождением импульса в модуляторе, создается разность частот генерируемых встречных волн, обеспечивая работу в линейной области выходной частотной характеристики.



Рис. 7. Зависимость смещения частоты от напряжения на модуляторе

Одним из важных факторов, обеспечивающих точность лазерного гироскопа, является высокая стабильность периметра резонатора кольцевого лазера. Для твердотельного лазерного гироскопа для стабилизации частоты генерации рассмотрен метод на основе поглощающей ячейки с ацетиленом и системой управления на основе пьезодвигателей управляющих длиной резонатора (рис.6, 8, 9).



Рис. 8. Спектр поглощения ацетилена в области 1.5 мкм



Рис. 9. Зависимость коэффициента пропускания излучения лазера α в ячейке с ацетиленом от перестройки его частоты Δν при генерации в многочастотном режиме. Ширина линии максимума поглощения ~250 МГц (линия вблизи Δν~0)

Моделирование системы стабилизации частоты на основе ацетилена с двумя полосами дискретных линий поглощения в области длины волны 1.5 мкм показало, что, подобрав межмодовое расстояние по частоте, можно получить узкие линии поглощения (~250 МГц, поглощение 0.5%), обеспечивающие стабилизацию периметра лазерного гироскопа в многочастотном режиме. Изменение поглощения с частотой связано с большим или меньшим совпадением частот нескольких продольных мод с линиями поглощения ацетилена. Хотя изменение поглощения и мало, используя модуляцию излучения и синхронный усилитель можно получить необходимую величину сигнала.

# IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате расчетов и моделирования определено, что для максимального подавления внутренних шумов и внешних возмущений лазерного гироскопа при синхронизации мод требуется максимальная величина связи волн одного направления, определяемая областью их захвата. Величина связи определяется нелинейностью кросс-насыщения активной среды при взаимодействии в ней моды и волны боковой полосы и будет зависеть как от глубины, так и от сдвига фазы амплитудной модуляции. Оптимум настройки лежит вблизи малых значений и минимума зависимости области захвата от коэффициентов К<sub>i</sub>.

Система стабилизации периметра резонатора на основе поглощающей ячейки с C<sub>2</sub>H<sub>2</sub> и метод создания частотной подставки с использованием электрооптического модулятора, создающего сдвиг фазы в момент прохождения импульса, позволяют существенно улучшить работу твердотельного лазерного гироскопа.

В целом, проведенные исследования показали возможность стабильной работы твердотельного лазерного гироскопа на YAG:Cr<sup>4+</sup> при использовании синхронизации мод и систем стабилизации периметра и частотной подставки с электрооптическим модулятором фазы.

#### Литература

- Aronowitz, F., Laser gyros, In: Lasers Applications. Russian edition, M: «Mir», 1974. p. 182-269.
- [2] M.J. Bohn, The TI:Sapphire Ring Laser Gyroscope, dissertation, University of New Mexico, 1998.
- [3] Sorokin, E. Solid-State Materials for Few-Cycle Pulse Generation and Amplification. In: Kärtner, F.X. (eds) Few-Cycle Laser Pulse Generation and Its Applications. Topics in Applied Physics, vol 95. Springer, Berlin, Heidelberg.. https://doi.org/10.1007/978-3-540-39849-3\_1
- [4] H. Eilers et al., "Performance of a Cr:YAG laser", in IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. 29, no. 9, pp. 2508-2512, Sept. 1993.
- [5] A.G. Okhrimchuk and A.V. Shestakov, "Absorption saturation mechanism for YAG:Cr<sup>4+</sup>crystals", Phys. Rev. B 61, 988, 2000.
- [6] G.M. Zverev and A.V. Shestakov, "Tunable Near-Infrared Oxide Crystal Lasers," in Advanced Solid State Lasers, M. Shand and H. Jenssen, eds., Vol. 5 of OSA Proceedings Series (Optical Society of America, 1989), paper BB5.
- [7] I.T. Sorokina, S. Naumov, E. Sorokin, E. Wintner, and A.V. Shestakov, Directly diode-pumped tunable continuous-wave room-temperature Cr<sup>4+</sup>:YAG laser, Opt. Lett. 24, 1578-1580 (1999).
- [8] Alphan Sennaroglu, Clifford R. Pollock, and Howard Nathel, "Efficient continuous-wave chromium-doped YAG laser," J. Opt. Soc. Am. B 12, 930-937 (1995).
- [9] Schwartz, S., Lauprêtre, T., Goldfarb, F., Bretenaker, F., Ghosh, R., Carusotto, I., Feugnet, G., Gutty, F., Pocholle, J.-P., The solid-state ring laser gyro: current and future trends, Proc. SPIE 8636, Advances in Slow and Fast Light VI, 86360M (March 6, 2013).
- [10] Malakhov, A.N. and Mal'tsev, A.A., Width of the spectral lines of an N-mode system which has an equidistant spectrum of natural frequencies and operates in a self-synchronous mode, Radiofizika, 1973. Vol. 16, No. 8, p. 1211-1220.
- [11] Y.Y. Broslavets, E.A. Polukeev, V.P. Surovtseva, A.A. Fomichev and V. G. Semenov, "Multifrequency YAG:Cr<sup>4+</sup> Solid-State Laser Gyroscope, Perimeter Control and Dither Creation System, Operating Regimes", 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), Saint Petersburg, Russian Federation, 2022, pp. 1-4, doi: 10.23919/ICINS51784.2022.9815385.
- [12] Schwartz, S., Gutty, F., Feugnet, G., Loil, É., and Pocholle, J.-P., Solidstate ring laser gyro behaving like its helium–neon counterpart at low rotation rates, OPTICS LETTERS. 2009. Vol. 34, № 24, p. 3884-3886.

# Методика определения задержек измерений сенсорных данных в навигационых системах

А.Е. Морозов ПАО «Пермская научнопроизводственная приборостроительная компания» Пермь, Россия Andrew\_Morozov\_@mail.ru М.А. Белоусов ПАО «Пермская научнопроизводственная приборостроительная компания» Пермь, Россия BelousovMA@pnppk.ru Д.Ю. Зобачев ПАО «Пермская научнопроизводственная приборостроительная компания » Пермь, Россия gDimych.87@gmail.com

Аннотация-Основная цель данной работы – представить метод точного определения временных задержек измерительных датчиков в инерциальной навигационной системе (ИНС) для последующей минимизации методических ошибок при решении задачи ориентации или навигации. Предложенный алгоритм может быть использован для различных приложений, включая автономную навигацию, управление полетом, системы наведения, ориентирование робототехнических систем, и т.д. Исследование временной задержки может пригодиться в задачах синхронизации измерений инерциальных датчиков, в оценках на предмет стабильности запаздывания, а также при оценивании температурных уходов определяемой величины. В качестве основы для исследования взяты испытания морских систем на килевую/бортовую качки. В ходе исследования обнаружено, что временные задержки сигнала акселерометров ИНС превышают время детектирования измерительной информации. В ходе работ исследованы причины возникновения временных задержек в цепи преобразования сигнала акселерометров, чем доказана жизнеспособность предложенной методики.

Ключевые слова—качка, временные задержки, инерциальная навигация, синхронизация датчиков, методические ошибки ИНС, акселерометрический тракт.

# I. Введение

Инерциальные навигационные системы высокого класса точности в настоящее время активно развиваются. Основным преимуществом таких систем, базирующихся только на акселерометрах и гироскопах, является полная автономность и независимость от внешних измерителей. Вслед за развитием инерциальных датчиков модернизируется и повышаются вычислительные способности навигационного микропроцессора, что позволяет реализовать перспективные методы обработки измерений [1], повышающие точность навигационного решения. Одним из таких способов является повышение частоты работы внутренних алгоритмов навигационной системы, но при повышении частоты обработки информации встает не менее важный вопрос о синхронизации инерциальных датчиков между собой. Для навигационного алгоритма необходимо, чтобы информация, поступающая со всех акселерометров и гироскопов, была измерена максимально единовременно, а с возрастанием требований по устойчивости к внешним возмущающим факторам и повышением частоты работы бортового алгоритма запаздывание датчиков становится существеннее.

# II. МЕТОДИКА ИСПЫТАНИЙ

Подадим вдоль одной из осей чувствительности ИНС угловое синусоидальное воздействие (рис. 1) на имита-

торе движения (ИД). При таком испытании сигнал перегрузок, измеренный горизонтальным акселерометром, перпендикулярным к оси воздействия, можно преобразовать в угловое положение  $\alpha(t)$  ИНС в определенный момент времени t. Гироскоп соосный с осью вращения будет характеризовать угловую скорость  $\omega(t)$  ИНС, согласно поданному воздействию. Таким образом, на выходе имеем два гармонических сигнала, зависимых друг от друга через производную по времени  $\alpha'(t)=\omega(t)$ . Если задать изменение углового положения функцией синуса, тогда угловая скорость будет иметь функцию косинуса (1), причем одна функция обратима в другую через сдвиг на угол 90°, согласно формуле приведения.

$$\alpha(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$
$$\omega(t) = A \sin'\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{2\pi}{T}A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$
(1)

где α – измерение углового положения [рад], ω – измерение угловой скорости [рад/с], А – заданная амплитуда качки [рад], Т – заданный период качки [c], t – момент времени [c].

В идеальном случае, два сигнала с измерительных каналов ИНС будут запаздывать друг от друга на угол 90°, а отклонение от этого угла будет характеризовать величину рассинхронизации наблюдаемых датчиков. Величину запаздывания можно определить по (2).

$$\tau = \frac{T}{2\pi} \Delta \varphi \tag{2}$$

где τ – величина задержки [c], Т – заданный период качки [c], Δφ – разница фаз измерений углового положения и угловой скорости [рад].

При выборе параметров воздействия качки, таких как амплитуда и период, необходимо руководствоваться ограничениям (3):

$$k = {T \over \Delta t} \rightarrow$$
 целое число $0 < A < {\pi \over 2}$  (3)

Период качки необходимо подбирать с учетом того, что он должен быть кратен времени детектирования измерений, так как этого требуют большинство математических инструментов: преобразование Фурье, алгоритм Герцеля, метод наименьших квадратов и т.д. Амплитуда качки выбирается в пределах до 90° – при данном положении достигается полная перегрузка ускорения свободного падения. Кроме того, необходимо также опираться на передаточные функции используемых датчиков и ограничения имитатора движения. Величина амплитуды напрямую влияет на точность определения фазы гармонического сигнала, благодаря изменению соотношения сигнал/шум. Для повышения точности расчетов можно увеличивать время испытания, увеличивая при этом количество измеренных полных гармоник сигнала. Усредняя, таким образом, расчетные значения по нескольким выборкам, возможно подавлять шумовую характеристику датчиков.



Рис. 1. Пример испытания на килевую качку навигационного изделия.

Ввиду того что для данной задачи заранее известен период гармонического сигнала и нет необходимости искать весь спектр частот, то для определения фазы гармонического сигнала эффективнее всего использоваться алгоритм Герцеля [2] – модификация дискретного преобразования Фурье.

# III. Результаты испытаний

Для испытаний выбраны режимы бортовой и килевой качки с амплитудами 5°, 10°, 20° и периодами 1с, 3.125с, 6.25с соответственно. Общее время испытаний составляет 10 минут. Алгоритм Гёрцеля позволяет оперировать сразу со всем массивом гармонического сигнала, однако расчет задержки производится отдельно по каждой из гармоник, а затем значение усредняется по всем выборкам (гармоникам). Данный подход позволяет оценить разброс определяемой величины т (рис. 2).



Рис. 2. Расчетные значения задержек датчиков при бортовой и килевой качках

Результаты расчетов запаздывания инерциальных датчиков сведены в табл. І и ІІ, как видно, из данных таблиц величина задержки определяется с точностью до 1 мкс, однако сравнивая различные режимы качки данная задержка может изменяться в пределах до 10 мкс – это может быть связано с температурными уходами или прочими нестабильностями системы.

ТАБЛИЦА I. СРАВНЕНИЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАННЫХ УСЛОВИЙ БОРТОВОЙ КАЧКИ

A, °	T, c	n	Бортовая качка ДУС(х) и АКС(z)		
ĺ.			τ, мкс	$\pm 3\sigma(\tau)$	±3σ(τ)/√k
5	1	590	778	23.9062	0.988
10	3.125	180	781	12.7125	0.950
20	6.25	90	784	7.7812	0.819

ТАБЛИЦА II. Сравнение при различных заданных условий килевой качки

A, °	T, c	n		Килевая ка ЦУС(z) и АК	я качка и АКС(х)	
<i>,</i>	· ·		τ, мкс	$\pm 3\sigma(\tau)$	$\pm 3\sigma(\tau)/\sqrt{k}$	
5	1	590	769	24.281	1.000	
10	3.125	180	772	11.512	0.856	
20	6.25	90	774	7.500	0.788	

# IV. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Для верификации расчетного значения временной задержки акселерометров была исследована вся цепочка преобразования сигнала акселерометров (рисунок 3).



Рис. 3. Звенья преобразования сигнала

АКС – входные показания акселерометра, ФНЧ – фильтр нижних частот, ОУ – операционный усилитель, АЦП – аналого-цифровой преобразователь, МК – микроконтроллер, SPI – выходной интерфейс передачи данных.

Для определения временных задержек на каждом из звеньев цепи преобразования сигнала акселерометра, на вход по каналу оси Х подавалось ступенчатое воздействие и с помощью внешнего аналого-цифрового преобразователя (АЦП) записывались данные входа и выхода определенного звена (рис. 4). Реакция выходного сигнала по отношению к входному будет определять искомую величину – постоянную времени.

Постоянная времени, характеризующая длительность протекания переходного процесса при ступенчатом воздействии, обычно определятся промежутком времени, в течении которого реакция схемы достигает 1-1/е ≈63,2% от своего конечного значения [3].

По результатам исследования каждого из звеньев общей цепочки преобразования сигнала акселерометров обнаружены задержки в фильтре нижних частот порядка 221 мкс и в аналого-цифровом преобразователе системной платы порядка 562 мкс. Операционный усилитель, работающий в режиме повторителя, и микроконтроллер, основная задача которого – суммирование измерений от АЦП, задержек в работу системы не вносят. Суммарная задержка 562 (АЦП) + 221 (ФНЧ) = 783 мкс совпадает с результатами Таблиц I и II, что подтверждает возможность использования методики по определению задержек в ИНС.



а) Задержка в сигнале ФНЧ



б) Задердка в сигнале ОУ



в) Задержка в сигнале АЦП



Рис. 4. Переходные процессы в звеньях преобразования сигнала акселерометра

# V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанная методика позволила определить конкретные значения времени запаздывания акселерометров относительно гироскопов с точностью до 1-10 мкс. Полученные по данной методике временные задержки, разложены на составляющие звенья. В результате исследования звеньев общей цепи преобразования акселерометра показана жизнеспособность изложенного испытания и верифицированы полученных значения. Данная методика может быть использована при разработке системы для обеспечения максимальной синхронизации инерциальных датчиков, что позволит дольше удерживать требуемые точности в инерциальном режиме

#### Литература

- O. S. Salychev, Inertial Systems in Navigation and Geophysics, Bauman MSTU Press, Moscow, 1998.
- [2] А. Оппенгейм, Р. Шафер Цифровая обработка сигналов. Москва, Техносфера, 2006.
- [3] Э. С. Айфичер, Б. У. Джервис. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание, 2004.

# Универсальная методика контроля параметров блоков чувствительных элементов БИНС с неортогональной ориентацией измерительных осей

Д.М. Калихман, Л.Я. Калихман, В.А. Туркин Филиал АО «НПЦАП» – «ПО «Корпус» 410019, Россия, г. Саратов, ул. Осипова, д. 1 lidkalihman@yandex.ru

Аннотация—В докладе рассмотрена универсальная методика контроля блоков чувствительных элементов для БИНС путем введения комплексного параметра в условиях производства на предприятии-изготовителе и на входном контроле на предприятии-потребителе перед установкой в систему управления космического корабля. Предложена методика проверки комплексного параметра, обоснование величины допуска на этот параметр. Методика подтверждена многолетними результатами летных испытаний космических кораблей «Союз» и «Прогресс».

Ключевые слова—методика, комплексный параметр, блок измерителей угловой скорости, блок измерителей линейного ускорения, гироскоп, акселерометр, летные испытания.

# I. Введение

Блоки чувствительных элементов (БЧЭ) для бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС), содержащие в качестве инерциальных чувствительных элементов (ИЧЭ) измерители угловых скоростей (ИУС) и измерители кажущихся ускорений (ИКУ), оси чувствительности (ОЧ) которых ориентированы неортогонально, т.е. расположены под определенными углами к осям системы координат, связанной с летательным аппаратом, получили широкое распространение в системах управления (СУ) ракетно-космической техники, что нашло отражение в фундаментальных научных работах, посвящённых данной тематике [1, 2, 5, 13].

Неортогональная ориентация измерительных осей БЧЭ выбирается разработчиком на основе многочисленных вариантов с учетом обеспечения заданных габаритно-массовых характеристик [3, 4]. В настоящее время отечественное приборостроение располагает значительным количеством типов ИУС и ИКУ, таких как поплавковые, волоконно-оптические (ВОГ), лазерные (ЛГ), волновые твердотельные (ВТГ) гироскопы, гироскопы на основе явления ядерного магнитного резонанса (ЯМГ), поплавковые маятниковые акселерометры, струнные маятниковые акселерометры, кварцевые маятниковые акселерометры (КМА), кремниевые маятниковые акселерометры, а также различные типы микромеханических гироскопов и акселерометров, которые могут быть использованы в качестве первичных измерителей в БЧЭ с неортогональной ориентацией ОЧ для БИНС [6, 12, 14]. Компоновка избыточной БИНС с неортогональной ориентацией ОЧ может быть в виде отдельных блоков чувствительных элементов ИУС и ИКУ, либо в виде блока, содержащего одновременно и те, и другие измерители вместе с бортовым процессором [12]. Выбор компоновки и типа первичного измерителя при конструировании БИНС определяется, прежде всего, соответствием его точностных и эксплуатационных характеристик требованиям системы управления (СУ), приведенным в техническом задании (ТЗ) на проектирование прибора.

Основными требованиями к навигационным системам изделий ракетно-космической техники являются: высокая точность измерения проекций вектора угловой скорости и проекций вектора линейного ускорения; высокая надежность (работа при трех отказах); высокая временная стабильность параметров.

Избыточные БЧЭ обладают структурной надёжностью, под которой понимают формирование в системе дополнительной информации, позволяющей при наличии отказа в одном из измерительных каналов (ИК) на основе избыточности информации получать достоверные данные о действующих на объект угловой скорости и кажущегося ускорения. Такие системы, например, состоящие из 6-ти ИУС или ИКУ позволяют определить до 2-х каналов, выдающих ошибочную информацию. Вместе с тем, при проектировании, изготовлении и контроле избыточного БЧЭ возможность оперативного высокоточного контроля параметров БЧЭ при проведении входного контроля на предприятии-потребителе перед установкой на изделие, учитывая сложность и трудоёмкость проверки параметров блоков с неортогональной ориентацией измерительных осей играет важную роль.

Предлагаемый доклад посвящен разработке универсальной методики проектирования и контроля избыточных БЧЭ для БИНС с неортогональной ориентацией измерительных осей, используемой на всех этапах проверки прибора, вплоть до лётных испытаний, включая проверки параметров приборов при изготовлении и перед установкой в СУ космического корабля (КК) и анализу сохранения значений параметров БЧЭ до и после летных испытаний. В качестве апробации методики были использованы блоки чувствительных элементов для системы управления космическими кораблями «Союз» и «Прогресс»: шестиосный блок измерителей угловых скоростей прибор ИУС-М на поплавковых измерителях угловой скорости [9], разработанный по техническому заданию РКК «Энергия» в 2006 году, и блок измерителей линейного ускорения - прибор БИЛУ с аналоговой и цифровой системами управления, использующийся в СУ КК «Союз» и «Прогресс» с 2002 года по настоящее время [7 – 11]. Необходимость разработки методики была обусловлена спецификой применения БЧЭ с неортогональной ориентацией ОЧ в системе управления КК «Союз» и «Прогресс», заключающейся в том, что в бортовую ЭВМ СУ КК вносятся параметры для каждой измерительной оси БЧЭ. Так, например, для прибора БИЛУ для каждой из 6-ти измерительных осей в формуляр прибора записывают, а далее прошивают в память бортовой ЭВМ значения масштабного коэффициента, систематической составляющей нулевого сигнала и двух углов ориентации ОЧ относительно осей базовой системы координат. Для шестиосного БЧЭ – это 24 параметра. Измерение каждого из этих параметров на предприятииизготовителе требует больших затрат времени и использования сложного оборудования, обеспечивающего заданную точность измерения. Проверка такого измерителя на входном контроле на предприятии-потребителе перед установкой на объект очень затруднена и ответственна, поскольку нужно проверить данные формуляра, вносимые в память бортовой ЭВМ. Комплексный параметр, вводимый для проверки соответствия всех параметров БЧЭ установленным значениям допусков, гарантирует соответствие фактических значений, вносимых в формуляр прибора параметров, этим допускам, поскольку на комплексный параметр оказывают одновременно влияние погрешности всех 24 упомянутых выше параметров, а сам комплексный параметр в качестве эталонного значения использует известную с высокой точностью величину модуля вектора ускорения силы тяжести или угловой скорости вращения Земли. Введение комплексного параметра улучшает оперативность контроля за счет исключения проверки каждого измерительного канала в отдельности и существенно экономит время испытаний: вместо 1 недели - несколько часов. Например, если прибор БИЛУ с помощью кронштейна (рис. 1) устанавливать последовательно в три взаимно ортогональные положения (рис. 2 - 4), при которых каждая из трёх базовых осей координат X, Y, Z поочерёдно ориентируется вдоль вертикали места, в каждом положении измерять выходную информацию с 6-ти измерительных осей и знать их направляющие косинусы относительно оси X (либо Y, Z), то можно восстановить значение модуля вектора ускорения силы тяжести в месте контроля, а также рассчитать погрешность его измерения. Отличие восстановленного значения от известного и будет комплексным параметром. В указанную погрешность войдут все погрешности 24-х параметров. Аналогичная методика используется для прибора ИУС-М, где в качестве эталонного значения используется угловая скорость вращения Земли.



Рис. 1. Кронштейн для установки БИЛУ в ориентированные положения



Рис. 2. Положение Х



Рис. 3. Положение Ү



Рис. 4. Положение Z

Контроль БЧЭ производится при помощи разработанного программно-математического обеспечения [15, 16]. Разработанная методика носит общий характер и может быть применена для любых типов первичных измерителей угловой скорости и линейного ускорения в БИНС. С 2002 по 2022 год она была апробирована при применении прибора БИЛУ с аналоговой и цифровой системами управления на 86 космических кораблях «Союз-TMA», «Союз-МС» и «Прогресс-МС».

### II. ОПИСАНИЕ БЧЭ, ВХОДЯЩИХ В СОСТАВ БИНС КК «СОЮЗ» И «ПРОГРЕСС»

БЧЭ, для которых применялась разработанная методика – это шестиканальный блок ИУС с неортогональной ориентацией ОЧ - прибор ИУС-М (рис. 5, рис. 7)., чувствительными элементами которого являются безобогревные ДУС поплавкового типа, и шестиканальный блок ИКУ с неортогональной ориентацией ОЧ - прибор БИЛУ (рис. 6, рис. 8). Его чувствительными элементами являются КМА.



Keiz Keis Keis Keis

Рис. 5. Прибор ИУС-М

Рис. 6. Прибор БИЛУ





Рис. 7. Ориентация ОЧ прибора ИУС-М

Рис. 8. Ориентация ОЧ прибора БИЛУ

Оба прибора разработаны на предприятии ПО «Корпус» (г. Саратов) по техническому заданию РКК «Энергия» [8, 10, 11].

Прибор БИЛУ относится к измерителям навигационного класса точности, а ИУС-М - среднего класса точности. Не-

смотря на это, методика проектирования и контроля БЧЭ, даже в случае применения в качестве ИЧЭ измерителей другого класса, например, ВОГ, ВТГ или ЛГ в ИУС, кремниевых или струнных акселерометров в ИКУ, останется неизменной.

# III. Описание методики

Методика контроля комплексного параметра избыточного БЧЭ на примере приборов ИУС-М и БИЛУ в виде блок схемы расчёта комплексного параметра показана на рис. 9.



Рис. 9. Блок схема расчёта комплексного параметра

При помощи Эйлеровых разворотов выводится матрица направляющих косинусов (МНК) «А» для измерительных осей прибора.

$$A = \begin{bmatrix} \sin \beta_1 & -\cos \beta_1 \cdot \sin \alpha_1 & \cos \beta_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ -\sin \beta_2 & -\cos \beta_2 \cdot \sin \alpha_2 & \cos \beta_2 \cdot \cos \alpha_2 \\ \sin \beta_3 & -\cos \beta_3 \cdot \sin \alpha_3 & \cos \beta_3 \cdot \cos \alpha_3 \\ -\sin \beta_4 & -\cos \beta_4 \cdot \sin \alpha_4 & \cos \beta_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ \sin \beta_5 & -\cos \beta_5 \cdot \sin \alpha_5 & \cos \beta_5 \cdot \cos \alpha_5 \\ -\sin \beta_6 & -\cos \beta_1 \cdot \sin \alpha_1 & \cos \beta_6 \cdot \cos \alpha_6 \end{bmatrix}$$
$$MHK \Pi \mu \omega \delta \mu WC-M$$
$$A = \begin{bmatrix} \sin \beta_1 & -\cos \beta_1 \cdot \sin \alpha_1 & \cos \beta_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ \sin \beta_2 & -\cos \beta_2 \cdot \sin \alpha_2 & \cos \beta_2 \cdot \cos \alpha_2 \\ \sin \beta_3 & -\cos \beta_3 \cdot \sin \alpha_3 & \cos \beta_3 \cdot \cos \alpha_3 \\ \sin \beta_4 & -\cos \beta_4 \cdot \sin \alpha_4 & \cos \beta_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ \sin \beta_5 & -\cos \beta_5 \cdot \sin \alpha_5 & \cos \beta_5 \cdot \cos \alpha_5 \\ \sin \beta_6 & -\cos \beta_7 \cdot \sin \alpha_7 & \cos \beta_5 \cdot \cos \alpha_6 \end{bmatrix}$$

МНК прибора БИЛУ

Углы ориентации измерительных осей относительно базовых координат:  $\beta_i=35^{\circ}15'52''$ ,  $\alpha_1 = 0^{\circ}$ ,  $\alpha_2 = 60^{\circ}$ ,  $\alpha_3 = 120^{\circ}$ ,  $\alpha_4 = 180^{\circ}$ ,  $\alpha_5 = 240^{\circ}$ ,  $\alpha_6 = 300^{\circ}$ .

Далее рассчитывается псевдообратная матрица М:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Комплексный параметр для прибора ИУС-М, для трёх положений прибора X, Y и Z относительно базовой системы координат, %:

$$\Delta \omega_{x} = \frac{[m_{11} \cdot \omega_{x1} + m_{12} \cdot \omega_{x2} + m_{13} \cdot \omega_{x3} + m_{14} \cdot \omega_{x4} + m_{15} \cdot \omega_{x5} + m_{16} \cdot \omega_{x6}] - \omega_{\text{lows}}}{\omega} \cdot 100$$

$$\Delta \omega_{\rm r} = \frac{[m_{\rm r} \cdot \omega_{\rm r_1} + m_{\rm r} \cdot \omega_{\rm r_2} + m_{\rm r_3} \cdot \omega_{\rm r_3} + m_{\rm r_4} \cdot \omega_{\rm r_4} + m_{\rm r_5} \cdot \omega_{\rm r_5} + m_{\rm r_6} \cdot \omega_{\rm r_6}] - \omega_{\rm hour} \cdot 100$$

$$\Delta \omega_{z} = \frac{\left[m_{y_{1}} \cdot \omega_{z_{1}} + m_{y_{2}} \cdot \omega_{z_{2}} + m_{y_{3}} \cdot \omega_{z_{3}} + m_{y_{4}} \cdot \omega_{z_{4}} + m_{y_{5}} \cdot \omega_{z_{5}} + m_{y_{6}} \cdot \omega_{z_{6}}\right] - \omega_{y_{out}}}{\omega_{y_{out}}} \cdot 100$$

где  $\omega_{3 \text{ смли}}$  – угловая скорость вращения Земли для места контроля параметров прибора; т – элементы псевдообратной матрицы M;  $\omega_{Xi}$ ,  $\omega_{Yi}$ ,  $\omega_{Zi}$ — проекция вектора угловой скорости вращения Земли на і-ю измерительную ось прибора при установке в положение X, Y и Z соответственно, где для положения X:

$$\omega_{xi} = \left( f_{HKxi}^{3e_{MNu}} - f_{\partial pHKi} \right) \cdot (\overline{K}_M)_{HKi}, \dots,$$
(3)

где  $f_{\rm MKxi}^{3\rm емли}$  – измеренное значение проекции вектора угловой скорости Земли на і-ю измерительную ось прибора при установке в положение X, Гц;  $f_{\rm дрИKi}$  – систематическая составля-

ющая нулевого сигнала, Гц;  $(\overline{K}_M)_{\rm ИKi}$  – масштабный коэффициент,..."/бит.

Аналогично для положений У и Z.

Комплексный параметр для прибора БИЛУ, для трёх положений прибора X, Y и Z относительно базовой системы координат, %:

$$\delta g_{s} = \frac{(m_{s1}g_{s1} + m_{s2}g_{s2} + m_{s2}g_{s3} + m_{s4}g_{s4} + m_{s5}g_{s5} + m_{s4}g_{s6}) - g}{g} \cdot 100;$$

$$\delta g_{s} = \frac{(m_{s1}g_{s1} + m_{s2}g_{s2} + m_{s2}g_{s3} + m_{s4}g_{s4} + m_{s5}g_{s5} + m_{s4}g_{s6})}{g} \cdot 100; (4)$$

$$\delta g_{s} = \frac{(m_{s1}g_{s1} + m_{s2}g_{s2} + m_{s3}g_{s3} + m_{s4}g_{s4} + m_{s5}g_{s5} + m_{s4}g_{s6}) - g}{g} \cdot 100; (4)$$

где g - ускорение силы тяжести для места контроля параметров прибора: m – элементы псевдообратной матрицы M;  $g_{Xib} g_{Yib} g_{Zi}$  – проекция модуля вектора ускорения силы тяжести на i-ю измерительную ось прибора при установке в положение X, Y и Z соответственно, где для положения X:

$$g_{xi} = \left(f_{xi} - f_{Ti}^{10 \text{ MUH}}\right) \cdot \frac{(\overline{K}_M)_n}{g}, g, \tag{5}$$

где  $f_{xi}$  – значение проекции вектора ускорения силы тяжести на i-ю измерительную ось прибора при установке в положение X, Гц.;  $f_{Ti}^{10 \text{ мин}}$  – систематическая составляющая нулевого сигнала i-го ИК, Гц;  $(\bar{K}_M)_n$ - среднее значение масштабного коэффициента i-го ИК во всём диапазоне измерения линейного ускорения, мм/с.бит; g – ускорение силы тяжести в месте, где проводятся испытания прибора, мм/с<sup>2</sup>.

# Аналогично для положений У и Z.

Формирование допуска на комплексный параметр осуществляется на этапе проектирования [17]. Исходными данными являются значения параметров из формуляра на прибор, вносимые в память бортовой ЭВМ. На базе этих значений в СУ решаются навигационные задачи. Системе управления комплексный параметр не нужен, он нужен для эффективного входного контроля прибора, но необходимо гарантировать, что если комплексный параметр БЧЭ соответствует норме, то все формулярные значения не имеют отклонений, превышающих допуск на их временную стабильность, заданную в ТЗ. Требования к временной стабильности обычно на порядок или на два порядка превышают допуск на сам параметр. Например, для прибора БИЛУ, если допуск на величину систематической составляющей нулевого сигнала задают 0,002 g, то допуск на временную стабильность 0,0001 g. При выборе на этапе проектирования допуска на комплексный параметр разработчик должен руководствоваться, с одной стороны, необходимостью гарантировать при соответствии комплексного параметра установленной норме соответствие всех записанных в формуляр параметров не только допускам, но и требованиям к их временной стабильности, т. е. гарантировать, что фактическое значение параметра отклонилось от формулярного значения не более, чем на допуск на его временную стабильность. С другой стороны, разработчик не может доводить допуск на комплексный параметр до значений, которые не могут быть достигнуты практически. Поэтому самым целесообразным методом, который может быть рекомендован и получил практическую реализацию в приборе БИЛУ, является метод выбора из всех параметров, входящих в формирование комплексного параметра, параметра, имеющего тенденцию к наибольшей временной нестабильности. Анализ статистических данных по результатам изготовления как ИУС, так и ИКУ показывает, что наибольшей временной нестабильностью характеризуется систематическая составляющая нулевого сигнала первичных измерителей. Например, стабильность нулевого сигнала КМА зависит от нестабильности моментов тяжения, которые имеют механическую и электрическую природу, т.е. неравномерности толщины напыления хромового и золотого покрытия пла-

(1)

стины, неплоскостности поверхности пластин, непараллельности двух плоскостей пластины, сжимаемых при сборке акселерометра. Масштабный коэффициент того же КМА, а также и ДУС-а обладает высокой временной стабильностью, т. к. зависит только от стабильности магнитоэлектрической системы. Углы ориентации измерительных осей определяются точностью изготовления деталей конструкции, их временная стабильность очень высокая, поэтому при назначении допуска на комплексный параметр могут не рассматриваться.

Таким образом, для задания допуска на комплексный параметр на этапе проектирования прибора рекомендуется следующая методика: 1) задают изменение значения систематической составляющей нулевого сигнала каждого измерительного канала БЧЭ на величину его допустимой временной нестабильности; 2) по методике, представленной выше, с помощью специального ПМО рассчитывают массив значений комплексного параметра; 3) выбирают в качестве допуска наибольшее из полученных значений.

В результате применения разработанной методики к приборам ИУС-М и БИЛУ получили значение допуска на комплексный параметр 0,05 %.

Таким образом, введение комплексного параметра приводит к следующим практическим результатам:

- существенно повышает оперативность и качество контроля БЧЭ.
- даёт получение большей информации при меньших затратах времени на контроль прибора при входном контроле на предприятии – потребителе: вместо одной недели - 3 часа;
- упрощает и удешевляет входной контроль прибора за счёт исключения необходимости использования сложного оборудования.
- IV. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ РАЗРАБОТАННОЙ МЕТОДИКИ

Прибор БИЛУ освоен на предприятии в рамках модернизации транспортной системы по программе МКС.

В табл. 1 и табл. 2 показаны экспериментальные исследования, проводимые на одном приборе БИЛУ до и после лётных испытаний, возвращённом на предприятие после завершения эксплуатации в составе СУ космического корабля «Союз MC-14» №743.

ТАБЛИЦА 1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЗНАЧЕНИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА ПРИБОРА БИЛУ ДО И ПОСЛЕ ЛЁТНЫХ ИСПЫТАНИЙ, %

Допуск	±0,050
Математическое ожидание М	-0,012
Среднеквадратическое отклонение σ	0,0036
M±3σ	$-0,0228 \div -0,0013$
M±2σ	-0,0192 ÷ -0,0049
M±σ	-0,0156 ÷ -0,0085

ТАБЛИЦА 2. ИЗМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА ПОСЛЕ ЛЁТНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО ОТНОШЕНИЮ К ФОРМУЛЯРНОМУ ЗНАЧЕНИЮ, %

Допуск	±0,05
Математическое ожидание М	-0,0003
Среднеквадратическое отклонение о	0,001
M±3σ	$-0,003854 \div 0,003254$
M±2σ	$-0,002669 \div 0,002069$
M±σ	$-0,001484 \div 0,000885$

В табл. 3 приведена статистическая обработка значений комплексного параметра партии приборов БИЛУ в количестве 28 шт., изготовленных филиалом АО "НПЦАП" - "ПО "Корпус" в 2018-2022гг.

#### ТАБЛИЦА 3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЗНАЧЕНИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА ПАРТИИ ПРИБОРОВ БИЛУ В КОЛИЧЕСТВЕ 28 ШТ., %

Допуск	$\pm 0,050$
Математическое ожидание М	-0,014
Среднеквадратическое отклонение σ	0,0086
M±3σ	$-0,0271 \div -0,0243$
M±2σ	$-0,0185 \div -0,0158$
M±σ	$-0,0100 \div -0,0072$

В табл. 4 показаны значения комплексного параметра приборов БИЛУ, полученные на входном контроле в РКК «Энергия» перед установкой на борт КК №743-№750.

ТАБЛИЦА 4. ЗНАЧЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА ПРИБОРОВ БИЛУ,
ПОЛУЧЕННЫЕ НА ВХОДНОМ КОНТРОЛЕ В РКК «ЭНЕРГИЯ» ПЕРЕД
УСТАНОВКОЙ НА БОРТ КК №743-№750

№	Комплексный параметр, %				
КК	Положение Х	Положение Ү	Положение Z		
743	0.008	0.023	0.021		
744	0.015	0.028	0.029		
745	0.001	0.011	0.007		
746	0.011	0.015	0.009		
747	0.008	0.003	0.010		
748	0.029	0.026	0.017		
749	0.003	0.002	0.010		
750	0.006	0.004	0.004		

Использование математического моделирования, разработанных методик и специального ПМО на всех этапах проектирования и изготовления приборов позволило значительно повысить качество и надёжность избыточных БЧЭ, что подтверждают итоги практического внедрения БИЛУ [7, 11, 14, 15, 17]. За 20 лет полётов не было даже ни одного сбоя в работе приборов, не говоря уже об отказе.

### V. Заключение

В результате проведенной работы были получены следующие результаты.

- Введён комплексный параметр, проверка которого позволяет гарантировать соответствие установленным допускам всех параметров БЧЭ, внесенных в формуляр на прибор и в дальнейшем прошиваемых в память бортовой ЭВМ. Проведена практическая реализация и внедрение комплексного параметра и специального ПМО для проведения входного контроля на предприятиипотребителе - РКК «Энергия» (г. Королёв Московской обл.).
- Разработана методика формирования допуска на комплексный параметр на этапе проектирования на основе допусков, заданных в технических условиях на прибор в соответствии с техническим заданием.

Таким образом, предложена методика контроля блоков чувствительных элементов для БИНС с неортогональной ориентацией осей чувствительности, эффективность которой подтверждена результатами лётных испытаний более чем 80-ти приборов.

#### Литература

- Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992.
- [2] Бранец В.Н., Севастьянов Н.Н., Федулов Р.В. Лекции по теории систем ориентации, управления движением и навигации. Томск: Изд-во Томского университета, 2013. 309 с.

- [3] Водичева Л.В. Инерциальные измерительные блоки перспективных изделий ракетно – космической техники: обеспечение отказоустойчивости / Бельский Л.Н. [и др.] // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение, т. 17 № 1, 2018. С. 28-44.
- [4] Водичева Л.В. Повышение надёжности и точности бесплатформенного инерциального измерительного блока при избыточном количестве измерений. // Гироскопия и навигация. 1997. №1. С 55–67.
- [5] Епифанов А.Д. Избыточные системы управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение. 1978. 144 с.
- [6] Измайлов, Е.А. Современные тенденции развития технологий инерциальных чувствительных элементов и систем летательных аппаратов // Труды ФГУП «НПЦАП», № 1, 2010. С. 27–35.
- [7] Калихман Д.М. Методика аттестации блока измерения линейного ускорения с неортогональной ориентацией осей чувствительности шести кварцевых маятниковых акселерометров и методика аттестации рабочих мест для контроля блока и акселерометров / Бранец В.Н. [и др.] // 13 Санкт-Петербургская международная конференция по инерциальным навигационным системам. СПб.: Изд-во ЦНИИ «Электроприбор», 2006.
- [8] Калихман Д.М. Измеритель вектора кажущегося линейного ускорения – прибор БИЛУ КХ69-042 для СУ спускаемого аппарата корабля «Союз-ТМА» / Бранец В.Н. [и др.] // 13 Санкт-Петербургская международная конференция по инерциальным навигационным системам. СПб.: Изд-во ЦНИИ «Электроприбор», 2006. С. 253-263.
- [9] Калихман Д.М. Проблемы разработки современных блоков электромеханических измерителей угловой скорости и кварцевых маятниковых акселерометров для объектов ракетнокосмической техники. История и перспективы развития / Калихман Л.Я. [и др.] // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 10 / под научной ред. В.Я. Распопова. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. С. 311-325.
- [10] Калихман Д.М. Опыт проектирования и изготовления блоков измерителей линейного ускорения на кварцевых маятниковых

акселерометрах с аналоговой и цифровой системами управления. Монография. / Нахов С.Ф. [и др.] - Саратов: Изд-во СГТУ им. Гагарина Ю.А., 2021, 240 с.

- [11] Калихман Д. М. Результаты лётных испытаний шестиосного блока измерителей кажущегося ускорения на основе прецизионного кварцевого маятникового акселерометра с цифровой обратной связью в составе космического корабля «Союз МС-14». / Самитов Р.М. [и др.] // 27 Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: Изд-во ЦНИИ «Электроприбор», 2020. С. 184-187.
- [12] Негри С. Новое поколение инерциальных навигационных систем на основе ВТГ для аппаратов, обеспечивающих запуск спутников / К. Линьон и др. // Гироскопия и навигация. 2016. № 1. С. 49–59.
- [13] Распопов В.Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. / Матвеев В.В. // СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2009. 280 с.
- [14] Ривкин Б.С. Аналитический обзор состояния исследований и разработок в области навигации за рубежом. Выпуски 1–4. СПб.: Изд-во ЦНИИ «Электроприбор», 2017–2019.
- [15] Туркин В.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663845 РФ от 06.11.2018. Заявка № 2018661045. Дата поступления 12.10.2018. Программа для проверки параметров блока измерителей линейных ускорений. / Акмаев А.А.
- [16] Туркин В.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017662856 РФ от 17.11.2017. Заявка № 2017619489. Дата поступления 12.09.2017. Программа для проверки параметров блока измерителей угловых скоростей. / Акмаев А.А.
- [17] Туркин В.А. Результаты разработки методики контроля блоков чувствительных элементов для БИНС с неортогональной ориентацией измерительных осей. // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 2 / под научной ред. В.Я. Распопова. Тула: Изд-во ТулГУ, 2023. С. 257 -264.

# Исследование влияния геометрических погрешностей имитаторов движения на калибровку навигационных систем

Ю.В. Ившина *ПНИПУ* Пермь, Россия ivshina@pnppk.ru Д.Ю. Зобачев ПАО «ПНППК» Пермь, Россия

Аннотация—В работе рассмотрено влияние геометрических погрешностей имитаторов движения на калибровку инерциальных измерителей навигационных систем. В качестве погрешностей рассмотрены углы, характеризующие неточность установки прибора на платформе стенда и углы, характеризующие отклонение осей вращения имитатора движения от географической системы координат. Приведены математические модели инерциальных датчиков и имитатора движения, результаты моделирования на трёхосном и двухосном стендах. Приведены результаты моделирования с использованием экспериментальных данных с учетом уточнения калибровочных коэффициентов инерциальных датчиков.

Ключевые слова—калибровка, бесплатформенная инерциальная навигационная система, акселерометр, гироскоп, погрешность, имитатор движения.

# I. Введение

Вопрос о высокой точности инерциальных навигационных систем представляет особую актуальность благодаря повышенному интересу к навигации без использования информации глобальных навигационных спутниковых систем [1]. Точность инерциальных систем в большей степени зависит от стабильности выходных характеристик инерциальных данных и качества проведения калибровки. В процессе калибровки инерциального измерительного блока, обычно состоящего из триады акселерометров и триады гироскопов, определяются систематические погрешности датчиков по заранее выбранной модели ошибок. При выборе модели погрешностей инерциальных измерителей необходимо учитывать конструктивные особенности и условия эксплуатации прибора, такие как, например, наличие широкого диапазона изменения температур при отсутствии систем термостатирования, расположение измерительного блока относительно центра масс подвижного объекта и другие. Кроме того, на качество проведения процесса калибровки влияют несовершенства стендового оборудования. В качестве стендового оборудования чаще всего используются одноосные, двухосные и трёхосные имитаторы движения.

Несмотря на то, что уделяется большое внимание калибровке на грубых стендах [3, 4, 8, 9], актуальность использования точных наклонно-поворотных стендов остается высокой. Наклонно-поворотные столы используют не только как оборудование для калибровки, но и в качестве стендов для приемо-сдаточных испытаний, что в свою очередь выдвигает требования к точности оборудования при производстве точных инерциальных навигационных систем. Следовательно, одна из причин использования точных стендов – это унификация испытательного и калибровочного оборудования. Унификация Т.А. Ульяновская ПАО «ПНППК» Пермь, Россия

позволяет снизить номенклатуру оборудования и как следствие снижает затраты на обслуживание. Анализ телеметрии, полученной при испытаниях инерциальных датчиков на стендовом оборудовании, показал, что имитаторы движения имеют геометрические погрешности, которые могут возникать вследствие различных причин, например, из-за структурно-неустойчивого грунта места. Целью данной работы является изложение результатов исследований, посвященных проблеме наличия геометрических погрешностей имитаторов движения, применяемых при калибровке инерциальных измерительных блоков, и влиянию этих погрешностей на точность проведения процедур калибровки.

# II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ ДАТЧИКОВ И ИМИТАТОРА ДВИЖЕНИЯ

### А. Математическая модель инерциальных датчиков

Инерциальными измерителями навигационной системы являются акселерометры и гироскопы. В качестве инструментальных систематических погрешностей будут рассмотрены погрешности масштабных коэффициентов, смещения нулевого сигнала и отклонения осей чувствительности датчиков от осей приборного трёхгранника, ориентация которого принимается в качестве ориентации навигационной системы. Математическая зависимость рассматриваемых погрешностей акселерометров представлена выражением (1)

$$\begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_X & 0 & 0 \\ 0 & \mu_Y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mu_{XY} & -\mu_{XZ} \\ -\mu_{XY} & 1 & \mu_{YZ} \\ \mu_{XX} & -\mu_{ZY} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi_X \\ \pi_Y \\ \pi_Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi_X \\ \pi_Y \\ \pi_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \pi_X \\ \delta \pi_Y \\ \delta \pi_Z \end{bmatrix} ,$$
(1)

где  $A_X, A_Y, A_Z$  – измерительные показания триады акселерометров;  $n_X, n_Y, n_Z$  – составляющие перегрузки измерительного модуля в проекции на оси чувствительности акселерометров;  $\mu_X, \mu_Y, \mu_Z$  – значения масштабных коэффициентов акселерометров;  $\tau_{\chi}, \tau_{\gamma}, \tau_{z}$  – погрешности типа смещения нуля;  $\mu_{XY}, \mu_{XZ}, \mu_{YX}, \mu_{YZ}, \mu_{ZX}, \mu_{ZY}$  – перекосы чувствительности акселерометров; осей  $\delta n_{\chi}, \delta n_{\chi}, \delta n_{\chi}$  – неучтенные случайные составляющие погрешности. Предполагается, что математическая зависимость погрешностей гироскопов аналогично зависимости погрешностей акселерометров включает в себя погрешности типа смещения нуля, ошибки, вызванные неточностью определения масштабного коэффициента и перекосов осей чувствительности, а также случайные составляющие погрешности.

Для простоты приборную систему координат привязывают к осям чувствительности двух базовых акселерометров, тем самым уменьшают количество оцениваемых калибровочных параметров ( $\Delta \mu_{XY} = \Delta \mu_{XZ} = \Delta \mu_{YZ} = 0$ ) [2, 3, 4]. Однако, как показали практические испытания, выбранная плоскость, образованная осями чувствительности базовых акселерометров, не остается постоянной при широком температурном диапазоне работы изделия, что приводит к ошибкам привязки бесплатформенной инерциальной навигационной системы к конечному объекту. Для исключения ошибки привязки в данном исследовании был выбран общий случай, при котором перекосы осей чувствительности инерциальных датчиков рассматриваются относительно модельного ортогонального приборного трехгранника ( $\Delta \mu_{XY} \neq 0$ ,  $\Delta \mu_{XZ} \neq 0$ ,  $\Delta \mu_{YZ} \neq 0$ ) [5, 6, 7].

# В. Погрешности имитатора движения

Для исследования геометрического несовершенства имитатора движения предлагается модель погрешностей трёхосного стенда, учитывающая неточность установки прибора на платформе стенда (рис. 2) и перекосы, характеризующие отклонение осей вращения имитатора движения от идеального положения в инерциальном пространстве (рис.1). На рис. 1–2 приняты обозначения: (N, Up, E)<sup>T</sup> – трехгранник, характеризующий географическую систему координат (ГСК), оси ориентированы по сторонам света; (X<sub>OC</sub>, Y<sub>OC</sub>, Z<sub>OC</sub>)<sup>T</sup> – оси, связанные с осями вращения стенда; (X<sub>П</sub>, Y<sub>П</sub>, Z<sub>П</sub>)<sup>T</sup> – оси, связанные с прибором.



Рис. 1. Отклонение осей вращения имитатора движения от ГСК

В процессе штатной калибровки по прямым измерениям оцениваемые калибровочные коэффициенты акселерометров и смещения нулей гироскопов определяются в статических положениях прибора, а остальные калибровочные коэффициенты гироскопов определяются в динамическом режиме. Используя калибровку по прямым измерениям, возможно получить аналитические выражения, независящие от погрешностей имитатора движения, для масштабных коэффициентов и смещения нулей акселерометров и гироскопов. Выражения для перекосов осей чувствительности акселерометров и гироскопов имеют зависимость от погрешностей стенда, при этом выражения для оценки перекосов осей чувствительности датчиков угловой скорости зависят только от углов, соответствующих перекосам установки прибора на планшайбе (  $\beta', \gamma'$ ), а выражения для оценки перекосов осей чувствительности акселерометров зависят от углов, соответствующих перекосам установки прибора на планшайбе ( $\beta', \gamma'$ ), и углов, характеризующих погрешность установки стенда в плоскости горизонта ( $\beta_{0C}$ ,  $\gamma_{0C}$ ). Анализ полученных выражений показал, что при наличии погрешностей имитатора движения

возникает рассогласование показаний инерциальных датчиков: привязка калибровочных коэффициентов гироскопов к осям стенда, а калибровочных коэффициентов – к вектору ускорения силы тяжести.



Рис. 2. Неточность установки прибора на платформе стенда (планшайбе)

Значения углов отклонения осей вращения имитатора движения от идеального положения в инерциальном пространстве могут быть получены на стадии периодической аттестации наклонно-поворотных столов и могут быть учтены в калибровочных коэффициентах.

# III. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для подтверждения полученных аналитических зависимостей было проведено моделирование показаний инерциального модуля с учетом погрешностей наклонно-поворотного стола в соответствии с планом штатной калибровки. Математическое моделирование подтвердило предполагаемое влияние погрешностей стенда, в частности, влияние на значения перекосов осей чувствительности. Для оценки качества проведения калибровки можно проанализировать проекции линейного ускорения горизонтальной скорости в горизонтальноили географической системе координат [11] с учетом калибровочных коэффициентов, полученных по прямым измерениям инерциальных датчиков. В некоторых научных трудах эта методика называется косвенный метод калибровки [3, 10]. Математическое моделирование данного метода показало, что полученные невязки коррелируют с углами отклонения осей вращения имитатора движения от идеального положения в инерциальном пространстве, а углы, соответствующие перекосам установки прибора на планшайбе, не наблюдаемы.

Так как углы, соответствующие отклонению осей вращения имитатора движения от идеального значения, непосредственно присутствуют в выражениях калибровочных параметров акселерометров, то сведение калибровочных коэффициентов к акселерометрам неверно с точки зрения взаимозаменяемости изделия на объекте, так как не будет повторяемости привязки посадочной поверхности к инерциальным датчикам, а привязка будет зависеть от невыставки стенда. В связи с этим предлагается приводить сведение к осям гироскопов, которые привязываются к ортогональным осям поворотного стенда.

Анализ математического моделирования с использованием экспериментальных данных по косвенному методу показал, что существуют дополнительные невязки,

предположительно зависящие от индивидуальных особенностей инерциальных датчиков или неактуальных метрологических данных аттестации стенда. Используя эти невязки, можно доугочнить коэффициенты, рассчитанные по прямым измерениям. Для апробации доуточненных калибровочных коэффициентов проведен следующий эксперимент - изделие устанавливается в горизонте в статическое положение на 15 минут, далее совершается поворот по углу курса на 45 градусов и снова фиксируется в статическом положении на 15 минут. Так совершается полный оборот на 360 градусов. По полученным записям инерциальных датчиков рассчитывается уход координат по северной и восточной составляющей инерциального навигационного решения. Применение доуточненных калибровочных коэффициентов позволило уменьшить максимальное отклонение координат на 40% относительно отклонения координат с использованием калибровочных коэффициентов, рассчитанных по штатной калибровке.

Косвенный метод калибровки подразумевает вращение вокруг каждой из осей триады инерциальных датчиков при ее горизонтальном расположении. Эту программу испытаний без переустановки прибора на планшайбе возможно провести только на трехосном наклонноповоротном столе. Если для косвенного метода применять одноосные или двухосные стенды и проводить калибровку на различных температурных режимах, то время калибровки увеличится в два-три раза. Математическое моделирование показало эффективность метода косвенной калибровки, благодаря чему было принято решение адаптации данного метода к производственным особенностям. К производственным особенностям можно отнести, например, большой парк двухосных поворотных столов с термокамерой. Наличие термокамеры, в свою очередь, позволит проводить докалибровку не только в нормальных климатических условиях, но и на других температурных калибровочных точках. Для этого был разработан план из 12 разворотов вокруг оси, расположенной горизонтально. Для наблюдаемости всех перекосов необходимо дважды расположить каждую из осей триады в горизонтальную плоскость и совершить два разворота на 180 градусов. Для каждого разворота формируются аналитические выражения как разность средних значений проекций кажущегося ускорения по горизонтальным осям в заданных положениях в конце и в начале разворота. Полученные выражения являются линейными зависимостями от смещения нулей акселерометров, погрешности масштабного коэффициента гироскопов и разности перекосов осей чувствительности гироскопов и акселерометров. По предложенной методике также проведено математическое моделирование и сделаны аналогичные выводы, что полученные невязки коррелируют с углами отклонения осей вращения имитатора движения от идеального положения в инерциальном пространстве, а углы, соответствующие перекосам установки прибора на планшайбе, не наблюдаемы.

# IV. Заключение

В работе рассмотрено влияние геометрических погрешностей имитаторов движения на калибровку инерциальных измерителей навигационных систем. В качестве погрешностей рассмотрены углы, характеризующие неточность установки прибора на платформе стенда и углы, характеризующие отклонение осей вращения имитатора движения от географической системы координат. Последние углы невозможно определить в процессе юстировки и, как следствие, они должны быть оценены на стадии калибровки. Углы, характеризующие неточность установки прибора на платформе стенда, на стадии калибровки не определяются, их уменьшение возможно конструктивным способом - доведение плоскости крепления поворотных стендов до требуемого состояния.

Аналитические выражения для перекосов осей чувствительности акселерометров и гироскопов с учетом оцененных калибровочных коэффициентов по прямым измерениям имеют зависимость от погрешностей стенда. При этом выражения для оценки перекосов осей чувствительности датчиков угловой скорости зависят только от углов, соответствующих перекосам установки прибора на планшайбе, а выражения для оценки перекосов осей чувствительности акселерометров зависят от углов, соответствующих перекосам установки прибора на планшайбе и углов, характеризующих погрешность установки стенда в плоскости горизонта.

Проведено математическое моделирование косвенного метода калибровки на примере трёхосного поворотного стенда и его адаптированной методики для двухосного стенда. Оцененные невязки коррелируют с углами отклонения осей вращения имитатора движения от идеального положения в инерциальном пространстве, а углы, соответствующие перекосам установки прибора на планшайбе, не наблюдаемы.

Анализ математического моделирования с использованием экспериментальных данных по косвенному методу показал, что существуют дополнительные невязки, предположительно зависящие от индивидуальных особенностей инерциальных датчиков или неполных метрологических данных аттестации стенда. Проведенный эксперимент показал уменьшение максимального отклонения координат по северной и восточной составляющей инерциального навигационного решения с использованием доуточненных коэффициентов на 40% относительно отклонения координат с использованием калибровочных коэффициентов, рассчитанных по штатной калибровке.

#### Литература

- Пешехонов В.Г. Высокоточная навигация без использования информации глобальных навигационных спутниковых систем // Гироскопия и навигация. 2022. №1(116). С. 3–11.
- [2] Голован А.А. Задача стендовой калибровки инерциальноизмерительных блоков // Материалы XXI конференции молодых ученых «Навигация и управление движением», 2019. С. 18–29.
- [3] Водичева Л.В., Парышева Ю.В. Оценка точностных параметров датчиков бесплатформенного инерциального измерительного блока с помощью относительно грубого поворотного стола // Гироскопия и навигация. 2019. №2(105). С. 162–178.
- [4] Климкович Б.В. Точная калибровка БИНС на грубых стендах // Гироскопия и навигация. 2022. №4(119). С. 54–70.
- [5] Емельянцев Г.И., Драницына Е.В., Блажнов Б.А. О калибровке бескарданного инерциального измерительного модуля на ВОГ // Гироскопия и навигация. 2012. №3 (78). С. 55–63.
- [6] Егоров Ю.Г., Киряченко Г.Ю., Попов Е.А. Исследование программ скалярной калибровки векторного имерителя // Гироскопия и навигация. 2022. №3 (118). С. 20–30.
- [7] Savage P.G. Improved Strapdown Inertial System Calibration Procedures. Part 3 .Numerical Examples WBN-14020-3 Strapdown Associates Inc. 2018.

- [8] Вавилова Н.Б., Голован А.А., Козлов А.В., Папуша И.А., Парусников Н.А. Сравнительный анализ различных вариантов калибровки бескарданной инерциальной навигационной системы// Юбилейная XXV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам.– СПб.: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2018. С. 249–251
- [9] Козлов А.В., Тарыгин И.Е., Голован А.А. Калибровка инерциальных измерительных блоков на грубых стендах с оценкой температурных зависимостей по эксперименту с переменной температурой // Сборник материалов XXI Санкт-Петербургской меж-

дународной конференции по интегрированным навигационным системам.– СПб.: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2014. С. 319–322

- [10] Емельянцев Г.И., Блажнов Б.А., Драницына Е.В., Степанов А.П. О калибровке измерительного модуля прецизионной БИНС и построении связанного с ним ортогонального трехгранника // Гироскопия и навигация. 2016. №1 (92). С. 36–48.
- [11] Diesel, J.W., Calibration of a Ring Laser Gyro Inertial navigation System, 13th Biennial Guidance Test Symposium, Holloman AFB, New Mexico, 1987, vol. 1, pp. SO1A 1–37.
# Калибровка бортовых магнитометров наноспутника SamSat-ION

П.Н. Николаев Межвузовская кафедра космических исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева Самара, Россия nikolaev.pn@ssau.ru А.С. Эспиноза Валлес Межвузовская кафедра космических исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева Самара, Россия esalvator24@gmail.com М.С. Щербаков Межвузовская кафедра космических исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева Самара, Россия sherbakov.m.s@mail.ru

Аннотация—в работе представлена калибровка магнитометров системы ориентации наноспутника SamSat-ION. Предложена методика температурной калибровки магнитометров в двенадцати статичных положениях. Проверена работоспособность бортовых систем в условиях перепада температур. Оценена точность определения параметров температурной зависимости коэффициентов смещения нуля, масштабирования и неортогональности осей датчиков магнитометров. Изложены основные результаты проведения наземных испытаний летных моделей бортовых систем наноспутника SamSat-ION. Предлагаемый подход обеспечивает надежную работу системы ориентации и стабилизации наноспутников, опирающихся на применение магнитометров, при воздействии на них различных температурных градиентов.

Ключевые слова—методика температурной калибровки, МЭМС-магнитометры, система управления движением, наноспутник.

## I. Введение

Магнитометры получили широкое применение в навигационных системах в рамках определения и управления ориентацией космических аппаратов в пространстве [1–4].

В случае, когда имеются минимальные требования по габаритам, массе и энергопотреблению, например при разработке наноспутников, целесообразно применять датчики на основе микроэлектромеханических систем (МЭМС).

Современные подходы к активному управлению наноспутниками опираются на применение МЭМСмагнитометров и датчиков освещенности в качестве источников информации и обратной связи систем управления [5]. В работах [3, 6] для определения ориентации и демпфирования начальных угловых скоростей предложено применение алгоритма B-dot, принимающего на вход измерения индукции магнитного поля Земли с магнитометров.

Однако особенность проектирования, производства, материалов конструкции и др. влияют на точность и стабильность измерений МЭМС-магнитометров в виде систематических ошибок [7, 8]. Кроме того, особенное воздействие на измерения оказывает магнитные возмущения, обусловленные наличием ферромагнитных материалов и внешних магнитных полей вблизи датчиков [9].

Авторами работы [10] предложена обобщенная методика температурной калибровки датчиков инерциальных измерений на основе Thermal Soak метода. Суть методики сводится к испытанию датчиков в климатической камере, где постепенно изменяется температура нагревом и охлаждением, при этом записываются показания датчиков для дальнейшей обработки алгоритмом калибровки. В итоге, калибровочные коэффициенты найдены нелинейными аппроксимациями.

Таким образом, в работе рассматривается подход к компенсации температурного ухода измерений на примере магнитометров SamSat-ION.

# II. НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ НАНОСПУТНИК SAMSAT-ION

## А. Задачи наноспутника SamSat-ION

Научно-образовательный наноспутник SamSat-ION разработан на Межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета. Основной целью SamSat-ION является исследование верхних слоев ионосферы Земли. К тому же, предусмотрено проведение ряда экспериментов по спутниковой навигации, по отработке алгоритмов трехосевой ориентации и по раскрытию трансформируемых конструкций [11]. Для проведения этих экспериментов, в качестве полезной нагрузки на наноспутнике установлены датчик параметров плазмы, разработки Института прикладной физики РАН [12]; приемник ГНСС и выносной магнитометр, разработки Самарского университета [13, 14].

# В. Измерительные средства системы управления движением SamSat-ION

Объектом исследования являются измерительные средства системы ориентации (ИССО), в частности, магнитометры. Бортовые измерительные средства включают в себя МЭМС-датчики: двухосевые гироскопы ADXRS290; инерциальные измерительные модули MPU-9255 (трехосевые гироскопы, трехосевые акселерометры, трехосевые магнитометры, датчики температуры); датчики освещенности TCS3472 и высокоточные прецизионные трехосевые магнитометры MMC5883MA.

В данной работе рассматриваются микрочип MPU-9255 и магнитометр MMC5883. Данные датчики расположены на плате бортового компьютера и плате выносного магнитометра. (рис. 1, 2).

Магнитометры датчика MPU-9255 относится к виду гальваномагнитных, т.е. их принцип работы основан на воздействии эффекта Холла. Магнитометры MMC5883 работают на анизотропных магниторезистивных (AMR) эффектах [15, 16].

Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

Измерительный модуль MPU-9255 включает в себя магнитный датчик Холла, диапазон измерений которого равен ±4800 мкТл с чувствительностью 15 мкТл/LSB [17].

Высокоточный магнитометр MMC5883 представляет собой AMR датчик с диапазоном измерений ±800 мкТл и чувствительностью 0.025 мкТл/LSB [18].



Рис. 1. Расположение МЭМС-магнитометров на бортовом компьютере

MPU-9255 №3

MMC5883 №2

Рис. 2. Расположение МЭМС-магнитометров на выносной плате

# III. МЕТОДИКА КАЛИБРОВКИ МАГНИТОМЕТРОВ

#### А. Математическая модель измерений

Математическая модель измерений магнитометров имеет вид:

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(T) = S(T)N(T) \boldsymbol{B} + \boldsymbol{b}_{total}(T) + \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (1)$$

где  $\tilde{B}$  – вектор измерений магнитометра; S(T) –матрица коэффициентов масштабирования; N(T) – матрица коэффициентов неортогональности осей; B – истинный вектор магнитной индукции;  $b_{total}(T)$  – вектор смещения нуля;  $\varepsilon$  – вектор шумов измерений; T – текущая температура магнитометра.

Согласно [19, 20], калибровка магнитометров сводится к отысканию параметров эллипсоида, который наилучшим образом вписывался бы в набор измерений датчиков. Таким образом, калибровочные коэффициенты магнитометра представляют собой геометрические параметры эллипсоида. Для определения этих коэффициентов, минимизируется функционал, выражающий сумму квадратов расстояний от точек измерений магнитометра до центра эллипсоида:

$$\Phi = \|D^T \boldsymbol{\nu}\|^2 \to \min, \qquad (2)$$

где D – матрица, составленная из векторов проекций измерений;  $\nu$  – вектор, содержащий все оцениваемые параметры эллипсоида.

Для учета влияния температуры на магнитометр необходимо отыскать полиномы третьего порядка, которые наилучшим образом описывали бы температурную зависимость калибровочных коэффициентов математической модели измерений:

$$W(T) = A_0 + A_1 T + A_2 T^2 + A_3 T^3, (3)$$

где W(T) – значение калибровочного коэффициента при температуре T;  $A_0, A_1, A_2, A_3$  – коэффициенты полинома.

#### В. Объем и последовательность испытаний

Объект испытаний (ОИ) состоит из бортовых измерительных средств наноспутника. ОИ испытывается в климатической камере в 12 различных положениях. Температура в рабочей зоне камеры изменяется в диапазоне от -10°C до +50°C согласно требованиям миссии, предъявляемым к датчикам.

Таким образом, испытания проводятся по следующему алгоритму:

- ОИ помещается в климатическую камеру в одно из двенадцати положений согласно рис. 3;
- ОИ нагревается до +50°С;
- При достижении +50°С температура в камере должна оставаться постоянной в течении 15 минут;
- Начинается запись измерений с датчиков ОИ;
- 5) ОИ плавно охлаждается до -10°С;
- При достижении -10°С температура в камере должна оставаться постоянной в течении 15 минут;
- ОИ нагревается по ступенчатому профилю до +50°C;
- При достижении +50°С температура в камере должна оставаться постоянной в течении 15 минут;
- Окончание записи данных с датчиков ОИ;
- Повторение шагов 1-9 для остальных 11 положений.

Полученные в ходе климатических испытаний измерения обрабатываются следующим образом: формируется набор векторов измерений магнитного поля, полученных при различных положениях ОИ; определяются калибровочные коэффициенты при изменении температуры с шагом 0,5°С; аппроксимируется зависимость полученных калибровочных коэффициентов от температуры полиномом третьего порядка.



Рис. 3. Схема двенадцатых статичных положений

# IV. ИСПЫТАНИЯ В КЛИМАТИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ

В Самарском университете на базе отраслевой научно-исследовательской лаборатории (ОНИЛ-1) были проведены испытания по предложенной методике. Целью испытаний является определение параметров температурной зависимости коэффициентов смещения нуля, масштабирования и неортогональности осей магнитометров.

# А. Объект испытаний и экспериментальная установка

В состав объекта испытаний (ОИ) входят три экземпляра ИССО SamSat-ION (рис. 1, 2). Также, применяется оснастка, позволяющая крепить бортовые компьютеры и выносные магнитометры в статичном положении при любой ориентации.

ОИ помещается в климатической камере теплавлаги-холода КТВХ – 100/70.260 (рис. 4).



Рис. 4. Объект испытаний в климатической камере

#### В. Основные результаты наземных испытаний

По вышеописанному алгоритму полностью получена и описана температурная зависимость ошибок измерений магнитометров системы ориентации SamSat-ION (рис. 5-9).



Рис. 5. Температурные зависимости смещения нуля, коэффициентов масштабирования и неортагональности MMC5883MA №1



Рис. 6. Температурные зависимости смещения нуля, коэффициентов масштабирования и неортагональности MMC5883MA №2



Рис. 7. Температурные зависимости смещения нуля, коэффициентов масштабирования и неортагональности МРU-9255 №1



Рис. 8. Температурные зависимости смещения нуля, коэффициентов масштабирования и неортагональности МРU-9255 №2



Рис. 9. Температурные зависимости смещения нуля, коэффициентов масштабирования и неортагональности МРU-9255 №3

Получены максимальные из двенадцати положений средние квадратичные отклонения измерений до и после температурной компенсации (таб. I-V). В таблицах использованы следующие обозначения:  $\sigma$  – среднее квадратичное отклонение составляющих  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  вектора измерений магнитной индукции **В**.

ТАБЛИЦА I. СТАТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ MMC5883MA №1

Oar	До калибровки	После калибровки
Ось	<i>σ</i> , нТл	<i>σ,</i> нТл
$B_x$	6414,43	1178,06
$B_y$	16705,48	679,52
$B_z$	637,93	575,37
	6184,96	498,13

ТАБЛИЦА II. Статические результаты ошибок измерений ММС5883МА №2

Oar	До калибровки	После калибровки
Ось	<i>σ,</i> нТл	<i>σ,</i> нТл
$B_{\chi}$	11724,39	1000,80
$B_y$	4843,63	1996,87
$B_z$	915,45	624,62
<i>B</i>	3969,76	664,05

ТАБЛИЦА III. Статические результаты ошибок измерений MPU-9255 №1

Oar	До калибровки	После калибровки
Ось	<i>σ,</i> нТл	<i>σ,</i> нТл
$B_{x}$	8726,75	3373,04
$B_y$	2840,09	2024,08
$B_z$	6107,04	1584,28
	3789,02	3213,45

ТАБЛИЦА IV. Статические результаты ошибок измерений MPU-9255 №2

Oar	До калибровки	После калибровки
Ось	<i>σ,</i> нТл	<i>σ,</i> нТл
$B_{x}$	3401,64	1150,22
$B_y$	4182,47	855,77
$B_z$	4038,88	820,29
B	2910,93	1035,44

ТАБЛИЦА V. Статические результаты ошибок измерений МРU-9255 №3

Oar	До калибровки	После калибровки
Ось	<i>σ,</i> нТл	<i>σ,</i> нТл
$B_{x}$	2419,14	1308,48
$B_y$	2464,33	2078,22
$B_z$	1491,85	1314,56
<b>B</b>	2222,93	1360,90

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена методика калибровки магнитоизмерительных средств системы ориентации наноспутника SamSat-ION. По предложенной методике оценены температурные зависимости калибровочных характеристик МЭМС-магнитометров MPU-9255 и MMC5883MA.

#### ЛИТЕРАТУРА

 M. Ovchinnikov, V. Pen'kov, O. Norberg, and S. Barabash, "Attitude control system for the first swedish nanosatellite 'MUNIN," *Acta Astronaut*, vol. 46, no. 2–6, pp. 319–326, Jan. 2000, doi: 10.1016/S0094-5765(99)00226-X.

- [2] V. Renaudin, M. H. Afzal, and G. Lachapelle, "New method for magnetometers based orientation estimation," *Record - IEEE PLANS*, *Position Location and Navigation Symposium*, pp. 348–356, 2010, doi: 10.1109/PLANS.2010.5507301.
- [3] A. V. Kramlikh and M. E. Melnik, "On-board algorithm for SamSat-218D nanosatellite orientation and stabilization system," *VESTNIK of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, vol. 15, no. 2, pp. 50–56, Jul. 2016, doi: 10.18287/2412-7329-2016-15-2-50-56.
- [4] F. L. Markley and D. Mortari, "Quaternion Attitude Estimation Using Vector Observations," *The Journal of the Astronautical Sciences* 2000 48:2, vol. 48, no. 2, pp. 359–380, Aug. 2020, doi: 10.1007/BF03546284.
- [5] A. Kramlikh, P. Nikolaev, and D. Rylko, "Implementation Features of Attitude Determination Algorithm for the SamSat-ION Nanosatellite," in 2022 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), IEEE, May 2022, pp. 1–4. doi: 10.23919/ICINS51784.2022.9815425.
- [6] A. V. Kramlikh, I. A. Lomaka, and P. N. Nikolaev, "Damping control system design for SamSat nanosatellite platform," *IOP Conf Ser Mater Sci Eng*, vol. 862, no. 2, p. 022065, May 2020, doi: 10.1088/1757-899X/862/2/022065.
- [7] М.С. Петрищев and В.М. Мусалимов, "Микромеханический магнитометр и моделирование динамики его чувствительного элемента," *Гироскопия и навигация*, no. 2 (53), С. 90–91, 2006.
- [8] В.А. Грановский and А.И. Скалон, "Метрологическая проблема микроэлектромеханических систем и методологические основы ее решения," *Гироскопия и навигация*, no. 4 (55), С. 117–118, 2006.
- [9] M. Babaee and S. Sharifian, "Calibration of Triaxial Magnetometers for IoT Applications Using Metaheuristic Methods," in 2018 4th Iranian Conference on Signal Processing and Intelligent Systems (ICSPIS), IEEE, Dec. 2018, pp. 95–99. doi: 10.1109/ICSPIS.2018.8700565.
- [10] X. Niu, Y. Li, H. Zhang, Q. Wang, and Y. Ban, "Fast Thermal Calibration of Low-Grade Inertial Sensors and Inertial Measurement Units," *Sensors 2013, Vol. 13, Pages 12192-12217*, vol. 13, no. 9, pp. 12192–12217, Sep. 2013, doi: 10.3390/S130912192.
- [11] A. I. Leonov and P. N. Nikolaev, "Providing Nanosatellite Triaxial Gravitational Orientation Using Magnetic Actuators," *IOP Conf Ser Mater Sci Eng*, vol. 1215, no. 1, p. 012005, Jan. 2022, doi: 10.1088/1757-899X/1215/1/012005.
- [12] A. G. Galka, A. V. Kostrov, and M. S. Malyshev, "Resonance Method for Measurement of the Ionospheric Plasma Density on Board Microsatellites," Technical Physics, vol. 67, no. 12, pp. 771–778, Dec. 2023, doi: 10.1134/S1063784222110044/METRICS.
- [13] A. V. Kramlikh, I. A. Lomaka, and S. V. Shafran, "Estimation Method for Nanosatellite Orbital Parameters in Case of Abnormal Operation of Navigation Equipment," 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2020-Proceedings, May 2020, doi: 10.23919/ICINS43215.2020.9134019.
- [14] P. N. Nikolaev, I. A. Kudryavtsev, and S. V. Shafran, "Requirements for nanosatellite-mounted GNSS-based instrument measuring ionospheric total electron content," *IOP Conf Ser Mater Sci Eng*, vol. 984, no. 1, p. 012022, Nov. 2020, doi: 10.1088/1757-899X/984/1/012022.
- [15] M. Crescentini, S. F. Syeda, and G. P. Gibiino, "Hall-Effect Current Sensors: Principles of Operation and Implementation Techniques," *IEEE Sens J*, vol. 22, no. 11, pp. 10137–10151, Jun. 2022, doi: 10.1109/JSEN.2021.3119766.
- [16] А. Борисов Современные АМР датчики для детектирования скорости, положения и слабых магнитных полей // Компоненты и Технологии. 2006. №60.
- [17] InvenSense, "MPU-9255 Product Specification," DS-000007. Accessed: Oct. 31, 2022. [Online]. Available: https://invensense.tdk.com/
- [18] MEMSIC, "±8Gauss, High Performance, Low Cost 3-axis Magnetic Sensor," MMC5883MA Rev. B datasheet. Accessed: Oct. 31, 2022. [Online]. Available: https://www.memsic.com
- [19] Q. Li and J. G. Griffiths, "Least squares ellipsoid specific fitting," Proceedings - Geometric Modeling and Processing 2004, pp. 335– 340, 2004, doi: 10.1109/GMAP.2004.1290055.
- [20] M. Kok *et al.*, "Calibration of a magnetometer in combination with inertial sensors," pp. 787–793, 2012, Accessed: Oct. 31, 2022. [Online].Available:<u>http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:liu:diva-85897</u>

# Разработка методики проектирования и оптимизации жесткости несущей системы бесплатформенной инерциальной навигационной системы

А.В. Фролов *АО «ЦНИИАГ»* Москва, Россия frolov@frolov.moscow П.А. Шаповалов *АО «ЦНИИАГ»* Москва, Россия kinik.keni@yandex.ru Ю.В. Михайлов *АО «ЦНИИАГ»* Москва, Россия mikhaylov.yu@gmail.com

Аннотация-В работе описывается методика проектирования и оптимизации несущей системы бесплатформенной инерциальной навигационной системы с целью уменьшения инструментальных погрешностей чувствительных элементов, вызванных деформацией несущей системы под действием комплекса внешних и внутренних нагрузок. Для решения поставленных задач используется алгоритм, комбинирующий многокритериальную параметрическую оптимизацию и структурную топологическую оптимизацию. В качестве иллюстрации применения описанной методики рассматривается процесс оптимизации несущей системы конкретного прибора бесплатформенной инерциальной навигационной системы, в ходе которого была выполнена поэтапная многокритериальная параметрическая оптимизация с целью максимизации жесткости конструкции, а затем при помощи топологической оптимизации была минимизирована масса деталей. Было показано, что предложенная комбинация методик параметрической и топологической оптимизации конструкции позволяет с допущением о незначительном изменении жесткости перейти от многокритериальной оптимизации к однокритериальной.

Ключевые слова—БИНС, численное моделирование, ANSYS, топологическая оптимизация.

## I. Введение

Развитие современных бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) подразумевает под собой прежде всего повышение точности решения навигационной задачи, а также улучшение массогабаритных показателей прибора БИНС [1, 2].

Решение этих порой противоречивых задач, с одной стороны, может быть достигнуто за счет повышения характеристик точности чувствительных элементов (ЧЭ): акселерометров и гироскопов [3, 4], а с другой стороны – за счет совершенствования и оптимизации конструкции прибора [5, 6].

Значимый вклад как с точки зрения обеспечения точности выходных данных, так и с точки зрения массы прибора вносит несущая система (НС) БИНС [7].

В работе рассматривается методика оптимизации несущей системы БИНС, целью которой является уменьшение инструментальных погрешностей отклонения осей чувствительных элементов, вызванных деформацией несущей системы под действием комплекса внешних и внутренних нагрузок и одновременно минимизация массы. Известно, что больший вклад в величину навигационной ошибки вносят погрешности показаний акселерометров [8], в связи с чем более актуальной является задача оптимизации несущей системы триады акселерометров. Решение данной задачи применительно к конструкторской модели БИНС, разработанной в АО «ЦНИИАГ» (см. рис. 1), было использовано в качестве демонстрационного примера практического применения разработанной методики.



Рис. 1. Конструкторской модели БИНС, разработанная в АО «ЦНИИАГ»

#### II. Описание методики

Рассматриваемая методика представляет собой набор методических подходов к решению отдельных задач проектирования и оптимизации несущей системы БИНС, а также их взаимосвязь. Данная методика реализована в виде укрупненного алгоритма, представленного на рис. 2.

На этапе декомпозиция детали прибора могут быть условно разделены на следующие основные группы:

- покупные изделия;
- детали несущей системы;
- корпусные детали.



Рис. 2. Алгоритм оптимизации

К покупным деталям основные требования предъявляются с точки зрения характеристик эффективности и массогабаритных характеристик, а также оптимальности их компоновки в составе прибора.

Несущая система БИНС должна обеспечивать достаточную жесткость осей чувствительных элементов при минимальной массе. Последнее требование касательно массы также является основным и для корпусных деталей БИНС.

Примером эвристического синтеза вариантов конструкций несущих систем может служить рассмотренный в [9] перспективный ряд конструктивных решений несущих систем.

В результате эвристического синтеза получают *n* вариантов конструкций несущих систем, характеризуемых функционалами  $J_i(x)$ , i = 1, 2, ..., n, где  $x = (x_1, x_2, ..., x_m)^T$  – вектор конструктивных параметров, образующих соответствующее *m*-мерное пространство с учетом функций ограничений типа неравенства  $g_i(x)$ , равенства  $h_k(x)$  и диапазона  $x_i$ :

$$g_{j}(x) \ge 0, j = 1, 2, ..., G;$$
  

$$h_{k}(x) = 0, k = 1, 2, ..., K;$$
  

$$x_{l}^{bot} \le x_{l} \le x_{l}^{top}, l = 1, 2, ..., L.$$

На следующем этапе выполняется оценка жесткости конструкций несущих систем БИНС на основе упрощенных расчетных моделей с целью сокращения количества исследуемых оптимизационными методами вариантов. Критериями жесткости являются углы отклонений осей чувствительных элементов от приборных осей БИНС:  $\gamma_i(x)$ , по которым выполняется ранжирование конструктивных вариантов несущих систем:  $J'_i(x)$ , i=1, 2, ..., n' для n' < n.

Далее необходимо выполнить параметризацию Зд-моделей несущей системы и в трехмерной конечноэлементной (КЭ) постановке произвести многокритериальную параметрическую оптимизацию несущей системы с целью максимизации жесткости, что эквивалентно задаче минимизации целевой функции  $f_z(x)$  угловых смещений осей акселерометров:

$$f_z(x) \to min, f_z(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_z(x))^T,$$

где *z* – количество целевых функций.

В данном случае рассматриваются 18 критериев, соответствующих проекциям углов отклонения акселерометров  $Ax_i$ ,  $Ay_i$ ,  $Az_i$  на приборные оси БИНС  $X_b$  (i = 1),  $Y_b$  (i = 2),  $Z_b$  (i = 3) [11]:

$$\left(\gamma_{Ax_{2}}\right)_{q},\left(\gamma_{Ax_{3}}\right)_{q},\left(\gamma_{Ay_{1}}\right)_{q},\left(\gamma_{Ay_{3}}\right)_{q},\left(\gamma_{Az_{1}}\right)_{q},\left(\gamma_{Az_{2}}\right)_{q},$$

где q = x, y, z - 3 шага нагружения (инерционное внешнее воздействие величиной 30g отдельно в каждом направлении).

При решении задачи многокритериальной оптимизации в модуле ANSYS DesignXplorer генерируется множество допустимых решений  $x_m$ , где m = 9000. В результате оптимизации алгоритмом MOGA [10] выбираются решения  $x'_m$ , где m = 1800, среди которых отыскиваются оптимальные по Парето решения  $x^*$  и формируется множество Парето  $P_s$ :

$$P_s = \left\{ x^* : \left[ \nexists x : \left[ \left( f_i(x) \le f_i(x^*), \partial n \pi \ \forall i \in [1, z] \right) \land \\ \left( f_j(x) < f_j(x^*), \partial n \pi \ \forall j \in [1, z], \ j \ge 1 \right) \right] \right\},$$

т.е. не существует такого решения x, которое было бы не хуже решения  $x^*$  для всех целевых функций и лучше хотя бы для одной из них.

Множество Парето-оптимальных решений образует фронт Парето:  $P_f = \{ f(x^*) : x^* \in P_s \}$ .

Также для  $x^* \in P_s$  вычисляются допускаемые критерии по углам отклонения осей акселерометров  $[\gamma(x^*)]_i$ .

Для рассматриваемого в настоящей статье прибора БИНС в работе [11] исследованы несколько наборов критериев оптимизации с разной степенью детализации учета компонент углов отклонения и показано, что с уменьшением числа критериев фронт Парето сдвигается в сторону более легкой конструкции, но при этом наблюдается снижение жесткости.

Впоследствии используется топологическая оптимизации для минимизации массы *m* деталей несущей системы при контролируемой жесткости:

 $m(x^*) \rightarrow min$ , при условиях  $\gamma_i \leq c_{DC} \cdot [\gamma]_i$ ,

где  $c_{DC}$  – коэффициент ограничения перемещений, позволяющий масштабировать  $[\gamma]_i$  при решении задачи топологической оптимизации и, тем самым, влиять на результат  $m^*$ .

На данный момент наиболее перспективными считаются методы Level Set [13] и группа эволюционных методов, например, Evolutionary Structural Optimization (ESO) и Bidirectional Evolutionary Structural Optimization (BESO) [14]. Тем не менее, с точки зрения полноты реализации в коммерческом программном обеспечении различных дополнительных фильтров, позволяющих при оптимизации в качестве ограничений задавать предельные перемещения, напряжения и т.д. [15, 16, 17] метод SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) [12] все еще является предпочтительным для решения прикладных задач.

Также при необходимости выполняется дополнительная минимизация массы деталей несущей системы с помощью технологии ячеистых структур.

В конечном итоге, после обработки результатов оптимизации и получения окончательной твердотельной модели проводят поверочный расчет, в котором максимально учитываются все действующие на прибор БИНС нагрузки и оценивается систематическая погрешность чувствительных элементов, вызванная деформацией несущей системы БИНС, например, как показано в [18].

#### III. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В данной работе проиллюстрирована часть вышеописанной методики, относящаяся к топологической оптимизации. На рис. 3 показаны этапы оптимизации кронштейна акселерометров, геометрическая модель которого (см. рис. 3, а) получена на основании результатов из работы [9] и является одним из Парето-оптимальных решения:  $x^* \in P_s$ . Для этой модели решалась задача минимизации массы при помощи топологической оптимизации, результаты которой показаны на рис. 3, б.

Для проверки соответствия характеристик жесткости полученного решения выполнен поверочный расчет, для чего было необходимо преобразовать STL-геометрию в твердотельную модель, пригодную для генерации конечно-элементной сетки (см. рис. 3, в). Поверочный расчет показал, что условие  $\gamma_i \leq c_{DC'}[\gamma]_i$  выполняется.

И, наконец, на рис. 3, г показан альтернативный вариант решения задачи топологической оптимизации при помощи ячеистых структур. В ряде случаев такой подход может быть более предпочтителен с технологической точки зрения.

a)





Рис. 3. Этапы оптимизации кронштейна акселерометров: а) исходная геометрия после параметрической оптимизации; б) результаты топологической оптимизации; в) поверочный расчет; г) результаты оптимизации при помощи ячеистых структур

Качественная и количественная оценка результатов расчетов приведена на рис. 4, на котором точки RSO2 являются решением многокритериальной оптимизационной задачи  $x'_m$ , полученным в [11].



Рис. 4. Анализ результатов оптимизации

Фронт 1 является фронтом Парето  $P_f$  для данной задачи. При помощи топологической оптимизации был получен Фронт 2 при условии  $\gamma_i \leq c_{DC} [\gamma]_i$  при  $c_{DC} = 1$ , т.е. получены решения более оптимальные с точки зрения массы без снижения жесткости кронштейна. Стрелками показаны зависимости изменения результатов решения задачи топологической оптимизации по массе в зависимости от контролируемого увеличения критерия  $[\gamma]_i$ , показаны результаты для  $c_{DC} = 1,025$  и  $c_{DC} = 1,05$ . Заполненная серым цветом область соответствует неоптимальным относительно исходных характеристик массы и жесткости решениям.

# IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя разработанный методический подход, на примере кронштейна триады акселерометров была выполнена оценка оптимальности решения относительно исходной геометрии, полученной на этапе конструкторской разработки. Определено предельное значение оптимизируемого критерия - минимальной массы кронштейна при неизменном суммарном угле отклонения  $\gamma_{Atot} = const$ : после параметрической многокритериальной оптимизации удалось добиться снижения массы на 20% и еще дополнительно 11% за счет топологической оптимизации.

#### Литература

- Матвеев В.В., Распопов В.Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2009. 280 с.
- [2] Titterton D., Weston J., Strapdown Inertial Navigation Technology, Institution of Engineering and Technology, 2005.
- [3] Lawrence A., Modern Inertial Technology: Navigation, Guidance, and Control, Springer, 2012.
- [4] Пешехонов В.Г. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем // Гироскопия и навигация, 2011. N1. C.3-16.

- [5] Медельцев А.А. и др. Опыт оптимизации конструкции самоприцеливающейся БИНС высокоманевренного летательного аппарата // Известия ТулГУ. Технические науки. 2021. Вып. 1. – С.61-68.
- [6] Фролов А.В. и др. Уменьшение массы БИНС с применением топологической оптимизации при заданной жесткости // Известия ТулГУ. Технические науки. 2021. Вып. 1. – С.105-117.
- [7] Джашитов В.Э. Панкратов В.М. Коффер К.В. и др. Иерархические тепловые модели бесплатформенной инерциальных навигационной системы на волоконно-оптических гироскопах / Гироскопия и навигация. № 1 (80), 2013, С. 49 – 63.
- [8] Savage P.G. Strapdown Sensors. AGARD Lecture Series №95, Strapdown Inertial Systems, 1978.
- [9] Фролов А.В., Смирнов С.В., Попов Е.А. Исследования влияния теплоты на стабильность осей несущей системы блока акселерометров БИНС // XXVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 2020.
- [10] Murata T., Ishibuchi H. MOGA: multi-objective genetic algorithms // International Conference on Evolutionary Computation. IEEE. 1995, pp. 289-924.
- [11] Шаповалов П.А., Михайлов Ю.В., Фролов А.В., Савватеев Д.О. Практические аспекты решения задач оптимизации несущих систем бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Известия ЮФУ. Технические науки. 2023. №1 (231) – С. 252-265.
- [12] Bendsoe M.P., Sigmund O. 2004. Topology Optimization. Theory, Methods and Applications. 2<sup>nd</sup> ed. Berlin, Springer-Verlag: 370 p.
- [13] Wang S.Y., Lim K.M., Khoo B.C., Wang M.Y. 2007. An extended level set method for shape and topology optimization. J. of Computational Physics. 221: 395–421.
- [14] Huang X., Xie Y.M. 2010. Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures. Methods and Applications. Chichester, West Sussex, England: John Wiley & Sons Ltd.: 217 p.
- [15] Salazar de Troya M., Tortorelli D.A. Three-dimensional mesh refinment in stress-constrained topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. Springer. 2020.
- [16] Langelaar M. An additive manufacturing filter for topology optimization of print-ready designs // Structural and Multidisciplinary Optimization. Springer. 2017.
- [17] Jankovics D., Gohari H., Tayefeh M., Barari A. Developing topology optimization with additive manufacturing constraints in ANSYS // IFAC PapersOnLine. – 2018. №51-11. – pp. 1359–1364.
- [18] Фролов А.В. Оптимизация конструкции несущей системы высокодинамичного БИНС с использованием показателей сбалансированной точности // Известия ТулГУ. Технические науки. 2021. Вып. 1. С.74-90.

# Настраиваемая система амортизации блока чувствительных элементов

Н.Д. Богданов, М.А. Белоусов ПАО «Пермская научно-производственная приборостроительная компания», Пермь, Российская Федерация +7 (950) 449-44-27 BogdanovND@pnppk.ru

Аннотация—В работе рассматриваются конструкция и принцип действия настраиваемой системы амортизации блока чувствительных элементов (БЧЭ). Приведены и рассмотрены результаты вибрационных испытаний системы амортизации в двух различных приборах.

Ключевые слова—настраиваемая система амортизации, инерциальная навигационная система.

### I. Введение

В настоящее время прослеживается тенденция разработки узконаправленных инерциальных навигационных систем (ИНС). При конструировании новых приборов разработчики не закладывают возможность унификации и масштабирования изделия, четко определяя его применяемость.

С целью использования одного серийного изделия на наземных, морских и авиационных объектах ПАО «ПНППК» разработана настраиваемая система амортизации, позволяющая унифицировать приложение одного блока чувствительных элементов (БЧЭ) в различных по своей применяемости инерциальных навигационных системах (ИНС). Возможность подстройки жесткостнодемпфирующих характеристик амортизации позволяет подобрать наиболее подходящую конфигурацию прибора под определенный объект без снижения точностных характеристик с сохранением малых габаритов и массы изделия.

## II. НАСТРАИВАЕМАЯ СИСТЕМА АМОРТИЗАЦИИ

Целью работы является разработка одной настраиваемой системы амортизации блока чувствительных элементов на базе трех волоконно-оптических гироскопов и триады кварцевых маятниковых акселерометров для двух отличающихся по габаритам и массе ИНС. Настройка резонансной частоты данной системы обеспечивает применяемость ИНС в различных областях (наземное транспортное средство, морское судно, воздушный транспорт) [1]. Для выполнения этой задачи поставлены принципиальные требования: технологичность, то есть обеспечение простоты настройки системы, и функциональность – устойчивость к максимально возможному спектру внешних воздействующих факторов (ВВФ). Оба требования невозможно выполнить за счет использования статичных демпферов, удерживающих БЧЭ внутри корпуса, однако эта задача становится осуществимой при обеспечении подстройки жесткостно-демпфирующих характеристик виброизоляторов. Вид конструкции в разрезе приведен на рис. 1.



Рис. 1. Вид системы в разрезе

В данной системе амортизации натяжение виброизоляторов выполняется посредством ввинчивания регулировочных винтов (опор). Размерность натяжения обеспечивается динамометрической отверткой и подбирается в ходе регулировочной операции под заданный объект применения прибора с известной моделью ВВФ. При достижении необходимой величины натяжения опоры крепко фиксируются контргайками. Таким образом, достигается простота настройки, обеспечивается равные жесткостно-демпфирующие характеристики всех осей виброизоляторов, минимизируется значение углового ускорения блока чувствительных элементов на резонансах амортизации и достигается необходимая резонансная частота для обеспечения виброустойчивости к разным режимам вибрации.

# III. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ

Апробация описанной системы амортизации проводилась внутри корпусов двух различных по своим массогабаритным характеристикам ИНС. В качестве внешнего воздействия использована синусоидальная вибрация с двойным проходом, амплитудой 1g и частотой 50-400 Гц.

Испытания заключались в использовании виброизоляторов одинаковой жесткости и варьировании величины момента натяга опорных винтов, которая, в свою очередь, изменяла жесткость демпферов и, следовательно, величины резонанса и максимальных угловых ускорений конструкции в целом. Результаты приведены в табл. 1 и 2.

ТАБЛИЦА I. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ В ЛЕГКОМ КОРПУСЕ С РАЗЛИЧНЫМ МОМЕНТОМ НАТЯГА

	Величина момента натяга, Нм									
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40				
Значение резонанса, Гц	90	101	111	116	134	189				
Мах амплитуда угло- вых ускорений, %с²	7348	9197	6971	5828	5891	4154				

	Величина момента натяга, Нм								
	0,3	0,5	1,0	1,3	1,7	1,9			
Значение резо- нанса, Гц	78	85	122	170	235	260			
Мах амплитуда угловых ускоре- ний, %с <sup>2</sup>	9979	7693	17653	14380	12858	13653			

# ТАБЛИЦА II. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ В ТЯЖЕЛОМ КОРПУСЕ С РАЗЛИЧНЫМ МОМЕНТОМ НАТЯГА

Таким образом, результаты испытаний настраиваемой системы амортизации в разных ИНС доказали возможность настройки резонансной частоты и максимальной амплитуды угловых ускорений прибора с помощью подстройки жесткостно-демпфирующих характеристик, что обеспечивает возможность применения такой конструкции в приборах на объектах применения с различными моделями ВВФ.

Кроме того, испытания описанной системы амортизации на примере двух отличающихся по своим массогабаритным параметрам приборов показали релевантность подобного решения вне зависимости от характеристик самих изделий.

# IV. Заключение

В данной работе рассмотрена конструкция настраиваемой системы амортизации блока чувствительных элементов, обеспечивающей применяемость инерциальной навигационной системы на различных объектах. Приведены результаты вибрационных испытаний БЧЭ с настраиваемой системой амортизации в корпусе двух разных по своим массогабаритным характеристикам ИНС.

#### Литература

[1] Богданов, Н. Д. Апробация универсальной инерциальной навигационной системы в части наземной, морской и летной отработки / Н. Д. Богданов, М. А. Белоусов, Д. В. Губский и А. Е. Морозов // Материалы XVIII Всероссийской научно-практической конференции «Перспективные системы и задачи управления». Таганрог, 2023. Т. 648: Лукоморье. С. 273-276.

# К вопросу оптимизации конструкции пространственного интегрирующего волнового твердотельного гироскопа

А.А. Скрипкин СГТУ им.Ю.А.Гагарина 410054, Саратов, Политехническая ул., 77, Россия e-mail: alskr@yandex.ru

Аннотация—Пространственный интегрирующий волновой твердотельный гироскоп, использующий полую сферическую оболочку в качестве резонатора, относится к новому трехмерному гироскопическому датчику и может быть использован для определения параметров ориентации, в том числе угловых скоростей подвижных объектов.

#### Ключевые слова—пространственный интегрирующий волновой твердотельный гироскоп, резонатор, полая сферическая оболочка, моноэлектрет.

В основе функционирования волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) лежит физические явление, основанное на свойствах инерции упругих стоячих волн в твердом осесимметричном упругом теле, проявляющее себя в виде отставания угла поворота стоячей волны от поворота основания.

В большинстве конструкций ТВГ содержится резонатор в виде осесимметричного тонкостенного элемента, способного к вибрации, а также один электрод резонатора, электроды датчиков и управления, электронный блок управления, содержащий устройства вычисления угла, стабилизации амплитуды колебаний и другие элементы.

К недостаткам большинства известных конструкций ТВГ является невозможность определения трех компонент вращательного движения подвижного объекта, характеризующих его пространственное угловое положение, то есть, параметры ориентации подвижного объекта.

В материалах доклада авторы предлагают дальнейшие варианты конструкций пространственного ВТГ.

В первом варианте конструкции нового ВТГ резонатор выполнен в виде пространственного вакуумированного модуля, состоящего из концентрически размещенных одна внутри другой наружной и внутренней полых сфер из специального магнитного материала с взаимно-противоположным направлением намагничивания [1].

Во внутренней сфере размещен источник питания, обмотки электромагнитного центрирования и блок управления, а на наружной стороне внутренней сферы размещены электроды управления и вспомогательный электрод; на внутренней стороне наружной сферы размещены датчики измерения положения стоячей волны и на наружной стороне наружной сферы размещены обмотки электромагнитного центрирования, а пространственная стоячая волна возбуждается в тонкоС.Е. Переляев Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН 119526, Москва, Россия, Проспект Вернадского, 101-1 e-mail: <u>ipm@ipmnet.ru</u>

стенной сфере, выполненной из материала с малыми параметрами внутреннего трения, охватывающей снаружи внутреннюю сферу через немагнитные втулки.

Однако такому варианту конструкции пространственного ТВГ также присущи некоторые недостатки, в том числе малая нагрузочная способность в осевом и радиальном направлении, обусловленная большой сложностью и трудоемкостью изготовления наружной и внутренней полых сфер из магнитного материала с взаимно-противоположным направлением намагничивания, содержащих слои магнитного материала значительной толщины, а также сложность обеспечения равномерного намагничивания магнитных слоев в индукторе, что в итоге может привести к неравномерности взаимного движения сфер при неравномерном (например, ускоренном) движении подвижного объекта и, как следствие, недостаточная надежность и долговечность пространственного интегрирующего ТВГ при экстремальных условиях эксплуатации, например, при значительных внешних ударных и вибрационных нагрузках и так далее.

Поэтому для повышении надежности и долговечности пространственного ТВГ в втором варианте конструкции резонатор выполнен в виде пространственного вакуумированного модуля, состоящего из концентрически размещенных одна внутри другой наружной и внутренней полых сфер, в котором вместо магнитных материалов на наружную и внутреннюю поверхности внутренней и наружной сферы соответственно нанесены слои моноэлектрета, имеющие заряд одного знака и величины [2].

Предлагаемая авторами конструкция резонатора ТВГ может быть реализована в виде пространственного вакуумированного модуля, состоящего из концентрически размещенных одна внутри другой наружной и внутренней полых сфер, в которых соответственно на наружную и внутреннюю поверхности внутренней и наружной сферы соответственно нанесены слои моноэлектрета, имеющие заряд одного знака и величины. Слои моноэлектрета могут представлять собой, например, моноэлектретную пленку. Кроме того, в предлагаемой конструкции ТВГ предусмотрены обмотки электромагнитного центрирования.

Это позволяет реализовать комбинированный бесконтактный подвес тонкостенной сферы, выполненной из материала с малыми параметрами внутреннего трения и охватывающей снаружи внутреннюю полую сферу через немагнитные втулки. При этом общее количество немагнитных втулок для комбинированного бесконтактного подвеса тонкостенной сферы может оставлять, например, 1...3, располагаемых диаметрально, либо по трем осям.

Во внутренней сфере размещен источник питания с преобразователем DC-AC для питания обмоток электромагнитного центрирования, установленных во внутренней сфере.

Электроды управления и вспомогательный электрод расположены на слое моноэлектрета, размещенном на наружной поверхности внутренней сферы, а датчики измерения положения стоячей волны расположены на слое моноэлектрета, размещенном на внутренней поверхности наружной сферы.

Внутренняя и наружная сферы изготовлены из немагнитного материала, например, из высокопрочных композитных материалов малой плотности ( $\rho$ =1,45...1,6 г/см<sup>3</sup>) на основе, например, углепластиков; либо полидицик-лопентадиена.

Предлагаемый резонатор ВТГ функционирует следующим образом.

При подаче напряжения питания (включении гироскопа) на обмотки электромагнитного центрирования активируется пространственный вакуумированный модуль резонатора, обеспечивая бесконтактный подвес внутренней полой сферы и тонкостенной сферы.

Для параметрического возбуждения пространственной механической стоячей волны к тонкостенной сфере прикладываются две диаметрально противоположные силы, создаваемые электродами управления. Количество электродов управления обусловлено особенностями конструкции ТВГ и параметрами создаваемой стоячей волны в резонаторе, так как эти электроды задают генерацию стоячей волны. В реальной конструкции такие электроды использовались в количестве 16 штук, а располагались они в местах пучности стоячей волны. Под действием приложенных сил тонкостенная сфера принимает эллипсоидальную форму. Приложенные силы в заданные моменты времени становятся равными нулю, а тонкостенная сфера, обладающая определенной жесткостью, проходя через недеформированное состояние, под действием сил инерции будет деформироваться в ортогональном направлении. Возбуждение пространственной стоячей волны в тонкостенной сфере происходит в режиме автогенератора на собственной частоте колебаний.

В результате обеспечивается возможность параметрического возбуждения на ее внешней поверхности пространственной механической стоячей волны, позволяющей в итоге определять три компоненты вращательного движения подвижного объекта, характеризующих параметры его ориентации в пространстве.

Укажем, что принципиальным отличием новых электретов является то, что их получают не из готовых термопластичных полимеров, а из олигомерных термореактивных смол (эпоксидных, фенолформальдегидных или полиэфирных). Важной особенностью изготовления таких электретов является то, что поляризация происходит в процессе отверждения олигомерной смолы на металлической или полимерной подложке.

Величина основной характеристики электретов поверхностной плотности зарядов  $\sigma$  ( $10^{-8}...10^{-4}$  Кл/м<sup>2</sup>) определяется главным образом разностью потенциалов сторон электрета и зависит от химической природы наполнителя.

Однако наиболее широкое применение в электретных устройствах находят полимерные пленки.

Подходящими материалами служат такие полимеры, как политетрафторэтилен (ПТФЭ), полиэтилентерефталат, поликарбонат, полиметилметакрилат, поливинилфторид, поливинилиденфторид и др. С течением времени заряд электретов изменяется обычно более быстро в первые часы после окончания электризации и относительно медленно - в последующий период. Однако, если атмосферный объем, в котором хранится электрет, достаточно мал, процессами внешней релаксации практически можно пренебречь. Например, полагая, что все ионы, образующиеся в нормальных условиях в 1 см<sup>3</sup> воздуха, осаждаются на участке поверхности электрета площадью 1 см<sup>2</sup>, то при начальной поверхностной плотности  $\sigma = 10^{-4}$  Кл/м<sup>2</sup> время, необходимое для полной компенсации электретного заряда, составит около 200 лет. Предлагаемая конструкция пространственного ТВГ обладает определенными преимуществами по сравнению с существующими конструкциями. В настоящее время авторами выполнены отдельные элементы математического моделирования ТВГ и планируется изготовление макетного варианта его конструкции.

# Литература

[1] Пространственный интегрирующий твердотельный волновой гироскоп. Патент РФ № 2763688, опублик. 30. 12.2021, бюл. №1.

[2] Резонатор пространственного интегрирующего твердотельного волнового гироскопа. Патент РФ № 216847, опублик. 03.03.2023, бюл. №3.

# Влияние неидентичности информационных каналов ВТГ в режиме свободной волны

С.Е. Переляев Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН Москва, Россия, +7(903)771-20-48; e-mail: sergei-perelyaev@mail.ru

Аннотация-Рассмотрено принципиальное значение малоизвестной погрешности, как неидентичность информационных каналов ВТГ, который функционирует в режиме свободной волны. При этом амплитуда упругих колебаний (вибраций) кромки резонатора электродами управления поддерживается постоянной. Амплитуды двух измерительных каналов пропорциональны синусу и косинусу угла ориентации стоячей волны относительно корпуса прибора. В реальном приборе преобразование сигнала в каждом измерительном канале происходит с известными погрешностями – различие емкостей самих информационных датчиков, разброс в номиналах электро- и радиоэлементов (ЭРИ) в блоках усиления первичных сигналов, различные сопротивления съемных токопроводов и т.д. Разделить влияния данных факторов не представляется возможным, поэтому рассматриваются комплексные погрешности.

Ключевые слова—волновой твердотельный гироскоп, информационно-измерительные каналы ВТГ, несимметричность и/или неидентичность каналов, комплексные погрешности.

# I. Введение

В данной работе рассматривается важная проблема неидентичности и/или несимметрии измерительных каналов волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) применительно к инерциальным датчикам навигационного класса точности. Отмечаем, что прибор работает в режиме свободной волны (интегрирующий гироскоп). При изменении зазора между поверхностями резонатора и измерительного датчика на поверхности датчика появляется избыток заряда, так как разность потенциалов между ней и резонатором неизменна. Количество заряда пропорционально изменению зазора, т.е. перемещению. Таким образом, сигнал емкостного дачника содержит информацию о перемещении кромки полусферического кварцевого резонатора (ПСР). Информационные датчики применительно к основной (второй) рабочей моде колебаний ориентированы под углом 0° и 45°, соответственно. Сигналы, поступающие с них, имеют известный вид [1].

# II. Постановка задачи

Пусть возбуждена и поддерживается заданная амплитуда вибраций кромки высокодобротного кварцевого резонатора ВТГ. Тогда амплитуды двух измерительных каналов можно представить в известном виде [1]. Электрическая модель ВТГ представляет собой конденсатор с одной общей обкладкой (сам резонатор) и электродами, располагающимися через каждые 45 градусов на кварцевой плате управления гироскопа. Стоячие волны упругих колебаний в идеальных высокодобротных полусферических резонаторах являются неустойчивыми по отношению к исчезающе малым возмущениям. Сколь угодно малые отклонения от симметричной форА.В. Алехин *АО «Инерциальные технологии технокомплекса»* г. Раменское, Россия, +7(903)129-09-18; e-mail: aalehin@itts.ru

мы резонатора, либо от симметрии упругих свойств, приводят к тому, что прецессия механической стоячей волны упругих колебаний во вращающейся осесимметричной оболочке становится невозможной. Поэтому для создания работоспособного прибора в условиях реальных внешних возмущений в систему необходимо дополнительно вводить эффективные обратные связи, препятствующие разрушению прецессирующих упругих стоячих волн.

Управление стоячей волной в кварцевом полусферическом резонаторе, представляющем собой чувствительный элемент волнового твердотельного гироскопа, осуществляется посредством подачи напряжения на систему электродов, образующих совместно с резонатором систему электрических конденсаторов. Управление этими напряжениями осуществляется с помощью сигналов, снимаемых с другой системы электродов - информационных (измерительных) электродов.

Влияние электродов управления и информационных электродов на динамику кварцевого полусферического резонатора достаточно подробно изучено в работах академика В.Ф. Журавлева. Динамическая модель основной рабочей (второй) формы колебаний как электромеханической системы, представляющей собой полусферический резонатор с электродами управления и электродами съема информации в деталях рассмотрена в известной совместной публикации Д.Линча и В.Ф. Журавлева [2].

Информационные электроды позволяют измерять обобщенные координаты w1 и w2 основной (второй) формы упругих колебаний, равные радиальному смещению резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга на угол 45° в угловом измерении по экватору резонатора. Динамические уравнения полусферического кварцевого резонатора относятся как к случаю электродов съема информации, так и к случаю электродов управления.

В известных конструкциях ВТГ электродов съема информации обычно восемь (n=8), а радиальные перемещения кварцевого резонатора w1 и w2 представляют собой реальные перемещения в месте расположения электродов с номерами *i*= 1,2.

В случае электродов управления равных n=16 либо n=8, сопротивление R мало и его можно считать равным нулю. Распределение напряжения по электродам коррекции и управления зависит от конкретных технических целей задачи управления.

В докладе рассмотрено принципиальное значение такой малоизвестной погрешности, как неидентичность информационных каналов точного ВТГ, который функционирует в режиме свободной волны. При этом амплитуда упругих колебаний (вибраций) кромки резонатора электродами управления поддерживается постоянной. Тогда амплитуды двух измерительных каналов пропорциональны синусу и косинусу угла ориентации стоячей волны относительно корпуса прибора. В реальном приборе преобразование сигнала в каждом измерительном канале происходит с известными погрешностями, например – различие емкостей самих информационных датчиков, разброс в номиналах электро-радио-элементов (ЭРИ) в блоках усиления первичных сигналов, различные сопротивления съемных токопроводов и т.д.

Разделить реальные влияния данных факторов не представляется возможным, поэтому будем рассматривать комплексные погрешности.

Отклонение амплитуды, вызванное неидентичностью информационных каналов гироскопа, определяется в контуре стабилизации амплитуды как изменение энергии вибраций на различных румбах волны, и вырабатывает ошибочное управление, которое приводит, в свою очередь, к ошибкам в определении систематической составляющей скорости дрейфа волнового гироскопа. Поэтому задача идентификации и компенсации влияния неидентичности или несимметрии информационных каналов ВТГ весьма актуальна для разработчиков прибора навигационного класса точности в режиме свободной волны.

#### III. Решение проблемы

Рассмотрим неидентичность и/или несимметричность информационных каналов интегрирующего ВТГ на определение амплитуды колебаний полусферического кварцевого резонатора. Покажем, что неидентичность и/или несимметрия информационных каналов прибора имеет принципиальное значение. Считаем, что прибор работает в режиме свободной волны.

Допустим, что отдельный информационный канал w1 исследуемого ВТГ имеет масштаб, равный (1+k) и угол отклонения, равный ү (при этом мы допускаем, что идеальный канал имеет масштабный коэффициент, равный единице, и угол отклонения, равный нулю). В наших обозначениях величины k и ү являются малыми. При этом информационный канал у не зависит от введенных выше параметров, но зависит от угла волны. Тогда выходной сигнал w1 уже не будет точно пропорционален косинусу угла волны, а будет являться линейной комбинацией синуса и косинуса с весами, зависящими от параметров k и у. Но в таком случае полная амплитуда (вычисляемая, как корень квадратный из суммы квадратов амплитуд измерительных каналов w1 и w2) уже не будет постоянной, а будет линейной комбинацией четвертой гармоники синуса и косинуса угла волны. Указанное свойство усложняет идентификацию неидентичности каналов, так как разнодобротность (анизотропия диссипации энергии) так же вызывает погрешность дрейфа по четвертой гармонике угла волны. Если разработчик калибрует прибор, переводя волну на различные румбы, то он может вообще не увидеть неидентичность каналов по данной причине. Погрешность неидентичности каналов возможно наблюдать лишь при непрерывном вращении тестируемого прибора на прецизионном динамическом стенде и точной регистрации амплитуды вибраций прибора. При этом, чем больше величины самих параметров k и у, тем большие отклонения амплитуды будут зарегистрированы.

Пусть амплитуда вибраций равна A и держится постоянной. Тогда амплитуды  $A_X$  и  $A_Y$  измерительных каналов можно представить в виде [1]:

$$A_X = A\cos 2\vartheta,$$
  

$$A_Y = A\sin 2\vartheta.$$
(1)

В формулах (1) переменная *Э* обозначает угол ориентации волны относительно кромки резонатора. В реальном приборе преобразование сигнала в каждом измерительном канале происходит с погрешностями, например – различие реальных емкостей конденсаторных датчиков, разброс в номиналах радиоэлементов в блоках усиления, различные сопротивления самих токопроводов и т.д.

Разделить влияния данных факторов не представляется возможным, поэтому будем рассматривать комплексные погрешности. Допустим, что канал X имеет масштаб, равный 1+k и угол отклонения, равный  $\gamma$  (мы считаем, что идеальный канал имеет масштаб, равный единице, и угол отклонения, равный нулю). В наших обозначениях величины k и  $\gamma$  являются малыми. Тогда выходные сигналы представимы в виде:

$$A_X^* = A(1+k)\cos 2\vartheta + A\gamma \sin 2\vartheta, \qquad (2)$$
$$A_Y^* = A\sin 2\vartheta.$$

Отклонение расчетной амплитуды от номинального значения (погрешность) можно найти по формуле:

$$\Delta A = \sqrt{(A_X^*)^2 + (A_Y^*)^2} - A \,. \tag{3}$$

Подставляя в выражение (3) значения из (2) и удерживая лишь малые первого порядка, получаем выражение для погрешности расчета амплитуды:

$$\Delta A = \frac{A}{2} (k + k\cos(4\vartheta) + \gamma\sin(4\vartheta)) \,. \tag{4}$$

Из (4) следует, что погрешность амплитуды имеет в своем составе четвертую гармонику угла волны. Это усложняет ее идентификацию, так как разнодобротность (анизотропия диссипации энергии) так же вызывает погрешность дрейфа по четвертой гармонике угла волны. Если разработчик калибрует прибор, переводя волну на различные румбы, то он может вообще не увидеть несимметрию каналов по данной причине. Погрешность (4) возможно увидеть лишь при непрерывном вращении прибора и регистрации амплитуды вибраций. Чем больше величина параметров k и  $\gamma$ , тем большие отклонения амплитуды будут зарегистрированы.

Отклонение амплитуды, вызванное несимметрией каналов, определяется в контуре стабилизации амплитуды как изменение энергии вибраций на различных румбах волны, и вырабатывает ошибочное управление, которое вызывает, в свою очередь, вызывает ошибки в расчете скорости дрейфа. Поэтому задача идентификации и компенсации влияния несимметрии каналов весьма актуальна для разработчиков прибора в режиме свободной волны.

# IV. Заключение

Испытуемый прибор подключали в режиме измерения неидентичности выходных каналов. На некоторых приборах зарегистрирована величина соответствующей погрешности порядка 10%.

Это вызывает систематический дрейф на уровне порядка 10 град/ч, что неприемлемо для точных приборов

навигационного класса точности. После компенсации неидентичности каналов, систематический дрейф не превышал 1 град/ч.

Следует отметить, что практические исследования промышленных ВТГ показали: на лучших образцах неидентичность каналов не превышает 1%, после регулировки не более 0.1%. Это требование к высокоточному ВТГ в режиме свободной волны.

# Корреляционная обработка сигналов и структурно-параметрическая идентификация динамической модели ошибок волнового твердотельного гироскопа

А.В. Чернодаров Научно-производственное объединение «НаукаСофт», Университет МАИ Москва, Россия e-mail: chernod@mail.ru А.П. Патрикеев Научно-производственное объединение «НаукаСофт», Москва, Россия e-mail: apatrikeev@naukasoft.ru С.Е. Переляев Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН Москва, Россия e-mail: Pers2030@yandex.ru

Аннотация—Рассматривается технология структурнопараметрическая идентификация динамических моделей ошибок чувствительных элементов (ЧЭ) инерциальных навигационных систем. Такая технология основана на вычислении корреляционной функции для оценок ошибок ЧЭ и ее использовании для определения коэффициентов сноса и диффузии. Результаты идентификации представлены для модели ошибок волнового твердотельного гироскопа (ВТГ). Показано влияние неточности задания параметров в модели дрейфа ВТГ на точностные характеристики инерциальной курсовертикали.

Ключевые слова—инерциальная навигационная система, динамическая модель ошибок датчиков, волновой твердотельный гироскоп, корреляционная функция ошибок, структурно-параметрическая идентификация модели ошибок.

# I. Введение

Современное состояние бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) характеризуется применением чувствительных элементов (ЧЭ) различного принципа действия. Выбор ЧЭ во многом зависит от условий эксплуатации БИНС. В трудных условиях эксплуатации БИНС в качестве ЧЭ используют волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) [1,2]. С другой стороны, такие условия должны учитываться при комплексном совершенствовании как конструктивного, так и математического обеспечения БИНС на базе ВТГ. Такое совершенствование определяется, в том числе, качеством калибровки ВТГ, учитывающей их конструктивные дефекты.

Традиционно калибровка ВТГ связана с оценкой их систематических ошибок. Такие ошибки отражают статическую модель, параметры которой не изменяются во времени в процессе эксплуатации. Известный метод Аллана [3] позволяет оценить стабильность дисперсий стохастических ошибок ВТГ. Однако указанный метод не дает рекомендаций по использованию оценок статистических параметров в уравнениях, характеризующих динамику изменения ошибок ВТГ во времени. Такие уравнения используются для прогнозирования оценок ошибок ВТГ как в автономных, так и в интегрированных режимах функционирования БИНС.

Новизна работы связана с добавлением к известным алгоритмам заводской калибровки также процедур настройки моделей динамических ошибок и шумов ВТГ. Настройку моделей предлагается выполнять на основе структурно-параметрической идентификации по результатам корреляционной обработки оценок ошибок ВТГ. Для этого ошибки ВТГ включаются в вектор оцениваемых при калибровке параметров, которые регистрируется в течение заданного промежутка времени. Порядок модели ошибок ВТГ определяется экспериментально по виду корреляционной функции, вычисляемой в процессе калибровки.

Цель работы – повышение точностных характеристик БИНС на основе корреляционной обработки сигналов и структурно-параметрической идентификации динамической модели ошибок ВТГ.

Достижение цели опирается на применение процедур оценивания и регистрации ошибок БИНС по внешним наблюдениям, их обработки в реальном времени с помощью обобщенного фильтра Калмана (ОФК) [4] и постобработки корреляционным методом.

# II. СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ моделей ошибок инерциальных чувствительных элементов

Точность инерциального счисления параметров ориентации и навигации существенно зависит от адекватности моделей ошибок ЧЭ реальным измерительным процессам. Модель шумов ЧЭ формируется так [5], чтобы ее структура отображалась на обобщенное уравнение ошибок БИНС

$$dx/dt = \dot{x}(t) = A(t)x(t) + G(t)\xi(t), \quad (1)$$

где x(t) – вектор ошибок; A(t) – матрица коэффициентов, характеризующих динамику изменения ошибок БИНС;  $\xi(t)$  – вектор возмущений, действующих на БИНС; G(t) – матрица интенсивностей возмущений.

С учетом уравнения (1) модель ошибок ЧЭ  $\Delta \mu(t)$  можно представить в виде двух составляющих: систематической  $\Delta \mu_s(t)$  и чисто случайной  $\xi(t)$ , имеющей, например, гауссовское распределение, а именно:

$$\Delta \mu(t) = \Delta \mu_{s}(t) + \xi(t), \qquad (2)$$

где  $\Delta \mu_{\epsilon}(t)$  – систематический дрейф ЧЭ;  $\xi(t) \in N(0, \sigma_{\xi}^2)$ .

Ошибку (2) можно приближенно описать с помощью экспоненциальной корреляционной функции

$$K_{\mu}(t) = M[\Delta\mu(t)\Delta\mu(t-T_{\mu})] = \sigma_{\mu}^{2}e^{-|t|/T_{\mu}},$$
 (3)

где  $T_{\mu}$  – время корреляции; M [...] – оператор математического ожидания.

Спектральная плотность случайного процесса (3) имеет вид

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\mu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\mu}^{2} e^{-\alpha} e^{|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau =$$
$$= 2 \sigma_{\mu}^{2} \alpha_{\mu} / (\alpha_{\mu}^{2} + \omega^{2}), \qquad (4)$$

где 
$$\alpha_{\mu} = \frac{1}{T_{\mu}}; \ j = \sqrt{-1}; \ \omega$$
 – частота.

Спектральные плотности входного  $S_{\xi}(\omega)$  и выходного  $S_{\Delta\mu}(\omega)$  сигналов в модели ошибок ЧЭ связаны через модуль частотной передаточной функции следующим соотношением [6]

$$S_{\Delta\mu}(\omega) = \left| W(j\omega) \right|^2 S_{\xi}(\omega).$$
 (5)

Для  $\sigma_{\xi}^2 = 1$  справедливо следующее соотношение

$$\left|W\left(j\omega\right)\right|^{2} = 2\sigma_{\mu}^{2}\alpha_{\mu}/(\alpha_{\mu}^{2} + \omega^{2}).$$
 (6)

С учетом соотношения (6) передаточная функция в форме Лапласа будет иметь вид

$$W(p) = \sqrt{2\sigma_{\mu}^{2}\alpha_{\mu}} / (p + \alpha_{\mu}) = \Delta \mu(p) / \xi(p).$$
(7)

Отсюда можно записать уравнения, описывающие динамику изменения погрешностей ЧЭ во временной области

$$\Delta \dot{\mu}(t) = -\alpha_{\mu} \Delta \mu(t) + \xi(t) \sigma_{\mu} \sqrt{2\alpha_{\mu}}.$$
 (8)

Уравнение (8) легко отображается на общую модель ошибок БИНС (1)

$$\dot{x}_{\mu}(t) = A_{\mu}(t)x_{\mu}(t) + G_{\mu}(t)\xi(t), \qquad (9)$$

где  $A_{\mu}(t) = -\alpha_{\mu}; \ \alpha_{\mu} = \frac{1}{T_{\mu}}; \ G_{\mu}(t) = \sigma_{\mu}\sqrt{2\alpha_{\mu}}$ 

Из соотношения (3) следует  $K_{\mu}(0) = \sigma_{\mu}^2$ . Поэтому задача идентификации сводится к определению параметра  $\alpha_{\mu}$  в модели (8), который минимизирует квадратичную функцию

$$F(\alpha_{\mu}) = \sum_{j=0}^{N} [\hat{K}_{\mu}(j) - \sigma_{\mu}^{2} e^{-\alpha_{\mu}\tau_{j}}]^{2} \rightarrow \min_{\alpha_{\mu}}, \quad (10)$$

где  $\hat{K}_{\mu(j)}$  – статистическая корреляционная функция, вычисленная по зарегистрированным оценкам  $\hat{x}_{j}$  в процессе эксплуатации БИНС, а именно:

$$\hat{K}_{\mu(k)} = \frac{1}{N} \sum_{i=k+1}^{N+k} \widetilde{x}_{i} \widetilde{x}_{i-k} ; \qquad (11)$$

$$\widetilde{x}_{i} = \hat{x}_{i} - m_{x}; \ m_{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{x}_{i}; \ k = \overline{0, N}$$

N – число ретроспективных отсчетов сигнала ЧЭ;  $\tau_{j} = j\Delta t$ ;  $\Delta t = t_{i} - t_{i-1}$ ;  $t_{i}$  – дискретные моменты времени.

Дифференцируя функцию (10) по α<sub>μ</sub> и приравнивая производную нулю, получаем

$$\frac{\partial F(\alpha_{\mu})}{\partial \alpha_{\mu}} = 2 \left[ \sum_{j=0}^{N} \hat{K}_{\mu(j)} - \sum_{j=0}^{N} \sigma_{\mu}^{2} e^{-\alpha_{\mu} \tau_{j}} \right].$$
$$\cdot \sum_{i=0}^{N} \sigma_{\mu}^{2} \tau_{j} e^{-\alpha_{\mu} \tau_{j}} = 0 .$$
(12)

Учитывая, что для ЧЭ  $0 < \alpha_{\mu} < 1$  и второй сомножитель в уравнении (12) не влияет на решение, можно записать

$$\sum_{j=0}^{N} \hat{K}_{\mu(j)} = \sum_{j=0}^{N} \sigma_{\mu}^{2} e^{-\alpha_{\mu} \tau_{j}} .$$
(13)

Из уравнения (13) при *j* = 0 определяется оценка дисперсии ошибки

$$\sigma_{\mu}^{2} = \hat{K}_{\mu(0)} \,. \tag{14}$$

С учетом дисперсии (14) оценка нормированной корреляционной функции будет иметь вид

$$\hat{r}_j = \frac{\hat{K}_{\mu(j)}}{\sigma_{\mu}^2} \,. \tag{15}$$

При  $\hat{K}_{\mu(j)} > 0$  уравнению (13) можно поставить в соответствие эквивалентное выражение, записанное в терминах функции натурального логарифма, а именно:

$$\sum_{j=0}^{N} \ln \hat{r}_{j} = -\alpha_{\mu} \sum_{j=0}^{N} \tau_{j} .$$
 (16)

Отсюда оценка  $\hat{\alpha}_{\mu}$  параметра  $\alpha_{\mu}$  будет иметь вид

$$\hat{\alpha}_{\mu} = -\sum_{j=0}^{N} \ln \hat{r}_{j} / \sum_{j=0}^{N} \tau_{j}$$
 (17)

Изменение знака экспериментальной корреляционной функции (11) свидетельствует о несоответствии модели (3) реальным оценкам погрешностей ЧЭ. Это несоответствие может быть устранено на основе следующих процедур адаптивной идентификации параметров модели:

- идентификация по ограниченной выборке оценок, при которой  $\hat{K}_{\mu(j)} > 0$ ;
- коррекция структуры модели корреляционной функции с учетом наличия оценок, для которых  $\hat{K}_{\mu(i)} > 0$ .

Коррекция структуры модели (3) может быть выполнена на основе комбинации трансцендентных функций, в частности, с использованием экспоненциальнокосинусной функции

$$K_{\mu}(t) = \sigma_{\mu}^2 e^{-\alpha_{\mu} |t|} \cos \beta_{\mu} t$$
 (18)

Можно показать [6], что корреляционной функции (18) соответствует следующая спектральная плотность

$$S(\omega) = \frac{\sigma_{\mu}^{2} \alpha_{\mu} (b^{2} + \omega^{2})}{b^{4} + 2(\alpha_{\mu}^{2} - \beta_{\mu}^{2})\omega^{2} + \omega^{4}},$$
 (19)

где  $\alpha_{\mu} = 1/T_{\mu}$ ;  $b^2 = \alpha_{\mu}^2 + \beta_{\mu}^2$ ;  $T_{\mu}$  – время корреляции.

С учетом выражения (5) спектральной плотности (19) можно поставить в соответствие формирующий фильтр с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{\sqrt{2\sigma_{\mu}^{2}\alpha_{\mu}(p+b)}}{p^{2} + 2\alpha_{\mu}p + b^{2}} = \frac{\Delta\mu(p)}{\xi(p)}.$$
 (20)

Передаточной функции соответствует следующая система уравнений во временной области

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mu}(t) \\ \Delta \dot{\tilde{\mu}} \end{bmatrix}}_{\dot{x}_{\mu}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2\alpha_{\mu} & -b^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{\mu}(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mu(t) \\ \Delta \tilde{\mu}(t) \end{bmatrix}}_{x_{\mu}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} (b - 2\alpha_{\mu})\sigma_{\mu}\sqrt{2\alpha_{\mu}} \\ \sigma_{\mu}\sqrt{2\alpha_{\mu}} \end{bmatrix}}_{G_{\mu}(t)} \xi(t)$$

Параметр  $\Delta \tilde{\mu}(t)$  является вспомогательной переменной, а  $\Delta \mu(t)$  – суммарной погрешностью ЧЭ. Идентифицируемые параметры  $\alpha_{\mu}$  и  $\beta_{\mu}$  определяются путем минимизации квадратичной функции

$$F(\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{N} [\hat{K}_{(j)} - \sigma^2 e^{-\alpha |\tau_j|} \cos \beta \tau_j]^2 \to \min_{\alpha,\beta} \quad (21)$$
при  $\hat{K}_{(j)} := \hat{K}_{\mu(j)}; \ \alpha \coloneqq \alpha_{\mu} \quad ; \quad \beta \coloneqq \beta_{\mu} \, .$ 

В задаче (21) параметры  $\beta_{\mu}$  и  $\sigma_{\mu}^{2}$  определяются по экспериментальной корреляционной функции  $\hat{K}_{\mu(j)}$  точно, а именно

$$\hat{\sigma}_{\mu}^{2} = \hat{K}_{\mu}(0); \ \hat{\beta}_{\mu} = 0.5\pi/\tau_{\beta},$$
 (22)

где  $\tau_{\beta}$  – временной интервал, для которого  $K(\tau_{\beta}) = 0$ .

С учетом оценок (22) возможны следующие подходы к решению задачи (21):

- в общем случае через разложение трансцендентных функций в степенные ряды;
- через функцию натурального логарифма для выборки оценок, а именно:

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha = \hat{\alpha}_{\mu}} = 2\sum_{j=0}^{N} \left(\ln \hat{r}_{\mu(j)} + \alpha \tau_{j} - \ln \cos \hat{\beta}_{\mu} \tau_{j}\right) \tau_{j} = 0$$

Отсюда оценка параметра  $\hat{\alpha}_{\mu}$  будет иметь вид

$$\hat{\alpha}_{\mu} = \sum_{j=1}^{N} (\ln \cos \hat{\beta}_{\mu} \tau_{j} - \ln \hat{r}_{\mu(j)}) / \sum_{j=1}^{N} \tau_{j}, \quad (23)$$

где  $\tau_j = j\Delta t_j; \Delta t_i = t_i - t_{i-1}; \hat{r}_{\mu(j)} = \hat{K}_{\mu(j)} / \sigma_{\mu}^2.$ 

После идентификации параметры  $\hat{\alpha}_{\mu}$ ,  $\hat{\beta}_{\mu}$  и  $\hat{\sigma}_{\mu}^2$  включаются в динамические уравнения для ошибок ЧЭ.

# III. Анализ Результатов Исследований

В качестве объекта исследований рассматривался волновой твердотельный гироскоп [8], расположенный вертикально на стенде. Некоторые результаты обработки сигнала ВТГ представлены на рисунках 1 и 2: на рис. 1 – ошибка ВТГ при определении вертикальной составляющей угловой скорости вращения Земли, на рис. 2 – нормированная корреляционная функция для ошибки ВТГ.





Влияние неточности задания параметров модели ошибок ВТГ рассматривалось для одного канала инерциальной курсовертикали (ИКВ) [5].



Рис. 2. Корреляционная функция для ошибки ВТГ

При наблюдении вектора ошибок ИКВ  $x(t) = \begin{bmatrix} \Delta V \ \delta \ \Delta a \ \Delta \omega \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$  по сигналам скорости  $z_V(t) = V_{\mathrm{HKB}}(t) - V_{\mathrm{ДBH}}(t)$  параметры динамической модели имеют вид

где R – величина радиуса-вектора местоположения ИКВ; g – ускорение силы тяжести;  $\delta$  – угловая ошибка определения вертикали;  $\Delta V$  – ошибка счисления скорости;  $\Delta a$  – смещение сигнала акселерометра;  $\Delta \omega$  – дрейф гироскопа;  $\tau_a$ ,  $\tau_{\omega}$  – соответственно время корреляции ошибки акселерометра и дрейфа гироскопа;  $\sigma_a$ ,  $\sigma_{\omega}$  – среднеквадратические значения ошибок соответственно акселерометра и гироскопа; ДВИ – датчик внешней информации;  $\Delta(...)$  – символ ошибки. Частота формирования наблюдений и их обработки с помощью ОФК 1Гц.

На рис. 3 и 4 представлены характерные результаты оценивания ошибок ИКВ, где показаны действительная  $\Delta \delta = \delta - \hat{\delta}$  и среднеквадратическая  $\sigma_{\delta} = \sqrt{P_{22}}$  ошибки определения вертикали ИКВ  $\delta$ ;  $P_{22} = P_{\Delta \delta}$  – диагональный элемент ковариационной матрицы ошибок оценивания. Оценки, полученные ОФК без предварительной идентификации параметров  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\sigma}^2$ , показаны на рис. 3, а с идентификацией указанных параметров – на рис. 4.



Рис. 3. Ошибки определения вертикали без идентификации параметров дрейфа ВТГ

График на рис. 3 отражает динамику изменения оценок, когда коэффициенты сноса  $1/\tau$  и диффузии  $\sigma\sqrt{2/\tau}$  в модели ошибок ВТГ (8) отличаются от полученных при идентификации на порядок.



Рис. 4. Ошибки определения вертикали с учетом идентификации параметров дрейфа ВТГ

Можно видеть, что несоответствие модельных коэффициентов сноса и диффузии их реальным значениям существенно влияет на достоверность оценок ошибок. Особенно это проявляется в автономном режиме функционирования БИНС, в том числе, между сеансами внешних наблюдений.

# IV. Заключение

При построении моделей ошибок инерциальных чувствительных элементов необходимо учитывать, как их детерминированные, так и случайные составляющие. Детерминированные составляющие определяются, как правило, при заводской стендовой калибровке ЧЭ [7]. Случайные составляющие описываются с использованием коэффициентов сноса и диффузии, которые входят в динамические модели ошибок ЧЭ. Идентификацию таких коэффициентов целесообразно выполнять по зарегистрированным данным в процессе динамических испытаний [9] с использованием внешних по отношению к БИНС систем.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Журавлев, В.Ф. Волновой твердотельный гироскоп / В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов. М.: Наука, 1985. 123с.
- [2] Лукьянов, Д.П. Прикладная теория гироскопов / Д.П. Лукьянов, В.Я. Распопов, Ю.В. Филатов. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2015. 316с.
- [3] Siraja, T.N. Comparison of Uncertainty Estimates: Allan Variance and Sample Variance. Measurement Science Review, 1(1), 25–28.
- [4] Maybeck, P. Stochastic Models, Estimation and Control. New York: Academic Press, vol. 2, 1982.
- [5] Titterton, D.H., and Weston, J.L. Strapdown Inertial Navigation Technology, Reston, AIAA, 2004.
- [6] Pugachev, V. Stochastic Differential Systems. Analysis and Filtering. New York: John Wiley, 1987.
- [7] Rogers, R. Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems. Second Edition. AIAA, Reston, 2003.
- [8] Переляев, С.Е. Волновой твердотельный гироскоп авиационнокосмического применения навигационного класса точности / С.Е. Переляев, С.Б. Бодунов, Б.П. Бодунов // XXIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2022. С. 185-188
- [9] Chernodarov, A., and Patrikeev, A. In-Motion Calibration and Testing of MEMS Sensors Using a Reference Inertial Satellite Navigation System, IEEE International Seminar on Electron Devices Design and Production, SED-2021, Proc. 9444510, Prague, Apr. 20-21, 2021.

# Реализация режима свободной волны в кориолисовых вибрационных гироскопах с низкодобротными объемными резонаторами

В.В. Матвеев Лаборатория инерциальных датчиков первичной информации, систем ориентации и навигации ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Россия matweew.valery@yandex.ru

В.В. Лихошерст Лаборатория инерциальных датчиков первичной информации, систем ориентации и навигации ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Россия scientific-lab-tulsu@yandex.ru А.В. Каликанов Лаборатория инерциальных датчиков первичной информации, систем ориентации и навигации ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Россия scientific-lab-tulsu@yandex.ru

М.Д. Кирсанов Лаборатория инерциальных датчиков первичной информации, систем ориентации и навигации ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Россия scientific-lab-tulsu@yandex.ru М.Г. Погорелов Лаборатория инерциальных датчиков первичной информации, систем ориентации и навигации ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Россия scientific-lab-tulsu@yandex.ru

Д.С. Стрельцов Лаборатория инерциальных датчиков первичной информации, систем ориентации и навигации ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Россия scientific-lab-tulsu@yandex.ru

Аннотация—Рассматриваются вопросы реализации режима свободной волны в низкодобротных резонаторах кориолисовых вибрационных гироскопов для создания датчика угловых перемещений. Обсуждаются способы компенсации диссипации энергии свободных колебаний резонатора. Приводятся результаты экспериментальных исследований, показывающих возможность повышения добротности до десяти и более раз.

Ключевые слова—кориолисовый вибрационный гироскоп, резонатор, добротность.

#### I. Введение

В настоящее время объемные резонаторы кориолисовых вибрационных гироскопов (КВГ) выполняются из плавленого кварца или элинварного металлического сплава. В первом случае резонаторы имеют высокую добротность (от единиц миллионов и выше), позволяют создавать инерциальные датчики навигационного класса, но имеют при этом дорогостоящую технологию изготовления. Металлические резонаторы имеют более дешевую технологию изготовления, но при этом их добротность, как правило, не превышает значение 35000 [1].

Одной из актуальных проблем реализации кориолисовых вибрационных гироскопов с низкодобротными объемными резонаторами является реализация режима свободной стоячей волны, при котором КВГ функционирует в качестве измерителя угловых перемещений (интегрирующего гироскопа). Существующие образцы КВГ с металлическим объемным резонатором позволяют создавать гироскопические датчики угла с длительностью функционирования не более 3–5 секунд, что является недостаточным для применения на подвижных объектах [2]. Целью настоящего доклада является демонстрация способа повышения добротности кориолисовых вибрационных гироскопов с объемным резонатором.

# II. ТИПОВАЯ КОНСТРУКЦИЯ КВГ

Типовая конструкция КВГ, как правило, содержит цилиндрический резонатор (*Resonator*) (рис. 1), на дно которого приклеиваются четыре пары пьезоэлементов (*Piezo* elements) для возбуждения стоячей волны и съема информации [1]. Резонатор устанавливается на основание (Base).



Рис. 1. Типовая схема кориолисового вибрационного гироскопа

Точки стоячей волны с максимальной амплитудой радиальных колебаний являются пучностями, а с минимальной – соответственно узлами (рис. 2,а). Стоячая волна для второй формы колебаний, являющейся основной для КВГ с объемным резонатором, имеет соответственно четыре узла и четыре пучности. Если основание не вращается ( $\Omega = 0$ ), то волновая картина неизменна (рис. 2,а) и одна из пар пучностей располагается вдоль оси  $x_1$ , а узлов – вдоль оси  $x_2$ , расположенной под углом 45°. Сигналы, снимаемые с пьезоэлементов оси  $x_2$  близки к нулю.

Если основание вращается с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 2,b), то волновая картина прецессирует (запаздывает) по отношению к основанию и инерциальному пространству, что служит информацией об угле поворота.



Рис. 2. Положение стоячей волны при неподвижном основании (а) и повороте основания (b)

#### III. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СВОБОДНОЙ ВОЛНЫ КВГ

Рассмотрим способы реализации свободной волны в КВГ с объемным резонатором. В этом случае уравнения движения свободной волны, характеризующие колебания резонатора вдоль направлений x1 и x2 можно представить в виде [3]:

$$\ddot{x}_{1} + \frac{2}{T}\dot{x}_{1} - 2K\Omega\dot{x}_{2} + \omega_{0}^{2}x_{1} = 0,$$

$$\ddot{x}_{2} + \frac{2}{T}\dot{x}_{2} + 2K\Omega\dot{x}_{1} + \omega_{0}^{2}x_{2} = 0.$$

$$(1)$$

где x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub> – перемещения кромки резонатора вдоль соответствующих осей контроля колебаний;  $\omega_0$  – круговая частота собственных колебаний; Ω – угловая скорость вращения основания, К – коэффициент прецессии волны, T – постоянная времени резонатора ( $T = 2Q/\omega_0$ , Q – добротность колебаний).

Уравнения движения (1) идентичны уравнениям свободных колебаний маятника Фуко [4]. Их отличительной особенностью является наличие коэффициента прецессии К в составляющих кориолисового ускорения и тем, что контроль колебаний осуществляется не вдоль ортогональных направлений, а относительно осей x1, x2 расположенных под углом 45° друг к другу. Введением комплексной переменной  $z = x_1 + jx_2$  система (1) может быть преобразована к одному дифференциальному уравнению

$$\ddot{z} + 2(T^{-1} + jK\Omega)\dot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$
 (2)

Положим угловую скорость основания постоянной и, решая полученное уравнение (2) при начальных условиях:

$$z(0) = z_0 = x_1^0, \ \dot{z}(0) = 0,$$

где  $x_1^0$  – начальные отклонения резонатора по координате x<sub>1</sub>, приближенно получим

$$x_{1}(t) \approx x_{1}^{0} \mathbf{e}^{-t/T} \cos K\Omega t \cos \omega_{0} t , \qquad (3)$$
  
$$x_{2}(t) \approx -x_{0}^{0} \mathbf{e}^{-t/T} \sin K\Omega t \cos \omega_{0} t \qquad (4)$$

$$x_2(t) \approx -x_1^0 \mathbf{e}^{-t/t} \sin K\Omega t \cos \omega_0 t \,. \tag{4}$$

Находя отношение  $x_{1}(t) / x_{1}(t)$ , нетрудно увидеть, что

$$\Omega t = -\frac{1}{K} \operatorname{arctg} \frac{x_2(t)}{x_1(t)}, \qquad (5)$$

из чего следует возможность определения угла поворота основания  $\Omega t$ , а, следовательно, и принципиальная реализация КВГ в режиме интегрирующего гироскопа. При K = 1 соотношение (5) соответствует повороту плоскости колебаний маятника Фуко. Так как ось x2 колебаний резонатора располагается под углом  $45^{\circ}$  к оси  $x_1$  (а не под углом 90°, как у маятника Фуко), то для правильной интерпретации измерений, соотношение (5) необходимо снабжать множителем 1/2.

Наличие затухающего множителя е<sup>-t/T</sup> в решениях (3), (4) позволяет сделать вывод, о том, что продолжительность функционирования КВГ в режиме измерителя угловых перемещений определяется постоянной времени Т. Для типовой конструкции КВГ с металлическим резонатором, имеющим добротность Q = 30000 и собственной частотой 6000 Гц, постоянная времени составляет величину 1,6 с. Время переходного процесса в этом случае не более 5 с ( $\approx 3T$ ).

Для обеспечения заданной продолжительности функционирования КВГ необходимо осуществлять компенсацию диссипации энергии, связанной с наличием членов  $2\dot{x}_1 / T$ ,  $2\dot{x}_2 / T$  в уравнениях (1). Возможны два способа компенсации.

В первом случае пьезоэлементы КВГ должны формировать воздействие на резонатор, пропорциональные скоростям движения  $k_d \dot{x}_1$  и  $k_d \dot{x}_2$ , но с противоположным знаком. Полная компенсация диссипации энергии будет осуществляться при выполнении равенства

$$k_d = 2T^{-1}$$
. (6)

где  $k_d$  – коэффициент пропорциональности скорости перемещения резонатора.

Недостатком данного способа является необходимость формирования производных от перемещения резонатора  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ , что может привести к возрастанию шума в цепях компенсации.

Другой способ компенсации диссипации энергии колебаний связан с формированием воздействия на резонатор КВГ, пропорционально интегралам от перемещений x<sub>1</sub> и x<sub>2</sub> [5]. В этом случае математическая модель КВГ может быть представлена в виде

$$\ddot{x}_{1} + \frac{2}{T}\dot{x}_{1} + \omega_{0}^{2}x_{1} - 2K\Omega\dot{x}_{2} + k_{i}\int_{0}^{t}x_{1}dt = 0,$$

$$\ddot{x}_{2} + \frac{2}{T}\dot{x}_{2} + \omega_{0}^{2}x_{2} + 2K\Omega\dot{x}_{1} + k_{i}\int_{0}^{t}x_{2}dt = 0,$$

$$(7)$$

где k<sub>i</sub> – коэффициент пропорциональности интегральных членов.

Полная компенсация диссипации энергии будет достигаться при выполнении равенства:

$$k_i = 2\omega_0^2 / T . \tag{8}$$

В случае превышения коэффициентом k<sub>i</sub> граничного значения (8), колебательный процесс будет расходящимся.

#### IV. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Исследования проводились на натурном макете КВГ с металлическим резонатором, собственная частота которого составила значение около 5750 Гц. Интегрирующее устройство реализовывалось в соответствии с передаточной функцией вида

$$W(s) = \frac{k_i s}{(T_i s + 1)(T_2 s + 1)},$$
(9)

где  $k_i$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  – коэффициент передачи и постоянные времени интегрирующего устройства, s – аргумент в преобразовании Лапласа.

Постоянные времени передаточной функции (9) подбирались такими, чтобы спад амплитудной частотной характеристики на собственной частоте резонатора составил минус 20 дБ/дек, соответствующий наклону характеристики интегрирующего звена. Для данной собственной частоты колебаний резонатора постоянные времени выбирались следующие:  $T_1 = 0,1$  мс,  $T_2 = 1,6$  мс.

На рис. 3 приведены экспериментальные графики затухающих колебаний по координате  $x_1$  при неподвижном основании без компенсации и с компенсацией диссипации энергии колебаний.



Рис. 3. Графики затухающих колебаний резонатора: без компенсации (1) и с компенсацией диссипации энергии (2)

Постоянная времени металлического резонатора без компенсации энергии составила  $T \approx 1$  с, что при данной частоте резонатора соответствует добротности около 18000. Как видно из рис. З постоянная времени резонатора с контурами компенсации диссипации энергии составила  $T \approx 17$  с, что соответствует эквивалентной добротности 307091. Таким образом, было достигнуто эффективное повышение добротности в 17 раз. Во столько же раз возрастает время функционирования, которое составляет величину порядка  $3T \approx 54$  с.

На рис. 4 приведены фигуры Лиссажу, полученные после возбуждения свободной волны, ожидания в течение 3-х секунд при неподвижном основании и повороте на угол 45°. Напряжение  $U_1$  соответствует сигналу, снимаемому с пьезоэлементов, установленных вдоль оси  $x_1$ ,  $U_2$  – с пьезоэлементов оси  $x_2$  соответственно.



Рис. 4. Фигуры Лиссажу для КВГ в режиме свободной волны: 1 – в момент запуска, 2 – после ожидания в течение 3 с, 3 – после поворота основания на угол 45 °

Если принять, что коэффициент прецессии волны K = 0,4, то измеренный угол поворота основания составит  $37^{\circ}/(2 \cdot 0,4) \approx 46,25^{\circ}$ . Данный результат следует считать предварительным, так как получен при реализации контура управления резонатора на макете КВГ. Тем не менее, проведенный эксперимент подтверждает возможность создания свободной волны в низкодобротном резонаторе путем компенсации диссипации энергии колебательного процесса и функционирования КВГ в режиме интегрирующего гироскопа.

## Заключение

Показан новый схемотехнический способ повышения добротности металлического резонатора кориолисового вибрационного гироскопа. Способ основан на компенсации диссипации энергии свободных колебаний путем формировании сигналов обратных связей по интегралам от перемещения кромки резонатора. Получено экспериментальное подтверждение предлагаемого способа.

# Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания по теме FEWG-2022-0002.

#### Литература

- Волновой твердотельный гироскоп с металлическим резонатором / Монография. Под ред. В.Я. Распопова. Тула: Издательство ТулГУ, 2018. 189 с.
- [2] Raspopov, V. & Likhosherst, V. & Volchikhin, I.A. & Matveev, V.V. & Ladonkin, A.V. & Shepilov, S.I. (2019). Coriolis Vibratory Gyroscope with a Metal Resonator for Free Wave Mode. 1-2. (База данных Scopus DOI:<u>10.23919/ICINS.2019.8769368</u>)
- [3] Lynch D. D. Vibratory gyro analysis by the method of averaging/ In: Proceedings of the 2nd St. Petersburg conference on gyroscopic technology and navigation. St. Petersburg. 1995. P. 26–34.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10-ти т. Т. І. Механика. 4-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988. 216 с.
- [5] Распопов В.Я., Матвеев В.В., Лихошерст В.В., Каликанов А.А., Стрельцов Д.С. Датчик угла крена на базе волнового твердотельного гироскопа. Патент RU2787809C1. 17.06.2022.

# Теория и практика разработки волнового твердотельного гироскопа с металлическим резонатором

В.Я. Распопов

Кафедра приборов управления, ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Российская Федерация пр-т Ленина, 92, tgupu@yandex.ru

Аннотация—Для практической разработки ВТГ с металлическим резонатором необходим его модальный анализ. Вначале модальный анализ выполняется методом конечно – элементного (КЭ) моделирования. Далее модальный анализ выполняется с помощью вибростенда, результатом которого является уточнение параметров КЭ – модели. Определены частоты изгибных колебаний донышка резонатора в пучностях и узлах. Сравнение экспериментальных результатов и КЭ – моделирования уточнили коэффициенты демпфирования резонатора и среды.

Приведены результаты модального анализа конусного резонатора. По техническому заданию спроектирован резонатор с резонансным кольцом в форме усеченного конуса.

Ключевые слова—кориолисовые вибрационные гироскопы, волновой твердотельный гироскоп, конечно элементный анализ, вибрации, модальный анализ.

# Введение

В работах Линча (Lynch D.D.) [1] и Апостолюка (Apostoluk V.) [2] показано, что динамика ВТГ аналогично микромеханическому гироскопу может быть исследована на базе решений двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих возбуждаемую моду (режим возбуждения – РД) и измеряемую моду (режим чувствительности – РЧ). Коэффициент Брайана вычисляется по известной формуле.

В отечественной литературе конструкция ВТГ с металлическим резонатором принята аналогичной разработке конструкции фирмы Inna lab.Ltd, в которой резонатор выполнен в виде двух сопряженных цилиндров с разной толщиной стенки. Цилиндр с большей толщиной является резонатором, а с меньшей – подвесом. На донышко резонатора наклеены восемь пъезоэлементов [3].

#### I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Выполнить модальный анализ резонатора с вибрирующим кольцом в форме усечённого конуса методом КЭ-моделирования и инструментальными методами, на основании которого спроектировать резонатор не имеющий резонансных всплесков в заданном диапазоне частот.

# II. МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗОНАТОРА

Для практической разработки необходим модальный анализ резонатора, который на начальном этапе может быть выполнен методом конечно-элементного (КЭ) моделирования.

Для исследования работы ВТГ методом КЭ без пьезоэлементов и расчета геометрических параметров С.В. Егоров Кафедра приборов управления, ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Российская Федерация пр-т Ленина, 92, tgupu@yandex.ru

необходимо разработать модель, соответствующую реальному изделию (рис. 1) [3-4]. Размеры которого указаны в таблице 1.



Рис. 1. Эскиз исследуемого резонатора ВТГ

ТАБЛИЦА 1. ОСНОВНЫЕ РАЗМЕРЫ ИССЛЕДУЕМОГО РЕЗОНАТОРА

Обозначение	D1	D2	D3	D4	H1	H2	H3	R1
размера								
Ед. изм. мм	21,1	19,6	20,3	6	15	0,3	8	1,8

Некруглость диаметра D2 0,003 мм, несоосность диаметров D2 и D1 0,01мм. В качестве материала резонатора задана сталь со следующими механическими свойствами: модуль Юнга 1,86\*10<sup>11</sup>Па, плотность 7850 кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуансона 0,3. Материал считаем изотропным.

В результате модального анализа получились следующие собственные частоты:

- 1409,51 Гц изгибная форма колебания донышка относительно посадочного отверстия;
- 1409,58 Гц изгибная форма колебания донышка относительно посадочного отверстия, повернутая на 90° относительно первой;
- 3195,53 Гц мембранная мода;
- 4029,49 Гц изгибная мода кромки резонатора (рабочая мода);
- 4030,49 Гц изгибная мода кромки резонатора, повернутая на 45° относительно рабочей.

Для проведения модального анализа методом КЭ с пьезоэлементами была спроектирована трехмерная модель резонатора, с наклеенными на его донышко пьезоэлементами [5]. В качестве пьезоэлементов использовались пьезоэлементы PIC-181 PI Ceramic, Германия, изготовленные из сегнетожесткого материала.

Коэффициенты пьезоматериала были запрошены у официального представителя PI Ceramic в России. Сплав 21 НКМТ-ВИ считаем изотропным.

В результате модального анализа исследуемого резонатора выявлены следующие резонансные частоты:

- 1451 Гц изгибная форма колебания донышка относительно посадочного отверстия;
- 1452 Гц изгибная форма колебания донышка относительно посадочного отверстия, повернутая на 90° относительно первой;
- 3415 Гц мембранная мода;
- 4572 Гц изгибная мода кромки резонатора (рабочая мода);
- 4573 Гц изгибная мода кромки резонатора, повернутая на 45° относительно рабочей.

Из модального анализа видно, что изгибная форма колебания донышка относительно посадочного отверстия находится в рабочей полосе частот ВТГ, что отрицательно сказывается на выходном сигнале. Рабочая частота ВТГ соответствует 4 или 5 моде колебаний. После виртуальной балансировки разночастотность между 4 и 5 модами уменьшается до значений менее 0,05 Гц. Также из модального анализа видно, что разница частот между 3 и 4 модами меньше 1000 Гц, что окажет негативное воздействие на работу ВТГ.

Для модального анализа ВТГ с помощью вибростенда, ВТГ в кронштейне был закреплен на столе вибростенда измерительной осью вверх. На вибростенде была задана программа испытаний с характеристиками согласно таблице 2.

Октавные диапазоны частот, Гц	10- 20	20- 40	40-80	80- 160	160- 320	320- 640	640- 1280	1280- 2560
Амплитуда ускорения синусоидальной виб- рации, g	1	1,5- 1,75	1,75- 2,5	2,5- 4,5	4,5- 6,0	6,0- 9,0	9,0- 10,0	10,0
Продолжительность прохождения каждой октавы				6	0 сек			

ТАБЛИЦА 2. ПРОГРАММА ИСПЫТАНИЙ РЕЗОНАТОРА НА ВИБРОСТЕНДЕ

Т.к. ВТГ во время испытаний находился в выключенном состоянии, то пьезоэлементы генерировали сигнал с частотой вибрации вибростенда, кроме тех частот на которых проявлялись гармоники собственных мод резонатора.

Для уточнения модели ВТГ методом конечных элементов и моделирования работы исследуемого резонатора ВТГ в динамике, произведены замеры деформаций стенок резонатора лазерными доплеровскими виброметрами PVS-500 (сканирующий) и PVS-200 (точечный). В результате замеров виброметром PVS-200 амплитуда колебания кромки в пучностях составила ± 2,2 мкм, в узлах 0,5 мкм. По результатам сравнения амплитуд деформации стенок резонатора, замеренных виброметрами, и амплитуд, полученных в модели резонатора, были уточнены параметры модели: коэффициенты демпфирования всех элементов и среды.

Форма и размер резонансного кольца влияют на рассеивание энергии на поверхности резонатора, что оказывает влияние на собственные уходы резонатора и добротность. Минимально необходимая толщина верхней кромки составляет (0,7-0,8) мм. По результатам практического исследования резонаторов с диаметром 22 мм выявлено, что оптимальная толщина верхней кромки составляет 0,9-1 мм. Т.к. при меньшей толщине возрастает влияние анизотропии пьезоэлементов и погрешностей изготовления деталей на формирование стоячей волны на верхней кромке резонатора, что приводит к искажению эллиптичности стоячей волны и как следствие к увеличению дрейфа ВТГ. При большей толщине кромки увеличивается энергопотребление резонатора, что сужает диапазон измеряемых угловых скоростей.

В результате моделирования резонаторов, имеющих резонансное кольцо в виде усеченного конуса и цилиндра выявлено, что у конусного резонансного кольца на наружной поверхности рассеивание энергии в месте перехода поверхностей на 23% меньше по сравнению с цилиндрическим кольцом.

На основе исследованных выше моделей чувствительного элемента ВТГ методом КЭ была построена новая модель чувствительного элемента для подбора оптимальных размеров резонатора и пьезоэлементов.

Форма нового резонатора выбрана в виде усечённого конуса, что позволило уменьшить массу рабочего кольца и уменьшить механические напряжения на верхней кромке по сравнению с цилиндрическим кольцом. Уменьшение толщины подвеса до 0,3 мм, уменьшило массу резонатора, механические напряжения на поверхности резонатора и уменьшило энергопотребление. Увеличение толщины дна до 0,65 мм, сместило мембранную моду выше 5000 Гц. Элемент крепления резонатора заменен на двустороннюю консоль с цилиндрическим отверстием. Это упростило конструкцию по сравнению с конусной посадкой, позволило не увеличивать радиус R1 (см. табл. 1), т.к. увеличение радиуса R1 приводит к уменьшению рабочей части дна, и в сочетании с утолщенным дном сместило изгибную моду дна выше 2500 Гц. Все выше перечисленное увеличивает устойчивость ВТГ к вибрационным воздействиям, повышает соотношение сигнал/шум за счет разнесения собственных частот более чем на 1000 Гц. Смещение мембранной моды выше 5000 Гц позволяет вывести вторую гармонику мембранной моды за рабочей диапазон, т.к. вторая гармоника имеет достаточно большую амплитуду и оказывает значительное влияние на выходной сигнал ВТГ. Увеличение толщины дна могло привести к необходимости увеличения напряжения питания ВТГ, но было скомпенсировано конусным резонансным кольцом, уменьшением толщины подвеса и увеличением площади пьезоэлементов.

Для расчета размеров сначала была построена зависимость собственных частот резонатора от толщины дна.

Мода, Гц/толщина дна, мм	0, 4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,8	0,9	1
1 изгибная	16 83	2116	2560	2788	3021	3499	3988	4485
2 изгибная	16 87	2120	2564	2793	3026	3503	3993	4490
3 рабочая	47 13	4756	4809	4839	4871	4946	5032	5130
4 рабочая	47 15	4758	4811	4841	4874	4949	5035	5134
5 мембранная	39 50	4789	5583	5978	6376	7181	8001	8832

ТАБЛИЦА З. ЗАВИСИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ РЕЗОНАТОРА ОТ ТОЛЩИНЫ ДНА

Из таблицы 3 видно, что для имеющегося технического задания толщина дна должна быть 0,65-0,8 мм, т.к. при меньшей толщине дна разница между рабочей частотой и мембранной модой будет меше 1000 Гц, при большей частоте разница между рабочей частотой и изгибной модой будет меньше 1000 Гц.

Далее была построена зависимость собственных частот резонатора от толщины кромки (таблице 4).

Таблица 4. Зависимость собственных частот резонатора от толщины кромки

Мода/ толщина кромки	0,7	0,8	0,9	0,95	1	1,1	1,2
1 изгибная	3108	2968	2845	2788	2735	2636	2546
2 изгибная	3112	2973	2849	2793	2739	2640	2550
3 рабочая	3956	4305	4660	4839	5017	5372	5611
4 рабочая	3960	4308	4663	4841	5019	5374	5723
5 мембранная	6420	6232	6060	5978	5900	5751	5724

Из таблицы 4 видно, что для имеющегося технического задания толщина кромки должна быть в диапазоне 0,8-0,95 мм, т.к. при меньшей толщине кромки разница между рабочей частотой и изгибной модой будет меньше 1000 Гц, при большей толщине кромки разница между рабочей частотой и мембранной модой будет меше 1000 Гц.

Показано, что при толщине кромки более 1 мм энергопотребление резонатора резко возрастает. На основе полученных результатов был изготовлен ВТГ с чувствительным элементом, удовлетворяющим требованиям: толщина дна 0,65 мм, толщина кромки 0,95 мм.

В диапазоне частот 10-2560 Гц новая конструкция чувствительного элемента ВТГ не имеет резонансных всплесков.

# Заключение

Для практической разработки ВТГ с металлическим резонатором по ТЗ, прежде всего необходим модальный анализ резонатора. На начальном этапе проектирования модальный анализ может быть выполнен методом КЭ моделирования. Для этого необходимо спроектировать трёхмерную модель резонатора с пьезоэлементами.

В результате модального анализа определены частоты изгибных форм колебаний донышка резонатора и его кромки. Затем модальный анализ выполнен с помощью вибростенда для реального резонатора, что позволяет уточнить его КЭ – модель. С помощью лазерных доплеровских виброметров, сканирующего и точечного, измерены амплитуды колебаний кромки резонатора в пучностях и в узлах. В результате сравнения этих экспериментальных результатов с данными КЭ – моделирования уточнены коэффициенты демпфирования всех элементов резонатора и среды.

Выполнено практическое исследование ВТГ с резонансным кольцом в форме конуса. Показано преимущество конусного резонансного кольца по сравнению с цилиндрическим.

Построена КЭ – модель для конусного резонатора для выбора его рациональных размеров и пьезоэлементов.

Спроектирован новый резонатор. В начале была рассчитана зависимость собственных частот резонатора от толщины донышка и получено значение его толщины, обеспечивающей разнесение частоты рабочей и мембранной моды на 1000 Гц. Далее была получена зависимость собственных частот резонатора от толщины его кромки. Выбрана толщина кромки резонатора, обеспечивающая разнесение указанных выше частот на 1000 Гц.

Показано, что спроектированный резонатор в диапазоне частот 10-2500 Гц не имеют резонансных всплесков.

#### Литература

- Lynch D.D., Vibration-induced drift in the hemi-spherical resonator gyro, Proc. Annual Meeting of the Institute of Navigation, 23–25 June, 1987, Dayton, Ohio, pp. 34–37.
- [2] Apostolyuk V. Coriolis vibratory gyroscopes: Theory and design. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2016, 117 p.
- [3] Chikovani V.V., Yatsenko Yu. A., Kovalenko V.A., Scherban V.I. Digitally controlled High Accuracy Metallic Resonator CVG, Proc/ Symposium Gyro Technology, 2006, Stuttgart, pp. 4.0–4.7.
- [4] Распопов В.Я., А.В., Ладонкин А.В., Лихошерст В.В. Конкурентоспособный волновой твердотельный гироскоп с металлическим резонатором. Мехатроника, автоматизация, управление. 2018;19(12):777-787.
- [5] Распопов, В. Я. Проектирование резонатора волнового твердотельного гироскопа и верификация конечно-элементной модели / В. Я. Распопов, С. В. Егоров // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2021. №10. С. 227-235. DOI 10.24412/2071-6168-2021-10-227-235.

# Влияние опорного напряжения на дрейф волнового твердотельного гироскопа с плоскими электродами

А.А. Маслов НИУ «МЭИ», Россия Maslov954@ya.ru Д.А.Маслов НИУ «МЭИ», Россия И.В. Меркурьев НИУ «МЭИ», Россия MerkuryevIV@ya.ru

Аннотация—Вычислена погрешность волнового твердотельного гироскопа, возникающая при подаче опорного напряжения на плоские электроды. Волновая картина колебаний резонатора исследовалась с использованием асимптотического метода осреднения Крылова— Боголюбова. Приведен пример, показывающий влияние опорного напряжения на дрейф гироскопа.

Ключевые слова—волновой твердотельный гироскоп, полусферический резонатор, плоские электроды, опорное напряжение, нелинейные колебания, дрейф.

# I. Введение

Анализ публикаций и докладов международных конференций [1-3] показывает, что масштаб исследований и разработок ВТГ в ближайшее время будет расширяться, способствуя повышению точности гироскопов. Благодаря своим характеристикам и возможности повышения точности, ВТГ становится наиболее перспективным типом гироскопа для навигационных систем различных сфер применения [4-7]. Принцип функционирования ВТГ основан на эффекте инертности упругих волн колебаний полусферического резонатора, который изготавливается из кварцевого стекла, обладающего высокими изотропными свойствами и добротностью. Металлизированная поверхность резонатора вместе с электродами образуют электростатические датчики управления и съема информации. ВТГ с полусферическим резонатором относится к гироскопам высоких и средних точностей. Достижение высокой точности для ВТГ возможно в случае, если полусферический резонатор имеет высокую добротность (Q~10<sup>7</sup>), а также качественное изготовление и точную балансировку, которые значительно снижают влияние анизотропии свойств резонатора на получаемые измерения. К недостаткам ВТГ относят сложность изготовления кварцевого полусферического резонатора и его высокую стоимость, которая связана с использованием ряда прецизионных технологических операций [8]. Поэтому в последнее время проводятся работы по совершенствованию конструкции ВТГ, которое связано с упрощением электродного узла. Известно, что кромка полусферического резонатора при колебаниях перемещается не только перпендикулярно оси резонатора, но и параллельно ей. Это обстоятельство позволяет разместить все электроды на плоском электродном узле, расположив его параллельно торцевой кромки полусферической оболочки резонатора. В новом варианте конструкции ВТГ металлическое покрытие наносится только на торцевую кромку полусферы, что уменьшает внутреннее трение в резонаторе и значительно упрощает технологию его изготовления. Металлическое покрытие кромки полусферы вместе с электродами основания образуют электростатические датчики управления и съема информации. В этой конструкции значительно проще обеспечить равномерность плоского зазора между торцевой поверхностью резонатора и плоским электродным узлом [8]. Используя эту конструктивную схему, французская компания Safran Electronics&Defence разработала и наладила производство высокоточного ВТГ [7] с кварцевым полусферическим резонатором диаметром 20 мм.

Управление колебаниями резонатора осуществляется путем подачи напряжения на плоские электроды, образующие с резонатором систему электрических конденсаторов. Для компенсации инструментальных погрешностей изготовления резонатора используется эффект отрицательной электростатической жесткости, создаваемый заданным опорным напряжением. Математическая модель ВТГ с электродами на сферической поверхности резонатора, описывающая линейные электрические и механические колебания во взаимосвязанной форме, в том числе и при наличии опорного напряжения, получена в [9, 10]. Линейная математическая модель ВТГ с плоскими электродами представлена в [11]. В работах [12-14] учитывается влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику ВТГ. В статьях [15,16] показано, что опорное напряжение вызывает дрейф у ВТГ с цилиндрическим резонатором при учете нелинейных слагаемых в уравнениях динамики. В данной работе поставлена цель исследовать влияние опорного напряжения на погрешность гироскопа с плоскими электродами.

# II. УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАТОРА

Рассмотрим тонкий упругий полусферический резонатор 1 (рис. 1), металлизированная кромка 3 которого вместе с плоскими электродами 4 расположенными на основании 2 образует датчики управления и съема информации. Для описания деформаций резонатора введем ортогональную систему координат  $\xi \eta \zeta$  (рис. 2), связанную с меридианами и параллелями его срединной поверхности. Пусть  $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$  – вектор упругого смещения произвольной точки срединной поверхности оболочки в осях  $\xi \eta \zeta$ . С основанием прибора свяжем ортогональную систему координат Охуг, ось z направим по оси симметрии резонатора.



Рис. 1. ВТГ с плоским узлом электродов: 1 – резонатор; 2 – основание гироскопа; 3 – металлизированная поверхность резонатора; 4 – электрод; 5 – место соединения резонатора с основанием



Рис. 2. Расчетная схема ВТГ

Воспользуемся приближением Релея для представления колебаний оболочки по основной второй форме [17, 18]

$$u = U(f_* \cos 2\theta + g_* \sin 2\theta),$$
  

$$v = V(f_* \sin 2\theta - g_* \cos 2\theta),$$
 (1)  

$$w = W(f_* \cos 2\theta + g_* \sin 2\theta),$$

где  $U = \sin \alpha \cdot tg^2 \frac{\alpha}{2}$ ;  $V = \sin \alpha \cdot tg^2 \frac{\alpha}{2}$ ;

 $W = -(2 + \cos \alpha) \cdot tg^2 \frac{\alpha}{2}$  – функции Релея, определяю-

щие колебания второй собственной формы колебаний нерастяжимой оболочки.

В этих формулах смещение точки резонатора с угловыми координатами  $\alpha$  и  $\theta$  определяется вектором с компонентами и, v, w. При этом  $\alpha$  отсчитывается по меридиану от оси резонатора,  $\theta$  – по параллели. Компонента и представляет собой смещение вдоль касательной к меридиану, v – вдоль касательной к параллели и w – по нормали к поверхности резонатора.

На торцевой поверхности  $\alpha = \pi/2$  и компоненты вектора смещения принимают следующие значения:

$$u = f_* \cos 2\theta + g_* \sin 2\theta; \quad v = f_* \sin 2\theta - g_* \cos 2\theta;$$
  
$$w = -2(f_* \cos 2\theta + g_* \sin 2\theta). \quad (2)$$

где  $f_*$  и  $g_*$  – обобщенные координаты основной формы колебаний, равные радиальному смещению резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга под углом  $\pi/4$ ;  $f_*$ ,  $g_*$  – функции времени, соответствующие второй форме колебаний.

Из (2) следует, что смещение и, параллельное оси гироскопа, вдвое меньше радиального смещения w, т.е. u = -w/2.

При использовании электрической модели ВТГ будем пренебрегать перекрестными связями между электродами, а также рассматривать только электроды управления, для которых мало входное сопротивление и им также далее пренебрегаем.

Вычислим энергию *n* конденсаторов, образованных управляющими электродами и резонатором. Потенциальная энергия электрического поля, локализованного между обкладками заряженных конденсаторов, определяется выражением

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{C_i},$$
(3)

где q<sub>i</sub> – заряд *i*-го конденсатора, образованного резонатором и *i*-м электродом, центр которого расположен под углом  $\theta_i = 2\pi (i-1)/n$  к оси Ox, *i*=1...n;  $C_i$  – ёмкость *i*-го конденсатора. Будем предполагать, что перекрёстное влияние конденсаторов отсутствует.

Для вычисления емкости электрода относительно резонатора используем следующее выражение

$$C_i = \varepsilon_0 S / (d - u_i) = C_0 / (1 - u_i / d), \qquad (4)$$

где  $\varepsilon_0 = 8,85*10^{-12} \, \Phi/\text{м}$  – электрическая постоянная; *S* – площадь электрода; *d* – зазор между недеформированным резонатором и электродами.

Подставляя (2) в (3), а затем в (4) получаем выражение для энергии

$$W = \frac{1}{2C_0} \sum_{i=1}^{n} q_i^2 \left( 1 - \frac{1}{d} \left( f_* \cos 2\theta_i + g_*(t) \sin 2\theta_i \right) \right).$$
(5)

В дальнейших исследованиях будем применять динамическую модель основной формы колебаний электромеханической системы, представляющей собой резонатор с 16-ю электродами управления.

Выражение для кинетической энергии не вращающегося полусферического резонатора может быть представлено в виде:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2), \qquad (6)$$

где m – приведенная масса резонатора, соответствующего основной форме колебаний, равная для тонкой полусферической оболочки в приближении Релея  $4,8\rho h R^2$ , где  $\rho$  – плотность материала резонатора; h – толщина оболочки; R – радиус полусферы; точка над буквой означает дифференцирование по времени.

Потенциальная энергия деформации резонатора имеет вид [19]:

$$\Pi = \frac{1}{2}c(f_*^2 + g_*^2), \tag{7}$$

где с – приведенная жесткость резонатора.

Для определения функции Лагранжа используем выражения кинетической (6), потенциальной (7) энергии резонатора и потенциальной энергии электростатического поля управляющих конденсаторов (5):

$$T - \Pi - W = \frac{1}{2} \left( m \left( \dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2 \right) - c \left( f_*^2 + g_*^2 \right) \right) - \frac{1}{2C_0} \sum_{i=1}^{16} q_i^2 \left( 1 - \frac{1}{d} \left( f_* \cos 2\theta_i + g_* \sin 2\theta_i \right) \right).$$
(8)

Для составления уравнений Лагранжа-Максвелла электромеханической системы, учитывая (2), (3), (8) и применяя методику, предложенную в [9,10], получим следующие уравнения:

$$\ddot{f}_{*} + \omega^{2} f_{*} - \frac{1}{2mC_{0}d} \sum_{i=1}^{16} q_{i}^{2} \cos 2\theta_{i} = 0,$$

$$\ddot{g}_{*} + \omega^{2} g_{*} - \frac{1}{2mC_{0}d} \sum_{i=1}^{16} q_{i}^{2} \sin 2\theta_{i} = 0,$$
(9)

где  $\omega^2 = c/m - \kappa вадрат$  частоты собственных колебаний.

Заряды электродов управления определяются уравнениями электрических цепей:

$$R_e \dot{q}_i + \frac{q_i}{C_i} = U_i, \qquad i = 1...16,$$
 (10)

где  $R_e$  – электрическое сопротивление цепи между электродом управления и источником питания;  $U_i$  – напряжение на i-м электроде.

Переходя к безразмерным обобщённым координатам, безразмерному времени и, поставляя начальные условия, мы получим из (9), (10) задачу Коши для системы дифференциальных уравнений тихоновского типа:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \tau), \tag{11}$$

$$\varepsilon \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \tau), \tag{12}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0,$$
 (13)

где 
$$\mathbf{x} = \left(f, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau}, g, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\tau}\right)^T$$
,  $\mathbf{q} = \left(q_1, \dots, q_n\right)^T$ ,  $\varepsilon = R_e C_0 \omega$  –

безразмерный малый параметр (например,  $\varepsilon \sim 10^{-8}$ ,  $R_e \approx 1$  Ом,  $C_0 \approx 10^{-12} \, \Phi$ ,  $\omega \approx 10^4 \, \mathrm{c}^{-1}$ ), и уравнение (12) является сингулярно возмущённым. Для задачи (11) – (13) справедливы условия теоремы Тихонова о предельном переходе [[20]], поэтому, считая  $\varepsilon \to 0$ , можно записать

$$q_i = \frac{U_i C_0}{1 - f \cos 2\theta_i - g \sin 2\theta_i}, \quad i = 1...16,$$
 (14)

а систему уравнений в виде

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f - \frac{C_0}{2md^2\omega^2} \sum_{i=1}^{16} \frac{U_i^2 \cos 2\theta_i}{(1 - f \cos 2\theta_i - g \sin 2\theta_i)^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 g}{d\tau^2} + g - \frac{C_0}{2md^2\omega^2} \sum_{i=1}^{16} \frac{U_i^2 \sin 2\theta_i}{(1 - f \cos 2\theta_i - g \sin 2\theta_i)^2} = 0.$$
(15)

## III. ДИНАМИКА РЕЗОНАТОРА ПРИ НАЛИЧИИ ПОСТОЯННОГО ОПОРНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим гироскоп с 16-ю электродами, расположенными под углом  $\theta_i = \pi(i-1)/8$  к отсчетной оси. С помощью электродов управления создается силовое поле. Зададим напряжение в (15) следующим образом:

$$U_i = U_0(1+u_i)$$
, (i = 1,2,..., 16),

где  $U_0$  — опорное напряжение;  $u_i$  — малое нормализованное напряжение управления.

Предполагая, что напряжение управления значительно меньше опорного напряжения и пренебрегая им, рассмотрим влияние опорного напряжения на дрейф гироскопа.

Подставляя  $U_i = U_0$  в (11), раскладывая выражения под знаком сумм в ряды по *f* и *g*, проводя суммирование, получим уравнения колебаний резонатора при подаче на управляющие электроды только опорного напряжения

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f = \eta \Big( 2f + 3(f^2 + g^2) f \Big),$$

$$\frac{d^2 n}{d\tau^2} + g = \eta \Big( 2g + 3(f^2 + g^2) g \Big),$$
(16)

где  $\eta = \frac{4U_0^2 C_0}{md^2 \omega^2}$  – безразмерный коэффициент, характе-

ризующий малость электростатических сил,  $\eta \sim 10^{-4}$ . Таким образом, в (16) получены линейные слагаемые  $2\eta f$ ,  $2\eta g$ , соответствующие эффекту "отрицательной электростатической жёсткости"; слагаемые с кубической нелинейностью  $3\eta(f^2 + g^2)f$ ,  $3\eta(f^2 + g^2)g$ ; в (16) слагаемые со степенями по f и g выше третьей опущены.

Из уравнений (16) следует, что опорное напряжение вызывает снижение частоты собственных колебаний. Эти выводы согласуются с результатом, полученным в [[10]] для гироскопа с обычными электродами. Систему (16) будем исследовать методом осреднения Крылова – Боголюбова. Для этого приведем ее к стандартному виду посредством перехода от переменных  $f, g, \dot{f}, \dot{g}$  к медленно изменяющимся переменным  $r, k, \theta, \chi$ , называемых в механике элементами орбиты [[9]]

$$f = r\cos(\tau + \chi)\cos\theta - k\sin(\tau + \chi)\sin\theta,$$
  

$$g = r\cos(\tau + \chi)\sin\theta + k\sin(\tau + \chi)\cos\theta,$$
  

$$\frac{df}{d\tau} = -r\sin(\tau + \chi)\cos\theta - k\cos(\tau + \chi)\sin\theta,$$
  

$$\frac{dg}{d\tau} = -r\sin(\tau + \chi)\sin\theta + k\cos(\tau + \chi)\cos\theta.$$

Отметим, что в электронном контуре гироскопа физически реализуется схема осреднения Крылова – Боголюбова. Измеряемые с помощью емкостной системы электродов высокочастотные функции времени f, g представляются в виде двух нормальных форм колебаний с амплитудами r и k. Ориентация волновой карти-

ны колебаний на плоскости f, g определяется углом прецессии  $\theta$ , изменение фаз колебаний двух нормальных форм зависит от медленной переменной  $\chi$ .

При равенстве амплитуд основной и квадратурной волны колебаний (r = k), угол прецессии не определен, поэтому этот режим в дальнейшем не рассматривается.

Уравнения движения в медленных переменных  $r, k, \theta, \chi$  в первом приближении метода осреднения имеют вид

$$\frac{dr}{d\tau} = 0, \quad \frac{dk}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{3\eta}{4}kr,$$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{9\eta}{8}\left(k^2 + r^2\right) - \eta.$$
(17)

Первые два уравнения системы (17) указывают на то, что амплитуда колебаний не изменяется. Угол прецессии  $\theta$  при неподвижном ВТГ меняется, как это следует из третьей формулы (16), со скоростью прямо пропорциональной емкости конденсатора  $C_0$ , амплитудам колебаний r и k, квадрату величины опорного напряжения  $U_0$ . Четвертое уравнение системы (16) указывает на незначительное изменение частоты колебаний.

## IV. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Вычислим скорость прецессии волны  $\theta$ , обусловленной нелинейностью колебаний в электрическом контуре гироскопа, полусферический резонатор которого имеет следующие размеры [[7],[11]]: средний радиус R =10 мм, толщина h = 0.7 мм. Плотность материала резонатора  $\rho = 2200$  кг/м<sup>3</sup>. Пусть опорное напряжение  $U_0 = 100$ В, а емкость  $C_0 = 1.5 \cdot 10^{-12} \Phi$  (площадь пластины 2.5 мм<sup>2</sup>, расстояние между пластинами d = 15 мкм). Примем относительные амплитуды основной и квадратурной волны колебаний r и k, равными 0.04 и 0.00004 (0.6 мкм и 0.0006 мкм) соответственно. Частоту колебаний будем считать равной  $\omega = 56500 c^{-1}$  (9000 Гц).

Абсолютная величина скорости прецессии волны, рассчитанная по третьей формуле системы (10) при неподвижном основании равна 1,54 °/час. Эта погрешность присуща всем без исключения гироскопам, реализующим идею маятника Фуко [[9]]. Для устранения погрешности, вызываемой нелинейностью, в гироскопах данного класса, одну из амплитуд колебаний, например r, поддерживают постоянной, а другую k - стремятся уменьшить до нуля [[9]]. Отметим, что опорное напряжение без учета нелинейности колебаний зарядов электродов в электрическом контуре уменьшает частоту изгибных колебаний резонатора на у или на 1.0 Гц. В гироскопах с цилиндрическими и со сферическими обкладками конденсаторов уменьшение частоты значительно меньше. Это объясняется тем, что рабочий зазор у рассматриваемого прибора с плоскими электродами на один порядок меньше, а уменьшение частоты обратно пропорционально квадрату рабочего зазора. Учет нелинейности колебаний приводит к уточнению частоты свободных колеба-

ний резонатора на следующую величину  $\frac{9\eta}{8}(k^2 + r^2)$ или на 9.0·10<sup>-4</sup> Гц.

# V. Заключение

Исследование влияния нелинейных электрических свойств датчиков управления показало, что наличие опорного напряжения на плоских электродах вызывает не только уменьшение частоты резонатора, но и уход гироскопа, который необходимо учитывать. Дрейф гироскопа зависит от опорного напряжения, емкости электродов и амплитуд колебаний. Полученная формула для определения погрешности гироскопа и приведенный пример иллюстрируют необходимость учета нелинейных электрических процессов в гироскопе.

#### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00546.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пешехонов В.Г. Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. Том 28. №2 (109), 2020. С. 3-10. DOI 10.17285/0869-7035.0028
- [2] Маслов А. А., Маслов Д. А., Ниналалов И. Г., Меркурьев И. В. Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций // Гироскопия и навигация. Том 31. №1 (120), 2023. С. 3-25. EDN: BJLSLM
- [3] Переляев С.Е. Современное состояние и научно-технический прогноз перспектив применения зарубежных волновых твердотельных гироскопов (Аналитический обзор по зарубежным материалам) // Новости навигации. 2020. № 3. С. 14–28.
- [4] Матвеев В. А., Лунин Б. С., Басараб М. А. Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. М.: Физматлит, 2008, 239 с.
- [5] Бодунов Б.П., Бодунов С.Б., Лопатин В.М., Чупров В.П.Разработка и испытание волнового твердотельного гироскопа для использования в инклинометрической системе // Гироскопия и навигация. 2001. № 3 (34). С. 74–82.
- [6] Delhaye, F. SpaceNaute<sup>®</sup> the HRG Based Inertial Reference System of Ariane 6 European space launcher. // Gyroscopy and Navigation. 2019., vol.10, no. 1, pp. 1 – 6. DOI 10.1134/S2075108719010036.
- [7] Jeanroy A., Bouvet A., Remillieux G. HRG marine application // Gyroscopy and navigation. 2014, no.5, PP. 67–74.
- [8] Лунин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. Радиотехника, 2014, 176 с.
- [9] Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К. Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во «Ким Л.А». 2017, 194 с.
- [10] Журавлев В.Ф., Линч Д.Д. Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. №5. С. 12–24.
- [11] Wei, Z., Yi, G., Huo, Y.; Qi, Z., Xu, Z. The Synthesis Model of Flat-Electrode Hemispherical Resonator Gyro. Sensors 2019, 19, 1690. DOI 10.3390/s19071690
- [12] Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Нелинейные эффекты в динамике цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электростатической системой управления // Гироскопия и навигация. 2015. №1, С. 71-80. DOI 10.17285/0869-7035.2015.23.1.071-080
- [13] Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 88-110. DOI: 10.3103/S002565442106011X
- [14] Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Методы устранения нелинейности электростатических датчиков управления волнового твердотельного гироскопа // Юбилейная XXV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 2018. С. 201-203.
- [15] Денисов Р.А., Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние опорного напряжения электромагнитных датчиков управления на дрейф волнового твердотельного гиро-

скопа // Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24. № 1 (92). С. 60-71. DOI: 10.17285/0869-7035.2016.24.1.060-071

- [16] Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В., Михайлов Д.В. Об уходе волнового твердотельного гироскопа при наличии опорного напряжения на управляющих электродах // Вестник МЭИ, 2013, № 2, с. 11-14.
- [17] Стретт Дж.В.(лорд Релей) Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 1. 484 с.
- [18] Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997, 168с.
- [19] Филин А.П. Элементы теории оболочек. –Л.: Стройиздат, 1987.– 384 с
- [20] Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с.

# Способ реализации автоколебательного контура в волновом твердотельном гироскопе

В.В. Матвеев Лаборатория инерциальных датчиков первичной информации, систем ориентации и навигации, ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Россия matweew.valery@yandex.ru Д.С. Стрельцов Лаборатория инерциальных датчиков первичной информации, систем ориентации и навигации, ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Россия 30st01@mail.ru

Аннотация—Рассматриваются вопросы реализации контура возбуждения стоячей волны в металлических резонаторах волновых твердотельных гироскопов для создания датчика угловой скорости или интегрирующего гироскопа. Дано математическое описание процесса возбуждения стоячей волны и оценка амплитуды установившихся колебаний. Приводятся результаты экспериментальных исследований.

Ключевые слова—волновой твердотельный гироскоп, резонатор, автоколебания.

# I. Введение

В настоящее время перспективными инерциальными датчиками первичной информации, чувствительными к вращению основания посредством сил инерции Кориолиса, являются вибрационные гироскопы, выполненные на основе высокоточной обработки металлического сплава или кварца. Отсутствие необходимости применения специализированного технологического оборудования делает перспективным применение металлических резонаторов в волновых твердотельных гироскопах (ВТГ), как класса кориолисовых вибрационных гироскопов [1].

Целью работы является описание способа возбуждения стоячей волны в резонаторе ВТГ.

#### II. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВТГ

Пренебрегая разночастотностью и разнодобротностью резонатора, математическую модель ВТГ, описывающую колебания резонатора вдоль осей контроля  $x_1$  и  $x_2$ , представим в виде [2]:

$$\ddot{x}_{1} + \frac{2}{T}\dot{x}_{1} + \omega_{0}^{2}x_{1} - 2K\Omega\dot{x}_{2} = f_{1}(t, x_{1}, \dot{x}_{1}, \int_{t}x_{1}dt, ...),$$

$$\ddot{x}_{2} + \frac{2}{T}\dot{x}_{2} + \omega_{0}^{2}x_{2} + 2K\Omega\dot{x}_{1} = f_{2}(t, x_{2}, \dot{x}_{2}, \int_{t}x_{2}dt, ...),$$

$$(1)$$

где  $x_1$ ,  $x_2$  – перемещения кромки резонатора вдоль соответствующих осей контроля колебаний;  $\omega_0$  – круговая частота собственных колебаний;  $\Omega$  – угловая скорость вращения основания, K – коэффициент прецессии волны;  $f_i(...)$  – функция управления (i = 1, 2); T – постоянная времени резонатора ( $T = 2Q/\omega_0$ , где Q – добротность колебаний). А.В. Каликанов Лаборатория инерциальных датчиков первичной информации, систем ориентации и навигации, ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» г. Тула, Россия kalikanov.aleksei@mail.ru

#### III. Способ возбуждения стоячей волны

Рассматривается автоколебательный режим возбуждения стоячей волны, который предполагает наличие источника питания постоянного тока и нелинейного элемента, регулирующий приток энергии. Возможны два варианта реализации автоколебательного режима возбуждения ВТГ. В первом случае возбуждение автоколебаний реализуется в соответствии с уравнением вида:

$$\ddot{x}_1 + \frac{2}{T}\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - f_0 \operatorname{sign}(\dot{x}_1) = 0 , \qquad (2)$$

где  $f_0$  – амплитуда удельной силы трения, T – постоянная времени, определяемая соотношением (4).

Исследование уравнения (2) показывает, что частота автоколебаний практически равна собственной частоте резонатора  $\omega_0$ , а огибающая амплитуд колебаний также носит апериодический характер с постоянной времени *T*. Амплитуда установившихся автоколебаний может быть оценена по зависимости [3]

$$x_1^{\text{yer}} \approx \frac{4f_0 Q}{\pi \omega_0^2} \,. \tag{3}$$

К аналогичному результату приводит способ возбуждения автоколебаний резонатора, описываемый уравнением вида:

$$\ddot{x}_1 + \frac{2}{T}\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + f_0 \operatorname{sign}(\int_0^t x_1 dt) = 0, \qquad (4)$$

отличающийся от уравнения (3) наличием интеграла от перемещения резонатора под знаком сигнатуры. Способ является более предпочтительным с точки зрения снижения шумов в цепи возбуждения. При этом частота автоколебаний также соответствует собственной частоте  $\omega_0$ , а амплитуда может быть оценена по зависимости (3).

# IV. АППАРАТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В ВТГ для возбуждения и контроля колебаний используются пьезоэлементы, установленные на дне металлического резонатора. На рисунке 1 показана функциональная схема автоколебательного контура возбуждения стоячей волны в соответствии с уравнением (2) [4]. Пьезоэлементы, показанные пунктирной линией, используются для съема информации об угловой скорости основания и в данной работе не рассматриваются. Сигнал с выхода одной из пар пьезоэлементов подается на повторитель (блок с коэффициентом усиления значением 1), затем интегрируется и подается на компаратор, реализующий функцию сигнатуры sign().



Рис. 1. Фунциональная схема устройства

Выходной сигнал с выхода компаратора подается на вторую пару пьезоэлементов, расположенную под углом 90° к первой паре. Цепь автоколебательного контура может быть реализована на аналоговых элементах с применением операционных усилителей. В работе реализовывался фильтр с амплитудной частотной характеристикой (АЧХ), приведенной на рис. 2. Для реализации интегрирующего устройства, собственная частота резонатора должна находиться на спаде характеристики –20 дБ/дек. Фазовое запаздывание на частоте резонатора составляет –90°.



Рис. 2. АЧХ фильтра

Постоянная составляющая в цепи обратной связи устраняется низкочастотной частью фильтра.

#### V. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Исследования проводились на натурном макете ВТГ с металлическим цилиндрическим резонатором, собственная частота которого составила около 5750 Гц. Возбуждение стоячей волны осуществлялось в соответствии с рис. 1. На рис. 3 приведена экспериментальная осциллограмма процесса возбуждения автоколебаний резонатора. Из рис. 3 следует, что огибающая амплитуд автоколебаний в переходном процессе имеет апериодический характер, близкий к огибающей при возбуждении синусоидальным сигналом на собственной частоте резонатора. На рис. 4 приведена осциллограмма установившихся автоколебаний резонатора и сигнал на выходе компаратора. Из рис. 4 следует, что фазовое запаздывание сигнала резонатора (1) составляет -90° по отношению к сигналу компаратора (2). В работе показано, что для запуска автоколебаний резонатора не требуется стартового импульса. Возбуждение автоколебаний про-

исходит за счет неизбежного присутствия шумов в цепи обратной связи.



Рис. 3. Осциллограмма возбуждения автоколебаний резонатора



Рис. 4. Экспериментальная осциллограмма установившихся автоколебания резонатора (1) и сигнала на выходе компаратора (2)

Показано, что вариации температуры резонатора не приводит к срыву автоколебаний, так как изменение собственной частоты, составляющей единицы Гц, не выводит ее положение за границы требуемого наклона АЧХ фильтра.

#### Заключение

Дано математическое описание и экспериментальное подтверждение режима возбуждения стоячей волны в резонаторе ВТГ методом автоколебаний. Данный метод позволяет исключить контур фазовой автоподстройки частоты и упростить блок электроники ВТГ.

#### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания по теме FEWG-2022-0002.

#### Литература

- Волновой твердотельный гироскоп с металлическим резонатором / Монография. Под ред. В.Я. Распопова. Тула: Издательство ТулГУ, 2018. 189 с.
- [2] Lynch D. D. Vibratory gyro analysis by the method of averaging/ In: Proceedings of the 2nd St. Petersburg conference on gyroscopic technology and navigation. St. Petersburg. 1995. P. 26–34.
- [3] Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний: Учеб. пособие для втузов. - Москва: Наука, 1971. 239 с.
- [4] Патент № 2787809 С1 Российская Федерация, МПК G01С 19/5691. Датчик угла крена на базе волнового твердотельного гироскопа с металлическим резонатором : № 2022116481 : заявл. 17.06.2022 : опубл. 12.01.2023 / В. Я. Распопов, В. В. Матвеев, В. В. Лихошерст [и др.]; заявитель ТулГУ.

# Разработка чувствительного элемента микрооптоэлектромеханического акселерометра

С. Г. Штек AO «Государственный научноисследовательский институт приборостроения» гМосква, Россия corund@gosniip.ru

О.Г. Андреасян AO «Государственный научноисследовательский институт приборостроения» Москва, Россия ovs.andreasyan@gmail.com М.А. Жеглов AO «Государственный научноисследовательский институт приборостроения» Москва, Россия согипd@gosniip.ru

С.О. Васецкий *АО «Государственный научноисследовательский институт* приборостроения» Москва, Россия vasetskiyso@yandex.ru В.В. Беляков *AO «Государственный научноисследовательский институт* приборостроения» Москва, Россия согипd@gosniip.ru

П.С. Кузнецов AO «Государственный научноисследовательский институт приборостроения» Москва, Россия ps\_kuznetsov@mail.ru

Аннотация—Разработана конструкция чувствительного элемента микрооптоэлектромеханического акселерометра. Рассмотрены разные конфигурации чувствительного элемента. Проведено моделирование системы с помощью ПО «КОМПАС-3D». Получены значения собственных частот чувствительного элемента (59511,6 рад/с), её максимальные смещения при различных значениях угловых скоростей (до 310 нм), а также, множество других характеристик, которые влияют на параметры устройства. Подготовлена конструкторская документация для изготовления необходимых деталей, включая технологическую оснастку для их сборки.

Ключевые слова—микроэлектромеханические системы, МЭМС, Акселерометр, Оптический туннельный эффект, Сила Кориолиса.

# I. Введение

Одной из основных тенденций развития современного машиностроения является миниатюризация устройств или механических элементов. В последнее время для создания передовых многоцелевых технологий всё чаще применяют микроэлектромеханические системы (МЭМС) в комбинации с микрооптикой.

МЭМС – это устройства микронных размеров, которые состоят из различных механических и электрических компонентов [1].

Акселерометр – это прибор, измеряющий разность между реальным ускорением объекта и гравитационным ускорением. Акселерометры используются повсеместно, начиная с мобильных телефонов, заканчивая высокоточными летательными аппаратами [2].

На данный момент одним из наиболее перспективных задач является разработка и исследование микрооптоэлектромеханического (МОЭМ) акселерометра.

МОЭМ-акселерометр для определения параметров движения использует свойство зависимости коэффициента отражения света структурой «среда-зазор-среда» от величины зазора [2]. Угол падения света на границу между первой средой и зазором (воздухом) выбирается таким, что при большой величине зазора, происходит полное внутреннее отражение. Если величина зазора сравнима с длиной волны излучения, то его часть проходит (туннелирует) через зазор во вторую среду и коэффициент отражения структуры «среда-зазор-среда» уменьшается. Таким образом, мощность оптического излучения, отраженного от структуры «среда-зазорсреда», несет информацию о величине зазора и, соответственно, о характере движения объекта.

Существует множество способов реализации чувствительного элемента (ЧЭ) МОЭМ-акселерометра. Предлагаемый доклад посвящен разработке конструкции ЧЭ для безкомпенсационного МОЭМ-акселерометра.

## II. ФИЗИКА ПРОЦЕССОВ

Главным чувствительным элементом этого устройства является тонкая пластина из кварцевого стекла, на которой с помощью лазера вырезана своего рода «балка». В торец этой пластины направлен лазерный луч, который распространяясь по пластине передаёт часть своей энергии на фотоприёмники, которые установлены на некотором небольшом расстоянии сверху и снизу от пластины (рис. 1).



Рис. 1. Схема МОЭМ-акселерометра

Под действием внешних сил «балка» изгибается и появляется некоторая разность между величинами энергии, которая передаётся на фотоприёмники, поскольку расстояние до датчиков начинает отличаться (рис. 2).

По этой разности и определяют смещение балки и соответственно ускорение, которое действует на прибор.



Рис. 2. Снятие показаний с ЧЭ датчика

## III. Исследование прочностных характеристики ЧЭ

Одним из основных вариантов реализации пластины является вариант с односторонним закреплением инерционной массы (рис 3).



Рис. 3. Чувствительный элемент типа «консольная балка»

Вариант был взят на основе литературного анализа и модифицирован с учетом требований к технологии (убраны лишние прорези и установлены дополнительные радиусы скруглений) [2].

Для определения возможности использования такой конфигурации ЧЭ было решено исследовать пластину на прогиб при перегрузке в 100G. Исследование проводилось с помощью программного пакета «АРМ-FEM», встроенного в ПО «КОМПАС-3D». Результаты исследования показали наличие деформаций около 300 нм, что соответствует поставленным требованиям. Также, для дальнейших расчётов были определены частоты собственных колебаний для первых мод. Полученные значения (59511,6 рад/с) будут использованы для более точного определения смещения чувствительного элемента.

#### IV. Определение максимального смещения ЧЭ

Для получения информации с акселерометра необходимо генерировать первичные колебания. Частоту первичных колебаний примем равной собственной частоте чувствительного элемента. Амплитуду колебаний зададим равной 370 мкм.

При наличии линейного ускорения и угловой скорости возникает сила Кориолиса. Она вызывает смещение чувствительного элемента, по которому определяют параметры объекта.

Сила Кориолиса определяется по следующей формуле:

$$F_{\rm K} = -2m\Omega\omega v_m \cos(\omega t) \tag{1}$$

где m = 17 мг – масса системы,  $\Omega = 20,94$  рад/с – угловая скорость, вектор которой перпендикулярен вектору линейного ускорения,  $\omega = 59511,6$  рад/с – частота первичных колебаний, *y<sub>m</sub>*=370 мкм – амплитуда первичных колебаний, *t* – время.

Подставив значения, получим следующую зависимость силы Кориолиса от времени. Поскольку нам необходимо будет далее анализировать именно максимальные отклонения системы, то расчётах будем использовать только максимальное по модулю значение – 15,7 мН.

При заданных размерах ЧЭ полученные смещения при максимальной угловой скорости – 1200 град/с составляют примерно – 310 нм, что входит в необходимый диапазон, обусловленный требованиями к устройству акселерометра (±500 нм).

### V. РАЗРАБОТКА КОНСТРУКТОРСКОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ

После определения подходящей конфигурации чувствительного элемента был составлен комплект конструкторской документации (КД) на элементы МОЭМакселерометра (рис. 4).



Рис. 4. Чертёж чувствительного элемента МОЭМ-акселерометра: 1 – инерционная масса чувствительного элемента; 2 – отверстия под специальную технологическую оснастку для позиционирования деталей датчика относительно друг друга

# VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в ходе выполнения работы была разработана конструкция чувствительного элемента микроопто-электромеханического акселерометра.

Рассмотрены разные конфигурации подвижной части ЧЭ различных форм и размеров. Проведено моделирование системы с помощью ПО «КОМПАС-3D».

На основе результатов моделирования были получены значения собственных частот чувствительного элемента, его максимальные смещения при различных значениях угловых скоростей, а также, множество других характеристик, которые влияют на параметры устройства.

Составлен комплект конструкторской документации на элементы акселерометра. Чертежи отправлены на изготовление.

В дальнейшем планируется получить детали датчика, произвести его сборку, а также исследовать его характеристики.

#### Литература

- Крекотень Ф.В. Современные МЭМС гироскопы и акселерометры // Петербургский журнал электроники. 2011. №. 1. С. 81-96.
- [2] Бакмачев А. Инерциальные МЭМС-датчики и модули европейских производителей. Обзор новинок // Электроника: Наука, технология, бизнес. 2014. №. 2. С. 38-49.

# Анализ технологических факторов при проектировании ядерного магнитного гироскопа

А.С. Завитаев АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО Санкт-Петербург, Россия zav.al98@mail.ru

Аннотация—В работе рассматриваются технологические факторы, которые необходимо учитывать при проектировании подсистем ядерного магнитного гироскопа. Представлен обзор существующих технологических решений и проведен анализ влияния геометрических смещений на характеристики прибора.

Ключевые слова—ядерный магнитный резонанс, гироскоп, технология, проектирование.

## I. Введение

В настоящее время существует потребность в разработке малогабаритных систем навигации высокодинамичных объектов. Для их создания необходимы гироскопы, которые превосходят микромеханические по точности и волоконно-оптические по виброустойчивости и массогабаритным характеристикам. Исходя из этих требований, а также в связи с появлением новых технологий и методов наблюдения эффекта ядерного магнитного резонанса (ЯМР) возрос интерес к гироскопам, основанным на данном эффекте.

Ядерный магнитный гироскоп (ЯМГ) представляет собой устройство, которое использует принцип ядерного магнитного резонанса для определения направления спина в ядрах и использования гироскопических свойств этих спинов для измерения угловых скоростей вращения – при наличии угловой скорости основания частота прецессии магнитного момента ядер в постоянном магнитном поле зависит от величины угловой скорости [1, 2]. Одной из ключевых особенностей является то, что данный гироскоп потенциально нечувствителен к вибрации, так как ансамбль атомов внутри ячейки не восприимчив к внешним механическим воздействиям [3].

# II. Конструкция ЯМГ

Ядерный магнитный гироскоп, несмотря на свой малый объем около 18 см<sup>3</sup>, состоит из множества элементов, которые можно объединить в следующие основные группы:

- магнитная система;
- система термостабилизации;
- оптическая система.

К этим группам предъявляется набор требований, необходимых для обеспечения требуемых характеристик ЯМГ. Отдельно необходимо рассматривать задачу обеспечения стабильности геометрических параметров элементов конструкции. М.И. Евстифеев *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО* Санкт-Петербург, Россия evstifeevm@mail.ru



Магнитный экран

Рис. 1. Конструкция ЯМГ

Для достижения точности ЯМГ на уровне 0,1°/ч в процессе разработки необходимо решить следующие технологические задачи:

- сформировать требуемое магнитное поле с заданными характеристиками;
- создать систему термостатирования, которая поддерживает стабильную температуру внутри гироскопа;
- обеспечить качество и стабильность параметров оптической системы;
- обеспечить сохранение стабильности геометрических параметров при внешних воздействиях.

# III. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ

# А. Обеспечение требуемого магнитного поля

Для достижения ЯМР и выявления связанных эффектов требуется сформировать магнитное поле внутри ячейки с минимальным градиентом, величина которого не превышает 10 нТл, и обеспечить стабильность постоянной магнитной индукции на уровне 10 мкТл [4].



Рис. 2. Технологические факторы проектирования катушек магнитной системы

Требуемые параметры магнитной системы обеспечиваются применением системы катушек, представляющих собой кольца Баркера. Такая система позволяет создать магнитное поле в форме цилиндра с низким значением градиента магнитного поля. В результате калибровки катушек, которая заключается в подаче разных токов в катушках, градиент магнитного поля не превышает 7 нТл при величине индукции поля 10 мкТл.

Одновременно с этим необходимо обеспечить экранирование ансамбля атомов внутри ячейки от воздействия внешнего магнитного поля. Для этого применяется система пассивного магнитного экранирования, которая представляет собой многослойную конструкцию из пермаллоя.



Рис. 3. Технологические факторы проектирования экрана

Подобная конструкция позволяет обеспечить коэффициент экранирования на уровне 10<sup>5</sup>. Важным параметром является необходимость сохранения зазоров между слоями экрана для реализации его экранирующих свойств.

К технологическим факторам формирования магнитного поля следует отнести:

- реализация многослойного малогабаритного экрана с обеспечением заданных коэффициентов экранирования. Это требует решения технологических задач в части формирования из пермаллоя тонкостенных слоев экрана с сохранением точных зазоров между слоями;
- разработка системы малогабаритных катушек диаметром около 10 мм. При этом необходимо соблюдать взаимное расположение на уровне 10 мкм [5]. Использование традиционных технологических приемов в виде катушки на каркасе не обеспечивает заданных требований, необходимо использование аддитивных технологий или технологий микроэлектроники [6].

# В. Обеспечение требуемых температурных параметров

Вместе с магнитным полем внутри ячейки необходимо сформировать определенные температурные параметры. Ансамбль атомов, находящийся в ячейке ЯМГ, состоит из трех элементов: буферный газ азот (N<sub>2</sub>), цезий (Cs) и ксенон (Xe). Распределение данных газов внутри ячейки зависит от ее температуры. Для оптимального распределения газов необходимо выдерживать температуру ячейки на уровне 100°С.



Рис. 4. Технологические факторы проектирования системы термостатирования

Кроме абсолютного значения температуры ячейки необходимо обеспечить минимальный градиент как в самой ячейке (0,05 °C), так и по всему прибору  $(1^{\circ}\text{C})$ .

Отдельной проблемой являются температурные деформации, которые возникают в результате прогрева конструкции ЯМГ до температуры, поддерживаемой в ячейке. Необходимость прогрева увеличивает время готовности прибора и снижает мощность излучения лазеров, зависящих от температуры [7]. В результате излучаемая мощность становится недостаточной для стабильной работы гироскопа.

К технологическим факторам создания системы термостатирования следует отнести:

- реализацию малогабаритной системы, способной поддерживать требуемую температуру за счет обеспечения минимального градиента температур как внутри ячейки (~0.05 °C), так и по всему объему гироскопа (~ 1°C) [4];
- создание конструкции ЯМГ, обеспечивающей термоизоляцию ячейки от других элементов конструкции для минимизации влияния нагрева на лазерные излучатели и на геометрические параметры прибора вследствие тепловых деформаций элементов конструкции.

#### С. Обеспечение параметров оптической системы.

Оптическая система включает в себя газовую ячейку и лазеры детектирования и накачки. В газовой оптической ячейке должна обеспечиваться параллельность стенок при ее кубической форме, чтобы расхождение лазерных лучей при прохождении через нее составляло не более 2°, при этом деполяризация лучей в результате прохождение не превышает 5% [4].

К технологическим аспектам создания оптической системы следует отнести:

- формирование малогабаритной оптической системы из ряда дискретных элементов с обеспечением геометрических параметров и оптических свойств. Необходимы технологические исследования возможности разработки и применения интегрально-оптических схем [8];
- создание технологии выставки оптических элементов и выбор технологических приемов крепления, обеспечивающих стабильность оптических элементов во всем диапазоне внешних воздействий.


Рис. 5. Технологические факторы проектирования оптической системы

## IV. СОХРАНЕНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Несмотря на то что ансамбль атомов в ячейке обладает нечувствительностью к внешним механическим воздействиям, возможно снижение предельной чувствительности гироскопа и изменение выходного сигнала из-за смещений элементов конструкции [8, 9].

Одним из таких факторов являются смещения, возникающие в магнитной системе. Для наглядной оценки влияния различных видов смещений на параметры магнитного поля авторами предложено использовать коэффициент влияния смещений на градиент магнитного поля ( $\Delta B$ ), который рассчитывается как отношение градиента магнитного поля к смещению, которое его вызвало, и измеряется в нТл/мкм.

В физико-математической модели, построенной в CAD системе ANSYS, исследовано влияние смещений системы катушек и экрана на магнитное поле внутри ячейки. Смещение катушек разделено на горизонтальное (от 0 до 0,5 мм), вертикальное (от 0 до 0,5 мм) и угловое (от 0 до 4°). Смещения экрана рассматривались как изменения зазора между слоями экрана, а также между экраном и катушками ЯМГ. Результаты моделирования приведены в таблице ниже

Вид смещений	Элемент	ΔΒ	
	Все катушки	0,13 нТл/мкм	
Горизонтальные	Малые катушки	0,11 нТл/мкм	
	Большие катушки	0,02 нТл/мкм	
Вертикальные	Все катушки	0,89 нТл/мкм	
	Малые катушки	0,81 нТл/мкм	
	Большие катушки	0,07 нТл/мкм	
Угловые	Все катушки	0,54 нТл/угл мин	
	Малые катушки	0,83 нТл/угл мин	
	Большие катушки	0,27 нТл/угл мин	

ТАБЛИЦА 1 ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЛИЯНИЯ СМЕЩЕНИЯ НА ГРАДИЕНТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Вид смещений	Элемент	ΔΒ	
Изменение		Смещения не влия-	
зазора между	Экран	ют на градиент	
слоями		магнитного поля	
Изменение			
зазора между			
экраном и	Экран	0,08 нТл/мкм	
корпусом			
катушки			

Из таблицы можно сделать вывод, что наибольшее влияние имеют смещения малых катушек, при этом наибольший коэффициент составляет 0,89 нТл/мкм при вертикальном смещении всех катушек. Таким образом, смещения на уровне 1 мкм вызывают градиенты магнитного поля на уровне допустимых значений.

Смещения элементов магнитной и оптической систем, которые могут быть вызваны внешними механическими и тепловыми воздействиями, оказывают влияние на точностные показатели ЯМГ. В связи с этим при проектировании необходимо учитывать важные технологические факторы, которые должны приводить к сохранению номинальных параметров конструкции в процессе эксплуатации. К этим факторам следует отнести особые технологические решения по формообразованию и размещению элементов, их взаимному расположению, грамотному использованию технологических допусков, обеспечивающие минимальные смещения элементов и наименьшие изменения их напряженнодеформированного состояния.

### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ технологических факторов, которые необходимо учитывать при проектировании подсистем ядерного магнитного гироскопа. В качестве основных элементов прибора рассмотрены системы: магнитная, оптическая и термостатирования. Представлен обзор существующих технологических решений и проведен анализ влияния геометрических смещений на характеристики прибора. Для оценки влияния различных смещений на параметры магнитного поля предложено использовать коэффициент влияния с размерностью нТл/мкм.

#### Литература

- [1] Шевченко А.Н., Захарова Е.А. Исследование зависимости качества резонанса от распределения цезия в ячейке квантового датчика вращения // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 4. С. 567–573. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-567-573
- [2] Литманович Ю.А., Вершовский А.К., Пешехонов В.Г. Гироскоп на основе явления ядерного магнитного резонанса: прошлое, настоящее, будущее // Материалы пленарного заседания 7-й Российской мультиконференции по проблемам управления ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2014. С. 35–42.
- [3] Larsen M., Bulatowicz M. Nuclear magnetic resonance gyroscope: for DARPA's micro-technology for positioning, navigation and timing program // Proc. IEEE Int. FrequencyControl Symposium, 2012. doi: 10.1109/fcs.2012.6243606
- [4] А.К. Вершовский, Ю.А. Литманович, А.С. Пазгалев, В.Г. Пешехонов. Гироскоп на ядерном магнитном резонансе: предельные характеристики // Гироскопия и навигация. 2018. Т. 26. №1. С. 55-80. DOI 10.17285/0869-7035.2018.26.1.055-080
- [5] Sakamoto, Y., Bidinosti, C.P., Ichikawa, Y. et al. Development of highhomogeneity magnetic field coil for 129Xe EDM experiment. Hyperfine Interact 230, 141–146 (2015). https://doi.org/10.1007/s10751-014-1109-5

- [6] Alexander A., B., Svetlana A., Z., Denis Yu., O., & amp; Vladimir E., T. (2018). Fabricating a high aspect ratio ferromagnetic core 3D micro-inductor using MEMS technology. Nanoindustry Russia, 511– 511. https://doi.org/10.22184/1993-8578.2018.82.511
- [7] Алексеева В.А., Лукин А.В., Гагарский С.В., Сибирев М.Ю., Ханков С.И. Температурная зависимость энергетических параметров лазеров на основе неодимсодержащих кристаллов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2001. №4. URL:

https://cyberleninka.ru/article/n/temperaturnaya-zavisimost-energeticheskih-parametrov-lazerov-na-osnove-neodimsoderzhaschih-kristallov

- [8] R.M. Noor and A.M. Shkel, "MEMS Components for NMR Atomic Sensors," in Journal of Microelectromechanical Systems, vol. 27, no. 6, pp. 1148-1159, Dec. 2018, doi: 10.1109/JMEMS.2018.2874451.
- [9] Evstifeev M.I., Zavitaev A.S. Estimation of the nuclear magnetic gyroscope sensitivity to inertial influences // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering - 2022, Vol. 1215, No. 012014, pp. 1-8

## Способы повышения качества начальной настройки оптической схемы ядерного магнитного гироскопа

В.В. Чалков, Г.В. Безмен *АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»* Санкт-Петербург, Российская Федерация gbezmen@elprib.com

Аннотация—В работе рассмотрена система стабилизации лазерного излучения в ядерном магнитном гироскопе. Приведены результаты эксперимента, демонстрирующие наличие взаимного влияния лазеров накачки и детектирования при настройке оптической схемы ядерного магнитного гироскопа. Предложены варианты уменьшений взаимного влияния лазеров при настройке и работе гироскопа.

Ключевые слова—ядерный магнитный гироскоп.

## I. ВСТУПЛЕНИЕ

В конце 20-го века идея разработки ядерного магнитного гироскопа (ЯМГ) перестала быть популярной в связи с появлением других технологий, таких как волоконно-оптические и кольцевые лазерные гироскопы. Однако в последние годы интерес к теме ЯМГ возродился [1, 2] в связи с их уникальными характеристиками, такими как стабильность смещения нуля, высокая чувствительность и малогабаритность. Благодаря передовым технологиям производства и использованию новых материалов ученым удалось уменьшить размер ЯМГ, что также способствовало возрождению интереса к этим устройствам.

Одним из важнейших компонентов в ЯМГ является источник света, в качестве которого выступает вертикально-излучающий лазер (ВИЛ). В отличие от других лазерных источников света, ВИЛ создает лазерное излучение, которое характеризуется стабильностью и узкой спектральной шириной излучения, что является критически важным для точных измерений прецессии ядерных спинов в ЯМГ.

#### II. Состав оптической схемы ЯМГ

В ЯМГ применяются два лазера [2–4]: лазер накачки и лазер детектирования, как показано на рисунке 1.



Рис. 1. Схематичное изображение ЯМГ: 1 – лазер детектирования, 2 – лазер накачки, 3 – ячейка, 4 - фотоприёмники лазеров

#### А. Лазер накачки

Лазер накачки (ЛН) служит для возбуждения ядер рабочего вещества – ксенона – и выравнивания их спинов в магнитном поле. ЛН подаёт резонансное оптическому переходу цезия циркулярно поляризованное излучение и ориентирует электронные спины цезия, создавая макроскопическую продольную намагниченность щелочных атомов в ячейке [2, 5]. В результате процессов спин-обмена намагниченность передается от атомов цезия к ядрам ксенона.

#### В. Лазер детектирования

Лазер детектирования (ЛД) применяется для определения частоты прецессии ядер ксенона после их возбуждения ЛН. ЛД облучает то же вещество, что и ЛН, однако длина волны этого излучения отстроена от центра резонансной оптической линии цезия.

## III. Трудности настройки оптической схемы ЯМГ

Из-за воздействия внешней среды на ЯМГ рабочие условия лазеров изменяются со временем, что влечет за собой изменение характеристик испускаемого излучения. Наиболее существенным фактором, ухудшающим точностные характеристики ЯМГ, является изменение длины волны лазерного излучения каждого из лазеров. Для стабилизации используются следящие системы (отдельно для каждого лазера), контролирующие длину волны.

Система обратной связи поддерживает длины волн излучения, испускаемых лазерами, путем регулировки тока, подаваемого на них.

Система стабилизации лазерного излучения предназначена для работы в режиме реального времени и непрерывного контроля длины волны излучения лазеров ЯМГ. Однако для её работы необходимо провести её запуск и начальную настройку параметров, что не всегда удаётся сделать с достаточной точностью. Исходя из этого целью этой работы является рассмотрение способов повышения качества начальной настройки оптической системы ЯМГ.

## IV. ПРОЦЕСС ЗАПУСКА ОПТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ ЯМГ

Для начала стоит описать запуск оптической системы ЯМГ. Его можно разделить на несколько этапов.

## *А. Прогрев и выход на температурный режим ячейки ЯМГ*

Первый этап включает в себя прогрев и выход на температурный режим ячейки ЯМГ, а также запуск соответ-





Рис. 2. Графики температуры ячейки ЯМГ и коэффициента ПИД регулятора нагревателя ячейки

На левом графике на рис. 2 показана температура ячейки; она плавно растёт и достигает заданного уровня. На правом графике приведено значение коэффициента ПИД регулятора: при достижении заданной температуры коэффициент ПИД регулятора начинает изменяться, что сигнализирует о достижении заданной температуры ячейки с достаточным уровнем стабильности.

#### В. Прогрев и выход на температурный режим лазеров

Второй этап включает прогрев и выход на температурный режим лазеров (ЛН и ЛД) ЯМГ и запуск соответствующей следящей системы по температуре [6].

#### С. Сканирование по частоте ЛН

Третий этап – это поиск тока инжекции ЛН, соответствующего необходимой длине волны ЛН, при котором происходит резонанс в цезии. Для этого применяется сканирование по частоте [6]. Затем на графике 1-ой производной поглощения ЛН выбирается значение тока, соответствующее центру резонанса цезия, и запускается система стабилизации длины волны излучения ЛН.



Рис. 3. Графики интенсивности и тока ЛН

На левом графике на рис. З показано изменение интенсивности от времени, измеряемой с фотоприёмника, размещенного напротив ЛН после ячейки. На правом графике показано, как изменялся ток инжекции в том же промежутке времени для ЛН.

#### *D. Сканирование по частоте ЛД*

Четвертый этап — это запуск ЛД. Процесс проходит аналогично с запуском ЛН, но настройка ЛД производится на длину волны, отличную от ЛД, при этом выбор величины отстройки крайне важен [7]. Затем запускается следящая система стабилизации длины волны излучения ЛД.

На левом графике на рис. 4 показано изменение интенсивности во времени, которая измеряется с фотоприёмника, размещенного напротив ЛД после ячейки. На правом графике показано, как изменялся ток инжекции в том же промежутке времени для ЛД.



V. Выявление взаимного влияния лазеров

Анализируя графики рисунков 3 и 4, при сканировании по частоте ЛН изменяется интенсивность на фотоприёмнике, соответствующем ЛД, и наоборот, при запуске сканирования по частоте ЛД, изменяется интенсивность на фотоприёмнике, соответствующем ЛН. Пример такого взаимного влияния ЛН и ЛД приведён на рис. 5.



Рис. 5. Графики интенсивности ЛН и тока ЛД

На графиках на рис. 5 показано, что при подаче тока инжекции на ЛН фотоприёмник ЛД детектирует изменения в интенсивности света от ЛД. Подобная зависимость усложняет процесс запуска и стабилизации следящей системы лазеров. Она вызвана в первую очередь тем, что оба лазера взаимодействуют с одним веществом в ячейке.

Важно также отметить, что температура ВИЛ изменяется при подаче на него тока, что продемонстрировано на рисунке 6. Температура также влияет на длину волны излучения ВИЛ.



Рис. 6. Графики температуры и тока лазеров ЯМГ

Ввиду того, что ЯМГ позиционируются как изделия небольшого размера, расположение лазера внутри них также компактно, что влечет за собой взаимное тепловое воздействие между лазерами. Нагрев одного лазера в определенной степени влияет на температуру другого лазера, хотя это влияние можно считать незначительным. Однако при высоком требовании к степени температурной стабилизации это влияние становится заметным, поэтому необходимо учитывать этот фактор при проектировании и настройке ЯМГ.

#### VI. Способы минимизации взаимного влияния лазеров ЯМГ

Для обеспечения эффективной первоначальной настройки ЯМГ и, следовательно, его высококачественной и стабильной работы [6], важно достичь минимального взаимного влияния лазеров, которое оказывает неблагоприятное воздействие на точность настройки ЯМГ и не позволяет однозначно выбрать значения тока для лазеров. Рассмотрим некоторые методы, которые могут уменьшить их взаимное влияние.

#### А. Изменение конструкции ЯМГ

Одним из самых очевидных способов уменьшения взаимного влияния лазеров является оптимизация конструкции гироскопа. Такое изменение может включать применение материалов с меньшей теплопроводностью, изменение взаимного расположения лазеров и ячейки с цезием, а также усовершенствование системы охлаждения. В результате уменьшается взаимное температурное влияние лазеров. Однако, учитывая малые габаритные размеры гироскопа, возможности изменения его конструкции ограничены.

#### В. Выбор ограничений для тока и температуры лазеров

Установка определенных границ для значений допустимых токов и температур лазеров при начальной настройке гироскопа позволяет контролировать их изменения во времени и учитывать деградацию лазеров. За счет этого можно снизить диапазон сканирования лазерами по частоте. Введение динамических диапазонов токов поиска длины волны излучения лазеров уменьшит флуктуации температур лазеров, возникающие при протекании через них тока, а также позволит значительно уменьшить взаимодействие лазеров через вещество ячейки.

#### С. Разнесение во времени этапов настройки оптической схемы ЯМГ

Другим подходом к минимизации взаимосвязи лазеров является изменение процедуры их настройки.

Увеличение временного интервала между настройками лазеров уменьшает их взаимное влияние и повышает точность измерений. Достижение этого эффекта возможно за счет уменьшения скорости изменения напряжения тока, что, в свою очередь, снижает скорость нагрева лазера, а также за счёт учёта при настройке оптической схемы ЯМГ времени, необходимого для завершения температурного переходного процесса для каждого из лазеров после их настройки. В результате каждый лазер может быть настроен практически без воздействия с другим лазером.

Несмотря на высокую эффективность такого подхода с точки зрения уменьшения взаимного воздействия лазеров, его практическое применение затруднено из-за увеличения времени начальной настройки гироскопа и, следовательно, его готовности к работе. В этой связи одним из направлений дальнейших исследований является поиск значений временного интервала между настройками лазеров, позволяющих повысить точность ЯМГ, но при этом не приводящих к существенному увеличению времени его запуска.

## D. Повышение качества систем стабилизации тока и температуры лазеров

Еще одним подходом к снижению корреляции между лазерами является использование современных систем стабилизации температуры для лазеров и ЯМГ в целом. Кроме того, применение более точных и мощных лазеров способствует уменьшению отношения сигнал/шум при определении длины волны лазеров, что обеспечивает более точное определение их собственных изменений по сравнению с изменениями, вызванными воздействием других лазеров.

Применение более точной и комплексной системы стабилизации температуры также может способствовать снижению взаимного влияния ЛН и ЛД. Однако, несмотря на разработку новых методов [8] по созданию ВИЛ, их характеристики всё ещё не вполне удовлетворяют требованиям ЯМГ.

Можно отметить, что взаимное влияние ЛН и ЛД можно уменьшить, используя комбинацию перечисленных методов или выбирая некоторые из них, исходя из условий эксплуатации ЯМГ.

#### Заключение

В работе рассмотрена система стабилизации лазерного излучения в ядерном магнитном гироскопе. Приведены результаты эксперимента, демонстрирующие наличие взаимного влияния лазеров накачки и детектирования при настройке оптической схемы ядерного магнитного гироскопа. Предложены варианты уменьшения взаимного влияния лазеров при настройке и работе гироскопа.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Пешехонов В.Г. Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. Том 28. №2 (109). С. 3–10, 2020.
- [2] Вершовский А.К., Литманович Ю.А., Пазгалёв А.С., Пешехонов В.Г. "Гироскоп на ядерно-магнитном резонансе: предельные характеристики", Гироскопия и навигация. Том 26, №1 (100), 2018. С. 55–80.
- [3] Popov, E.N., Barantsev, K.A., and Litvinov, A.N., "Theoretical simulation of a signal for a scheme of an atomic spin gyroscope with optical detection", Kvantovaya Elektronika, vol. 49, no. 2, 2019, pp. 169–177.
- [4] M. Ding, Development and prospect of quantum sensing technology, Материалы XX конференции молодых ученых «Навигация и управление движением» с международным участием, СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2018.
- [5] T.G. Walker, M.S. Larsen, Spin-exchange-pumped NMR gyros, Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics, Academic Press, Vol. 65, 2016, pp. 373–401
- [6] G.V. Bezmen, A.N. Shevchenko The choice of criteria and methods of quality assessing for the angle sensor based on the effect of nuclear magnetic resonance, Journal of Physics: Conference Series, Volume 1864, 13<sup>th</sup> Multiconference on Control Problems (MCCP 2020) 6-8 October 2020, Saint-petersburg, Russia 2021 г.
- [7] Чалков В.В. Шевченко А.Н. Исследование системы захвата и стабилизации лазера детектирвования квантового датчика вращения // Материалы XXIII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением» с международным участием, СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2021.
- [8] Дементьев М., Шевченко А. Обзор современного состояния разработки вертикально-излучающих лазеров для приборов квантовой электроники. Не издано.

# Исследование температуры поверхности чувствительного элемента микромеханического акселерометра при плазмохимическом травлении методом конечных элементов

Н.С. Каранин АО «Концерн «ЦНИИ « Электроприбор» Санкт-Петербург, Россия karanin.ns@gmail.com

Аннотация—Предложена математическая модель тепловых процессов глубокого реактивно-ионного травления для определения температуры поверхности подложки. Представлены результаты численного моделирования процесса нагрева чувствительного элемента микромеханического акселерометра при глубоком реактивно-ионном травлении. Определено общее изменение скорости осаждения полимера в процессе плазмохимического травления.

Ключевые слова—метод конечных элементов, оценка температуры, плазменное травление, процесс Боша, микромеханический акселерометр.

#### I. Введение

Глубокое реактивное ионное травление по технологии Bosch-процесса [1, 2] является распространенным способом изготовления различных чувствительных слоев при производстве МЭМС. Bosch-процесс представляет собой процесс плазмохимического травления с высоким аспектным соотношением. Преимуществами Bosch-процесса являются высокие скорости травления кремния и селективность кремния к многослойной маске (оксид кремния под фоторезистом). К недостаткам можно отнести наличие аспектного соотношения [3] и микрогеометрию стенок (scallops) [4]. Такие параметры процесса, как селективность и скорость травления маски, сильно зависят от однородности температуры поверхности подложки.

Температура может быть определена как микромасштабный параметр, так и макромасштабный в процессе плазмохимического травления. Температура подложки является макропараметром, значение которого контролируется термопарой на нижнем электроде установки плазмохимического травления. Эффективный отвод тепла и поддержание температуры подложки осуществляется гелиевым охлаждением оборотной стороны подложки [5].

Неравномерность температуры по поверхности подложки является важным параметром и зависит от конструкции нижнего электрода установки плазмохимического травления [6]. Микропараметром является температура каждого отдельного узла чувствительного элемента, полученного в процессе плазмохимического травления.

Основными узлами чувствительного элемента микромеханического акселерометра являются инерционная масса с упругим подвесом и электродами, основание с полостью и крышка с контактами [1]. Инерционная масса, расположенная над полостью, формируется методом глубокого реактивно-ионного травления для обеспечения геометрической точности функциональных элементов, таких как электродные структуры и упругий подвес. О.С. Юльметова АО «Концерн «ЦНИИ « Электроприбор», Университет ИТМО Санкт-Петербург, Россия olga@yulmetova.ru

В данной работе температура поверхности чувствительного элемента микромеханического акселерометра в процессе плазменного травления рассматривается как основной параметр, определяющий геометрию и точность функциональных структур, и была исследована в процессе плазмохимического травления методом численного моделирования.

#### II. Метод

Математическое моделирование основано на физикохимических принципах Bosch-процесса. Этот процесс состоит из циклического травления кремния и осаждения пассивирующей пленки для реализации анизотропного травления.

Разработана модель процесса нагрева при глубоком реактивно-ионном травлении для определения распределения температуры по поверхности чувствительного элемента.

Уравнение Фурье (1) использовалось для определения распределения температуры по поверхности чувствительного элемента методом конечных элементов:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = Q - h_c * (T_h - T) * S_c, \qquad (1)$$

где  $\rho$  – плотность чувствительного элемента,  $C_p$  – теплоемкость при постоянном давлении чувствительного элемента,  $\lambda$  – теплопроводность чувствительного элемента, Q – внешние потоки тепла,  $h_c$  – коэффициент теплопроводности при охлаждении гелием оборотной стороны подложки,  $T_h$  – температура подложкодержателя,  $S_c$  – площадь оборотной стороны чувствительного элемента.

Каждый этап процесса глубокого реактивно-ионного травления был проанализирован для определения тепловых потоков, приходящих на чувствительный элемент.

Первый этап представляет собой ионное травление пассивирующего слоя. Ионная бомбардировка является основным источником нагрева подложки на этой стадии Bosch-процесса [6, 7].

Тепловой поток (2) можно представить как произведение удельного теплового потока на площадь поверхности чувствительного элемента, подвергаемого травлению:

$$Q = 0.6n_i \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \left( V_P - \frac{k_B T_e}{2e} - V_S \right) e * S_{sput}, \qquad (2)$$

где  $n_i$  – концентрация ионов,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T_e$  – температура электронов,  $m_i$  – масса ионов,  $V_P$  – потенциал плазмы,  $V_s$  – напряжение смещения,  $S_{sput}$  – площадь бомбардируемой поверхности.

Вклад других составляющих теплового потока на этом этапе значительно меньше, поэтому они не учитывались [6].

Второй этап – травление кремния. Здесь основным источником тепла является энергия, выделяющаяся в результате экзотермической реакции (3).

$$Si + 4F \rightarrow SiF_4 \uparrow + \Delta H_r,$$
 (3)

где  $\Delta H_r$  – энтальпия реакции.

Поток тепла (4), возникающий в результате реакции, можно определить следующим образом [7]:

$$Q = \frac{\rho v_{etch} \Delta H_r}{M} * S_{etch}, \tag{4}$$

где  $v_{etch}$  – скорость травления чувствительного элемента, M – молярная масса чувствительного элемента,  $S_{etch}$  – площадь травления.

Третий этап Bosch-процесса представляет осаждение пассивирующего слоя. Уравнение теплового потока во время осаждения полимера было определено следующим образом [7, 8]:

$$Q = 0.6n_i \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \left( V_P - \frac{k_B T_e}{2e} - V_S \right) e * S_{dep}, \qquad (5)$$

где  $n_i$  – концентрация ионов,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T_e$  – температура электронов,  $m_i$  – масса ионов,  $V_P$  – потенциал плазмы,  $V_S$  – напряжение смещения,  $S_{dep}$  – площадь поверхности в чувствительном слое.

#### III. РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе разработанной модели появился количественный анализ тепловых процессов путем оценки температурных зависимостей, определяющих параметры процесса травления. На рис. 1 представлены результаты моделирования тепловых процессов и эксперимента по нанесению полимера для микромеханического акселерометра с вытравленным чувствительным элементом.

На рис. 1а представлены зависимости средней, минимальной и максимальной температур от времени, необходимого для завершения процесса травления подвижной массы за один цикл Bosch-процесса.

Практический интерес представляет третья область (III) представленных температурных зависимостей, где представлена зависимость температуры поверхности подвижной массы от продолжительности стадии осаждения полимера.

На рис. 1б показано изображение узлов чувствительного элемента после нанесения полимера. Скорость осаждения определяли методом рефлектометрии. Неравномерность скорости осаждения составляет 34% по поверхности протравленного чувствительного элемента. Отличие скорости осаждения полимера на подвижной массе акселерометра (2,65 нм/с) от скорости осаждения на неподвижных элементах (4,03 нм/с) приводит к необходимости учитывать неравномерность процесса в том числе в пределах отдельного чувствительного элемента, а не только по подложке.

Полученная информация о распределении температуры чувствительного элемента позволила определить зависимость изменения селективности от продолжительности процесса травления. Знание селективности позволяет с высокой точностью определить минимальную толщину маски, необходимую для формирования структур чувствительного элемента микромеханического акселерометра с требуемыми геометрическими параметрами.



Рис. 1. Результаты: зависимости средней, минимальной и максимальной температур от времени (a); изображение узлов чувствительного элемента после нанесения полимера (b)

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты моделирования тепловых процессов при глубоком реактивном ионном травлении чувствительного элемента микромеханического акселерометра. Рассмотрены основные источники тепловой энергии, поступающей на поверхность чувствительного элемента на каждой стадии технологического цикла Bosch-процесса. Представлены результаты моделирования вытравленного чувствительного элемента микромеханического акселерометра.

#### ЛИТЕРАТУРА

- N.S. Karanin, Deep Reactive Ion Etching of Device Layer during Manufacture Micromechanical Accelerometer, 2022 Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus), 2022, pp. 962-965.
- [2] Adrian J.T. Teo, Holden Li, Say Hwa Tan, and Yong-Jin Yoon, An optical MEMS accelerometer fabricated using double-sided deep reactive ion etching on silicon-on-insulator wafer, *IOP Publishing Ltd Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2017, p. 8.
- [3] S.L. Lai, D. Johnson, and R. Westerman, Aspect ratio dependent etching lag reduction in deep silicon etch processes, Journal of Vacuum Science & Technology, 2006, pp. 1283-1288.

- [4] J.S. Park, D.H. Kang, S.M. Kwak, et al, Low-temperature smoothing method of scalloped DRIE trench by post-dry etching process based on SF6 plasma, Micro and Nano Syst Lett, 2020.
- [5] Yeon Ho Im, Yoon-Bong Hahn, Heat Transfer between Wafer and Electrode in a High Density Plasma Etcher, *Korean J. Chem. Eng.* 2002, pp. 347-350.
- [6] T. Samir, Imporing wafer temperature uniformity for etch application, Dissertation, 2003.
- [7] H. Kersten, H. Deutsch, H. Steffen, G.M.W. Kroesen, R. Hippler, The energy balance at substrate surfaces during plasma processing, Vacuum, 2001, pp. 385-431.
- [8] D. Rémi, Th. Anne-Lise, S. Nadjib, A Heat Flux Microsensor for Direct Measurements in Plasma Surface Interactions, Microsensors, 2011, pp. 87-108.
- [9] T. Tandou, S. Kubo, K. Yokogawa, N. Negishi, M. Izawa, Improving the Etching Performance of High-Aspect-Ratio Contacts by Wafer Temperature Control–Uniform Temperature Design and Etching Rate Enhancement, Precision Engineering, 2015, pp. 44.
- [10] J. Pagazani, F. Marty, A. Babayan, A. Hoessinger, G. Lissorgues and A. Nejim, DRIE process modelling – A MEMS case study on a real design, 2013 Symposium on Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS (DTIP), Barcelona, Spain, 2013, pp. 1-3.
- [11] Y. Gianchandani and K. Najafi, Micron-sized, high aspect ratio bulk silicon micromechanical devices, [1992] Proceedings IEEE Micro Electro Mechanical Systems, Travemunde, Germany, 1992, pp. 208-213, doi: 10.1109/MEMSYS.1992.187719.

## Метод коррекции ошибок акселерометра типа Q-flex на основе метода опорных векторов

П.А. Филатов *МФТИ* Долгопрудный, Россия petr.filatov@phystech.edu

> А.Б. Колчев *АО «ЛАЗЕКС»* Долгопрудный, Россия <u>laser@mail.mipt.ru</u>

А.А. Фомичев МФТИ, АО «ЛАЗЕКС» Долгопрудный, Россия laser@mail.mipt.ru П.В. Ларионов *АО «ЛАЗЕКС»* Долгопрудный, Россия <u>laser@mail.mipt.ru</u>

А.Б. Тарасенко *МФТИ* Долгопрудный, Россия <u>laser@mail.mipt.ru</u>

Аннотация—Предложен алгоритм коррекции ошибок сигнала акселерометра типа Q-flex на основе метода опорных векторов SVM, который использует в качестве входных параметров температуру и сигнал кажущегося ускорения, измеряемые в реальном времени. Данный алгоритм характеризуется простотой в реализации и высокой скоростью обработки на вычислительном оборудовании за счет изящности самого метода в задачах линейной и нелинейной регрессии. Регуляризация в SVM устраняет мультиколлинеарность и уменьшает набор коэффициентов в переобучение. Регуляризация эквивалентна введению априорного распределения в пространстве коэффициентов аппроксимирующей модели. Приводятся результаты компенсации модели, полученной методом опорных векторов.

Ключевые слова—акселерометр Q-flex; метод опорных векторов SVM.

## I. Введение

Для определения навигационных параметров объекта используется широкий класс приборов – навигационных систем. Для автономных и интегрированных со спутником навигационных систем предложены различные варианты по обработке и выдаче информации, называемыми алгоритмами работы НСИ [1]. Точность НСИ определяется как точностью инерциальных датчиков – акселерометров (АК) и гироскопов (ЛГ), так и алгоритмами компенсации погрешностей навигационной системы и инерциальных датчиков.

При работе инерциальных датчиков возникают погрешности, которые приводят к медленному накоплению ошибок НСИ. Шумовые составляющие сигнала можно отфильтровать или проводить вычисления на основе усредненных данных за временной промежуток [1,3]. Систематические ошибки (смещение нуля, погрешность масштабного коэффициента, неортогональность осей чувствительности) рассчитывают с помощью калибровки и последующего определения коэффициентов математической модели погрешностей [2]. Среди факторов, влияющих на погрешность измерений, выступает температура и скорость ее изменения. Обычно используется метод температурной компенсации, основанный на моделировании методом наименьших квадратов (МНК), по которому вычисляют коэффициенты температурной модели погрешностей. Однако точность аппроксимации с использованием данного метода может давать большие отклонения по не скомпенсированной ошибке из-за нелинейного вида температурной зависимости. Для увеличения точности и эффективности работы акселерометров, необходимо определить оптимальную температурную модель погрешностей АК и компенсировать температурную ошибку сигнала АК.

За последние десятилетие технология машинного обучения привлекла много научных интересов в задачах нелинейного моделирования температуры и компенсации погрешностей в режимах параллельной обработки и самообучения [4]. В настоящей работе предложен метод коррекции погрешностей акселерометров с помощью алгоритма опорных векторов SVM (Support Vector Machine). Данный метод может применяться для решения задач нелинейной регрессии (моделирование данных нелинейной моделью), т.е. по алгоритму обучаемой выборки находится аппроксимирующая функция, имеющая минимально возможное отклонение є от истинного "закона природы", для восстановления зависимости измеряемой величины [5]. Полученная таким образом модель позволяет вычислить данные, вырабатываемые инерциальными датчиками, для тех внешних факторов, оказывающих влияние на измерения и погрешности, которые не были учтены на стадии калибровки, либо проявляются в различные промежутки времени работы НСИ. Алгоритм метода опорных векторов может применяться в случае значительных отклонений остаточных ошибок, т.е. ошибок после компенсации погрешностей математической моделью навигационной системы.

Структура доклада представлена в четырех секциях. В разделе I представлено введение в проблему и рассмотрены существующие методы анализа погрешностей. В разделе II представлен принцип работы АК и математическая модель погрешностей АК. Приведено описание алгоритма нелинейной регрессии с использованием метода SVM. Результаты и анализ экспериментальных данных приведены в разделе III. Последний раздел IV посвящен выводам по проделанной работе.

## II. Постановка задачи

## А. Акселерометры типа Q-flex

Навигационные маятниковые Q-flex акселерометры компенсационного типа используются в ИНС для определения кажущегося ускорения. [2] Точность преобразования ускорения в электрический сигнал принято определять погрешностью смещения нуля (СН) и погрешностью масштабного коэффициента (МК), а также влиянием температуры и временных параметров на эти величины. Далее рассмотрены примеры аппроксимирующих моделей погрешностей акселерометров с учетом влияния температуры. Расчетное значение масштабного коэффициента АК определяется выражением:

$$K_{M} = K_{M0} + \Delta K_{M} + \Delta K_{1T} T + \Delta K_{2T} T^{2} (1)$$

где  $K_{M0}$ ,  $\Delta K_{M}$  – номинальное значение и отклонение от номинального значения МК АК;  $\Delta K_{1T}$ ,  $\Delta K_{2T}$  – коэффициенты зависимости МК АК от температуры – Т.

Расчетное значение величины скорости дрейфа СН АК определяется выражением:

$$W_0 = W_C + \Delta W_C + \Delta W_{1T}T + \Delta W_{2T}T^2 \qquad (2)$$

где  $W_C$ ,  $\Delta W_C$  – номинальное значение и отклонение от номинального значения скорости дрейфа нулевого сигнала АК,  $\Delta W_{1T}$ ,  $\Delta W_{2T}$  – коэффициенты зависимости скорости дрейфа нулевого сигнала АК от температуры.

$$\psi_{ik} = \Psi_{ik} + \Psi_{Tik}T, \quad i,k = X,Y,Z; \quad i \neq k$$
 (3)

где  $\Psi_{ik}$ ,  $\Psi_{Tik}$  – углы неортогональности и температурный коэффициент углов неортогональности соответственно акселерометров. Приведенные модели расчетов погрешностей имеют температурную зависимость первого и второго порядка, зачастую вводятся коэффициенты более высоких порядков.

### Б. Функция регрессии в задаче SVM

Суть метода опорных векторов заключается в нахождение зависимости по эмпирическим данным, т.е. нахождении функции f(x) - оптимальной гиперплоскости, которая имеет отклонение не более  $\varepsilon$  от целевых значений обучающих данных и является максимально плоской [6,7]. Из-за нелинейности модели данных с помощью SVM не удается напрямую найти оптимальную гиперплоскость из пространства заданных входных данных. Решение этой проблемы состоит в том, чтобы отобразить входные данные в многомерное пространство признаков с помощью нелинейного отображения и выполнить линейную регрессию в этом пространстве.

Дана обучающая выборка  $X^{l} = (x_{i}, y_{i})_{i=1...l}^{l} \in \mathbb{R}^{N} \times \mathbb{R}$ , где  $x_{i}$  – входная переменная,  $y_{i}$  - целевое значение, а l – размер обучающей выборки. Тогда необходимо найти такую функцию  $f(x) = \langle w, \Phi(x) \rangle + w_{0}$ , где функция  $\Phi(x)$  и вектор w принадлежат многомерному пространству признаков - F,  $w_{0} \in \mathbb{R}$ . Тогда задача для обучающей выборки, по нахождению  $w, w_{0}$ , минимизировать регуляризованную функцию риска:

$$\sum_{i=1}^{l} \left( \left| \left\langle w, \Phi(x_i) \right\rangle + w_0 - y_i \right| - \varepsilon \right)_+ + \frac{1}{2C} \left\| w \right\|^2 \to \min_{w, w_0} \quad (4)$$

где ||w|| – норма пространства F,  $||w||^2$  – регуляризованный член (квадрат нормы вектора весов),  $\varepsilon$  – максимально возможное отклонение целевой функции (в задаче

регрессии по методу МНК функция потерь  $Q_{(\varepsilon)} = \varepsilon^2$ ), С – константа регуляризации. В критерий минимизации эмпирического риска введено понятие функции потерь – отступа, обозначающего расстояние от объекта до границы классов и в задачах линейной классификации. Для задач регрессии функция потерь, с заменой "1" из задачи классификации на  $\varepsilon$ , имеет невыполнимые ограничения (5), с другой стороны, для того чтобы задача имела решение, SVM позволяет выбрать такую функцию потерь, которая будет давать оптимальное решение с учетом ограничения (5), при добавке в виде неотрицательных релаксационных переменных  $\xi_i$ ,  $\xi_i^*$ , являющихся ошибкой обучения с учетом  $\varepsilon$ .

$$Q(f(x) - y) = \max\{0, |y - f(x)| - \varepsilon\}$$
(5)

С учетом изложенного выше, (4) и (5) можно представить как выпуклую задачи оптимизации с ограничениями (6).

$$\begin{cases} C\sum_{i=1}^{l} \left(\xi_{i} + \xi_{i}^{*}\right)_{+} + \frac{1}{2} \left\|w\right\|^{2} \rightarrow \min_{w, w_{0}, \xi, \xi^{*}} \\ \left\langle w, \Phi(x_{i}) \right\rangle + w_{0} - y_{i} \leq \varepsilon + \xi_{i} \\ y_{i} - \left\langle w, \Phi(x_{i}) \right\rangle - w_{0} \leq \varepsilon + \xi_{i}^{*} \end{cases}$$
(6)

Согласно теории двойственности Вульфа функция Лагранжа L представляется в виде:

$$L = \frac{1}{2} \|w\|^{2} + C \sum_{i=1}^{l} (\xi_{i} + \xi_{i}^{*}) - \sum_{i=1}^{l} (\eta_{i}\xi_{i} + \eta_{i}^{*}\xi_{i}^{*}) - \sum_{i=1}^{l} a_{i}(\varepsilon + \xi_{i} + y_{i} - \langle w, \Phi(x_{i}) \rangle - w_{0}) + \sum_{i=1}^{l} a_{i}^{*}(\varepsilon + \xi_{i}^{*} - y_{i} + \langle w, \Phi(x_{i}) \rangle - w_{0})$$
(7)

где  $a_i$  и  $\eta_i$  – неотрицательные множители Лагранжа. Седловая точка функции Лагранжа находится путем приравнивания частных производных Лагранжиана к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta w} = w - \sum_{i=1}^{l} (a_i^* - a_i) \Phi(x_i) = 0\\ \frac{\delta L}{\delta w_o} = \sum_{i=1}^{l} (a_i^* - a_i) = 0\\ \frac{\delta L}{\delta \xi_i} = C - a_i^* - \eta_i^* = 0 \end{cases}$$
(8)

Тогда по Теореме Каруша-Куна-Таккера (К-К-Т) a и  $W_0$  можно получить из уравнения (7) при подстановке (8). Наборы данных с ненулевыми множителями Лагранжа и есть опорные вектора. Нелинейная функция оценки будет выглядеть следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} (a_i^* - a_i) \langle \Phi(x_i) \Phi(x) \rangle + w_o .$$
 (9)

Для стандартного SVM, описанного выше, размер матрицы при решении задачи квадратичной оптимизации сильно зависит от количества обучающих выборок, что легко приведет к слишком большому масштабу решения и низкой скорости вычислений. По этим причинам изучается расширенный алгоритм стандартного SVM, названный LS-SVM [8]. Ограничения неравенства в стандартном алгоритме SVM заменяются ограничениями равенства в LS-SVM, поэтому проблема оптимизации, описанная уравнением, (6) сводится к задаче, описываемой следующим образом:

$$\frac{C}{2} \sum_{i=1}^{l} \left(\xi_{i}^{2}\right)_{+} + \frac{1}{2} \left\|w\right\|^{2} \rightarrow \min_{w, w_{0}, \xi, \xi^{*}} \qquad (10)$$
$$y_{i} - \left\langle w, \Phi(x_{i}) \right\rangle + w_{0} = +\xi_{i}$$

Значение *w* получают в двойном пространстве в соответствии с целевой функцией и ограничениями, описанными в уравнении (10) и строят итоговое уравнение Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} \left\| w \right\|^2 + C \sum_{i=1}^{l} \xi_i^2 - \sum_{i=1}^{l} a_i (\xi_i - y_i + \langle w, \Phi(x_i) \rangle + w_0)$$
(11)

Тогда оптимальный вектор множителя Лагранжа  $a_i$  может быть проанализирован и приведен в соответствии с условиями К-К-Т. Процедура регрессии задается поиском решений  $a_i$  из (11) и системы (8), в которую добавляют (12).

$$\frac{\delta L}{\delta a_i} = \langle w, \Phi(x_i) \rangle + w_0 + \xi_i - y_i = 0 \qquad (12)$$

По условию Мерсера вводится ядро удовлетворяющая следующему уравнению:

$$k(x_i, x_j) = \left\langle \Phi(x_i), \Phi(x_j) \right\rangle$$
(13)

Наконец, задача оптимизации трансформируется в решение следующих линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & K(x_{1}, x_{1}) + \frac{1}{c} & \cdots & K(x_{1}, x_{1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & K(x_{l}, x_{l}) & \cdots & K(x_{l}, x_{l}) + \frac{1}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{0} \\ a_{1} \\ \vdots \\ a_{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_{1} \\ \vdots \\ a_{l} \end{bmatrix}$$
(14)

Функция регрессии может быть получена из решения (14).

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^{l} a_i K(x_i, x) + w_0 \\ K(x, x') = \exp\left(-\frac{\|x - x'\|^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$$
(15)

где *о* – параметр ядра.

#### III. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе представлены результаты стендовых испытаний перспективной навигационной системы НСИ 2020 [9].

После обработки данных мат. моделью получены большие отклонения во время выхода системы на "рабочий режим" (Рис.1). Связано это с некорректным данными температуры, из-за отслоения термодатчиков от корпусов акселерометров. Однако с помощью SVM возможно получить аппроксимацию сигнала акселерометра.



Рис. 1. Выход на режим AK\_X, Ax(T) – сырые данные, f(T)\_x – аппроксимирующая функция SVM

Результаты аппроксимации и значения СКО отображены на рис.(2,3,4) и приведены в таблице 1.



Рис. 2. Остаточная ошибка аппроксимации моделью и функцией f(x) алгоритма SVM X акселерометра



Рис. 3. Остаточная ошибка аппроксимации моделью и функцией f(x) алгоритма SVM Y акселерометра



Рис. 4. Остаточная ошибка аппроксимации моделью и функцией f(x) алгоритма SVM Z акселерометра

ТАБЛИЦА 1. СКО ОСТАТОЧНОЙ ПОГРЕШНОСТИ МАТ. МОДЕЛИ ИБ И SVM

Акселерометры	Х	Y	Z
СКО мат. модель	5,52416E-4	4,78016E-4	7,14981E-4
[m/sec^2]			
СКО оптималь-	2,18811E-4	1,78019E-4	7,1519E-4
ной функции f(x)			
SVM [m/sec^2]			

СКО остаточных погрешностей сигналов акселерометров меньше, как минимум в 2 раза, при использовании аппроксимации SVM, за исключением акселерометра Z. Таким образом, как алгоритм пост обработки метод SVM может быть практичен для определения несоответствий после проведения калибровки и отработки мат. модели инерциальных датчиков.

#### IV. Выводы

Алгоритмы машинного обучения легки в адаптации для анализа и прогнозирования физических данных [10]. Коррекция данных с помощью таких алгоритмов пригодна на любой стадии вычислений при работе НСИ. Не таким простым может оказаться внедрение алгоритмов в обработку сигналов в реальном времени, из-за требуемых высоких вычислительных мощностей. Эта проблема может быть решена сокращением выборки, увеличением отступа  $\varepsilon$  и усреднения данных выборки  $x_i, y_i$ . Применением дополнительных вычислителей.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Матвеев, В.В. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В.В. Матвеев, В.Я. Распопов ; под общ. ред. д.т.н. В.Я. Распопова. – СПб.: Изд.-во ГНЦ РФ ОАО «Концерн ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – 280 с.
- [2] Черняк, Н.Г. Исследование метрологических характеристик навигационно маятникового компенсационного акселерометра с трансформаторным датчиком угла / М.Г. Черняк, Е. Хазинедарлу // Информационные системы, механика и управления: научнотехнический сборник. 2009. Вып. 3. С. 5-20.
- [3] Yingjun Pan, Leilei Li, Chunhua Ren, Haoling Luo, Study on the compensation for a quartz accelerometer based on a wavelet neural network, Measurement Science and Technology 21 (2010) 10.
- [4] V.N. Vapnik, The Nature of Statistical Learning Theory, Springer, New York, 1999. pp. 988–999;
- [5] Сео Дже Бом. Оптимизация параметров и моделирование рабочих режимов в компенсационных акселерометрах типа Q-flex и Si-flex: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук Москва, 2012 г.
- [6] J.A.K. Suykens, Nonlinear Modeling and Support Vector Machines, in: Proceedings of IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, Academic, Budapest, Hungary, 2001.
- [7] Воронцов К. В. Комбинаторный подход к оценке качества обучаемых алгоритмов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 13. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — С. 5–36. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2004-5
- [8] J.A.K. Suykens, J. Vandewalle, Least squares support vector machine classifiers, Neural Processing Letters 9 (3) (1999) 293–300.
- [9] A. B. Tarasenko, A. A. Fomichev, P. V. Larionov, A. B. Kolchev, P. V. Filatov and D. E. Borodulin, "Flight Tests of a Compact Integrated Navigation System," 2022 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), Saint Petersburg, Russian Federation, 2022, pp. 1-6, doi: 10.23919/ICINS51784.2022.9815418.
- [10] G. Wei, G. Li, and X.W. Long, "Application of least squares-support vector machine in system level temperature compensation of ring laser gyroscope,"Measurement, vol. 44, pp. 1898-1903, September 2011.

## Применение вейвлет-преобразования при анализе показаний инерциальных датчиков, установленных на железнодорожном вагоне

А.В. Большакова Каф. лазерных измерительных и навигационных систем Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) Санкт-Петербург, Россия balvas13@yandex.ru

Д.Ю. Ларионов Каф. лазерных измерительных и навигационных систем Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) Санкт-Петербург, Россия lariondan@yandex.ru А.М. Боронахин

Каф. лазерных измерительных и навигационных систем Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) Санкт-Петербург, Россия amboronahin@etu.ru

Л.Н. Подгорная Каф. лазерных измерительных и навигационных систем Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) Санкт-Петербург, Россия Inpodgornaya@etu.ru

Р.В. Шалымов Каф. лазерных измерительных и навигационных систем Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) Санкт-Петербург, Россия rvshalymov@etu.ru Е.Д. Бохман Каф. лазерных измерительных и навигационных систем Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) Санкт-Петербург, Россия edbokhman@mail.ru

А.Н. Ткаченко Каф. лазерных измерительных и навигационных систем Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) Санкт-Петербург, Россия antkachenko@etu.ru

Аннотация—В статье, на основе показаний инерциальных микромеханических датчиков, установленных на буксах вагона, анализируется динамика взаимодействия в системе колесо-рельс. Показана эффективность использования для этой цели непрерывного вейвлет-преобразования. Приведены результаты анализа для случая прохождения двух типов рельсовых стыков.

Ключевые слова—акселерометр, дефект рельса, диагностика, импульсный дефект, сигнал, фильтрация, вейвлетпреобразование, рельсовый стык, колебания, вибрации.

#### I. Введение

Одним из средств измерения параметров дефектов поверхности катания рельсового пути является система КИН (Коротких и Импульсных Неровностей), представляющая собой инерциальные измерительные модули, устанавливаемые на буксовых узлах тележки вагона. Наиболее распространенным источником значимых реакций в показаниях инерциальных датчиков являются стыковые соединения, служащие для соединения рельсов в единую нить. В зависимости от конструкции стыки подразделяются на болтовые, клееболтовые и сварные.

Классическим средством анализа стационарных непрерывных сигналов является преобразование Фурье (ПФ). Непрерывное преобразование Фурье имеет ряд недостатков [2]. Например, должна быть известна вся временная последовательность сигнала для получения преобразования на одной частоте. Также не все сигналы являются стационарными. Поэтому появилась модификация ПФ, называемая оконным или кратковременным преобразованием Фурье. Перед ПФ производится операция умножения сигнала на окно. В качестве окна выступает локальная функция с возможностью сдвига вдоль временной оси для вычисления преобразования в разных позициях. Особенностью такого подхода является то, что фиксированное окно не может быть адаптировано к локальным свойствам сигнала. Вейвлет-преобразование (ВП) позволяет устранить описанные недостатки. Если рассматривать данные инерциальных датчиков как неоднородные процессы, то для их изучения наиболее приспособленным аппаратом представляется ВП. Непрерывное ВП представляет собой произведение сигнала на набор базисных функций. Базисные функции – двухпараметрические функции, которые хорошо локализованы и во времени, и по частоте [2, 3]. Такие функции называются вейвлетами («короткие волны») и рассматриваются как масштабированные и сдвинутые версии функции-прототипа. Сама базисная функция позволяет варьировать размеры окна и способна «перемещаться» по оси времени.

## II. ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА СИГНАЛОВ АКСЕЛЕРОМЕТРОВ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ СТЫКОВ

## А. Болтовой стык

Прохождение болтового стыка можно описать следующим образом. Колесо движется до торца принима-

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-01428, https://rscf.ru/project/22-29-01428/

ющего рельса. Акселерометры, установленные на буксе колеса, регистрируют увеличение ускорения. Затем происходит удар колеса о принимающий рельс, и после окончания действия ударной силы, к низкочастотной составляющей свободных колебаний добавляется вибрация [4]. Таким образом, при прохождении болтового стыка на вейвлет-скалограмме (рис. 1) сигналов акселерометров появляются несколько ярко выраженных областей. Эти области возникают в диапазонах частот: (1) 600-700 Гц после перехода колеса на принимающий рельс и (2) 900-1000 Гц локально 2-3 раза за время затухания колебательного процесса. Чередованием светлых и темных пятен на горизонтали одной частоты на вейвлетскалограмме отражаются биения. Иногда в сигнале содержится и третья гармоника с частотой около 2,2-2,4 кГц (3). На рисунке 2 представлены (сверху вниз): сигнал акселерометра при прохождении болтового стыка; низкочастотная составляющая этого сигнала (до 200 Гц); выделенные выше диапазоны колебаний (1), (2), (3).

Сигнал, содержащий информацию о геометрии стыка (соответствующий вертикальному перемещению колеса в зоне стыкового зазора) лежит в низкочастотной области [5] (до 200 Гц). Колебания в области (1) возникают вследствие удара о принимающий рельс и быстро затухают. Колебания с частотами в диапазонах (2) и (3) существуют на протяжении всего движения подвижного состава со значительным увеличением амплитуды, вызванным ударом о принимающий рельс и последующим длительным затуханием. Сигналы в обозначенных диапазонах имеют вид биений, то есть вызваны колебаниями на близких частотах. Наблюдаемые высокочастотные колебания являются вибрацией системы колесо-рельс, возбужденной ударом о принимающий рельс при прохождении стыка. Также можно отметить, что высокочастотная составляющая имеет более длительный период затухания по сравнению с колебаниями на низких и средних частотах. Это связано с особенностями строения пути. Время затухания колебательного процесса не зависит от скорости движения состава и максимальной амплитуды сигнала акселерометра при ударе и составляет порядка 0,03 с (были оценены сигналы с амплитудой от 110 до 320 м/с<sup>2</sup>, скорости движения от 5,5 до 12,8 м/с).

## В. Сварной стык

Прохождение сварного стыка характеризуется яркой высокочастотной составляющей (выше 3 кГц) и значительно менее яркой низкочастотной составляющей (до 300 Гц) (рис. 3). Последняя представляет собой в вейвлет-скалограмме две сливающихся области, связанные с: (а) длиной проходимой короткой неровности (длина волны периодического или импульсного дефекта на текущей скорости движения вагона); (б) геометрией и свойствами рельсошпальной решетки в зоне сварного стыка (расстоянием между шпалами; наличием отрясенных шпал; упругостью элементов конструкции пути, включая рельсы, шпалы, шпальные прокладки, крепления, состояние балластной призмы). Время затухания колебаний значительно больше по сравнению с болтовым стыком и составляет порядка 0,05 с.



Рис. 1. Сигнал акселерометра и его вейвлет-скалограмма при прохождении болтового стыка.



Рис. 2. Сигнал акселерометра; его составляющие, связанные с прохождением стыка; колебания, отмеченные на рисунке 1

Следует отметить, что разделение двух вышеперечисленных причин возникновения низкочастотных колебаний в показаниях акселерометра является ключевой задачей при диагностике рельсовых дефектов. Прямой анализ сигнала как во временной, так и в частотной области (с помощью ПФ) не позволяет это сделать [5]. В то же время в вейвлет-скалограмме зоны, соответствующие причинам (а) и (б), могут быть разделены. Это позволяет выделить в сигнале датчика компоненты, связанные исключительно с формой неровности, а значит – повысить точность диагностики (определения этой формы).



Рис. 3. Сигнал акселерометра при прохождении сварного стыка и его вейвлет-скалограмма в диапазоне до 2200 Гц

Сравнивая прохождение болтового и сварного стыков, можно отметить следующее:

- низкочастотный сигнал, лежащий примерно в одном диапазоне для двух типов рельсовых стыков, описывает геометрию прохождения стыкового зазора колесом; его частотный состав определяется параметрами стыка и скоростью движения состава;
- при прохождении сварного стыка на выделенных ранее для болтового стыка диапазонах частот (1) и (2) не присутствует сколько-нибудь значимых колебаний;

при прохождении сварного стыка на выделенном ранее для болтового стыка диапазоне частот
 (3) наблюдается увеличение амплитуды, но оно в разы меньше, чем в случае болтового стыка.

### III. Заключение

Таким образом, первичный анализ показаний инерциальных датчиков с применением вейвлет-преобразования показал потенциальную возможность: 1) локализации ударных и вибрационных воздействий, имеющих разную причину возникновения, что создает потенциал к увеличению точности диагностики; 2) выявления болтовых стыков (их идентификации на фоне остальных типов ударных воздействий, включая, в первую очередь, сварные стыки) по показаниям инерциальных датчиков без привлечения дополнительных источников информации (магнитометрических датчиков, оптической системы) [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

- Boronahin, A.M. Inertial system for railway track diagnostics / E.D. Bokhman, A.M. Boronahin, Yu.V. Filatov, D.Yu. Larionov, L.N. Podgornaya, R.V. Shalymov // Symp. Inertial Sensors and Systems. Karlsruhe, 2012. C. 17.1–17.20.
- [2] Chui, Ch.K., Wavelet Analysis and Its Applications. Volume 1. An Introduction to Wavelets, Academic Press, 1992, 73 p.
- [3] Mallat S.A., Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, 2009, 805p.
- [4] Лысюк В.С. Прочный и надежный железнодорожный путь / Сазонов В.Н., Башкатова Л.В. Москва, Академкнига, 2003, 588 с.
- [5] Bolshakova, A.V. Railway Track Diagnostics by Combined Kinematic and Vibroacoustic Analysis / A.M. Boronakhin, D.M. Klionsky, D.Yu. Larionov, A.N. Tkachenko, R.V. Shalymov // Proceedings of the 2022 International Conference on Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies (IT&QM&IS), St. Petersburg, ETU "LETI", 2022. C. 188-192.
- [6] Boronakhin, A.M. Detection and classification of rail track flaws using inertial and magnetometric sensors / D.Y. Larionov, L.N. Podgornaya, A.N. Tkachenko, R.V. Shalymov // Proceedings of the 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus), St. Petersburg, ETU "LETI", 2018, C. 1066-1070.

# Универсальный прецизионный стенд с инерциальными чувствительными элементами и аэростатическим подвесом для контроля измерителей угловой скорости

Д.М. Калихман, Е.А. Депутатова Филиал АО «НПЦАП» – «ПО «Корпус» 410010, Россия, г. Саратов, ул. Осипова, д. 1 lidkalihman@yandex.ru

Аннотация—В докладе рассмотрена схема построения прецизионного стенда с инерциальными чувствительными элементами и аэростатическим подвесом по оси вращения и цифровой системой управления с использованием в качестве инерциальных чувствительных элементов двух измерителей угловой скорости и акселерометров, измеряющих тангенциальное и центростремительное ускорения точек их крепления к дополнительной платформе стенда, с различными полосами пропускания для компенсации вибраций, возбуждаемых аэростатическим подвесом.

Ключевые слова—прецизионный поворотный стенд, цифровая система управления, аэростатический подвес, измеритель угловой скорости, акселерометр, эталон, вибрация, полоса пропускания.

## I. Введение

Технологии БИНС (бесплатформенных инерциальных навигационных систем) находят все более широкое распространение во всех областях развития навигационной техники, начиная от авиационных, космических и морских систем и заканчивая пешеходной навигацией [8, 28]. В свою очередь развиваются и инерциальные чувствительные элементы – первичные измерители БИНС, причём все более серьезное распространение получают измерители угловой скорости на новых физических принципах: лазерные (ЛГ), волоконно-оптические (ВОГ), волновые твердотельные (ВТГ) гироскопы и гироскопы, основанные на эффекте ядерного магнитного резонанса (ЯМГ), в перспективе должны получить развитие измерители, основанные на волнах де Бройля или волнах материи [4, 6, 24, 27, 28, 34]. Отличительной особенностью этих приборов является отсутствие зависимости их базовых точностных характеристик – погрешности масштабного коэффициента и случайной составляющей дрейфа как в запуске, так и между ними от диапазона измерения, свойственной для электромеханических приборов, у которых эти параметры определялись трением и тяжением проводников в датчике момента [25, 26]. Именно поэтому прецизионные измерители угловой скорости с газодинамической опорой ротора и магнитным центрированием его подвеса имели диапазон измерения не выше 3 °/с при погрешности масштабного коэффициента 0,0005 % и случайной составляющей дрейфа в запуске не ниже 0,001 °/ч [29, 30]. Современные прецизионные измерители угловой скорости имеют базовые технические характеристики не хуже упомянутых выше, а диапазоны измерения у ВОГ и ЛГ составляют более 100 °/с, а у ВТГ и ЯМГ могут доходить до нескольких тысяч °/с [28]. Это означаС.В. Пчелинцева, В.О. Горбачев Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А. 410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77 pchelintseva@inbox.ru

ет, что прецизионные стенды для контроля масштабного коэффициента приборов подобного класса не могут строиться по принципам обычных высокоточных следящих систем, а должны использовать новые принципы построения, в основе которых лежит принцип применения самих высокоточных инерциальных чувствительных элементов (ИЧЭ) - прецизионных измерителей угловой скорости (ИУС) и линейного ускорения (ИЛУ) в системе управления современными стендами. Эти принципы были изложены в монографии [9] и в работах [10, 12, 17, 18, 19, 20], в которых были рассмотрены системы с аналоговыми и с цифровыми системами управления (ЦСУ). В 2022 году на XXIX Международной конференции по интегрированным навигационным системам, был представлен доклад [13], на основе которого опубликована статья [14], где была рассмотрена общая концепция построения функционально-кинематической схемы государственного первичного эталона задания и хранения угловой скорости универсального стенда, из которой как частные случаи получаются схемотехнические решения построения иерархически подчинённых ему эталонов с ИЧЭ и ЦСУ. Причем в качестве подвеса стенда предлагалось использовать аэростатические опоры, которые уже давно применяются в высокоточных прецизионных стендах [33], а в качестве ИЧЭ – 2 прецизионных ИУС с цифровыми обратными связями разной физической природы (например, прецизионные ВОГ и ВТГ), широкодиапазонные ИЛУ с цифровой системой управления [11, 15], высокоточные оптические датчики угла [36], а в управляющем процессоре – разработанные авторами алгоритмы управления, позволяющие скомплексировать информацию от первичных измерителей [16]. Предложенные схемотехнические решения могут быть использованы как в государственном первичном эталоне, так и в иерархически подчиненных ему эталонах [14]. Проблема заключается в том, что аэростатические опоры могут возбуждать вибрации, котрые не являются существенными в классических следящих системах без применения ИЧЭ, но которые будут измеряться прецизионными ИУС и передаваться в систему управления стендом в виде помех, что будет ухудшать точностные характеристики стенда. Предлагаемый доклад посвящен решению данной задачи путем конкретизации схемотехнического решения, разработанного в работах [13, 14], выполненных в рамках гранта РНФ 22-29-00101.

Работа поддержана РНФ, грант 22-29-00101.

## II. Схемотехническое решение прецизионного двухгироскопного стенда

Предлагаемый стенд содержит корпус (на рис. 1 не показан), вал 1, имеющий ось вращения относительно корпуса, реализованную на аэростатических опорах 3, которая является выходной осью стенда. На валу 1 закреплена платформа 2, предназначенная для установки испытуемого прибора 4, а также чувствительные элементы стенда: акселерометры 11, 12 и измерительные датчики угловой скорости - 7, 8. Конструктивно это выполнено так, что на валу 1 закреплена дополнительная платформа 13, на которой размещены все чувствительные элементы. При этом акселерометры 11 в количестве трех закреплены так, что измеряют тангенциальное ускорение точек их крепления к платформе 13 стенда. (Для этих акселерометров введены обозначения 1т, 2т, 3т). В дальнейшем эти акселерометры (1т, 2т, 3т) будут называться тангенциальными [9]. Ось чувствительности каждого акселерометра 11 перпендикулярна радиусу R<sub>1</sub> дополнительной платформы 13. Радиусы R<sub>1</sub> акселерометров 11 (1т, 2т, 3т) расположены под углами 120°. Акселерометры 12 в количестве трех закреплены на дополнительной платформе 13 так, что они измеряют центростремительное ускорение точек их крепления к платформе 13 стенда. (Для этих акселерометров введены обозначения 1ц, 2ц, 3ц). В дальнейшем эти акселерометры (1ц, 2ц, 3ц) будут называться центростремительными [9]. Ось чувствительности каждого из акселерометров 12 расположена вдоль радиуса R<sub>2</sub> платформы 13 в сторону, противоположную действию центростремительного ускорения. Радиусы R2 акселерометров 12 (1ц, 2ц, 3ц) расположены под углами 120° и должны быть больше, нежели радиусы R<sub>1</sub> с целью расширения диапазона угловых скоростей, измеряемых центростремительными акселерометрами. В качестве акселерометров 12, измеряющих центростремительные ускорения точек их крепления к платформе стенда, могут быть использованы прецизионные измерители линейных ускорений с широкой полосой пропускания и диапазоном измерения до 50 g, например – кварцевые маятниковые акселерометры с цифровой системой управления [11, 12, 15, 21, 22, 23]. В качестве акселерометров 11, измеряющих тангенциальные ускорения точек их крепления к платформе стенда могут быть использованы прецизионные измерители линейных ускорений с узкой полосой пропускания и небольшим диапазоном измерения, такие как кварцевый маятниковый акселерометр с диапазоном измерения до 10 g, полоса пропускания которого будет определена динамическими характеристиками его усилителя обратной связи [11, 12, 15, 21, 22, 23] или поплавковый маятниковый акселерометр [25, 26], имеющий небольшую полосу пропускания и небольшой диапазон измерения согласно своим техническим характеристикам. На рис. 1 в составе акселерометров 11 и 12 изображены 3 блока, соответственно: чувствительный элемент ЧЭ, охваченный отрицательной обратной связью, содержащей усилитель обратной связи УОС и фильтр  $\Phi$  со значками  $\tau n$  и  $\mu n$ , где n – номер акселерометра (1, 2,3), причем усилитель обратной связи и фильтр могут быть как аналоговыми, так и цифровыми, реализованными в процессоре в обратной связи в случае использования акселерометра с цифровым усилителем обратной связи [11, 15, 21, 22, 23].



Рис. 1. Схемотехническое решение предлагаемого стенда

В качестве первого измерителя угловой скорости 7, обозначенного на рис. 1 как блок ИУС<sub>1</sub>, могут быть использованы прецизионные измерители угловой скорости, обладающие широким диапазоном измерения угловых скоростей – лазерный (ЛГ), волоконно-оптический (ВОГ), волновой твердотельный (ВТГ) гироскопы, а также измеритель угловой скорости на основе эффекта ядерного магнитного резонанса (ЯМГ), обладающие достаточно широкой полосой пропускания и высокими точностными характеристиками по случайной составляющей нулевого сигнала и погрешности масштабного коэффициента [28] (их чувствительные элементы обозначены на рис. 1 как блок ЧЭ1), в обратную связь которых (на рис. 1 – усилитель обратной связи УОС<sub>1</sub>) введён фильтр (на рис. 1 обозначен как блок  $\Phi_1$ ), обеспечивающий вырезание высокочастотных помех, возбуждаемых аэростатическим подвесом. Принципы построения подобных фильтров достаточно подробно описаны во многих источниках, например, в [31].

В качестве второго измерителя угловой скорости 8, обозначенного на рис. 1 как блок ИУС2, может быть использован прецизионный измеритель угловой скорости, обладающий узким диапазоном измерения угловых скоростей - прецизионный поплавковый гироскопический датчик угловой скорости с газодинамической опорой ротора и магнитным центрированием его подвеса (ДУС с ГДО), обладающий достаточно узкой полосой пропускания и высокими точностными характеристиками по случайной составляющей нулевого сигнала и погрешности масштабного коэффициента [29, 30] (его чувствительный элемент обозначен на рис. 1 как блок ЧЭ2), в обратную связь которого (на рис. 1 – усилитель обратной связи УОС<sub>2</sub>) введен фильтр (на рис. 1 обозначен как блок  $\Phi_2$ ), обеспечивающий вырезание низкочастотных помех, возбуждаемых аэростатическим подвесом. Компенсационная обратная связь в ИУС1 и ИУС2 также может быть, как аналоговой, так и цифровой. Следует отметить, что вместо ДУС с ГДО может быть использован и иной тип инерциального чувствительного элемента из перечисленных выше прецизионных ИУС, но полоса пропускания

любого из них должна быть сужена за счет технических решений в системе компенсации первичного измерителя. Применение ДУС с ГДО предлагается в связи с тем, что многолетнее использование этих приборов в космических системах привело к целому ряду серьезных конструктивных и технологических решений, обеспечивающих высокую точность и надежность этих приборов, ныне вытесняемых из космических объектов ИУС, основанными на новых физических принципах. Применение ДУС с ГДО как ИЧЭ в прецизионных стендах позволит, во-первых, улучшить точностные характеристики стендов, а, вовторых, продлить жизнь в измерительной технике данному типу приборов.

ИУС 7, 8 закреплены на платформе 13 так, что их оси чувствительности параллельны оси вращения стенда (оси вала 1) (в случае использования всех перечисленных типов гироскопов), а вектор кинетического момента Н параллелен плоскости платформы 13 (в случае использования ДУС с ГДО). На оси вращения вала 1 закреплена подвижная часть двигателя постоянного тока ДП-ДБ 9, неподвижная часть которого размещена на корпусе стенда.

Система управления двигателем предлагаемого стенда, принцип её работы подробно описан в [1, 5, 9, 10, 17, 18, 32, 35].

На оси вала 1 (рис.1) закреплен диск углового энкодера 5 [36], считывающие головки которого закреплены на корпусе стенда. На вале 1 закреплены: блок преобразования напряжения питания (БПНП) 22, вход которого через линии упругого торцевого токоподвода 10 соединен с выходом стационарного источника питания, а выходы преобразователя напряжения 22 соединены с соответствующими входами блоков, закрепленных на вале.

В состав блоков преобразования информации БПИ<sub>1</sub> и БПИ<sub>2</sub>, обозначенных на рис. 1 позициями 18 и 19, соответственно, входят программируемая логическая интегральная схема (ПЛИС) и аналого-цифровой преобразователь (АЦП) стандартного вида, описанные в [19, 20] (на рис. 1 не показаны). Вход шины БПИ<sub>1</sub> 18 соединен с выходом углового энкодера 5, а шина выхода – с входом управляющего процессора 16, в котором реализована цифровая система управления (ЦСУ) стендом, и с входом управляющего компьютера 15, в котором формируются алгоритмы управления стендом и формируется управляющего воздействие U<sub>вх</sub>, пропорциональное задаваемой угловой скорости, поступающее в порт ввода-вывода управляющего процессора 16, в ядре которого формируется цифровая система управления стендом (рис. 1).

Вход шины БПИ<sub>2</sub> 19 соединен с выходами измерителей угловой скорости 7 и 8 и выходами акселерометров 11 и 12, а выходы шины БПИ<sub>2</sub> 19 соединены с беспроводным передатчиком сигналов 20, который, в свою очередь, передает информацию в последовательном коде по беспроводному приемнику сигналов 21, соединённому шинами с управляющим процессором 16 и управляющим компьютером 15 (рис.1). В качестве беспроводных передатчика и приемника сигналов могут использоваться как инфракрасный и радиочастотный каналы, как это было описано в [20], так и системы LAN, Bluetooth и другие. На корпусе стенда в виде плат закреплена электронная часть системы управления стендом – блок управления (БУ) (на рис. 1 обозначен пунктирной линией как сово-купность блоков).

В БУ входят:

- управляющий процессор 16, содержащий том числе порты ввода-вывода и ядро с дополнительной периферией;
- беспроводной приемник 21 и передатчик 20 сигналов;
- усилитель мощности (УМ) 17, вход которого соединен с выходом управляющего процессора 16 а выход – с обмотками ДП-ДБ;
- пульт подачи питания 14.

Закрепление на платформе стенда плат, реализующих перечисленные блоки, а также применение беспроводного передатчика 20 и приемника 21 сигналов для информационного обмена позволяют сократить число линий коллектора 10, необходимых для подвода питания к БПНП 22, что повышает точностные характеристики стенда.

Конструкция обеспечивает повышение точностных характеристик стенда, обусловленное:

- снижением момента трения от коллектора на оси вращения платформы, т.е. повышается стабильность задания угловой скорости;
- уменьшением длины линий электрических цепей от ИУС 7, 8 и акселерометров 11, 12 до электронного блока системы управления и уровня помех, поскольку не требуется передача маломощных сигналов через кольца коллектора;
- применением аэростатического подвеса 3 для снижения моментов трения по оси вращения 1 стенда;
- применения фильтров в обратных связях ИУС 7, 8 и акселерометров 11, 12 для вырезания низкочастотных и высокочастотных помех, возбуждаемых аэростатическим подвесом.

Следует отметить, что динамическая устойчивость предлагаемого стенда как системы автоматического управления обеспечивается методами, изложенными в фундаментальных работах по теории автоматического управления [2, 3, 7], а также рассмотренными авторами в работах применительно к конкретным схемотехническим решениям стендов с аналоговыми и цифровыми системами управления [9, 10, 17, 18].

## III. Описание режимов работы стенда

Конструкция обеспечивает расширение диапазона задаваемых угловых скоростей за счет четырех режимов работы стенда:

**1 режим:** от 0.001 до  $\omega_1$  °/с, когда в качестве чувствительных элементов работают измеритель угловой скорости ИУС<sub>2</sub> 8, в качестве которого используется поплавковый ДУС с ГДО, три акселерометра 11, измеря-

ющих тангенциальное ускорение точек их крепления к платформе стенда, и угловой энкодер 5, причем верхний диапазон измерения  $\omega_1$  определяется диапазоном измерения угловой скорости ДУС с ГДО, который может колебаться в зависимости от конструкции и точностных характеристик прибора от 0,5 до 3 °/с;

**2 режим**: от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  °/с, когда в качестве чувствительных элементов работают тройки акселерометров 11 и 12, измеряющих тангенциальное и центростремительное ускорения точек их крепления к платформе стенда, измеритель угловой скорости ИУС<sub>1</sub> 7, в качестве которого могут быть применены ЛГ, ВОГ, ЯМГ и ВТГ и угловой энкодер 5, причем диапазон  $\omega_2$  определен верхним пределом измерения ИУС<sub>1</sub> – в случае, если применяются ВОГ и ЛГ, то он определен верхним пределом измерения данного типа приборов, т.е. угловыми скоростями порядка 400–500 °/с, а когда применяются ВТГ в режиме интегрирующего гироскопа и ЯМГ, то – угловыми скоростями порядка 2500–3000 °/с, также определенными верхним пределом диапазонов измерения данных приборов.

**3 режим:** от  $\omega_2$  °/с до 4000–5000 °/с, когда в качестве чувствительных элементов работают тройки акселерометров 11 и 12, измеряющих тангенциальное и центростремительное ускорения точек их крепления к платформе стенда, и угловой энкодер 5, причем верхний диапазон измерения определен диапазоном измерения прецизионного центростремительного акселерометра, который может достигать уровня 50–60 g при сохранении высоких точностных характеристик по масштабному коэффициенту и погрешности нулевого сигнала;

**4 режим:** от 4000–5000 °/с до 10000 °/с, когда в качестве чувствительных элементов работают тройка акселерометров 11, измеряющая тангенциальное ускорение точек крепления акселерометров к платформе стенда 13, и угловой энкодер 5.

Четырехдиапазонный режим работы позволяет с высокой точностью контролировать практически все типы измерителей угловых скоростей: прецизионные (в первом и втором режиме), средней точности (в первом, во втором и третьем режимах работы) и грубые, к которым относятся, например, микромеханические, роторные, стержневые гироскопы, работающие на больших диапазонах угловых скоростей (в третьем и четвертом режимах).

Кроме того, возможен и **пятый режим** – режим калибровки стенда, когда измерители угловой скорости ИУС<sub>1</sub> 7 и ИУС<sub>2</sub> 8 работают поочередно в режиме «самоконтроля», как это описано в [19].

Стенд работает следующим образом. Управление режимами работы задает оператор от управляющего компьютера 15. Сигнал о смене режимов поступает с порта ввода-вывода управляющего компьютера 15 в порт ввода-вывода управляющего процессора 16.

В управляющем процессоре 16 реализован алгоритм переключения диапазонов работы стенда. В зависимости от задаваемой оператором команды управляющий компьютер 15 подает команду на выбор одного из пяти режимов работы стенда. Если выбран первый режим, то подаются команды на включение питания измерителя угловой скорости 7 и тангенциальных акселерометров 11. Угловой энкодер 5 и тангенциальные акселерометры 11 работают во всех четырех режимах работы стенда, кроме пятого, в котором работает угловой энкодер 5 и поочередно ИУС<sub>1</sub> и ИУС<sub>2</sub>.

С порта ввода-вывода управляющего компьютера 15 в порт ввода-вывода управляющего процессора 16 поступает код, пропорциональный задаваемому управляющему напряжению U<sub>вх</sub>, который передается в ядро процессора 16, где алгоритмически реализован сумматор сигналов, а оттуда – через ЦАП управляющего процессора 16 соответствующее этому коду напряжение через усилитель мощности (УМ) 17 поступает на датчик положения – двигатель бесконтактный (ДП-ДБ) 9. Двигатель ДП-ДБ 9 задает валу стенда 1 вращение с угловой скоростью, пропорциональной подаваемому управляющему напряжению U<sub>вх</sub>. Работа двигателя 9 полностью идентична работе двигателя, описанной в [9, 19, 20].

Вал 1 стенда начинает вращение, и с инерциальных чувствительных элементов – измерителей угловой скорости 7 и 8 и измерителей линейного ускорения 11 и 12 информационные сигналы поступают на шину БПИ<sub>2</sub> 19, а с нее – в блоки 20 и 21 – беспроводные приемник и передатчик сигналов, соответственно.

В первом режиме работы стенда, когда инерциальными чувствительными элементами являются ИУС2 8 и тангенциальные акселерометры 11, это сигналы, пропорциональные угловой скорости вращения вала 1 и тангенциальному ускорению точек крепления акселерометров 11 к платформе 13 стенда. В предлагаемом стенде все инерциальные чувствительные элементы обладают собственными обратными связями с фильтрами, вырезающими помехи на соответствующих частотах, возбуждаемые аэростатическим подвесом. В процессоре 16 реализуются регуляторы контура управления двигателем 9, аналогичные описанным в работах [10, 17, 18]. БПИ<sub>2</sub> 19 формирует кодовую комбинацию, поступающую в беспроводной передатчик сигналов 20, а оттуда данный сигнал поступает на приемник сигналов 21, с выхода которого, преобразованный в код, он поступает в порт ввода-вывода управляющего процессора 16. Беспроводной передатчик сигналов 20 и приемник этого сигнала 21 расположены таким образом, что сигнал передается и принимается в вертикальном направлении, параллельном валу 1 стенда. Приемник 21 может закрепляться на корпусе стенда, близко к его основанию, а передача сигнала в этом случае будет осуществляться с вращающейся платформы 13 в направлении сверху вниз. Требования к юстировке приемника 21 и передатчика 20 не предъявляются, так как в случае применения, например, инфракрасных передатчика и приемника угол захвата сигнала составляет не менее 120°, а в остальных случаях – вообще не ограничен. Из порта ввода-вывода управляющего процессора 16 код поступает в ядро процессора 16, где в виде алгоритма запрограммирован сумматор, в котором сравниваются кодовые комбинации сигналов с акселерометров 11 и измерителя угловой скорости 8 с заданным значением угловой скорости, поступившим в виде входного воздействия по стандарт-

ному интерфейсу через порт ввода-вывода управляющего процессора 16 от управляющего компьютера 15. С углового энкодера 5 последовательность импульсов, число которых пропорционально углу поворота платформы стенда через БПИ<sub>1</sub> 18, поступает в порт вводавывода управляющего процессора 16. В управляющем процессоре 16 происходит вычисление угловой скорости стенда как отношения измеренного угла ко времени опроса, измеряемого таймером процессора 16. Данное значение также поступает на вход алгоритмически реализованного сумматора и сравнивается со значениями кодовых комбинаций сигналов с измерителей угловой скорости 8, акселерометров 11 и входного задающего сигнала. Процессор 16 осуществляет синхронизацию данных сигналов по времени. По значениям поступивших на сумматор кодовых комбинаций формируется разностный управляющий сигнал, который поступает на вход цифрового регулятора системы управления двигателем, запрограммированного в виде алгоритма в управляющем процессоре 16 и обеспечивающего требуемые динамические характеристики системы управления двигателем ДП-ДБ 9 стенда. При этом преобразованный управляющий сигнал поступает на ЦАП управляющего процессора 16, откуда в виде аналогового сигнала – на усилитель мощности УМ 17, а оттуда – на двигатель ДП-ДБ 9. Таким образом, реализуется цифровая система управления через управляющий процессор 16, работающая по разностному принципу: при разностном управляющем сигнале, стремящемся к нулю, вал 1 стенда вращается с заданной угловой скоростью. При подаче с управляющего компьютера 15 гармонического или любого другого сигнала система работает аналогичным образом. Полученная информация через порт ввода-вывода управляющего процессора 16 через стандартный интерфейс поступает в порт ввода-вывода управляющего компьютера 15. От испытуемого прибора 4 через БПИ<sub>2</sub> в порт ввода-вывода управляющего компьютера 15 поступает информация об угловой скорости, измеренной испытуемым прибором 4. В управляющем компьютере 15 происходит комплексная обработка полученных данных об угле и угловой скорости, заданной стендом, и выходной информации с испытуемого прибора 4, что позволяет формировать выходную информацию о масштабном коэффициенте и динамических характеристиках испытуемого прибора 4 (в случае подачи на вход системы управления стендом гармонического сигнала). Таким образом, осуществляется контроль измерителя угловой скорости 4.

Во втором режиме работы, когда инерциальными чувствительными элементами являются три тангенциальных 11 и три центростремительных 12 акселерометра, измеритель угловой скорости  $ИУC_1$  7, а также угловой энкодер 5. Разница заключается в том, что  $ИУC_2$  8 не участвует в процессе управления движением платформы стенда, а вместо него в работу включается  $ИУC_1$ 7 и тройка центростремительных акселерометров 12. Система работает (аналогичным первому режиму образом) по разностному принципу.

В третьем режиме работы, когда задаваемые угловые скорости превышают диапазон измерения ИУС<sub>1</sub> 7, он отключается от системы управления стендом и остаются в работе только тангенциальные и центростремительные акселерометры 11 и 12, соответственно, и угловой энкодер 5, а работа системы управления осуществляется аналогично третьему режиму работы стенда.

В четвертом режиме работы, когда в системе управления стендом остаются в работе тангенциальные акселерометры 11 и угловой энкодер 5, управляющий сигнал, поступающий в порт ввода-вывода управляющего процессора 16 из порта ввода-вывода управляющего компьютера 15 и пропорциональный задаваемой угловой скорости стенда, сравнивается в сумматоре, реализованном алгоритмически в управляющем процессоре 15, с вычисленным сигналом, равным углу разворота, измеряемому угловым энкодером 5, деленому на время, измеряемое таймером управляющего процессора 15. Таким образом, в сумматоре управляющего процессора 16 сравниваются сигналы, пропорциональные измеренной и задаваемой угловым скоростям стенда.

В пятом режиме работы – режиме калибровки, осуществляемом при начале работы стенда, информация с акселерометров 11 и 12 и с испытуемого прибора 4 не поступает через блок БПИ<sub>2</sub> в систему управления стендом. Работают по очереди попарно угловой энкодер 5 и ИУС<sub>1</sub> 7, а после отключения ИУС<sub>1</sub> – угловой энкодер 5 и ИУС<sub>2</sub> 8. Измерители угловой скорости находятся в режиме «самоконтроля», как это описано в [19]. Сигналы в цепи обратной связи стенда формируются аналогично первым четырем режимам. В пятом режиме работы достигаются две цели:

1. измеряются составляющие вибраций, возбуждаемых аэростатическим подвесом, измерителями угловой скорости  $UYC_1$  7 и  $UYC_2$  8, что дает возможность настроить фильтры в цепи обратной связи для вырезания, соответственно, низкочастотных и высокочастотных помех для обеспечения работы прецизионного стенда;

2. производится калибровка измерителей угловой скорости 7 и 8, которые будут являться эталоном для испытуемого прибора 4.

#### IV. Заключение

Таким образом, предлагаемое техническое решение позволяет добиться следующих результатов:

 Повысить точность измерения мгновенной угловой скорости стендом за счет введения второго прецизионного измерителя угловой скорости в его систему управления и комплексирования информации с другими первичными измерителями;

 Повысить точность и расширить диапазон измерения угловой скорости за счёт применения прецизионного акселерометра с расширенным диапазоном измерения;

3. Снизить трение по оси подвеса стенда за счёт применения малогабаритных аэростатических опор;

4. Введение фильтров в обратные связи измерителей угловой скорости и линейного ускорения позволяет исключить влияние на точностные характеристики стенда вибрационных возмущений в широком спектре частот, возбуждаемых аэростатическим подвесом.

### Литература

- [1] Ахмеджанов А.А. Системы передачи угла повышенной точности. М.-Л.: «Энергия», 1966.
- [2] Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975. 767 с.
- [3] Бессекерский В.А., Фабрикант Е.А. Динамический синтез систем гироскопической стабилизации. Л.: Судостроение, 1968. 351 с.
- [4] Бычков С.И., Лукьянов Д.П., Бакаляр А.И. Лазерный гироскоп. М.: Сов. радио, 1975. 421 с.
- [5] Высокоточные преобразователи угловых перемещений / Под ред. А.А. Ахметжанова. М.: Энергоатомиздат, 1986.
- [6] Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 126 с.
- [7] Изерман Р. Цифровые системы управления: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 541 с.
- [8] Измайлов Е.А. Современные тенденции развития технологий инерциальных чувствительных элементов и систем летательных аппаратов // Труды ФГУП «НПЦАП», № 1, 2010. С. 27–35.
- [9] Калихман Д.М. Прецизионные управляемые стенды для динамических испытаний гироскопических приборов / Под ред. акад. В.Г.Пешехонова. СПб. ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2008. 304 с.
- [10] Калихман Д.М. Прецизионные поворотные стенды нового поколения с инерциальными чувствительными элементами и цифровым управлением./ Ю.В. Садомцев [и др.] // Известия РАН. Теория и системы управления, №2, 2014. С. 130–146.
- [11] Калихман Д.М. Маятниковый акселерометр с цифровым управлением и новыми функциональными возможностями. / Гребенников В.И. [и др.] // Известия РАН. Теория и системы управления, № 2, 2021. С. 73–95.
- [12] Калихман Д.М. Пути расширения диапазона измерения и повышения точностных характеристик поворотных стендов с инерциальными чувствительными элементами для контроля гироскопических приборов. / Депутатова Е.А., [и др.] // 25 Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: Изд-во ЦНИИ «Электроприбор», 2018. С. 334–339.
- [13] Калихман Д.М. Разработка концепции проектирования класса прецизионных мехатронных стендов, использующих инерциальные чувствительные элементы, скомплексированные с высокоточными датчиками угла. / Е.А. Депутатова [и др.] // 29 Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: Изд-во ЦНИИ «Электроприбор», 2022. С. 212–217.
- [14] Калихман Д.М. Концепция проектирования класса прецизионных поворотных стендов с инерциальными чувствительными элементами в цепи обратной связи. / Е.А. Депутатова [и др.] // Гироскопия и навигация, № 3 (118), 2022. С. 41–64.
- [15] Калихман Д.М. Опыт проектирования и изготовления блоков измерителей линейного ускорения на кварцевых маятниковых акселерометрах с аналоговой и цифровой системами управления. Монография./ Калихман Л.Я., Депутатова Е.А., Скоробогатов В.В., Николаенко А.Ю., Нахов С.Ф. Саратов: Изд-во СГТУ им. Гагарина Ю.А., 2021. 240 с.
- [16] Калихман Д.М. Применение метода максимального правдоподобия при комплексировании информации с первичных измерителей в прецизионном поворотном стенде с инерциальными чувствительными элементами и цифровой системой управления для улучшения его точностных характеристик / Е.А. Депутатова [и др.] // Материалы XXVII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб.: Изд-во ЦНИИ «Электроприбор», 2020. С. 221–225.
- [17] Калихман, Д.М. Цифровая стабилизация движений прецизионных управляемых оснований с инерциальными чувствительными элементами. Часть 1. Применение поплавкового измерителя угловой скорости / Ю.В. Садомцев [и др.] // Известия РАН. Теория и системы управления, №1, 2011. С. 120–132.

- [18] Калихман, Д.М. Цифровая стабилизация движений прецизионных управляемых оснований с инерциальными чувствительными элементами. Часть 2. Применение поплавкового измерителя угловой скорости и маятниковых акселерометров / Ю.В. Садомцев [и др.] // Известия РАН. Теория и системы управления, №2, 2011. С. 131–146.
- [19] Патент 2403538 РФ. Универсальный стенд для контроля прецизионных гироскопических измерителей угловой скорости / Калихман Д.М., Калихман Л.Я. [и др.]; зарегистрирован 10.11.2010. Бюл. № 31, 2010.
- [20] Патент 2494345 РФ. Универсальный широкодиапазонный стенд для контроля измерителей угловой скорости / Калихман Д.М., Калихман Л.Я., [и др.]; зарегистрирован 27.09.2013. Бюл. 2013.
- [21] Патент 2615221 РФ. Способ обеспечения виброустойчивости маятникового акселерометра линейных ускорений с цифровой обратной связью и виброустойчивый маятниковый акселерометр / Калихман Д.М., Калихман Л.Я., [и др.]; опубликован 04.04.2017. Бюл. № 10, 2017.
- [22] Патент 2627970 РФ. Способ обеспечения линейности масштабного коэффициента маятникового широкодиапазонного акселерометра компенсационного типа / Калихман Д.М., Калихман Л.Я., [и др.]; приоритет от 14.11.16. Бюл. № 23, 2017.
- [23] Патент 2626071 РФ. Способ обеспечения линейности масштабного коэффициента маятникового акселерометра компенсационного типа / Калихман Д.М., Калихман Л.Я. [и др.]; приоритет от 03.06.16. Бюл. № 21, 2017.
- [24] Патрюэль И. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на основе ВОГ с уходом одна морская миля в месяц: мечта уже достижима? / И. Онтас, Э. Лефевр, Ф. Наполитано // Гироскопия и навигация. 2013. № 3. С. 3–13.
- [25] Пельпор Д.С. Гироскопические системы. В 3 т. М.: Высшая школа, 1986.
- [26] Пельпор Д.С. Гироскопические приборы и системы./ Михалёв И.А., Бауман В.А. М.: Высшая школа, 1988. 424 с.
- [27] Пешехонов В.Г. Гироскоп на основе явления ядерного магнитного резонанса: прошлое, настоящее, будущее. / Ю.А. Литманович, А.К. Вершовский // Материалы 7 российской мультиконференции по проблемам управления. СПб: Изд-во «ЦНИИ «Электроприбор»», 2014. С. 35–42.
- [28] Ривкин Б.С. Аналитический обзор состояния исследований и разработок в области навигации за рубежом. Выпуски 1–7. СПб.: Изд-во ЦНИИ «Электроприбор», 2017–2022.
- [29] Решетников В.И. Гироскопические чувствительные элементы для систем управления ориентацией и стабилизации орбитальных космических аппаратов. / Доронин В.П. [и др.] // 8 Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: Изд-во ЦНИИ "Электроприбор", 2001. С. 17–30.
- [30] Решетников В.И. Опыт создания высокоточных поплавковых гироприборов, применяемых в системах угловой ориентации и стабилизации космических аппаратов и станций / Волынцев А.А. [и др.] // 10 Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: Изд-во ЦНИИ "Электроприбор", 2003. С. 226–234.
- [31] Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 1998. 370 с.
- [32] Хрущев В.В. Электрические машины систем автоматики. Л.: «Энергоиздат», 1985. 324 с.
- [33] Шейнберг С.А. Опоры скольжения с газовой смазкой / Жедь В.П., Шишеев М.Д. М.: Машиностроение, 1969. 336 с.
- [34] Шереметьев А.Г. Волоконный оптический гироскоп. М.: Радио и связь,1987. 152 с.
- [35] Юферов Ф.М. Электрические машины автоматических устройств. М.: «Высшая школа», 1976. 302 с.
- [36] Технические характеристики угловых энкодеров фирмы Renishaw: [сайт]. URL: <u>www.renishaw.ru/ru/enclosed-opticalencoders-425273</u> (дата обращения: 03.04.2023).

# Динамика канала управляемого индикаторного гиростабилизатора для измерения угловой скорости линии визирования объекта наблюдения

Д.М. Малютин Кафедра приборов управления ФГБОУ ВО ТулГУ Тула, Российская Федерация Malyutindm@yandex.ru Ю.Н. Адякин Отдел перспективных разработок ПАО «НПО «Стрела» Тула, Российская Федерация nto410@npostrela.net

А.П. Шведов Отдел перспективных разработок ПАО «НПО «Стрела» Тула, Российская Федерация nto410@npostrela.net В.А. Орлов Отдел перспективных разработок ПАО «НПО «Стрела» Тула, Российская Федерация nto410@npostrela.net

Аннотация—В работе приведена математическая модель двухосного индикаторного гиростабилизатора на микромеханических датчиках угловой скорости, функционирующего в совмещенном режиме стабилизации, автосопровождения объекта наблюдения и измерения угловой скорости линии визирования (ЛВ) объекта наблюдения в условиях трехкомпонентной качки основания. Рассмотрены возможные решения построения каналов измерения угловой скорости линии визирования и увеличения точности их работы.

#### Ключевые слова—индикаторный гиростабилизатор, объект наблюдения, угловая скорость, микромеханические датчики угловой скорости.

#### I. Введение

В существующих информационно – измерительных и управляющих системах беспилотных летательных аппаратов (ЛА) гражданского назначения выработка параметров ориентации обеспечивается с помощью карданной или бескарданной гировертикали, а для стабилизации оптической аппаратуры (используемой на ЛА, например, для киносъемки) и управления ею в пространстве применяется управляемый гиростабилизатор (ГС) [1-6].

При этом существует возможность измерения угловой скорости линии визирования (ЛВ) объекта наблюдения по сигналам в замкнутом контуре автосопровождения объекта наблюдения или непосредственно по сигналам чувствительных элементов двухосного индикаторного гиростабилизатора.

Разработкой подобных систем активно занимаются такие фирмы и организации как «Honeywell», «SYSTRON DONNER», «Goodrich Corporation» (США), DST CONTROL AB (Швеция), Controp (Израиль), НТЦ «Рисса», ООО «ТеКнол», «Аэрокон», ЗАО «ЭНИКС», корпорация «Иркут», АО «КБ Приборостроения», ГОУ ВПО «Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева», МГТУ им. Баумана, МАИ, научно – производственный конструкторский центр «Новик - XXI век» г. Москва (Россия).

## II. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы являются исследования динамики канала двухосного индикаторного гиростабилизатора (ГС) на микромеханических датчиках угловой скорости (ДУС) для измерения угловой скорости ЛВ объекта наблюдения и рассмотрение возможности увеличения точности измерения угловой скорости.

## III. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть с летательным аппаратом (ЛА) жестко связана система координат x<sub>0</sub>y<sub>0</sub>z<sub>0</sub>. Проекции абсолютной угловой скорости ЛА на его главные оси обозначим  $\omega_{0x}\omega_{0y}\omega_{0z}$ . Положение осей  $x_2y_2z_2$  гиростабилизированной площадки, которой является внутренняя рама гиростабилизатора с установленным на ней оптическим прибором, относительно  $x_0 y_0 z_0$  зададим углами  $\phi_v, \phi_z$ . Оптический прибор, установленный на внутренней рамке карданова подвеса гиростабилизатора (платформе), измеряет погрешности автосопровождения объекта наблюдения α, β в двух ортогональных плоскостях. Значения проекций абсолютной угловой скорости наружной рамы гиростабилизатора и платформы на оси связанных с ними координат  $x_1y_1z_1$  и  $x_2y_2z_2$  обозначены как  $\omega_{x1}\omega_{y1}\omega_{z1}$  и  $\omega_{x2}\omega_{y2}\omega_{z2}$ .  $M_{ds1}, M_{ds2}$  – моменты, развиваемые стабилизирующими двигателями наружной рамы и внутренней рамы относительно осей карданова подвеса соответственно;  $M_{bn1}, M_{bn2}$  – возмущающие моменты относительно осей наружной и внутренней рамы соответственно,  $J_{x2}J_{v2}J_{z2}$  – моменты инерции платформы относительно соответствующих осей;  $J_{xl}J_{yl}J_{zl}$  – моменты инерции наружной рамы относительно соответствующих осей;  $b_1, b_2$  – удельные моменты сил скоростного трения относительно осей наружной и внутренней рамы соответственно. Моменты сил сухого трения наряду с моментами от несбалансированности и тяжения токоподводов являются составляющими моментов  $M_{bn1}, M_{bn2}$ , и определяются  $M_{try} = -M_{tryo} sign \dot{\phi}_y$ ,  $M_{trz} = -M_{trzo} sign \dot{\phi}_z$ . Уравнения движения прибора в режиме стабилизации и автосопровождения и измерения угловой скорости линии визирования объекта наблюдения приобретают вид

$$(J_{y}\cos^{2}\varphi_{z} + J_{x}\sin^{2}\varphi_{z} + J_{y1})\omega_{y2}/\cos\varphi_{z} + +b_{1}\omega_{y2}/\cos\varphi_{z} - M_{ds1} = -(J_{x} - J_{z})\omega_{z2}\omega_{x2}\cos\varphi_{z} - (J_{z} - J_{y})\omega_{z2}\omega_{y2}\sin\varphi_{z} + M_{bn1} + b_{1}\omega_{oy} - -b_{1}(\omega_{ox}\cos\varphi_{y}tg\varphi_{z} - \omega_{oz}\sin\varphi_{y}tg\varphi_{z}) - -J_{y1}(\omega_{z2} - \omega_{z1})(\omega_{ox}\cos\varphi_{y} - \omega_{oz}\sin\varphi_{y}) - (J_{x1} - J_{z1})\omega_{x1}\omega_{z1} - (J_{x} + J_{y1})\omega_{x1}tg\varphi_{z} - -(J_{x} + J_{y1})(\omega_{z2} - \omega_{z1})(\omega_{x2}tg\varphi_{z}\sin\varphi_{z} + \omega_{y2}\sin\varphi_{z}),$$

$$J_{z} \omega_{z2} + b_{2} \omega_{z2} - M_{ds2} = M_{bn2} - b_{2} (-\omega_{oz} \cos \varphi_{y} - b_{2}) (-\omega_{oz} \cos \varphi_{y} - b_{2}) (-\omega_{oz} -$$

 $-\omega_{0x}\sin\varphi_{y})-(J_{y}-J_{x})\omega_{y2}\omega_{x2},$ 

$$U_{1} = K_{dys1}\omega_{y2} + U_{01},$$

$$U_{2} = K_{dys2}\omega_{z2} + U_{02},$$

$$U_{3}(p) = k_{dy1}k_{y3}\alpha(p)W_{kz3}(p),$$

$$U_{4}(p) = k_{dy2}k_{y4}\beta(p)W_{kz4}(p),$$

$$U_{5}(p) = U_{1}(p) + U_{3}(p),$$

$$U_{6}(p) = U_{2}(p) + U_{4}(p),$$

$$T_{ds1}M_{ds1}(p)p + M_{ds1}(p) = K_{ds1}K_{1}U_{5}(p)W_{kz1}(p),$$

$$T_{ds2}M_{ds2}(p)p + M_{ds2}(p) = K_{ds2}K_{2}U_{6}(p)W_{kz2}(p),$$

$$\omega_{z1} = \omega_{oz}\cos\varphi_{y} + \omega_{ox}\sin\varphi_{y},$$

$$\omega_{x1} = \omega_{ox}\cos\varphi_{y} - \omega_{oz}\sin\varphi_{y},$$
(1)

 $\omega_{x2} = \omega_{0x} \cos \varphi_y / \cos \varphi_z - \omega_{0z} \sin \varphi_y / \cos \varphi_z +$  $+ \omega_{y2} \sin \varphi_z / \cos \varphi_z,$ 

В уравнениях дополнительно введены обозначения:  $k_{dyi}$  – коэффициент передачи оптико-электронного датчика,  $W_{\kappa z 3}(p), W_{\kappa z 4}(p)$  – передаточные функции корректирующих звеньев контуров управления,  $k_{y3}$ ,  $k_{y4}$  – коэффициенты передачи контуров управления, p – оператор дифференцирования,  $\omega_{ly}, \omega_{lz}$  – проекции абсолютной угловой скорости объекта слежения. Коэффициент передачи по контуру автосопровождения канала наружной рамки  $K_{as} = k_{dy1}k_{y3}$ . Коэффициент передачи по контуру автосопровождения канала внутренней рамки  $K_{as} = k_{dy2}k_{y4}$ . Положим  $W_{kz1}(p) = (T_{kz1}p+1)/p$ ,  $W_{kz2}(p) = (T_{kz2}p+1)/p$ ,  $W_{kz3}(p) = 1$ ,  $W_{kz4}(p) = 1$ .

Передаточная функция замкнутой системы, где вход – угловая скорость объекта наблюдения, выход – измеренная угловая скорость по сигналу ДУС:

$$W_{zs}(p) = \frac{\omega_{izm}(p)}{\omega_{ly}(p)} = (\frac{T_{k21}p + 1}{B}),$$
  

$$B = \frac{K_{dys1}J_{\alpha}}{K_{dys1}K_{as}K_{y1}K_{ds1}\cos\varphi_{z}}p^{3} + \frac{K_{dys1}b_{1} + \cos\varphi_{z}K^{2}_{dys1}K_{y1}K_{ds1}T_{kz1}}{K_{dys1}K_{as}K_{y1}K_{ds1}\cos\varphi_{z}}p^{2} + \frac{K^{2}_{dys1}K_{y1}K_{ds1} + K_{as}K_{dys1}K_{ds1}K_{y1}T_{kz1}}{K_{dys1}K_{as}K_{y1}K_{ds1}}p + 1.$$

Передаточная функция замкнутой системы, где вход – угловая скорость объекта наблюдения, выход – измеренная угловая скорость в контуре автосопровождения:

$$W_{zs}(p) = \frac{\omega_{izmas}(p)}{\omega_{ly}(p)} = (\frac{A}{B}),$$

$$A = \frac{J_{\alpha}}{K_{dys1} \cos \phi_z K_{y1} K_{ds1}} p^2 +$$

$$+ \frac{b_1 + \cos \phi_z K_{dys1} K_{y1} K_{ds1} T_{kz1}}{K_{dys1} K_{y1} K_{ds1} \cos \phi_z} p + 1,$$

$$B = \frac{J_{\alpha}}{K_{as} \cos \phi_z K_{y1} K_{ds1}} p^3 + \frac{b_1 + \cos \phi_z K_{dys1} K_{y1} K_{ds1} T_{kz1}}{K_{as} K_{y1} K_{ds1} \cos \phi_z} p^2 +$$

$$+ \frac{K_{y1} K_{ds1} K_{dys1} + K_{as} K_{ds1} K_{y1} T_{kz1}}{K_{as} K_{y1} K_{ds1}} p + 1.$$

Рассмотрим влияние возмущающих факторов на точность измерения угловой скорости линии визирования объекта наблюдения. Передаточная функция замкнутой системы, где вход – смещение нулевого сигнала на выходе гироскопа (в размерности напряжения), выход – измеренная угловая скорость в контуре автосопровождения):

$$W_{zs}(p) = \frac{\omega_{izmas}(p)}{U_{01}(p)} = \frac{1}{K_{dys1}} \left(\frac{T_{kz1}p+1}{B}\right),$$
(2)  
$$= \frac{J_{\alpha}}{K_{as} \cos\varphi_{z} K_{y1} K_{ds1}} p^{3} + \frac{b_{1} + \cos\varphi_{z} K_{dys1} K_{y1} K_{ds1} T_{kz1}}{K_{as} K_{y1} K_{ds1} \cos\varphi_{z}} p^{2} + \frac{K_{y1} K_{ds1} K_{dys1} + K_{as} K_{ds1} K_{y1} T_{kz1}}{K_{as} K_{y1} K_{ds1}} p + 1.$$

Передаточная функция замкнутой системы, где вход – смещение нулевого сигнала на выходе гироскопа (в размерности напряжения), выход – измеренная угловая скорость по сигналу ДУС:

В

$$W_{zs}(p) = \frac{\omega_{izm}(p)}{U_{01}(p)} = \frac{1}{K_{dys1}} (\frac{A}{B}), \quad (3)$$

$$A = \frac{J_{\alpha}}{K_{as} \cos\varphi_{z} K_{y1} K_{ds1}} p^{3} + \frac{b_{1}}{K_{as} K_{y1} K_{ds1} \cos\varphi_{z}} p^{2} + \frac{K_{as} K_{ds1} K_{y1} T_{kz1}}{K_{as} K_{y1} K_{ds1}} p + 1,$$

$$B = \frac{J_{\alpha}}{K_{as} \cos\varphi_{z} K_{y1} K_{ds1}} p^{3} + \frac{b_{1} + \cos\varphi_{z} K_{dys1} K_{y1} K_{ds1} T_{kz1}}{K_{as} K_{y1} K_{ds1} \cos\varphi_{z}} p^{2} + \frac{K_{y1} K_{ds1} K_{ds1} + K_{as} K_{ds1} K_{y1} T_{kz1}}{K_{as} K_{y1} K_{ds1} \cos\varphi_{z}} p^{2} + \frac{K_{y1} K_{ds1} K_{ds1} + K_{as} K_{ds1} K_{y1} T_{kz1}}{K_{as} K_{y1} K_{ds1}} p + 1.$$

Ì

\_

ЛАЧХ передаточных функций 2,3 ГС массой 2 кг приведены на рис.1. На рис.2 приведен график погрешности измерения угловой скорости, обусловленной возмущающим моментом сил сухого трения.



Рис. 1. ЛАЧХ: 1 – в соответствии с (3), 2 – в соответствии с (2)



Рис. 2. Погрешности от момента сил сухого трения

Рассмотрим возможности увеличения точности измерения угловой скорости объекта слежения путем сглаживания выходного информационного сигнала с помощью апериодических звеньев первого порядка. При этом рассчитаем также дополнительное фазовое запаздывание выходного сигнала, вносимое этими звеньями. На рис.3 представлен график измеренной угловой скорости объекта слежения, который движется с постоянной угловой скоростью 0,02 рад/с по сигналу в контуре автосопровождения в условиях трехкомпонентной качки основания. Амплитуда погрешности измерения угловой скорости составляет 0,001рад/с. Применим для сглаживания апериодическое звено с постоянной времени 0,1с. На рис.4 представлен график измеренной угловой скорости объекта слежения после сглаживания. Амплитуда погрешности измерения угловой скорости после фильтрации выходного сигнала уменьшается в два раза и составляет 0,0005 рад/с. Фазовое отставание, вносимое сглаживающим фильтром в полосе частот изменения угловой скорости до 1 рад/с, не превышает 5,72 град.



Рис. 3. Измеренная угловая скорость по сигналам в контуре автосопровождения



Рис.4. Измеренная угловая скорость по сигналам в контуре автосопровождения после фильтрации

На рис. 5 представлен график измеренной угловой скорости объекта слежения, который движется с постоянной угловой скоростью 0,02 рад/с по сигналу ДУС в условиях трехкомпонентной качки основания. Амплитуда погрешности измерения угловой скорости составляет 0,007 рад/с. Применим для сглаживания апериодическое звено с постоянной времени 0,1с. На рис.6. представлен график измеренной угловой скорости объекта слежения после сглаживания. Амплитуда погрешности измеренной угловой скорости в угловой скорости в 9 раз и составляет 0,0078 рад/с.



Рис. 5. Измеренная угловая скорость по сигналу ДУС

 $\omega_{\it izm}$  , рад/с



Рис. 6. Измеренная угловая скорость по сигналу ДУС после фильтрации

Сведем полученные результаты в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

Способ измерения						
По сигналам в замкнутом контуре автосопровождения						
Без учета вибрационных воз- мущений		С учетом вибрационных воз- мущений				
Погрешность, рад/с	Погрешность после филь- трации, рад/с	Погрешность, рад/с	Погрешность после филь- трации, рад/с			
0,001	0,0005	0,0011	0,0006			
По сигналу ДУС						
Без учета вибрационных возмущений		С учетом вибрационных воз- мущений				
Погрешность, рад/с	Погрешность, рад/с	Погрешность, рад/с	Погрешность, рад/с			
0,007	0,00078	0,0078	0,0009			

## IV. Выводы

- ГС является фильтром нижних частот и эффективно сглаживает высокочастотные составляющие, обусловленные шумом гироскопа в выходном сигнале в случае, если выходным сигналом является измеренная угловая скорость объекта наблюдения в контуре автосопровождения. Если выходным сигналом является измеренная угловая скорость объекта наблюдения при измерении угловой скорости по сигналу ДУС, то шум гироскопа, за исключением области частот в окрестности частоты среза, в исходном масштабе содержится на выходе измерительного канала.
- В случае измерения угловой скорости по сигналу в контуре автосопровождения погрешность от момента сил сухого трения в пять раз меньше,

чем в случае измерения угловой скорости по сигналу ДУС.

- 3. Из проведенных расчетов следует, что при способе измерения угловой скорости объекта слежения по сигналам в замкнутом контуре автосопровождения без дополнительной фильтрации выходного сигнала, как при отсутствии вибрационных возмущений, так и при учете этих возмущений величина погрешности измерения в семь раз меньше по сравнению со способом измерения на основе сигналов ДУС и не превышает 0,0011 рад/с.
- 4. При способе измерении угловой скорости объекта слежения по сигналам в замкнутом контуре автосопровождения с дополнительной фильтрацией выходного сигнала апериодическим фильтром первого порядка с постоянной времени 0,1с, как при отсутствии вибрационных возмущений, так и при учете этих возмущений величина погрешности измерения в 1,5 раз меньше по сравнению со способом измерения на основе сигналов ДУС и не превышает 0,0006 рад/с.
- Предпочтительным является вариант измерения угловой скорости объекта наблюдения по сигналу в замкнутом контуре автосопровождения. Способ измерения угловой скорости объекта слежения по сигналам ДУС без дополнительной фильтрации выходного сигнала оказывается неэффективным.

#### Литература

- [1] Распопов В.Я. Измерительные приборы и системы для ориентации, стабилизации и управления / В.Я. Распопов, Д.М. Малютин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. № 4. С. 372-386.
- [2] Малютин Д.М. Информационно-измерительная и управляющая система беспилотных летательных аппаратов на микромеханических чувствительных элементах повышенной точности / Д.М. Малютин, М.Д. Малютина // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2014. № 2. С. 39-43.
- [3] Распопов В.Я. Гироскопы в системах гироскопической стабилизации / В.Я. Распопов, Д.М. Малютин, Ю.В. Иванов // Справочник. Инженерный журнал. 2009. № 7 (148). С. 52-58.
- [4] Пат. 120491 U1. Российская Федерация. МПК G01C 19/00 Двухосный индикаторный гиростабилизатор / Малютин Д.М., Малютина М.Д., приор. 23.04.2012, заявитель и патентообладатель ТулГУ, опубл. Бюл №3.
- [5] Малютин Д.М. Гироскопическая система стабилизации на микромеханических чувствительных элементах // XXIV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. С. 254-258.
- [6] Малютин Д.М. Миниатюрная гироскопическая система ориентации беспилотного летательного аппарата // Юбилейная XXV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2018. С. 278-281.

## Автономная оценка стохастического вектора состояния некорректируемой гиростабилизированной платформы

В.А. Погорелов Кафедра авиастроения Донской государственный технический университет Ростов-на-Дону, Россия vadim-pva@narod.ru

Аннотация—Построена стохастическая модель трехосного гиростабилизатора, функционирующего в режиме силовой стабилизации. Представленная модель в форме «объект-наблюдатель» ориентирована на использование современных методов нелинейной стохастической фильтрации. В качестве уравнений фильтрации предложено использование системы апостериорных моментов, полученной на основе аппроксимации уравнения Стратоновича.

Ключевые слова—гиростабилизированная платформа, апостериорная плотность вероятности, фильтр Калмана, апостериорные моменты.

#### I. Введение

Несмотря на то, что в навигационных системах подвижных объектов различного назначения все большее применение находят бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС), их использование для определения параметров движения космических аппаратов и ракетоносителей оказывается не всегда эффективным [1-6]. В связи с этим в ракетно-космической технике широко используется гиростабилизированная платформа (ГСП), как обладающая рядом несомненных преимуществ перед БИНС [7-9].

Из всех типов существующих платформенных систем навигации перспективным представляется использование бортовых систем [7, 8]. Наибольшее распространение из них получили самоориентирующиеся гиростабилизаторы (СОГС), которые по принципу действия делятся на два типа. Самоориентирующиеся гиростабилизаторы измерительного типа и СОГС гирокомпасного типа [7]. Преимуществом их использования является отказ от использования фиксаторов исходных направлений, таких как автоколлиматоры, зеркала, призмы и т.д. и различного типа ориентаторов (визуальных и / или автоматических гирокомпасов, гироскопических определителей азимута, магнитометров, спутниковых систем навигации с пространственно распределенными антеннами и др.). Кроме того, будучи системами автономными, СОГС являются максимально защищенными как от целенаправленно создаваемых помех, так и от естественных возмущений.

На сегодняшний день экспериментально доказана возможность обеспечения требуемой точности определения угловой ориентации при работе СОГС на неподвижном основании. В то же время в условиях действия возмущающих воздействий различной физической природы точность определения начального углового положения подвижного объекта с использованием СОГС существенно ухудшается. Решить отмеченную пробле-

## Е.Г. Чуб Каферда высшей математики Донской государственный технический университет Ростов-на-Дону, Россия elenachub111@gmail.com

му возможно как за счет улучшения конструкторскотехнологических решений [9], так и путем использования современных методов нелинейной стохастической фильтрации [7].

Первый путь совершенствования бортовых систем начальной ориентации ограничен уровнем развития инерциальных чувствительных элементов и их стоимостью. С другой стороны, применение современных бортовых вычислителей позволяет за счет использования методов фильтрации получить с требуемой точностью оценки углов ориентации (курс, крен, тангажа) без использования дорогостоящих гироскопов и акселерометров.

В условиях действия помех перспективным представляется применение ГСП, работающей в режиме силовой стабилизации без коррекции заданного (стартового) положения. ГСП такого типа называется некорректируемой платформой (НП).

Преимущества использования НП заключаются в следующем:

- отсутствуют автоколлиматоры, призмы, зеркала и гирокомпасы, обеспечивающие точную начальную ориентацию ГСП и, как следствие, повышающие сложность и стоимость всего навигационного комплекса;
- возможно проведение калибровки всего информационно-измерительного комплекса в процессе эксплуатации путем оценки коэффициентов полиномиальной модели дрейфа НП, масштабных коэффициентов акселерометров, не ортогональности осей чувствительных элементов и т.д;

Принципиальным отличием НП от СОГС является то, что скорость её не скомпенсированного дрейфа зависит нелинейно от ускорений. Кроме того, на работу НП оказывают существенное влияние шумы акселерометров и возмущения, возникающие из-за сейсмических колебаний основания.

Таким образом, для определения начальной ориентации НП с высокой точностью в условиях действия помех различной физической природы, необходимо:

 для выбранного типа кинематических параметров построить стохастическую модель движения НП в форме «объект-наблюдатель», учитывающую нелинейную зависимость скорости собственного ухода НП от ускорений в общем случае случайных;

- построить модель выходных сигналов акселерометров, учитывающую наличие внутренних и внешних помех, обусловленных случайными возмущениями основания;
- синтезировать алгоритм нелинейной стохастической фильтрации вектора состояния НП, обеспечивающий требуемую точность оценки углов ориентации НП и не накладывающий ограничений на вид плотности распределения вектора состояния НП.

В связи с этим цель работы - построение стохастической модели движения НП в форме «объектнаблюдатель» и разработка алгоритма фильтрации не накладывающего ограничения на вид плотности распределения вектора состояния НП.

## II. ПОСТРОЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НП В ФОРМЕ «ОБЪЕКТ-НАБЛЮДАТЕЛЬ»

Введем в рассмотрение следующие правые системы координат (СК): ONLE – топоцентрическую географическую СК (ГСК) G, ось N которой направлена на север, ось E– на восток и ось L– вертикально вверх по радиусу Земли, начало СК совпадает с центром масс НП,  $O\xi\eta\zeta$ – инерциальную СК (ИСК) I, начало которой совпадает с центром Земли, ось О $\eta$  направлена по оси вращения Земли;  $O\zeta$  совпадает в начальный момент времени с линией пересечения плоскости экватора и Гринвичского меридиана,  $O\xi$  дополняет СК до правой, OXYZ – гироскопическую СК (ГрСК) J, начало которой совпадает с центром подвеса платформы, а ее оси направлены по осям стабилизации НП.

Дрейф НП описывается полиномом вида [9]:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R} + \mathbf{U}\mathbf{g} + \mathbf{g}^T \widehat{\otimes} \mathbf{K}\mathbf{g}, \qquad (1)$$

где  $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_x \boldsymbol{\omega}_y \boldsymbol{\omega}_z)^T$ ,  $\mathbf{g} = (g_x g_y g_z)^T$ ,  $\mathbf{R} = (R_x \quad R_y \quad R_z)^T$ ,  $\hat{\otimes}$  – знак блочного умножения матриц,  $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_3 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{split} \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} -U_{z} \ U_{y} \ U_{x} \\ -U_{x} - U_{z} \ U_{y} \\ U_{z} - U_{y} - U_{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{1} &= \begin{pmatrix} k_{zx} \ -k_{zy} \ 0 \\ 0 \ 0 \ k_{xy} \\ k_{zz} - k_{xx} \ 0 \ -k_{xz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{2} &= \begin{pmatrix} 0 \ 0 \ -k_{xy} \\ k_{zx} \ k_{zy} \ k_{zz} - k_{yy} \\ 0 \ 0 \ -k_{yz} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_{3} &= \begin{pmatrix} -k_{xz} \ 0 \ k_{xx} - k_{zz} \\ -k_{zy} \ 0 \ 0 \\ 0 \ -k_{yx} \ -k_{xz} \end{pmatrix}, \quad R_{i}, \quad U_{i}, k_{i,j} (i, j = x, y, z) - \text{ kosphometry}, \end{split}$$

фициенты модели дрейфа, определяемые, как правило, по результатам заводских испытаний и уточняемых в процессе эксплуатации объекта,  $g_i$ , i=x, y, z – ускорения, направленные по осям ГСК.

Для определения проекции угловой скорости дрейфа НП воспользуемся кинематическими уравнениями, в качестве которых могут быть использованы уравнения Эйлера, Эйлера-Крылова, Пуассона, параметры Родрига-Гамильтона, Кейли-Клейна, гиперкомплексные числа и др. Преимущества и недостатки использования отмеченных параметров в алгоритмах навигации и ориентации отмечены в [6]. Для наглядности будем далее использовать углы Эйлера-Крылова α, β, γ. В этом случае система дифференциальных уравнений примет вид [10]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha} & \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} & 0 \\ \sin\gamma tg\alpha & \cos\gamma tg\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$
(2)

Для определения  $g_x, g_y, g_z$  на оси ГСК используем матрицу вращения, описывающую положение ГСК относительно ИСК. Так как ГСК вращается вокруг оси О $\eta$ , то

$$G=VI, \qquad (3)$$

где

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} (1 - \cos\Omega_3 t) \cos^2 \varphi + \cos\Omega_3 t & (1 - \cos\Omega_3 t) \frac{\sin 2\varphi}{2} & -\sin\varphi \sin\Omega_3 t \\ (1 - \cos\Omega_3 t) \frac{\sin 2\varphi}{2} & (1 - \cos\Omega_3 t) \sin^2 \varphi + \cos\Omega_3 t \cos\varphi \sin\Omega_3 t \\ \sin\varphi \sin\Omega_3 t & -\cos\varphi \sin\Omega_3 t & \cos\Omega_3 t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - \cos\Omega_3 t & \cos\Omega_3 t \\ -\cos\varphi \sin\Omega_3 t & \cos$$

Ω<sub>3</sub> – скорость вращения Земли, *t* – время, φ – известная широта центра масс объекта.

Для заданной ориентации осей ГрСК относительно осей ИСК можно записать [10]:

$$\mathbf{J}=\mathbf{D}\mathbf{I},$$
 (4)

где

 $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ -\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma \end{pmatrix}$ 

С учетом (3) и (4) ориентация ГрСК относительно ГСК описывается уравнением (5):

$$\mathbf{J} = \mathbf{D} \mathbf{V}^T \mathbf{G}, \tag{5}$$

где  $\mathbf{V}^T$  – транспонированная матрица  $\mathbf{V}$ .

Из (5) следует, что

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^T (\Omega_3 t, \varphi) \mathbf{G} .$$
 (6)

Учитывая случайные белошумные помехи w в (6), получим,

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^T (\Omega_3 t, \varphi) (\mathbf{G} + \mathbf{w}), \tag{7}$$

Уравнения (1-7) позволяют в окончательном виде построить стохастическую модель прецессионного движения НП в форме «объект»:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(\beta, \gamma) \left( \mathbf{R} + \mathbf{U} \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^{T} (\Omega_{3}t, \phi) (\mathbf{G} + \mathbf{w}) + (8) \right) \\ + \left( \left( \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^{T} (\Omega_{3}t, \phi) (\mathbf{G} + \mathbf{w}) \right)^{T} \hat{\otimes} \mathbf{K} \right) \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \times \\ \times \mathbf{V}^{T} (\Omega_{3}t, \phi) (\mathbf{G} + \mathbf{w}) + \mathbf{W}$$

где W – помеха НП, описываемая белым шумом.

В компактной форме уравнения «объекта» (8) принимают вид (9)

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{t}) + \mathbf{F}_{\mathbf{0}}(\mathbf{Y}, \mathbf{t}) \boldsymbol{\xi}, \qquad (9)$$

где 
$$\mathbf{Y} = (\alpha \ \beta \ \gamma)^T$$
,  $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{w}^{\dagger} \mathbf{W})^T$ ,  
 $\mathbf{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{t}) = \boldsymbol{\Phi}(\beta, \gamma) (\mathbf{R} + \mathbf{U} \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^T (\Omega_3 t, \phi) \mathbf{G} + (\mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^T (\Omega_3 t, \phi) \mathbf{G})^T \hat{\otimes} \mathbf{K} \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^T (\Omega_3 t, \phi) \mathbf{G}$ ,  
 $\mathbf{F}_0(\mathbf{Y}, \mathbf{t}) = (\boldsymbol{\Phi}(\beta, \gamma) (\mathbf{U} \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^T (\Omega_3 t, \phi) + (\mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^T (\Omega_3 t, \phi) \mathbf{G})^T \hat{\otimes} \mathbf{K}) \times \mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^T (\Omega_3 t, \phi) \mathbf{G}$ 

Для получения оценки текущей ориентации НП необходимо построить стохастическую модель наблюдателя. Для этого воспользуемся уравнением (6), предварительно линеаризовав в нем матрицу **D**. В результате будем иметь

$$\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{D}}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{V}^{T}(\Omega_{3} t, \varphi) \mathbf{G}, \qquad (10)$$

где  $\mathbf{A} = (A_x \ A_y \ A_z)^T$  – вектор ускорений, который может быть определен по показаниям акселерометров,

расположенных на НП,  $\widetilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$ .

Выделим в (10) слагаемые, не содержащие компоненты вектора Y

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -v_3^* & v_2^* \\ v_3^* & 0 & -v_1^* \\ -v_2^* & v_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$
(11)

где

$$\begin{split} v_1^* &= G_N (1 - \cos\Omega_3 t) \cos^2 \varphi + G_N \cos\Omega_3 t + \\ &+ G_L (1 - \cos\Omega_3 t) \frac{\sin 2\varphi}{2} + G_E \sin \varphi \sin\Omega_3 t , \\ v_2^* &= G_N (1 - \cos\Omega_3 t) \frac{\sin 2\varphi}{2} + G_L (1 - \cos\Omega_3 t) \sin^2 \varphi + \\ &+ G_L \cos\Omega_3 t - G_E \cos \varphi \sin\Omega_3 t , \\ v_3^* &= -G_N \sin \varphi \sin\Omega_3 t + G_L \cos \varphi \sin\Omega_3 t + G_E \cos\Omega_3 t . \end{split}$$

С учетом шумов измерений акселерометров уравнения (11) принимают вид:

$$\begin{pmatrix} Z_{A_X} \\ Z_{A_y} \\ Z_{A_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -v_3^* & v_2^* \\ v_3^* & 0 & -v_1^* \\ -v_2^* & v_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{A_x} \\ W_{A_y} \\ W_{A_z} \end{pmatrix},$$
(12)

где  $Z_{A_i}$ , i = x, y, z – выходные сигналы акселерометров,  $W_{A_i}$  – помехи акселерометров, которые можно представить в виде белого шума (БГШ).

Или в компактной форме

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{A}} = \mathbf{H}(\mathbf{t})\mathbf{Y} + \mathbf{W}_{\mathbf{A}}, \tag{13}$$

где 
$$\mathbf{H}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3^* & v_2^* \\ v_3^* & 0 & -v_1^* \\ -v_2^* & v_1^* & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Z}_{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{Z}}_{\mathbf{A}} - \mathbf{M}_{\mathbf{0}}, \mathbf{M}_{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{pmatrix}.$$

## III. АЛГОРИТМ НЕГАУССОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ НП НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ АПОСТЕРИОРНЫХ МОМЕНТОВ

Представление стохастической модели НП в виде уравнений «объекта» (9) и «наблюдателя» (13) позволяет записать уравнение Стратоновича, решение которого делает возможным найти любые вероятностные характеристики процесса (9) [11].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial Y_i} [q_i(\mathbf{Y}, t)\rho] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial Y_i \partial Y_j} [b_{ij}(\mathbf{Y}, t)\rho] + [F(\mathbf{Y}, t) - F(t)]\rho(\mathbf{Y}, t), \qquad (14)$$

где

$$q_{i}(\mathbf{Y},t) = F_{i}(\mathbf{Y},t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (D_{W})_{k} F_{0jk}(\mathbf{Y},t) \frac{\partial}{\partial Y_{j}} F_{0ik}(\mathbf{Y},t), \quad (15)$$

$$b_{ij}(Y,t) = \sum_{k=1}^{3} D_{k} F_{0ik}(\mathbf{Y},t) F_{0jk}(\mathbf{Y},t), \quad F(\mathbf{Y},t) = -\frac{1}{2} [\mathbf{Z}_{\mathbf{A}} - \mathbf{H}(\mathbf{Y},t)]^{T} \mathbf{D}_{\mathbf{W}\mathbf{A}}^{-1} [\mathbf{Z}_{\mathbf{A}} - \mathbf{H}(\mathbf{Y},t)], \quad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{Y},t) \rho dY_{1} \dots dY_{R}.$$

Однако в рассматриваемом случае не представляется возможным найти аналитическое решение (14). Поэтому в теории нелинейной фильтрации используются различные приближенные методы [11-20]: разложение нелинейных функций в ряды в окрестности оценки [11-15]; полиномиальная аппроксимация нелинейных функций [16, 17]; конечно-разностная аппроксимация АПВ [15]; гауссовское приближение АПВ [18]; замена среднего по множеству средним по времени и т.д. [19-20].

Из всех перечисленных методов наибольшее распространение получил обобщенный фильтр Калмана, основывающийся на предположении нормальности плотности распределения АПВ (15). Несмотря на простоту его реализации в алгоритмах ориентации, его использование для определения углового положения в часто встречающихся на практике случаях не соблюдения условий гауссовского распределения АПВ вектора Y приводит к резкому росту ошибок оценивания. Поэтому рассмотрим далее алгоритм нелинейной стохастической фильтрации, позволяющий получить оценки вектора состояния Y в случае существенного отличия его АПВ от гауссовской. Для этого рассмотрим возможность использования системы апостериорных моментов. Для её построения, следуя [15, 16], умножим обе части (14) на

 $Y_k \ k \in 1.3$  и проинтегрируем по  $Y_1 Y_2 Y_3$ 

$$\int_{-\infty-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t} Y_k dY_1 dY_2 dY_3 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty-\infty-\infty}^{+\infty+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty-\infty}^{+\infty+\infty+\infty} \rho Y_k dY_1 dY_2 dY_3 = \dot{m}^k$$
(16)

При выводе (16) было сделано допущение о возможности перемены порядка интегрирования и дифференцирования.

Разлагая коэффициенты (15) в ряд Тейлора и интегрируя по частям, найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^k m_n^k, \tag{17}$$

где  $a_n^k = \frac{\partial^n q_k(m) 1}{\partial Y_k^n n!}$ . Коэффициент диффузии (15) обра-

щается в ноль, а третье слагаемое уравнения Стратоновича (14) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{*k} m_n^k, \tag{18}$$

где 
$$f_n^{*k} = \frac{\partial^n ([\mathbf{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{t}) - F(t)]Y_k)(m) \mathbf{1}}{\partial Y_k^n n!}.$$

Объединяя выражения (17) и (18), найдем уравнения для начальных апостериорных моментов фазовых координат  $Y_k$ 

$$\dot{m}^{k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}^{k} m_{n}^{k} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n}^{*k} m_{n}^{k} , \ k \in \overline{1,3} .$$
(19)

Для определения центральных апостериорных моментов умножим (14) на  $(Y_k - m^k)^j$ . После интегрирования по частям получим

$$\dot{m}_{j}^{k} = j \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}^{k} m_{n+j-1}^{k} + \frac{j(j-1)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n}^{k} m_{n+j-2}^{k} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n}^{k} m_{n+j}^{k} \quad j > 1$$
(20)

При этом коэффициент диффузии (15) преобразуется к виду

$$\frac{j(j-1)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}b_{n}^{k}m_{n+j-2}^{k},$$
(21)

где 
$$b_n^k = \frac{\partial^n b_{kk}(m)}{\partial Y_k^n}$$

Коэффициенты разложения в ряд Тейлора третьего слагаемого уравнения Стратоновича (14) можно пред-

ставить в виде: 
$$f_n^k = \frac{\partial^n (\mathbf{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{t}) - F(t))(m)}{\partial Y_k^n} \frac{1}{n!}$$

Для определения смешанных моментов умножим (14) на  $(Y_{i_0} - m^{i_0})^j (Y_{j_0} - m^{j_0})^s$  и полученный результат проинтегрируем по частям. Тогда

$$\dot{m}_{j,s}^{i_{0},j_{0}} = -j \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}^{i_{0}} m_{n+j-1,s}^{i_{0},j_{0}} - s \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}^{j_{0}} m_{j,n+s-1}^{i_{0},j_{0}} +$$

$$+\frac{1}{2} \left( j(j-1) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{i_0} m_{n+j-2,s}^{i_0,j_0} + (22) \right) \\ + s(s-1) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{j_0} m_{j,n+s-1}^{i_0,j_0} + js \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{i_0,j_0} (j_0) m_{j-1,n+s-1}^{i_0,j_0} + (22) \\ + js \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{j_0i_0} (j_0) m_{n+j-1,s-1}^{i_0,j_0} + js \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{j_0i_0} (j_0) m_{n+j-1,s-1}^{i_0,j_0} \right) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{j_0i_0} (j_0) m_{n+j-1,s-1}^{i_0,j_0} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{i_0} m_{j+n,s}^{i_0,j_0} , \\ a_n^{i_0} \coloneqq \frac{\partial^n q_{i_0}(m)}{\partial Y_{i_0}^n} \frac{1}{n!} , a_n^{j_0} \coloneqq \frac{\partial^n q_{j_0}(m)}{\partial Y_{j_0}^n} \frac{1}{n!} , b_n^{i_0} \coloneqq \frac{\partial^n b_{i_0i_0}(m)}{\partial Y_{i_0}^n} \frac{1}{n!}$$

$$b_n^{i_0 j_0(j_0)} = \frac{\partial^n b_{i_0 j_0}(m)}{\partial Y_{j_0}^n} \frac{1}{n!}, \ i_0, \ j_0 \in \overline{1,3}, \ s > 1$$

где

Уравнения (19), (20) и (21) позволяют записать уравнения фильтра.

$$\dot{m}^{k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}^{k} m_{n}^{k} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n}^{*k} m_{n}^{k} , \qquad (23)$$

$$\dot{m}_{j}^{k} = j \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}^{k} m_{n+j-1}^{k} + \frac{j(j-1)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n}^{k} m_{n+j-2}^{k} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n}^{k} m_{n+j}^{k} , \\
\dot{m}_{j,s}^{i0,j0} = -j \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}^{i0} m_{n+j-1,s}^{i0,j0} - s \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}^{j0} m_{j,n+s-1}^{i0,j0} + \\
+ \frac{1}{2} \left( j(j-1) \sum_{n=0}^{\infty} b_{n}^{i0} m_{n+j-2,s}^{i0,j0} + \right. \\
+ s(s-1) \sum_{n=0}^{\infty} b_{n}^{j0} m_{j,n+s-1}^{i0,j0} + js \sum_{n=0}^{\infty} b_{n}^{i0,j0} (j0) m_{j-1,n+s-1}^{i0,j0} + \\
+ js \sum_{n=0}^{\infty} b_{n}^{j0i0} (i0) m_{n+j-1,s-1}^{i0,j0} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n}^{i0} m_{j+n,s}^{i0,j0} . \end{cases}$$

Необходимо подчеркнуть, что разработанный алгоритм (23) получен без априорного предположения о нормальном распределении АПВ вектора состояния НП.

## IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения нелинейной стохастической фильтрации (23) решают задачу оценивания вектора состояния НП в реальном масштабе времени и с требуемой точностью. При этом они не требуют допущения о гауссовском характере распределения вектора состояния навигационной системы. Важной особенностью (23) является учет корреляционных связей в переменных вектора состояния НП. В случае, когда АПВ вектора состояния НП может быть аппроксимирована с требуемой точностью гауссовской плотностью распределения, система (23) вырождается в алгоритм стохастической фильтрации калманановского типа [16].

#### Литература

 Salychev, O. S Verified approaches to inertial navigation. Moscow, BMSTU Press, 2017. 368 p.

- [2] Savage, P. G.. Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 21(1):19–28, 1998.
- [3] P. G. Savage. Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 2: Velocity and Position Algorithms. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 21(2):208–221, 1998.
- [4] Розенберг, И.Н., Соколов, С.В., Уманский, В.И. Погорелов, В.А. Теоретические основы тесной интеграции инерциальноспутниковых навигационных систем. М.: Физматлит, 2018. 312 с.
- [5] Соколов, С.В., Погорелов, В.А., Шаталов, А.Б, Гашененко, И.Н. Нелинейная стохастическая оценка параметров ориентации БИНС космических аппаратов в процессе предстартовой подготовки // Изв. РАН. Теория и системы управления 2021, №. 6, С. 136–146.
- [6] Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / Г.И. Емельянцев, А.П. Степанов / Под общей ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова –СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»б 2016. -394 с.
- [7] Соколов, С. В., Погорелов, В. А. Стохастическая оценка, управление и идентификация в высокоточных навигационных системах. М.: Физматлит, 2016. 264 с.
- [8] Погорелов, В. А., Клодина, Т. В. Чуб, Е Г. Инерциальные информационно-измерительные комплексы. Некорректируемая гиростабилизируемая платформа. Berlin: Изд-во LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. 116 с.
- [9] Ригли, У, Холистер, У, Денхард, У. Теория, проектирование и испытания гироскопов. М.: Мир, 1972. 416 с.
- [10] Ишлинский, А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.

- [11] Стратонович, Р. Л. Условные Марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд. МГУ. 1966. 350 с.
- [12] Rusnak, I. Optimal State Estimation of Nonlinear Dynamic Systems, Nonlinear Systems - Modeling, Estimation, and Stability. InTech, 2018. PP 159-178.
- [13] Frank L. Lewis. Optimal Estimation. New York, JohnWiley & Sons, Inc., 1986.
- [14] Simon, D. Optimal State Estimation: Kalman, H∞, and Nonlinear Approaches. 1st ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons; 2006.
- [15] Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь. 1982. 247 с.
- [16] Синицын, И. Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос. 2006. 640 с.
- [17] S. Arulampalam, Maskell, S.R., Gordon, N.J., Clapp, T. A tutorial on particle filters for on-line nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking // IEEE Transactions on Signal Processing 2002, 50. PP 174–188.
- [18] Kazufumi Ito and Kaiqi Xiong. Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems. // IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(5). PP 910–927.
- [19] Julier, S., Uhlmann, J., Durrant-Whyte, H. A new approach for filtering nonlinear systems. In Proceedings of the American Control Conference, 1995. PP 1628–1632.
- [20] M. Norgaard, N. Poulsen, and O. Ravn. New Developments in State Estimation for Nonlinear Systems, Automatica, 2000, 36(11), pp. 1627–1638.

## • ЗАСЕДАНИЕ III – СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ •

# Новые методы управления при наведении научной аппаратуры на наблюдаемые объекты в эксперименте «Ураган» на МКС

М.Ю. Беляев ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва» г. Королёв, Московская обл., Россия <u>mikhail.belyaev@rsce.ru</u>

> Д.Ю. Караваев ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва» г. Королёв, Московская обл., Россия <u>dmitry.karavaev@rsce.ru</u>

П.А. Боровихин ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва» г. Королёв, Московская обл., Россия pavel.borovikhin@rsce.ru А.М. Есаков ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва» г. Королёв, Московская обл., Россия aleksey.esakov2@rsce.ru

И.В. Рассказов ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва» г. Королёв, Московская обл., Россия igor.rasskazov1@rsce.ru

Аннотация—Космический эксперимент (КЭ) «Ураган» на МКС направлен на отработку научной аппаратуры (НА) и методов наблюдения различных объектов и явлений на Земле. Часть НА КЭ «Ураган» уже работает на борту станции, а часть планируется к отправке на орбиту в ближайшее время. В отличие от отечественных орбитальных станций «Салют» и «Мир» МКС не была приспособлена для наведения установленной на ней НА на исследуемые объекты вследствие малого значения располагаемого кинетического момента гиродинов, установленных для управления ориентацией МКС на американском сегменте. Это потребовало разработки специальных методов и устройств для наведения НА КЭ «Ураган» на изучаемые объекты. В докладе рассмотрены методы наведения НА, позволяющие оптимизировать программу исследований КЭ «Ураган» на МКС.

Ключевые слова—Международная космическая станция МКС, космический эксперимент «Ураган», научная аппаратура, наведение, оптимизация, подвижная платформа.

#### I. Введение

В настоящее время на Международной космической станции (МКС) выполняются космические эксперименты (КЭ) в различных научных направлениях.

Вследствие малого значения располагаемого кинетического момента гиродинов американского сегмента полет МКС осуществляется в режиме квазиорбитальной ориентации. Такой режим полета МКС возник по следующим причинам. Для НАСА и других участников проекта американского сегмента (АС) МКС основная научная задача станции состояла в проведении исследований в области микрогравитации и выполнении медицинских экспериментов. Для выполнения таких экспериментов не требуется построение специальной ориентации МКС и подходящей является ориентация станции в орбитальной системе координат при которой гравитационный возмущающий момент близок к нулю. Управление ориентацией МКС осуществляется с помощью гиродинов, установленных на АС МКС, и с помощью двигателей ориентации российского сегмента (РС) станции. Следует заметить, что использование гиродинов для управления ориентацией крупногабаритными космическими аппаратами (КА) сопряжено с серьезными проблемами, связанными, прежде всего, с большими значениями моментов инерции крупногабаритных КА, к числу которых относится и МКС. Располагаемый кинетический момент четырех гиродинов АС МКС составляет 19 000 нмс, что позволяет только поддерживать ориентацию станции в орбитальной системе координат при совмещении главных осей инерции МКС с осями орбитальной станции. Для выполнения разворотов МКС или построения произвольной ориентации станции в качестве исполнительных органов принципиально могут использоваться двигатели ориентации российского сегмента МКС, однако это будет сопряжено с чрезмерно большим расходом топлива. Поэтому выполнять наведение на исследуемые объекты

жестко закрепленных на МКС приборов путем разворотов станции практически невозможно.

В российской программе научных исследований на орбитальных станциях эксперименты традиционно проводились во всех направлениях исследований [1]. При этом в большом количестве экспериментов требовалось наведение научной аппаратуры (НА) на изучаемые объекты. Используемый режим полета МКС потребовал разработки специальных методов наведения научной аппаратуры российского сегмента на изучаемые объекты. В КЭ «Ураган» на МКС, направленном на изучение объектов на Земле, были разработаны следующие методы наведения НА. Ряд приборов КЭ «Ураган» - фотоспектральная система (ФСС), видеоспектральная система (ВСС), фотоаппаратура с большим фокусным расстоянием, имеют узкое поле зрения [2]. Первоначально наведение этих приборов на изучаемые объекты могло осуществляться только экипажем станции, что ограничивало возможности выполнения исследований. Для наведения такой НА на изучаемые объекты в автоматическом режиме необходимо использовать подвижные платформы наведения (ППН). Наведение на объекты исследования приборов, имеющих относительно большое поле зрения (типа создаваемого в рамках КЭ «Ураган» инфракрасного радиометра высокого разрешения «РИВР», или фотоаппаратуры с большим полем зрения) осуществляется за счет движения МКС по орбите и прецессии самой орбиты станции. Научная аппаратура в этом случае жестко закреплена на корпусе станции [2].

В докладе описывается решение задачи наведения НА на изучаемые объекты с помощью системы ориентации видеоспектральной аппаратуры («СОВА»), разработанной РКК «Энергия» совместно с институтом прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко (Республика Беларусь) в рамках реализуемого на российском сегменте (РС) МКС эксперимента по исследованию Земли «Ураган» [3]. Особенностью данной системы является то, что ППН, на которых размещается научная аппаратура (НА), устанавливаются внутри МКС на иллюминаторы служебного модуля и многоцелевого лабораторного модуля РС МКС. При этом обеспечивается автоматическое наведение НА и съемка по заданной программе с участием оператора или без него, а также компенсация «смаза» изображения объекта за время экспозиции, что позволяет производить подробную съемку и спектрометрирование объектов исследования, в том числе находящихся вдали от надира. Хотя возможности наведения таких «внутренних» платформ на РС МКС в общем случае ограничены по сравнению с потенциальными возможностями внешних ППН, у них есть и существенные преимущества – прежде всего дешевизна и удобство обслуживания. Одна из таких ППН уже работает на борту РС МКС и в этом году на станцию будут доставлены еще две платформы «СОВА». ППН «СОВА» позволяют в автоматическом режиме осуществлять наведение на исследуемые объекты НА ВСС и фотоаппаратуры. Характеристики и возможности НА ВСС приведены в [4]-[6]. Используемые в КЭ «Ураган» цифровые фотокамеры Nikon D3X, Nikon 800 позволяют получать цветные снимки с разрешением до 2 м. Примеры снимков, полученных с борта РС МКС приведены на рис. 1-4.

Для части приборов КЭ «Ураган», таких как НА «Икарус», радиометр РИВР, жестко закрепленных на

корпусе станции, предусмотрена работа в автоматическом режиме. НА «Гиперспектрометр» для выполнения съемки устанавливается экипажем РС МКС на иллюминатор №9. Наведение НА РИВР, «Гиперспектрометр» на исследуемые объекты не требует разворотов МКС, однако при использовании этих приборов расходуются ресурсы станции – время экипажа, объем памяти записывающего устройства НА и т.д., что необходимо учитывать при планировании наблюдений этими приборами [2], [7].



Рис. 1. США. Плотина Пауэлл

С учётом большого количества объектов наблюдения, возможности разнообразных сочетаний приоритетов наблюдений, возможности параллельного использования нескольких комплектов ППН «СОВА» на разных иллюминаторах, большого объема действующей и создаваемой НА КЭ «Ураган» (ВСС, ФСС, фотоаппаратура. «Гиперспектрометр», инфракрасный радиометр РИВР и др.), а также наличия ограничений на возможность выполнения наблюдений и требуемые ресурсы, возникает задача оптимизации планирования наблюдений.



Рис. 2. Россия. Крым, Керчь, Крымский Мост

Для решения этих задач разработаны как точные методы, так и алгоритмы, дающие приближенные решения в тех случаях, когда точные решения требуют неприемлемых вычислительных затрат. Используются полные или частичные аналогии с задачами маршрутизации транспортных средств, в частности с задачей нескольких коммивояжеров [8].



Рис. 3. Россия. Адлер



Рис. 4. США. Нью-Йорк

В качестве точного метода в основном используется выбор оптимальных сочетаний программ наблюдений методами целочисленного линейного программирования из наборов всех возможных программ, которые предварительно формируются для каждого прибора с учетом задаваемых ограничений. Приближенные методы основаны на генетической и муравьиной метаэвристиках.

Представленные методы реализованы в составе специального программного обеспечения экспериментов Международной космической станции и используются для оптимального планирования и выполнения фотографической и спектрометрической съемки земной поверхности. Наведение научных приборов может производиться в автоматическом режиме одновременно несколькими поворотными платформами, которые устанавливаются на иллюминаторы внутри обитаемого пространства станции.

## II. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОДВИЖНЫХ ПЛАТФОРМ НАВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ АППАРАТУРЫ НА ИЗУЧАЕМЫЕ С РС МКС ОБЪЕКТЫ

Использование возможностей космонавтов при выполнении научных наблюдений дает определенные преимущества в процессе проведения исследований. К сожалению, постоянно нести такую «научную вахту» космонавты не могут, т.к. большую часть суток они должны заниматься другой работой, а ночью отдыхать.

Для расширения возможностей выполнения целевых программ на станции уже установлены и готовятся к отправке на орбиту дополнительные специальные подвижные платформы наведения (рис. 5). Одна из таких ППН «СОВА» предназначена для обеспечения установки на иллюминаторах служебного модуля (СМ) российского сегмента МКС и многоцелевого лабораторного модуля (МЛМ) МКС различной научной аппаратуры видео-, фото- и спектральной съемки, наведения НА и съемки по заданной программе оператором или без участия оператора.

Система «СОВА» включает в свой состав платформу наведения, устанавливаемую на иллюминатор, на которой фиксируется съемочная аппаратура, и управляющий ноутбук, расположенный рядом в 1,5 – 3 м от иллюминатора. Система «СОВА» позволяет обеспечивать возможность наведения полей зрения НА и отслеживания объекта по изображению на экране монитора ноутбука.

Для установки на РС МКС предусмотрено несколько модификаций аппаратуры «СОВА».

ППН «СОВА-228» устанавливается на иллюминатор диаметром 228 мм СМ РС МКС и обеспечивает возможность поворота установленной на ней съемочной аппаратуры на  $\pm$  180 град. вокруг оси визирования и наведения с углом отклонения не менее 20 град. в одной плоскости от оптической оси иллюминатора.



Рис. 5. Подвижные платформы наведения

ППН «СОВА-426» устанавливается на иллюминатор диаметром 426 мм как СМ, так и МЛМ РС МКС и обеспечивает возможность наведения съемочной аппаратуры по двум взаимно перпендикулярным осям с углами отклонения не менее ± 30 град.

В ходе проектирования были рассмотрены два варианта конструктивного построения ППН «СОВА». Вариант ППН «СОВА-1» (рис. 5а) выполнен по несколько необычной схеме – съемочная НА закрепляется на ППН неподвижно, а сканирование поверхности Земли осуществляется при помощи зеркала, установленного на подвесе, поворачивающемся при помощи электроприводов.

Вариант ППН «СОВА-2» (рис. 5б) построен по «классической» схеме на основе ранее разработанных систем наведения с ручным управлением. В качестве электроприводов, обеспечивающих поворот установленной аппаратуры, использованы линейные актуаторы.

Скорость углового перемещения оптической оси платформ наведения «СОВА-1» и «СОВА-2» составляет 0,75–1,5 град./с и 0,5–6,0 град./с соответственно.

Использование ППН позволяет значительно расширить возможности МКС по исследованию Земли и небесной сферы. Для выполнения наблюдений заданных объектов в этом случае могут использоваться методы оптимального планирования программы научных экспериментов. При использовании методов оптимизации программы экспериментов обеспечивается получение максимального объема полезной научной информации при соблюдении заданных ограничений на планирование.

Операции по последовательному отслеживанию нескольких объектов научным прибором, жестко закрепленном на поворотной платформе, можно подразделить на два основных типа: отслеживание отдельного объекта и «перенацеливание» – переход от отслеживания одного объекта к отслеживанию другого.

Алгоритмы отслеживания отдельного объекта в эксперименте «Ураган» определяются целями исследований и ограничиваются, прежде всего, условиями видимости объекта с борта МКС, предельными углами и максимальной скоростью разворота оси чувствительности прибора. Примерами таких алгоритмов являются выполнение одного фотографического снимка объекта, спектрографическое исследование заданного объекта в течение всего интервала его видимости, последовательное фотографирование объекта относительно большого размера по частям и так далее.

Предполагается, что операции, производимые любым из возможных алгоритмов отслеживания отдельных объектов, характеризуются ожидаемыми временами начала и окончания отслеживания, направлениями оси чувствительности прибора в начале и конце отслеживания, суммой углов разворота оси чувствительности за время отслеживания, информативностью – количественной оценкой ценности научной информации, получаемой при исследовании объекта [8]. Исходя из этих данных, алгоритм планирования наблюдений нескольких объектов должен выбрать объекты и последовательность перехода между ними, учитывая заданные ограничения и, решая некоторую задачу оптимизации, например, максимизировать суммарную информативность наблюдений объектов или минимизировать сумму углов разворотов оси чувствительности научного прибора при условии, что суммарная информативность наблюдений не опускается ниже заданной величины.

Наблюдение объектов может производиться одновременно несколькими научными приборами, установленными на разных поворотных платформах. Тогда для каждой платформы должна быть составлена своя программа наблюдений некоторого подмножества объектов из общего списка. При этом обычно ставятся задачи оптимизации какой-либо суммарной величины – общей информативности наблюдений, выполняемых с помощью всех платформ, или суммы разворотов платформ.

Для оптимального управления одной платформой с установленной на ней НА пригоден подход с применением методов линейного программирования, впервые предложенный в [9], [10]. При оптимизации наблюдений, выполняемых с помощью нескольких управляемых платформ, использовались дополнительные варианты формулировок в терминах целочисленного линейного программирования, основанные на аналогии с так называемой «расширенной» формулировкой задачи маршрутизации нескольких транспортных средств [8], [11], [12]. При таком подходе сначала для каждой платформы формируются возможные программы наблюдений объектов, а затем из этих наборов выбираются (по одной для каждой платформы) такие программы наблюдений, которые в совокупности составляют оптимальное решение.

Рассмотрим в качестве примера сравнительно простую задачу съемки заданных наземных объектов фотоаппаратами с длиннофокусными объективами. На рис. 6 горизонтальной линией с уровнем 0 условно представлена траектория полета МКС. Время полета отсчитывается вдоль этой линии (в секундах) слева направо, начиная от условной точки отсчета со значением 0. По вертикали, то есть перпендикулярно траектории, отсчитываются углы (в градусах), на которые оси визирования фотоаппаратов отклоняются от надира; отклонению влево от трассы соответствуют положительные значения углов, отклонению вправо – отрицательные.

25 объектов, рекомендованных для фотографирования, представлены кружками на рис. 6. Горизонтальная координата каждого кружка – это момент времени, в который расстояние между данным объектом и МКС минимально; вертикальная координата – угол, на который в этот момент должна быть отклонена от надира ось визирования фотоаппарата, чтобы успешно сфотографировать объект.

Наведение на объекты и их съемка производится в течение примерно 100 секунд с помощью трех поворотных платформ одновременно. Одна платформа относится к типу «COBA-1» с максимальной скоростью разворота 1,5 град./с и максимальным возможным отклонением оси визирования фотоаппаратуры от надира 30 град. Две другие платформы относятся к типу «COBA-2», которые обеспечивают максимальную скорость разворота 6 град./с и максимальное отклонение от надира 20 град.)

От каждой платформы требуется, чтобы ось визирования фотоаппарата отклонилась на заданный угол не позднее, чем за 1 с до момента наибольшего сближения МКС с объектом, и через 1 с после указанного момента можно начать разворот для перехода к следующему объекту. Таким образом, на фотографирование выделяется 2 с.

С учетом указанных выше ограничений на скорость разворота платформ и на время фотографирования объектов было подготовлено 8659 возможных программ наблюдений для платформы типа «СОВА-1» и 241919 программ наблюдений для платформы типа «СОВА-2». Задача линейного программирования формулировалась следующим образом: требовалось найти двоичный вектор **X**, доставляющий максимум функции

$$I(\mathbf{X}) = \sum_{r=1}^{M} n_r \, x_r \,, \tag{1}$$

где  $n_r$  – количество объектов, наблюдаемых согласно программе с номером *r*.

Вектор X длиной M=250578 элементов представляет все возможные программы наблюдений и составлен путем объединения векторов X<sub>1</sub> (длиной 8659) и X<sub>2</sub> (длиной 241919), соответствующих типам платформы «СОВА-1» и «СОВА-2». Если программа наблюдений с конкретным значением номера r (от 1 до M) выбрана для наблюдений платформой соответствующего типа, в векторе X элемент с этим номером принимает значение 1. Если же данная программа для наблюдений не выбрана, элемент X с этим номером равен 0.

Таким образом, в качестве целевой функции в (1) использовалась простейшая функция информативности наблюдений, равная числу наблюдаемых объектов.

Количество используемых платформ каждого типа задавалось следующими условиями:

$$\mathbf{1}^T \mathbf{X}_1 \le 1, \ \mathbf{1}^T \mathbf{X}_2 \le 2.$$

Запрещалась съемка одного и того же объекта с помощью более чем одной платформы любого типа, поэтому вводилось ограничение:

$$\sum_{r=1}^{M} a_{ir} x_r \le 1, \ i = 1, \dots, 25.$$
(3)

При этом двоичный коэффициент  $a_{ir}$  формировался так, что для первых 8659 значений индекса *r* значение  $a_{ir}$  равно 1, если объект с номером *i* выбран для наблюдений с помощью платформы «СОВА-1» в программе *r*; для следующих 241919 значений *r* значение  $a_{ir}$  равно 1, если объект с номером *i* выбран для наблюдений с помощью одной из платформ «СОВА-2» в программе *r*. В остальных случаях значение  $a_{ir}$  равно 0.

В результате решения этой задачи методами линейного программирования было определено максимально возможное количество объектов, которое можно сфотографировать при заданных условиях – 20, а также найден один из наборов программ наблюдений, которые обеспечивают съемку такого количества объектов. Это решение представлено на рис. 6.

Далее была поставлена задача найти такой набор программ наблюдений, при котором фотографирование 20 объектов производится при минимальной сумме углов разворотов всех платформ. На сей раз минимизировалась следующая функция:

$$R(\mathbf{X}) = \sum_{r=1}^{M} \theta_r \, x_r \,. \tag{4}$$

Здесь  $\theta_r$  — сумма углов разворотов поворотной платформы, для которой подготовлена программа с номером r.



Рис. 6. Схема съемок 20 объектов из 25 заданных (используются одна платформа типа «СОВА-1» и две платформы типа «СОВА-2»)

Вместе с ограничениями (2, 3) учитывалось следующее:

$$\sum_{r=1}^{M} n_r x_r = 20.$$
 (5)

Решение показано на рис. 7. Минимальная сумма углов разворотов приблизительно в 2 раза меньше суммы разворотов, представленных на рис. 6.

В приведенных примерах оказалось невозможным произвести фотографирование всех заданных объектов, а набор снятых объектов может меняться в зависимости от выбранных программ наблюдений. Чтобы снять за заданный интервал времени все объекты, в данном случае требуется использовать дополнительные платформы.



Рис. 7. Схема съемок 20 объектов из 25 заданных с минимальной суммой разворотов платформ

При увеличении количества заданных объектов и числа платформ, участвующих в их наблюдениях, точное решение задач оптимизации в приемлемые сроки может оказаться невозможным. Для таких случаев предусмотрено применение генетических алгоритмов [11], которые работают согласно следующей общей схеме.

Вводится определение генотипа Y как объединение (конкатенация) трех числовых строк, каждая из которых представляет программу наблюдений для одной из трех платформ наведения. Поскольку в рассмотренном примере введена строгая хронологическая последовательность съемок объектов, каждая программа наблюдений может быть представлена двоичным вектором, компоненты которого соответствуют объектам из общего списка; упорядоченного по времени их наблюдений. Выбранные для съемки объекты обозначаются числом 1, а не выбранные – числом 0.

Случайным образом формируется начальное поколение популяции (набор генотипов), после чего запускается процесс эволюции, при котором следующее поколение формируется на основе предыдущего с помощью стандартных операторов скрещивания, мутации и отбора. Остановка алгоритма, как правило, производится после достижения заданного числа поколений. При отборе выделяются генотипы с наибольшими значениями следующей функции приспособленности:

$$F(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{3} I_i - P_1 N_1 - P_2 N_2.$$
 (6)

*I<sub>i</sub>* – оценка эффективности входящей в генотип программы наблюдений поворотной платформой с номером *i* (в данном примере – число наблюдаемых объектов в программе). Использовались две штрафные функции, которые обеспечивали количественный учет нарушений заданных ограничений.

Во-первых, в каждой входящей в генотип последовательности наблюдений, выявлялись пары объектов, наблюдение которых в одной и той же программе невозможно в силу заданных ограничений. Общее число  $N_1$ таких нарушений, выявленных в генотипе, подсчитывалось и умножалось на величину штрафа  $P_1$ .

Во-вторых, в последовательностях наблюдений, производимых разными платформами, выявлялись одни и те же объекты, выбранные для наблюдений. Такие совпадения считались запрещенными и их число  $N_2$  также умножалось на некоторый штраф  $P_2$ .

По окончании работы алгоритма в качестве решения выбирался генотип с максимальным значением выражения (6) при условии, что количество нарушений обоих типов равно нулю.

Аналогичным образом производилась и минимизация суммы углов разворотов платформ. При этом в дополнение к штрафам, указанным выше, вводился штраф за отклонение числа объектов от заданного значения.

В отличие от алгоритмов линейного программирования, в отношении генетических алгоритмов невозможно гарантировать, что полученный с их помощью результат является оптимальным в строгом смысле этого слова. Так, применение специального бортового программного обеспечения, основанного на генетическом алгоритме с функцией приспособленности (6), к решению задачи, представленных на рис. 6, дало то же значение, которое было получено методами линейного программирования. Однако при решении задачи, представленной на рис. 7, найденная сумма углов разворотов платформ превысила точное минимальное значение на 4,3%.

Тем не менее, несмотря на потери в точности по сравнению с методами линейного программирования, генетические алгоритмы способны в короткие сроки давать достаточно эффективные решения, которые применимы на практике, что особенно актуально при планировании наблюдений объектов из обширных каталогов. Например, для списка из 200 объектов и интервала наблюдений продолжительностью 300 с была поставлена задача найти наибольшее число объектов, которые можно наблюдать с помощью одной платформы «СОВА-1» и двух платформ «СОВА-2». Генетический алгоритм получил оценку этого числа, равную 103, и один из возможных наборов программ, позволяющих наблюдать такое количество объектов. Затем другой генетический алгоритм сформировал программы с меньшей (в 2,5 раза) суммой углов разворотов платформ, наводящихся на 103 объекта из 200 заданных. Это решение, пригодное для практического применения, показано на рис. 8.

В программном обеспечении планирования наблюдений внешних объектов с борта МКС предусмотрено также решение задач, аналогичных задаче нескольких коммивояжеров, которые могли бы возникнуть, например, при оптимизации съемок нескольких астрономических объектов с помощью нескольких подвижных платформ [8]. Подобные задачи могут ставиться и при наблюдении земной поверхности. Для их приближенного решения используются специальные генетические алгоритмы без применения штрафных функций, а также эвристические муравьиные алгоритмы.



Рис. 8. Схема съемок 103 объектов из 200 заданных (используются одна платформа типа «СОВА-1» и две платформы типа «СОВА-2»)

### III. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММЫ НАБЛЮДЕНИЙ, выполняемых с помощью НА «РИВР»

Для выполнения мониторинга Земли в среднем и дальнем ИК-диапазонах в КЭ «Ураган» создается НА «Радиометр инфракрасный высокого разрешения» (РИВР). Эта аппаратура изготавливается на предприятии «Российские космические системы» и, с учётом высоты орбиты МКС, позволит получать информацию мирового уровня [2], [7].
Базовые характеристики аппаратуры «РИВР»:

- число информационных каналов 2;
- границы спектральных диапазонов информационных каналов по уровню 0,5:
  - 3,5-4,1 мкм;

8,0-10,0 мкм;

- пространственное разрешение с номинальной орбиты МКС (*H* = 400 км) — 30 м;
- полоса обзора для орбиты *H* = 400 км 70 км;
- эквивалентная шуму разность измеряемых температур на уровне 300 К:
  - в диапазоне 3,5-4,1 мкм ≤0,5 К;
  - в диапазоне 8,0-10,0 мкм ≤ 0,2 К;
- разрядность выходной информации не менее 10 бит;
- режим работы сеансный.

Функционально аппаратура РИВР состоит из двух блоков:

- оптико-электронного блока (ОЭБ), формирующего видеоинформацию в 2-х спектральных диапазонах: 3,5–4,1 и 8,0–10,0 мкм;
- блока управления радиометром (БУР), предназначенного для управления и сопряжения ОЭБ с бортовыми системами МКС.

ОЭБ устанавливается на внешней поверхности МЛМ РС МКС. БУР — внутри МЛМ РС МКС. Электрическая связь ОЭБ и БУР осуществляется по кабелю.

В радиометре РИВР использован принцип многострочного механического сканирования, который даже при сравнительно небольшом числе чувствительных элементов приемника излучения позволяет реализовать пространственное разрешение 30 м и полосу обзора 70 км (угол обзора 10 град.) при эквивалентной шуму разности измеряемых температур не менее 0,2 К на фоновом уровне температуры в 300 К.

ОЭБ радиометра включает: плоское сканирующее зеркало, совершающее колебательные движения с периодом 1,144 сек с помощью низкооборотного прецизионного привода, зеркально-линзовый объектив, систему спектроделения и многоэлементные приемники излучения. В качестве приемников излучения используются отечественные многоэлементные (матричные) ИК-фотоприемники форматом 4x288 элементов, охлаждаемые микрокриогенной системой до криогенных температур (80 К) и имеющие наработку на отказ не менее 6000 часов. Ось колебания сканирующего зеркала и линейки приемников излучения ориентированы вдоль направления полета КА, что позволяет за один цикл строчной развертки (скан) радиометра сформировать микрокадр форматом 288х2350 элементов. Микрокадры имеют перекрытие 10-40 элементов. При наземной обработке микрокадры подвергаются геометрической коррекции и «сшиваются» в единое трассовое изображение.

Радиометр РИВР планируется установить на многофункциональном лабораторном модуле российского сегмента Международной космической станции.

РИВР будет интегрирован с информационноуправляющей системой (ИУС) РС МКС. ИУС будет обеспечивать передачу управляющих цифровых массивов и рассылку баллистических данных. Кроме того, с помощью ИУС будет осуществляться промежуточное хранение полученной от РИВР информации с последующим сбросом на Землю по широкополосной линии связи.

Интеграция с РС МКС обеспечит все необходимые условия для работы радиометра РИВР в рамках космического эксперимента «Ураган», что открывает новые возможности для участников эксперимента.

Использование в КЭ «Ураган» радиометра РИВР позволит обеспечить получение трассовых изображений в инфракрасном диапазоне для решения широкого круга задач:

- мониторинг и прогноз техногенных и природных чрезвычайных ситуаций;
- обнаружение очагов лесных и подземных пожаров, крупных тепловых выбросов загрязняющих веществ в природную среду;
- мониторинг стихийных гидрометеорологических явлений;
- определение влажности почвы и уровня грунтовых вод;
- поиск подземных вод и геотермических источников;
- исследование динамических процессов на акваториях;
- различные виды тематического картографирования земной поверхности, в том числе геологическое картирование (поиски полезных ископаемых, их идентификация, обнаружение возможных районов газовых и нефтяных месторождений);
- исследование вулканической и сейсмической активности;
- оценка состояния полигонов захоронения промышленных и бытовых отходов и их влияния на окружающую среду;
- обнаружение источников тепловых потерь, источников загрязнения и т.д.

Данная информация будет востребована Федеральной службой охраны леса, МЧС, экологическими и природоохранными службами, службами геологоразведки, а также региональными, отраслевыми и частными организациями.

КЭ на PC МКС позволит также осуществить техническую отработку опытного образца ИК-радиометра высокого разрешения в штатных условиях эксплуатации для дальнейшего его использования в различных автоматических информационных комплексах ДЗЗ.

При планировании и проведении наблюдений с помощью НА «РИВР» предлагается рассчитывать информативность зон экспериментов следующим образом:

$$I_j = \sum_{i=1}^{M_j} p_{ji} o_{ji} l_{ji} s_{ji}$$

N и j – количество зон и их номера;

*М*<sub>*i*</sub> и *i* – количество объектов в зонах и их номера;

р <sub>іі</sub> – приоритет наблюдаемого объекта (от 1 до 10);

*о <sub>ji</sub>* – коэффициент облачности при наблюдении (от 0 до 1);

*l* <sub>*ii</sub> – коэффициент* освещенности при наблюдении;</sub>

*l* <sub>*ii*</sub> = 1 при нахождении объекта в тени и

 $l_{ji} = (h^{\max} - h_{ji})/h^{\max}$  при нахождении объекта на освещенной Солнцем части Земли, причем  $h_{ji}$  – угол Солнца для *i*-го объекта *j*-ой зоны,  $h^{\max}$  – максимально допустимый угол Солнца при съемке;

 $S_{ji}$  – коэффициент сканируемой площади объекта,  $S_{ji} = S'_{ji} / S_{obj}$ ,  $S_{obj}$  и  $S'_{ji}$  – площадь объекта и площадь снимаемой части объекта;

*К*<sub>*i*</sub> – количество включений НА в *j*-ой зоне;

V <sub>j</sub> – объем информации, получаемой в *j*-ой зоне;

*К<sup>о</sup>* – ограничение на количество включений НА;

 $V^{o}$  – ограничение на объём информации, которое определяется емкостью записывающего устройства (ЗУ) НА;

В процессе полета РС МКС возможны следующие постановки задачи оптимизации съемки:

 Максимизация информативности при заданных ограничениях на количество включений НА и объем информации для записи в ЗУ НА. В этом случае требуется найти вектор X, максимизирующий целевую функцию

$$L(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} I_j x_j$$

при ограничениях  $\sum_{j=1}^{N} K_j x_j \leq K^o$  и  $\sum_{j=1}^{N} V_j x_j \leq V^o$ .

 Минимизация объема информации для записи в ЗУ при ограничении на информативность и ограничении на количество включений. Требуется найти вектор X, минимизирующий целевую функцию

$$L(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} V_j x_j$$

при ограничениях  $\sum_{j=1}^{N} I_j x_j \ge I^o$  и  $\sum_{j=1}^{N} K_j x_j \le K^o$ .

Минимизация количества включений при ограничении на информативность и ограничении на количество информации для записи в ЗУ. Требуется найти вектор X, минимизирующий целевую функцию

$$L(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} K_j x_j$$

при ограничениях  $\sum_{j=1}^{N} I_j x_j \ge I^o$  и  $\sum_{j=1}^{N} V_j x_j \le V^o$ .

В качестве примера была оптимизирована программа наблюдений для НА «РИВР». Для этого моделировались условия проведения наблюдений в период июля 2022 года для реальных объектов КЭ «Ураган» и «Сценарий», в том числе пожаров.

Для выбранных объектов были рассчитаны информативность и затрачиваемые ресурсы зон (приведены в таблице 1). В качестве зоны были приняты 1 сутки, т.е. рассматривались каждые сутки в июле 2022 г.

В качестве примера приведено решение задачи максимизации информативности при ограничениях на количество включений НА и объем информации для записи в ЗУ НА:

$$L(\mathbf{X}) = 749,325$$

Для проверки решение также было получено с помощью машинного перебора всех вариантов. При нахождении оптимального решения методом перебора требуется на три порядка больше машинного времени.

При дальнейшем увеличении количества зон или объектов в зонах, а также добавлении дополнительных ограничений, будет возрастать и разница в скорости между обоими способами решения и в итоге будет невозможно решение данной задачи прямым перебором на обычном персональном компьютере.

ГАБЛИЦА I.	Информативность и затрачиваемые
	РЕСУРСЫ ЗОН

Зона	Информатив-	Кол-во	Заполняе-	Объем ин-
	ность зоны	включений	мость ЗУ	формации в
		HA	HA	зоне, Гб
1	20,10	9	15%	37,50
2	23,70	8	13%	33,33
3	23,45	12	20%	50,00
4	24,95	9	15%	37,50
5	31,85	10	17%	41,67
6	30,85	11	18%	45,83
7	24,50	13	22%	54,17
8	24,50	9	15%	37,50
9	21,85	8	13%	33,33
10	25,50	12	20%	50,00
11	24,33	13	22%	54,17
12	29,05	11	18%	45,83
13	23,70	7	12%	29,17
14	26,20	12	20%	50,00
15	20,45	13	22%	54,17
16	22,75	10	17%	41,67
17	29,10	9	15%	37,50
18	25,55	15	25%	62,50
19	23,35	11	18%	45,83
20	25,60	9	15%	37,50
21	21,95	7	12%	29,17
22	21,10	14	23%	58,33
23	31,30	9	15%	37,50
24	32,40	10	17%	41,67
25	29,35	9	15%	37,50
26	26,80	13	22%	54,17
27	22,55	9	15%	37,50
28	23,95	9	15%	37,50
29	24,90	11	18%	45,83
30	26,25	13	22%	54,17
31	29,00	9	15%	37,50

# IV. Оптимизация программы наблюдений, выполняемых с помощью НА «Гиперспектрометр»

В настоящее время в рамках КЭ «Ураган» с целью дальнейшего развития системы мониторинга Земли создана и готовится к отправке на борт РС МКС научная аппаратура «Гиперспектрометр» [2]. НА «Гиперспектрометр» предназначена для выполнения космонавтами съемки земной поверхности в спектральных диапазонах 0,43÷0,9 и 0,9÷1,6 мкм. Данная НА изготовлена МФТИ и АО «НПО «Лептон». Обработка результатов съемки НА «Гиперспектрометр» будет осуществляться на борту с участием космонавта. Это позволит повысить оперативность анализа полученных данных, повысит качество планирования наблюдений и сократит потоки данных, оперативно передаваемых на Землю.

Аппаратура предназначена для регистрации и обработки гиперспектральных изображений земной поверхности в нескольких спектральных каналах (по выбору космонавта от 1 до 100 из 180 каналов) в видимом и ближнем ИК-диапазонах спектра, а также получения панхроматических изображений для визуализации заданной области земной поверхности.

Гиперспектрометр включает в свой состав: гиперспектральную камеру видимого диапазона (ГСК-ВД), гиперспектральную камеру ближнего инфракрасного диапазона (ГСК-БИК) и панхроматическую камеру (ПК). Спектральное разрешение ГСК-ВД и ГСК-БИК при расчетной высоте орбиты МКС 400 км составляет  $\leq 25$  и  $\leq 30$  нм, разрешение в надир  $\leq 45$  и  $\leq 70$  м, максимальное число спектральных каналов, реализуемых одновременно во время съемки –  $\geq 70$  и  $\geq 30$ , а угол поля зрения  $\geq 10x10$  градусов.

С помощью НА «Гиперспектрометр» планируется решение следующих задач:

- оценка состояния лесных угодий;
- оценка состояния сельскохозяйственных посевов;
- поиск и оценка концентрации различных минералов на обнаженных участках почвы;
- обнаружение загрязнения растительности и воды нефтью, мазутом и т.д., а также определение нанесенного этими факторами ущерба;
- построение карт концентрации хлорофилла в приповерхностных водах;
- обнаружение участков наркотических растений среди другой растительности и т.д.

Для планирования наблюдений с помощью НА «Гиперспектрометр» применен подход, аналогичный разработанному для исследований с НА «РИВР». При этом следует отметить, что НА «Гиперспектрометр» устанавливается на иллюминатор № 9 модуля СМ и требует участия экипажа для монтажа/демонтажа и при работе в ручном режиме для выдачи команд управления (задание углов для наведения, времени начала и времени конца съемки). Поскольку прибор работает в видимом и ближнем ИК-диапазонах, его использование возможно только при наличии освещенности исследуемых объектов. Информативность *j*-ой зоны при использовании НА «Гиперспектрометр» имеет вид:

$$I_j = \sum_{i=1}^{M_j} p_{ji} o_{ji} l_{ji} s_{ji}$$

В данном случае

$$l_{ji} = 1 - \left| h_{ji}^{opt} - h_{ji} \right| / h_{ji}^{opt} ,$$

где  $h_{ji}$  и  $h_{ji}^{opt}$  – угол Солнца и оптимальный угол Солнца для *i*-го объекта *j*-ой зоны.

Для оптимизации программы наблюдений с помощью НА «Гиперспектрометр» требуется найти вектор **X**, максимизирующий целевую функцию

$$L(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} I_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{N} T_j x_j \leq T^o$$
,  $\sum_{j=1}^{N} \tau_j x_j \leq \tau^o$  и  $\sum_{j=1}^{N} V_j x_j \leq V^o$ ,

где *T*<sub>*j*</sub> – продолжительность работы с НА в *j*-ой зоне;

 $T^{o}$  – ограничение на время использования экипажа для работы с НА на интервале планирования;

 $\tau_j$  – временной интервал, в течение которого иллюминатор № 9 используется в *j*-ой зоне;

 $\tau^{o}$  – ограничение на время использования иллюминатора № 9 для съемки НА «Гиперспектрометр» на интервале планирования.

При подготовке программы наблюдений НА «Гиперспектрометр» моделировались условия проведения наблюдений для июня 2022 года. Объекты, так же как и в предыдущем примере, брались из списка объектов КЭ «Ураган», «Сценарий» и «Дубрава».

Были рассчитаны информативность и затрачиваемые ресурсы зон. В качестве зоны для ручного управления аппаратурой с привлечением экипажа был принят 1 рабочий день, а для автоматического режима – 1 сутки.

Для автоматического режима работы HA «Гиперспектрометр» в качестве примера приведено решение, максимизирующее информативность программы на рассматриваемом интервале, с учетом ограничений на время использования иллюминатора № 9 и объем памяти ЗУ НА:

$$L(\mathbf{X}) = 339,08$$
.

Для ручного режима съемки НА «Гиперспектрометр» дополнительно учитывались ограничения на время работы экипажа.

Решение, максимизирующее программу для этого случая, имеет вид:

$$L(\mathbf{X}) = 84,52$$

# V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одно из направлений практической космонавтики связано с разработкой пилотируемых орбитальных станций. Благодаря развитию этого направления в освоении космического пространства наша страна добилась наибольших успехов, признаваемых во всем мире. Полученный опыт в создании и длительной эксплуатации орбитальных станций послужил основанием для сотрудничества с нашей страной многих стран, в том числе и по проекту МКС [13]. Орбитальные станции традиционно рассматривались нами как многоцелевые лаборатории для выполнения экспериментов во всех направлениях космических исследований [1]. Особенности управления МКС, связанные с большими размерами станции и малым значением располагаемого кинетического момента гиродинов американского сегмента, используемых для ориентации МКС, сделали практически невозможным выполнение разворотов станции при наведении научной аппаратуры на изучаемые объекты. Для нашей страны, имеющей обширную территорию, важным направлением при использовании космической техники является наблюдение и изучение наземных объектов. Научная аппаратура и технологии этого направления отрабатываются в КЭ «Ураган» на РС МКС. Для функционирующей на борту РС МКС и доставляемой на орбиту в этом году новой научной аппаратуры разработаны методы наведения НА на наблюдаемые объекты, позволяющие оптимизировать программы выполнения исследований с этой аппаратурой. Предложенный подход к оптимизации и методы планирования наблюдений с использованием новой НА с учетом новых критериев информативности и ограничений позволяют значительно повысить эффективность программы наблюдений, выполняемых новой НА.

Предложенные методы оптимизации наблюдений с помощью НА КЭ «Ураган» реализованы в виде специального программного обеспечения (ПО). Часть ПО реализована на борту РС МКС, некоторые программы используются в наземном комплексе для оперативной подготовки предложений по планированию наблюдений. Использование методов оптимизации программ исследований позволяет значительно повысить эффективность выполнения исследований на МКС. Предложенный подход весьма важен и для перспективных орбитальных станций, в том числе и для создаваемой РОС.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Беляев, М.Ю. Научные эксперименты на космических кораблях и орбитальных станциях. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
- [2] Беляев М.Ю. Научная аппаратура и методы изучения Земли в космическом эксперименте «Ураган» на Международной косми-

ческой станции // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2021. Т. 18. № 3.С. 92–107.

- [3] Система автоматической ориентации научной аппаратуры в эксперименте «Ураган» на Международной космической станции / Б.И. Беляев, М.Ю. Беляев, П.А. Боровихин, Ю.В. Голубев, А.А. Ломако, В.В. Рязанцев, Э.Э. Сармин, В.А. Сосенко// Космическая техника и технологии. 2018. № 4(23). С. 70–80.
- [4] Устройство и летные испытания научной аппаратуры «Видеоспектральная система» на борту российского сегмента МКС / Б.И. Беляев, М.Ю. Беляев, Э.Э. Сармин, В.Ф. Гусев, Л.В. Десинов, В.А. Иванов, Ю.А. Крот, А.О. Мартинов, В.В. Рязанцев, В.А. Сосенко // Космическая техника и технологии. 2016. № 2. С. 12–20.
- [5] Атмосферная коррекция данных, регистрируемых с борта МКС. Часть І. Методика для спектров / М.Ю. Беляев, Б.И. Беляев, Д.А. Иванов, Л.В. Катковский, А.О. Мартинов, В.В. Рязанцев, Э.Э. Сармин, О.О. Силюк, В.Г. Шукайло // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2018. Т. 15. № 6. С. 213–222.
- [6] Атмосферная коррекция данных, регистрируемых с борта МКС. Часть II. Методика для изображений и результаты применения / М.Ю. Беляев, Б.И. Беляев, Д.А. Иванов, Л.В. Катковский, А.О. Мартинов, В.В. Рязанцев, Э.Э. Сармин, О.О. Силюк, В.Г. Шукайло // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2018. Т. 15. № 6. С. 223–234.
- [7] Использование инфракрасного радиометра высокого разрешения для исследования потенциально опасных и катастрофических явлений и объектов на земной поверхности в эксперименте «Ураган» на МКС/ Н.П. Акимов, М.Ю. Беляев, Ю.М. Гектин, А.М. Есаков, А.А. Зайцев, Д.С. Серебряков, М.В. Черемисин, С.Д Коган // Труды LII Научных чтений К.Э. Циолковского. Секция «Проблемы ракетной и космической техники». г. Калуга, 19-21 сентября 2017. Казань, 2018. С. 22–30.
- [8] Наведение научной аппаратуры международной космической станции на исследуемые объекты / М.Ю.Беляев, П.А. Боровихин, А.М. Ветошкин, Д.Ю. Караваев, И.В. Рассказов // Космические исследования. 2022. Т. 60. № 1. С. 80–89.
- [9] Беляев М.Ю. Основные задачи и принципы построения наземнобортового комплекса управления экспериментами, проводимыми с помощью космических аппаратов // Управляющие системы и машины. № 4. «Наукова думка». Киев. 1980. С.103–107.
- [10] Беляев М.Ю. Оперативное планирование научных экспериментов, проводимых с помощью КА // Космические исследования. 1980. № 2. С. 235–241.
- [11] Оптимизация наведения научной аппаратуры крупногабаритной орбитальной станции на наблюдаемые объекты/ М.Ю. Беляев, П.А. Боровихин, Д.Ю. Караваев, И.В. Рассказов // XIV Всероссийская мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2021): материалы. Ростов-на-Дону, 2021. Т. 3. С. 70–72.
- [12] Toth, P. Vehicle Routing. Problems, Methods, and Applications / P. Toth, D. Vigo. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, Mathematical Optimization Society, 2014. Second Edition. 463 p.
- [13] Беляев М.Ю. От ракеты Р-7 и первого полета человека в космос до постоянной пилотируемой орбитальной станции // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29. №3 (114). С. 96–121.

# Метод осуществления посадки орбитального самолета на низколетящий аппарат с динамическим принципом поддержания

А.Ю. Княжский Кафедра аэрокосмических измерительно-вычислительных комплексов Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия <u>knjagskij@mail.ru</u> А.В. Небылов Кафедра аэрокосмических измерительно-вычислительных комплексов Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения Санкт-Петербург, Россия nebylov@aanet.ru

Аннотация—Предложены метод и устройство посадки воздушно-космического самолета за счет стыковки с тяжелым экранопланом, позволяющие осуществить их совместную посадку на водную или другую ровную поверхность. Полезным результатом является увеличение воздушнокосмического самолета за счет отсутствия колесного шасси и устранение необходимости в постройке специальной дорогостоящей взлетно-посадочной полосы для его посадки.

Ключевые слова—орбитальный самолет, воздушнокосмический самолет, экраноплан, воздушный старт, горизонтальный старт, стыковка.

# I. Введение

В настоящее время существенной проблемой посадки орбитального многоразового самолета является необходимость в наличии взлетно-посадочной полосы большой площади. Постройка и обслуживание таких взлетнопосадочных полос является достаточно дорогостоящей и нецелесообразной, с учетом того, что запуски орбитальных самолетов производятся достаточно редко. Решением этой проблемы является обеспечение посадки многоразового орбитального самолета (OC) на воду. Что возможно осуществить с использованием низколетящего аппарата (НЛА) с динамическим принципом поддержания, например, экраноплана. Данный тип аппаратов движется с достаточно высокой скоростью и имеет высокую грузоподъемность за счет использования экранного эффекта, что позволяет осуществить стыковку орбитального самолета с низколетящим аппаратам в воздухе и обеспечить их совместную посадку на воду.

В 1959 года в США был разработан экспериментальный самолет-ракетоплан X-15, старт которого осуществлялся с тяжелого бомбардировщика Boeing B-52. В середине 60-х советские конструкторы разрабатывали проект «Спираль», предусматривающий запуск самолета, способного разгоняться до скорости, в шесть раз большей скорости звука на высоте около 30 км. Но данный проект не был завершен. В Германии в 1961–1974 годах разрабатывался подобный проект «Зенгер».

Запуск ВКС с экраноплана затрудняется тем, что как экраноплан, так и ВКС, подходящие для решения данной задачи, пока еще только в проекте. В настоящее время для ВКС еще не разработан двигатель, хорошо работающий в диапазоне от дозвуковых до космических скоростей.

Самый большой экраноплан в мире «КМ» («Корабль макет» или «Каспийский монстр») имел грузоподъем-

 пербургский
 Санкт-Петербургский

 ый университет
 государственный университет

 о приборостроения
 аэрокосмического приборостроения

 рбург, Россия
 Санкт-Петербург, Россия

 @aanet.ru
 nebylov@aanet.ru

 ность 304 тонны и максимальную рабочую скорость 500

 км/ч, при длине 91 м, высоте 21.8 м и размахе крыла 37,6 м и массе 240 т. При этом максимально скорость экрано

никами доходила до 740 км/ч.

# II. ОБЗОР АНАЛОГОВ И ПРЕДЛАГАЕМОГО МЕТОДА

плана «КМ» достигала 650 км/ч, а по некоторым источ-

В А Небылов

Кафедра аэрокосмических

измерительно-вычислительных

комплексов

Принципы осуществления воздушного старта ВКС с экраноплана описаны в работах [1,2].

Известен «Способ посадки самолета» [3], заключающийся в управлении реверсом двигателей и изменении посадочной конфигурации. Также известен «Способ посадки самолетов» [4], заключающийся в излучении радиоимпульсов из двух точек, расположенных на ВПП, определении азимутов на данные точки, контроле непрерывно при полете самолета по глиссаде значения азимутов и углов места до момента касания шасси самолета ВПП и движения по ВПП до полной остановки. Недостатком данных способов является то, что они снижает грузоподъемность ВКС и позволяет осуществлять посадку ВКС только на ВПП, вблизи которой находятся излучатели радиоимпульсов.

Ближайшим аналогом является «Способ управления летательным аппаратом при заходе на посадку» [5], заключающийся в том, что измеряют с помощью инерциальной навигационной системы, систем воздушных сигналов, спутниковой навигационной системы курс, крен и тангаж ЛА, угловую, горизонтальную и вертикальную скорости ЛА, координаты и высоту ЛА, формируют курс ВПП на основе уточненных координат высоты ЛА и координат высоты ВПП, формируют сигналы управления угловым положением ЛА по крену и тангажу, изменяют в автоматическом или ручном режиме угловое положение ЛА в соответствии со сформированными сигналами управления, формируют траекторию посадки с заданным экипажем углом наклона, совпадающую по направлению с курсом ВПП, с помощью курсового, глиссадного и дальномерного радиомаяков (КРМ, ГРМ и ДРМ). В случае отсутствия на борту ЛА сигналов «Готовность курса (глиссады или дальности)» сигналы управления формируют с помощью параметров виртуального курсового (глиссадного или дальномерного) маяков (ВКРМ, ВГРМ, ВДРМ), размещенных определенным образом. Определяют координаты и высоту ВГРМ, пеленг ВКРМ и угла места ВГРМ относительно ЛА. Определяют рассогласование пеленга ВКРМ относительно ЛА и курса ВПП, рассогласование угла места ВГРМ относительно ЛА и

заданного экипажем угла наклона траектории посадки для корректировки сигналов управления. Недостатком данного способа является то, что он снижает грузоподъемность ВКС и не позволяет осуществлять посадку ВКС на водную поверхность.

Предлагаемый метод осуществляется следующим образом:

1. задают путевую скорость, путевой угол НЛА и скорость сближения ОС и НЛА, при которых должна проводится стыковка ОС с НЛА, путевая скорость может равняться, например, 90-110 м/с, а скорость сближения ОС и НЛА, например, 1-2 м/с;

2. задают координаты точки положения конца носа ОС, относительно центра масс НЛА, при прибытии ОС в которую начинается процесс стыковки ОС с НЛА, например, таким образом, чтобы она находилась на расстоянии г 10-15 метров в горизонтальной плоскости и высоте 3-5 метров от хвостового оперения НЛА (фиг. 1). Вместо координат конца носа ОС могут использоваться координаты других элементов, например, центра ОС;

3. включают режим посадки, например, используя пульт управления на ОС;

4. передают сигнал о готовности к посадке, например, путем передачи кода готовности к посадке через радиопередающее устройство;

5. стремятся выдерживать нулевой крен НЛА, например, используя систему автоматического управления движением НЛА;

6. измеряют с помощью инерциальной навигационной системы (ИНС), систем воздушных сигналов (СВС), спутниковой навигационной системы (СНС) путевой угол, крен и тангаж ОС, угловую, горизонтальную и вертикальную скорости ОС, трехмерные координаты ОС, например, используя геодезическую систему координат;

7. принимают информацию о путевом угле, путевой скорости и трехмерных координатах НЛА, например, в геодезической системе координат. Параметры движения НЛА могут измеряться методами, описанными в;

8. вычисляют траекторию движения ОС относительно НЛА, совпадающую по направлению с путевым углом НЛА, например, таким образом, чтобы угловая скорость и величины перегрузок на ОС, не превышали установленных пороговых значений;

9. формируют сигналы управления угловым положением ОС по крену и тангажу, например, учитывая вычисленную траекторию движения ОС;

10. изменяют в автоматическом или ручном режиме угловое положение ОС в соответствии со сформированными сигналами управления, например, используя систему автоматического управления движением ОС и сигналы с пульта управления пилота;

11. проводят охлаждение стыковочных элементов, используя систему охлаждения стыковочных элементов;

12. после достаточного сближения ОС с НЛА, на заданное расстояние г, наводят ОС на НЛА, контролируя крен, тангаж и путевой угол ОС и НЛА, например, таким образом, крен ОС имел нулевое значение, тангаж ОС 1-6

град, в зависимости от тангажа краноплана, а путевой угол ОС совпадал с путевым углом НЛА, и осуществляют соединение стыковочных элементов ОС и НЛА, например, путем их взаимного захвата, корректировки местоположения ОС относительно НЛА и фиксации местоположения ОС на НЛА;

13. генерируют сигнал завершения соединения стыковочных элементов ОС и НЛА, например, передавая заданный код по линии передачи данных в систему автоматического управления движением НЛА;

14. снижают скорость НЛА до заданной скорости посадки, например, равной половине крейсерской скорости (например, 60-80 м/с);

15. осуществляют посадку НЛА, несущего ОС, с прибытием в заданную точку, например, в точку где будет проводится отсоединение и дальнейшая транспортировка ОС, заданную в геодезической системе координат;

16. проводят разъединение стыковочных элементов ОС и НЛА, например, используя пульт управления в кабине пилота.

Предложенный метод позволит повысить полезную нагрузку орбитального самолета за счет отсутствия необходимости в наличии колесного шасси, вес которого значительно больше веса стыковочных элементов. Также данный метод позволит осуществлять посадку на морскую поверхность, устранив необходимость в постройке и содержании дорогостоящей взлетно-посадочной полосы.

# III. УСТРОЙСТВО, ПОЗВОЛЯЮЩЕЕ РЕАЛИЗОВАТЬ ПРЕДЛАГАЕМЫЙ МЕТОД

Известно «Устройство для стыковки фюзеляжа с крылом тяжелого самолета» [8] Устройство содержит стапель, на котором установлено крыло, а также тележку для транспортировки фюзеляжа, отличающееся тем, что, с целью обеспечения внестапельной стыковки фюзеляжа и крыла, собранных в различных стапелях, на тележке симметрично оси фюзеляжа установлены фермы с рельсами, на которых смонтированы каретки поперечных балок, закрепленных через окна в фюзеляже на ложном внутрифюзеляжном каркасе, а над крылом симметрично оси самолета также установлена оборудованная лебедками и опертая на домкраты ферма с продольными рельсами. Недостатком данного устройства является то, что для стыковки ВКС с экранопланом необходимо наличие дополнительного тяжелого оборудования, установленного на ВКС из-за которого снижается его полезная нагрузка.

Известно устройство «Орбитальный самолет» [9]. Известное устройство содержит кислородный и водородный топливные баки, двигательную установку, крылья, хвостовое оперение, а также отсек для полезного груза, шасси и средства управления самолетом, причем водородный бак и двигательная установка смонтированы на торцах кислородного бака, а отсек для полезного груза, крылья и хвостовое оперение - на боковой поверхности кислородного бака. Водородный бак имеет обтекаемую форму, а его диаметр больше диаметра кислородного бака в 1,2-1,5 раза. Оси указанных топливных баков смещены друг относительно друга таким образом, что образующие их боковых поверхностей снизу составляют одну линию. Недостатком известного устройства является отсутствие возможности его посадки на воду.

Наиболее близким из числа технических решений является «Устройство для стыковки самолетов в воздухе» [10], состоящее из приспособления для крепления аварийного самолета на большегрузном самолете-спасателе и платформу, установленых на платформе захватов, обеспечивающих фиксацию аварийного самолета относительно устройства, датчиков положения для регулирования скорости и положения большегрузного самолета-спасателя относительно аварийного самолета и демпферов. Недостатком известного устройства является то, что оно снижает грузоподъемность ВКС и не позволяет осуществлять стыковку при нагретых стыковочных элементах, что затрудняет стыковку и посадку ОС с экранопланом.

На рис. 1 и рис. 2 представлено устройство для реализации способа посадки ВКС без колесного шасси с помощью экраноплана.



Рис. 1. Устройство для реализации способа посадки ВКС без колесного шасси с помощью экраноплана



Рис. 2. Схема устройства для реализации способа посадки ВКС без колесного шасси с помощью экраноплана

# Введены следующие обозначения:

1 – приспособление для крепления ВКС на большегрузном экраноплане;

- 2 платформа;
- 3 стыковочные элементы экраноплана;
- 4 демпферы;
- 5 датчики положения;

- 6-система управления;
- 7 пульт управления;
- 8 система охлаждения стыковочных элементов;
- 9-система автоматического управления захватом;

10 - стыковочные элементы ВКС;

11 – оптическая система наведения на экраноплан, установленная на ВКС.

Устройство содержит приспособление для крепления ВКС на большегрузном экраноплане 1, платформу 2, установленные на ней стыковочные элементы экраноплана 3, демпферы 4, датчики положения 5, систему управления стыковкой 6, через которую можно автоматически или через оператора осуществлять соединение и разъединение стыковочных элементов, включающую пульт управления 7, систему охлаждения стыковочных элементов 8, систему автоматического управления захватом 9, соединенную с датчиками положения 5, стыковочными элементами экраноплана 3 и системой охлаждения стыковочных элементов 8, а также стыковочные элементы ВКС 10 и оптическую систему наведения на экраноплан, установленные на ВКС.

В качестве стыковочных элементов на экраноплане и ВКС можно использовать, например, высокопрочные термостойкие металлические захваты, производящие автоматический взаимный захват при сближении друг с другом с заданной точностью с определенного направления. Между корпусом аппарата (экраноплана или ВКС) и захватом должен быть расположен амортизатор, гасящий удар от стыковки. Фиксация ВКС на корпусе экраноплана должна проводиться таким образом, чтобы трение и нагрев между корпусами и стыковочными элементами ВКС и экраноплана не разрушали их конструкции. Система автоматического управления захватом 9 может представлять собой вычислительное устройство, которое после поступления сигнала запуска стыковки с пульта управления пилота, начинает принимать сигнал с датчиков положения 5, о местоположении ВКС и при попадании пространственных и угловых координат ВКС относительно экраноплана в установленные диапазоны, автоматически производит захват ВКС с использованием стыковочных элементов экраноплана 3, одновременно проводя их охлаждение с использованием система охлаждения стыковочных элементов 8, в случае их перегрева.

### Выводы

Разработан метод посадки воздушно-космического самолета с использованием экраноплана, позволяющий увеличить полезную нагрузку и избавиться от необходимости в наличии дорогостоящей специальной взлетнопосадочной полосы. Предложено устройство, позволяющее реализовать данный метод.

#### ЛИТЕРАТУРА

- А.В. Небылов, В.А. Небылов, А.Ю. Княжский. Воздушный старт орбитального самолета с экраноплана // Авиакосмическое приборостроение, № 6, 2019, сс. 13-19.
- [2] A. Nebylov, V. Nebylov, A. Knyazhsky, Advanced concept of HTHL marine space system, Proceedings of 9th International Conference on Recent Advances in Space Technologies, RAST 2019, Istanbul, 11– 14 июня 2019 года. Turkey: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2019, pp. 153-158.

- [3] Патент №2028252 С1 Российская Федерация, МПК В64С 13/00, В64D 33/04. Способ посадки самолета : № 4941529/23: заявл. 03.06.1991: опубл. 09.02.1995 / А.А. Комов, Ю.Е. Столяров, М.А. Богачев; заявитель Государственный научно-исследовательский институт гражданской авиации.
- [4] Патент № 2296372 С2 Российская Федерация, МПК G08G 5/02. Способ посадки самолетов : № 2005112068/09 : заявл. 22.04.2005: опубл. 27.03.2007 / Л. В. Винокуров.
- [5] Патент №2598111 С9 Российская Федерация, МПК G05D 1/08, B64D 45/04, G08G 5/02. Способ управления летательным аппаратом при заходе на посадку: № 2014154316/11: заявл. 30.12.2014: опубл. 20.09.2016 / Ю.Т. Криворучко, Б.В. Пономаренко; заявитель Акционерное общество "Раменское приборостроительное конструкторское бюро" (АО "РПКБ"), Акционерное общество "Ордена Трудового Красного Знамени Всероссийский научноисследовательский институт радиоаппаратуры" (АО "ВНИИРА").
- [6] А.В. Небылов. Измерение параметров полета вблизи морской поверхности. ГААП. СПб., 1994. 307 с.

- [7] A.V. Nebylov, Aerospace Sensors. Encyclopedia, Momentum Press, New Jersey, USA, 2009, 560 p.
- [8] Авторское свидетельство №272067 А1 СССР, МПК В64F 5/00. Устройство для стыковки фюзеляжа с крылом тяжелого самолета: № 1304643/40-23: заявл. 13.02.1969: опубл. 26.05.1970 / А.Ф. Дымов, А.В. Мещеряков, В.П. Николаев, Г.П. Шныров. EDN EAWXIS.
- [9] Патент №2193510 С2 Российская Федерация, МПК В64G 1/14. Орбитальный самолет: № 2000132439/28: заявл. 26.12.2000: опубл. 27.11.2002 / Г.Е. Лозино-Лозинский, А.Т. Тарасов; заявитель Российская инженерная академия. EDN FUHMVQ.
- [10] Патент №2312043 С2 Российская Федерация, МПК В64D 5/00, В64D 25/00. Устройство для стыковки самолетов в воздухе : № 2006100993/11 : заявл. 10.01.2006 : опубл. 10.12.2007 / И.Х. Хайруллин, Ф.Р. Исмагилов, В.С. Сыромятников [и др.]; заявитель Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Уфимский государственный авиационный технический университет.

# Адаптивный супертвист-скользящий режим управления ориентацией для беспилотных летательных аппаратов с подвижными массами

Цзинчжун Чжэн *МГТУ им. Н.Э. Баумана* Москва, Россия j.z.zheng@yandex.ru

К.А. Неусыпин *МГТУ им. Н.Э. Баумана* Москва, Россия neysipin@mail.ru

Аннотация—В отличие от обычных БПЛА, управляемых элеронами, беспилотного летательного аппарата с жестким крылом и подвижной массой (БПЛАЖП) использует смещение подвижной массы в аппарате для того, чтобы заставить его выполнять движение по крену. Учитывая неопределенности и возмущения модели, создана нелинейная математическая модель для БПЛАЖП. Разработанный адаптивный супер-твист скользящий режим управления (ASTSMC) может добиться сходимости ошибки угла ориентации за ограниченное время. С помощью анализа Ляпунова предложенный алгоритм гарантирует устойчивость. Моделирования продемонстрированы для проверки действия алгоритма, который делает систему с хорошими характеристиками отслеживания команд и устойчивостью.

Ключевые слова—беспилотные летательные аппараты с жестким крылом, управление подвижной массой, адаптивный коэффициент усиления, супер-твист скользящий режим управления.

#### I. Введение

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) значительно выросли благодаря своей низкой стоимости, простой конструкции, высокой безопасности и легкости управления. В частности, они широко используются в гражданских и военных областях, таких как мониторинг окружающей среды, беспилотные грузовые системы, аэрофотосъемка и оценка боевого ущерба [1]. Применение БПЛА в этих областях может повысить эффективность работы, снизить травматизм персонала в условиях повышенного риска и открыть новые возможности для трудоустройства. Правильная работа БПЛА - это совместная работа нескольких компонентов, среди которых управление ориентацией является очень важным. В настоящее время все больше БПЛА на рынке управляются с помощью лопастей ротора или аэродинамических поверхностей для контроля ориентации. По сравнению с винтокрылыми БПЛА, БПЛА с жестким крылом имеют преимущества высокой скорости, большой дальности полета, большой полезной нагрузки и легкой скрытности, что приводит к более широким перспективам применения.

Ученые изучают управление подвижной массой (MMC) для управления ориентацией устройств, включая М.С. Селезнева МГТУ им. Н.Э. Баумана Москва, Россия m.s.selezneva@mail.ru

Жуйян Чжоу *МГТУ им. Н.Э. Баумана* Москва, Россия zhouruiyang.ray@gmail.com

стратосферные дирижабли, возвращаемые аппараты, спутники и т.д. [2]. Для БПЛА преимущество подхода ММС заключается в том, что блок массы расположен внутри БПЛА, что упрощает конструкцию крыла без необходимости установки закрылков. Интегрированная форма крыла улучшает стелс-способность и придает БПЛА лучшую аэродинамическую форму. Поэтому вопрос о том, как применить подвижные заслонки к БПЛА с жестким крылом, заслуживает изучения. Erturk и др. [3-6] провели обширные исследования БПЛА, сочетающих неподвижное крыло и подвижные массы. В [3] были проведены летные испытания, чтобы проиллюстрировать осуществимость предложенной схемы ММС. В [6] авторы пришли к выводу, что управляемость метода ММС аналогична или выше, чем у решений с аэродинамической поверхностью, когда БПЛА летит на низких скоростях. Qiu [7] исследовал динамические характеристики ориентации БПЛАЖП и разработал для него адаптивный SMC, включающий нечеткую систему и нейронную сеть RBF. С быстрым развитием искусственного интеллекта в последние годы был разработан алгоритм ориентации на основе глубокого обучения с подкреплением для БПЛАЖП [8].



Рис. 1. Схема БПЛА с жестким крылом и одиночной подвижной массой

Разработан управления для решения проблем сильной неопределенности и неизвестных возмущений в процессе полета БПЛАЖП с сильной связью и нелинейными характеристиками. Благодаря введению адаптивного закона, коэффициент усиления ASTSMC может достичь оптимального значения без переоценки, что по-

Эта работа была поддержана Национальной стипендией Китая по гранту 201806840183.

давляет дрожание регулятора, вызванное слишком высокими значениями коэффициента усиления. Более того, предложенный алгоритм ASTSMC может эффективно отслеживать командные углы ориентации в присутствии возмущений.

# II. Динамическая Модель Ориентации

# А. Динамическая Модель

Типичная конфигурация БПЛА с жестким крылом и одиночной подвижной массой, рассматриваемого в данной работе, показана на рис. 1. В отличие от обычных БПЛА с элеронами, в БПЛАЖП вместо элеронов используются внутренние подвижные массы. В частности, движение по крену БПЛАЖП реализуется путем нагружения подвижного ползуна в боковом направлении.

Пусть угловой вектор БПЛАЖП  $\boldsymbol{\varphi} = [\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}]^T$  (включая углы крена, тангажа и рысканья). Положение центра масс подвижного ползуна в связанной системе координат представлен как  $[x_b, y_b, z_b]^T$ . Подвижная масса, рассматриваемая в данной работе, может двигаться только в направлении крыла, т.е.  $x_b = z_b = 0$ . Массы подвижного ползуна, корпуса и всей системы БПЛАЖП определяются как  $m_1, m_B$  и  $m_S$ , соответственно.

Модель динамики ориентации БПЛАЖП описана [7]:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}; \\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\omega}) - \dot{\mathbf{J}} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\zeta}, \end{cases}$$
(1)

где  $\boldsymbol{\omega} = [p,q,r]^T$  – вектор угловой скорости в связанной системе координат;  $\boldsymbol{\zeta}$  – неизвестные возмущения;  $\mathbf{M}$  – внешний комбинированный момент;  $\mathbf{J}$  – инерционный тензор;  $\mathbf{A}$  – матрица преобразования. Их конкретные выражения можно найти в [7].

# В. Модель Проектирования

Пусть  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^T := [\mathbf{\phi}, \dot{\mathbf{\phi}}]^T$ , тогда модель динамики ориентации в (4) может быть выражена как

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2; \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{G}_1 \mathbf{u} + \mathbf{d}_1, \end{cases}$$
(2)

где  $\mathbf{u} = [y_b, \delta_e, \delta_r]^T$ ; **F**<sub>1</sub>, **G**<sub>1</sub> и **d**<sub>1</sub> задаються

$$\mathbf{F}_{1} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\dot{\mathbf{\phi}} - \mathbf{A}\mathbf{J}_{B}^{-1} \left[\mathbf{A}^{-1}\dot{\mathbf{\phi}} \times (\mathbf{J}_{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}\dot{\mathbf{\phi}})\right] + \mathbf{A}\mathbf{J}_{B}^{-1}\mathbf{M}_{1};$$
  
$$\mathbf{G}_{1} = \mathbf{A}\mathbf{J}_{B}^{-1}\mathbf{B}_{M}; \ \mathbf{d}_{1} = \Delta\mathbf{F}_{1} + \Delta\mathbf{G}_{1}\mathbf{u} + \mathbf{d},$$

где  $\mathbf{J}_B$  – тензор инерции, когда БПЛА без подвижной массы,  $\mathbf{d}_1$  – полное возмущение, содержащее члены связи  $\Delta \mathbf{F}_1$  и  $\Delta \mathbf{G}_1$ , которые относятся к  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{G}_1$ . Конкретные выражения  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{B}_M$  можно найти в [7].

**Предположение 1.** Возмущение **d**<sub>1</sub> удовлетворяет

$$\left\|\mathbf{d}_{1}\right\| \leq \delta_{1}, \quad \left\|\dot{\mathbf{d}}_{1}\right\| \leq \delta_{2}, \tag{3}$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – неизвестные положительные константы.

# III. ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРА

## А. Конкретное проектирование регулятора

Цель управления - углы ориентация БПЛАЖП отслеживают желаемые траектории  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, r_3]^T$ .

Пусть ошибка отслеживания угла ориентации как

$$\mathbf{e} = \mathbf{\phi} - \mathbf{\phi}_d \,. \tag{4}$$

Поверхность скользящего режима строится:

$$\mathbf{s} = \mathbf{c}_1 \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}},\tag{5}$$

где  $\mathbf{c}_1 = \text{diag}\{c_{11}, c_{12}, c_{13}\}$  - спроектированная матрица Гурвица. Производная от **s** дает

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{G}_1 \mathbf{u} + \mathbf{d}_1 - \ddot{\mathbf{\varphi}}_d.$$
(6)

На основе ASTSMC, разработанного в [9], входной сигнал может быть получен как

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}_{1}^{-1} \left( \ddot{\mathbf{\phi}}_{d} - \mathbf{F}_{1} - \mathbf{c}_{1} \dot{\mathbf{e}} - \lambda_{1} \| \mathbf{s} \|^{\frac{1}{2}} sign(\mathbf{s}) - \alpha_{1} \int sign(\mathbf{s}) dt \right)$$
(7)

где  $\lambda_1 > 0$  и  $\alpha_1 > 0$  - параметры регулятора, подлежащие проектированию. При этом значения  $\lambda_1$  и  $\alpha_1$  должны удовлетворять следующему адаптивному закону:

$$\begin{cases} \lambda_{1} > \frac{2\varepsilon_{1}\left(\beta_{1}+4\varepsilon_{1}^{2}\right)}{\beta_{1}}; \dot{\lambda}_{1} = \begin{cases} \omega_{1}\sqrt{\frac{\gamma_{1}}{2}}, \|\mathbf{s}\| > s_{M}; \\ 0, \|\mathbf{s}\| \le s_{M}; \end{cases} \quad (8) \\ \alpha_{1} = \lambda_{1}\varepsilon_{1} + \frac{1}{2}\left(\beta_{1}+4\varepsilon_{1}^{2}\right); \varepsilon_{1} = \frac{\omega_{2}}{2\omega_{1}}\sqrt{\frac{\gamma_{2}}{\gamma_{1}}}, \end{cases}$$

# В. Основные Результаты

**Лемма 1.** [10] Рассмотрим систему  $\dot{x} = f(x, u)$ , где f(x) – непрерывная функция и f(0) = 0. Предположим, что функция Ляпунова V(x). Существуют положительные постоянные  $p \in (0,1)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta > 0$  и  $0 < \eta < \infty$ . Если  $\dot{V}(x) \leq -\alpha V^p(x) + \eta$ , то траектория системы устойчива в конечное время, а время установления описывается как

$$T \le V^{1-p} (x_0) / [\alpha \theta_0 (1-p)], \ 0 < \theta_0 < 1.$$
(9)

**Теорема 1.** Для модели системы (2), если разработаны поверхность (5), входной сигнал (7) и адаптивный закон усиления регулятора (8), то (2) будет сходиться за конечное время при выборе соответствующих переменных параметров регулятора  $\omega_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $s_M$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\beta_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2]^T$ , и выражаются как

$$\mathbf{Z}_{1} = \left\| \mathbf{s} \right\|^{\frac{1}{2}} sign(\mathbf{s}); \ \mathbf{Z}_{2} = -\alpha_{1} \int sign(\mathbf{s}) dt + \mathbf{d}_{1}.$$
(10)

Производная от Z является

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}}_1 \\ \dot{\mathbf{Z}}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{Z}_1\|} \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1\\ 2 & 2\\ -\alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix}.$$
(11)

Функция Ляпунова выбирается в виде

$$V = V_0 + \frac{1}{2\gamma_1} \left(\lambda_1 - \lambda_1^*\right)^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \left(\alpha_1 - \alpha_1^*\right)^2, \quad (12)$$

где  $V_0 = \mathbf{Z}^T \mathbf{P} \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \beta_1 + 4\varepsilon_1^2 & -2\varepsilon_1 \\ -2\varepsilon_1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Производная от И является

$$\dot{V} = \dot{V}_0 + \frac{1}{\gamma_1} \left( \lambda_1 - \lambda_1^* \right) \dot{\lambda_1} + \frac{1}{\gamma_2} \left( \alpha_1 - \alpha_1^* \right) \dot{\alpha_1}.$$
 (13)

Выбор соответствующих параметров  $\varepsilon_1$  и  $\beta_1$  может сделать **Р** положительно, и имеем

$$\dot{V}_0 = \dot{\mathbf{Z}}^T \mathbf{P} \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{Z}} = -\frac{1}{\|\mathbf{Z}_1\|} \mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \mathbf{Z}, \qquad (14)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \left( \beta_1 + 4\varepsilon_1^2 \right) - 4\varepsilon_1 \alpha_1 & \alpha_1 - \lambda_1 \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \left( \beta_1 + 4\varepsilon_1^2 \right) \\ \alpha_1 - \lambda_1 \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \left( \beta_1 + 4\varepsilon_1^2 \right) & 2\varepsilon_1 \end{bmatrix}.$$

Чтобы сделать Q положительно, пусть

$$\alpha_{1} = \lambda_{1}\varepsilon_{1} + \frac{1}{2}\left(\beta_{1} + 4\varepsilon_{1}^{2}\right), \lambda_{1} > \frac{2\varepsilon_{1}\left(\beta_{1} + 4\varepsilon_{1}^{2}\right)}{\beta_{1}}.$$
 (15)

Для положительно определенных матриц Р и Q имеем

$$\dot{V}_0 \leq -r_1 V_0^{\frac{1}{2}}, \ r_1 = \lambda_{\max}\left(\mathbf{Q}\right) / \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{P}\right).$$
(16)

Подставляя (16) в (13), имеем

$$\dot{V} \leq -r_{1}V_{0}^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_{1}}{\sqrt{2\gamma_{1}}} \left| \lambda_{1} - \lambda_{1}^{*} \right| - \frac{\omega_{2}}{\sqrt{2\gamma_{2}}} \left| \alpha_{1} - \alpha_{1}^{*} \right| - \left(\frac{\dot{\lambda}_{1}}{\gamma_{1}} - \frac{\omega_{1}}{\sqrt{2\gamma_{1}}}\right) \left| \lambda_{1} - \lambda_{1}^{*} \right| - \left(\frac{\dot{\alpha}_{1}}{\gamma_{2}} - \frac{\omega_{2}}{\sqrt{2\gamma_{2}}}\right) \left| \alpha_{1} - \alpha_{1}^{*} \right|.$$

$$(17)$$

С учетом известного неравенства

$$\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \le |a|+|b|+|c|, \qquad (18)$$

и учитывая (13), можно получить

$$-r_{1}V_{0}^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_{1}}{\sqrt{2\gamma_{1}}} \left| \lambda_{1} - \lambda_{1}^{*} \right| - \frac{\omega_{2}}{\sqrt{2\gamma_{2}}} \left| \alpha_{1} - \alpha_{1}^{*} \right| \leq -\eta V^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

где  $\eta = \min(r_1, \omega_1, \omega_2)$ . Объединение (17) и (19) дает

$$\dot{V} \le -\eta V^{\frac{1}{2}} + \xi, \tag{20}$$

где

$$\xi = -\left(\frac{\dot{\lambda_1}}{\gamma_1} - \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}}\right) \left|\lambda_1 - \lambda_1^*\right| - \left(\frac{\dot{\alpha_1}}{\gamma_2} - \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}}\right) \left|\alpha_1 - \alpha_1^*\right|.$$

1

Очевидно, что (20) удовлетворяет условию Леммы 1, поэтому  $\mathbf{Z}_1$  и  $\mathbf{Z}_2$  сходятся за конечное время, и, **s** также сходится за конечное время. Таким образом, результаты Теоремы 1 справедливы.

# IV. Результаты Моделирования

Проводится численное моделирование для проверки эффективности управления разработанного контроллера. Фактические параметры БПЛАЖП взяты из [7]. Общее возмущение в моделировании выбрано как  $\mathbf{d}_1 = [0.3\sin(4t), 0.3\sin(4t), 0.3\sin(4t)]^T$ . Начальные значения  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{u} \ u \ \lambda_1$  выбраны как  $\mathbf{x}_1(0) = [0.1, 0.1, 0.1]^T$ ,  $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{u}(0) = [0, 0, 0]^T$  и  $\lambda_1(0) = 5$ , соответственно. А параметры регулятора выбраны следующим образом:  $\mathbf{c}_1 = \text{diag}\{3, 10, 3\}$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\gamma_1 = 2$ ,  $s_M = 0.015$ ,  $\varepsilon_1 = 1.25$  и  $\beta_1 = 8.25$ . Для того чтобы уменьшить дрожание входного сигнала, в моделировании используется функция насыщения, которая выглядит следующим образом:

$$sats(s) = \begin{cases} 1, s > \Delta; \\ s / \Delta, |s| \le \Delta; \\ -1, s < -\Delta, \end{cases}$$

где  $\Delta = 0,1$  – ширина пограничного слоя.

Результаты моделирования регулятора показаны на рис. 2–4. Оценка параметров  $\lambda_1$  и  $\alpha_1$  описана на рис. 2. Под действием адаптивного закона параметры могут быстро сходиться к стабильному значению. На рис. 3 показаны входные сигналы, которые являются непрерывным и относительно гладким, с некоторыми колебаниями только в начале. Это объясняется тем, что начальные состояния системы сильно отличаются от командных сигналов, поэтому для быстрого отслеживания командных сигналов подаются входные сигналы с большими изменениями. Сигналы крена, тангажа и рысканья изображены на рис. 4. Выходные сигналы полных каналов быстро достигают командных сигналов в течение 1 секунды, и без перерегулирования. Ошибки слежения быстро уменьшаются за короткое время и, наконец, сходятся к очень маленькому значению. Точность ошибок может быть улучшена путем регулировки ширины пограничного слоя функции насыщения, но при этом соответственно пострадает плавность входных сигналов. В целом, результаты моделирования подтверждают, что предложенный алгоритм подавляет немоделируемые возмущения и хорошо отслеживает углы ориентации.



Рис. 2. Оценки параметров



Рис. 3. Входные сигналы



Рис. 4. Командные и выходные сигналы

# V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучается проблема управления ориентацией для БПЛАЖП. На основе нелинейной связанной динамической модели ориентации БПЛАЖП разработан алгоритм ASTSMC. Этот метод обеспечивает управление отслеживанием угла ориентации данного БПЛА без оценки неопределенностей наблюдателем. Разработанный параметрический адаптивный закон в предложенном алгоритме позволяет избежать переоценки параметров, вызывающих неустойчивость системы. С помощью анализа по Ляпунову доказана устойчивость замкнутой системы. Функция насыщения используется вместо функции знака, чтобы избежать повреждения ползунка и других компонентов, вызванного сильным дрожанием, что делает метод управления более ценным для инженерных приложений. Результаты моделирования показывают, что с помощью разработанного алгоритма БПЛАЖП способен подавлять помехи и точно отслеживать командные сигналы. Будущие исследования включают разработку управления ориентацией для конкретных задач (например, посадка БПЛА).

# ЛИТЕРАТУРА

- R. W. Beard and T. W. McLain, Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice. Princeton University Press, 2012.
- [2] J. Li, C. Gao, C. Li, and W. Jing, "A survey on moving mass control technology," *Aerospace Science and Technology*, vol. 82–83, pp. 594–606, 2018.
- [3] S. R. Vengate, S. A. Erturk, and A. Dogan, "Development and Flight Test of Moving-mass Actuated Unmanned Aerial Vehicle," in AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Washington, D.C., Jun. 2016.
- [4] S. A. Erturk and A. Dogan, "Trim Analyses of Mass-Actuated Airplane in Cruise and Steady-State Turn," *Journal of Aircraft*, vol. 54, no. 4, pp. 1587–1594, 2017.
- [5] S. A. Erturk and A. Dogan, "Dynamic Simulation and Control of Mass-Actuated Airplane," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 40, no. 8, pp. 1939–1953, 2017.
- [6] S. A. Erturk and A. Dogan, "Relative Controllability Evaluation of Mass-Actuated Airplane," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 42, no. 2, pp. 384–393, 2019.
- [7] X. Qiu, M. Zhang, W. Jing, and C. Gao, "Dynamics and Adaptive Sliding Mode Control of a Mass-Actuated Fixed-Wing UAV," Int. J. Aeronaut. Space Sci., vol. 22, no. 4, pp. 886–897, 2021.
- [8] X. Qiu, C. Gao, K. Wang, and W. Jing, "Attitude Control of a Moving Mass-Actuated UAV Based on Deep Reinforcement Learning," *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 35, no. 2, p. 04021133, 2022.
- [9] Y. B. Shtessel, J. A. Moreno, F. Plestan, L. M. Fridman, and A. S. Poznyak, "Super-twisting adaptive sliding mode control: A Lyapunov design," in 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Dec. 2010, pp. 5109–5113.
- [10] Q. Hu, B. Li, and J. Qi, "Disturbance observer based finite-time attitude control for rigid spacecraft under input saturation," *Aero-space Science and Technology*, vol. 39, pp. 13–21, 2014.

# Использование нелинейной коррекции для предотвращения цепочной неустойчивости при управлении высотой беспилотных летательных аппаратов

Б.Р. Андриевский

Лаборатория управления сложными системами Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербургский государственный университет Санкт-Петербург, Россия boris.andrievsky@gmail.com

Аннотация—Статья посвящена проблеме поддержания формации девяти беспилотных летательных аппаратов с перекрестными информационными связями при управлении высотой полета с помощью стандартного пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора. На цепочную устойчивость влияют такие факторы как увеличение количества агентов, и другие, связанные с изменением динамики нелинейного привода руля летательного аппарата. Результаты моделирования показывают, что насыщение управляющего привода для одного агента может привести к колебаниям других агентов, что может разрушить структуру системы. Предлагается ввести нелинейное корректирующее устройство в контур управления исполнительным механизмом для повышения устойчивости системы и предотвращения опасных колебаний. В номинальном режиме, когда насыщения исполнительных механизмов не активны, корректирующее устройство не влияет на работу регулятора и пропускает управляющий сигнал без изменений, но начинает срабатывать, когда значения положений и скоростей исполнительных механизмов достигают предельных значений. Для задачи управления высотой полета формацией беспилотных летательных аппаратов было проведено моделирование с корректирующим устройством, и показана его эффективность.

Ключевые слова— БПЛА, управление формацией, насыщение, нелинейная коррекция, цепочная устойчивость, управление высотой

### I. Введение

Управление объектами, объединенными в группы (формации), позволяет более эффективно решать поставленные задачи и имеет ряд преимуществ. К ним относятся многозадачность группы, высокая надежность и вероятность достижения поставленной цели. Многоагентные системы используются во многих сферах жизни человека. В робототехнике группы объединяют различные транспортные средства, такие как космические спутники, летательные аппараты, в том числе беспилотные (БПЛА), колесные роботы и т. д. Эти устройства взаимодействуют друг с другом, обмениваясь измеряемой информацией по каналам связи в режиме реального времени.

Закон управления формацией может быть реализован

Ю.С. Зайцева

Лаборатория управления сложными системами Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербургский клееный государственный университет, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» Санкт-Петербург, Россия julia.zaytsev@gmail.com

на основе измерения расстояния, пеленга и относительного положения между агентами. От этих факторов будут зависеть выбранные регулируемые переменные и цель управления. Рассмотрим следующую модель формирования, состоящую из N линейных стационарных агентов с одним входом и одним выходом и одинаковой динамикой [1]-[3]:

$$y = W(s)z + By^* + f, \quad z = Gy,$$
 (1)

где  $y(t) \in \mathbb{R}^{N}$  – вектор выходов агентов;  $z(t) \in \mathbb{R}^{N}$  – сигнал синхронизации между агентами;  $y^{*}(t) \in \mathbb{R}^{1}$  – эталонный (желаемый) выход агентов в формации;  $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$  – так называемая матрица смежности, определяющая граф взаимодействия между агентами;  $B \in \mathbb{R}^{N}$  – вектор весов (G и B — расчетные параметры);  $f(t) \in \mathbb{R}^{N}$  – вектор внешних возмущений.

Сохранение формации эквивалентно синхронному движению агентов. В случае БПЛА может возникнуть необходимость выполнять маневры синхронно, сохраняя для всех агентов равными такие переменные, как высота полета, ориентация и скорость. С точки зрения авторов, обычно используемое требование консенсуса для рассматриваемого класса задач управления движением не имеет практического смысла, поскольку единственно допустимой является ситуация асимптотической устойчивости системы в целом, когда возникает тривиальный консенсус: положение всех агентов стремится к началу координат,  $y_i(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . По отношению к состояниям равновесия X<sub>\*</sub> автономных линейных систем  $\dot{x} = Ax$ , очевидно,  $x_* \in N(A)$ : Ax = 0. Следовательно, это либо начало координат,  $x_* = 0$ , либо линейное подпространство. Первый случай тривиален, а второй означает, что конечная конфигурация не фиксирована, а определяется начальными условиями. Для получения нужной конфигурации приходится подавать эталонный сигнал на каждого агента, что, по сути, приводит к централизованному управлению каждым агентом в отдельности. Поэтому в данной работе ставится более слабая цель, чем консенсус, а именно обеспечение отсут-

Работа поддержана Министерством Науки и Высшего Образования РФ (Проект №075-15-2021-573, выполненный в ИПМаш РАН)

ствия статической ошибки по отношению к заданному положению  $\lim_{t\to\infty} (y_i(t) - y^*) = 0, y^* = const_i$ . Обратимся к связи между матрицами G, B в (1), предполагая, что каждый агент имеет локальный регулятор с обратной связью, так что W(s) асимптотически устойчива. При  $f \equiv 0$  из (1) следует статическое выражение  $y = k_0 Gy + By^*$ , где  $k_0 = W(0)$ . Полагая здесь  $y = y^*$ , получаем  $y^* = k_0 Gy^* + By^*$ , откуда  $k_0 G + B = 1$  при  $y^* \neq 0$ . Другими словами, для каждого i = 1, ...N отношение  $k_0 \sum_{j}^{N} g_{i,j} + b_i = 1$ , где  $g_{i,j}, b_i$  – элементы i-й строки матриц G, B.

Согласно результату Факса-Мюррея [1, теорема 3], используя критерий устойчивости Найквиста, можно обеспечить согласованное управление многоагентными системами, состоящими из идентичных линейных стационарных подсистем («агентов»). На основании [1, теорема 3] нетрудно доказать, что если информационный граф формирования агентов линейной системы представляет собой «древовидный» граф со склеенными листьями, т.е. ориентированный ациклический граф, в котором любые две вершины соединены ровно одной связью с возможным суммированием сигналов, подаваемых на вершины, см. [4], [5], то из устойчивости каждого агента следует устойчивость всей формации. Однако для формаций агентов линейной системы, информационные графы которых содержат циклы, обеспечение устойчивости формации в целом не является тривиальным следствием устойчивости каждого агента, даже если он имеет свой локальный стабилизирующий регулятор. Но даже если обеспечена асимптотическая устойчивость во времени по Ляпунову взаимодействующих агентов, тем не менее для крупномасштабных образований может проявляться так называемая «цепочная» или «сетчатая» неустойчивость, где усиливаются отклонения состояний системы вдоль цепочки (или сетки) транспортных средств, см. [6]-[8], что может быть неприемлемо при большом количестве агентов в сети.

Основываясь на существующих исследованиях устойчивости БПЛА, эффекты нелинейности приводов руля самолета могут привести к потере управления или нежелательным колебаниям, известным как эффект «виндапа», или возбуждение интегратора [9], [10]. Также, известны работы, в которых дистанционное управление строем может привести к его разрушению [11]-[13]. Пример потери устойчивости системы показан в [9], [14], где рассматривается система управления курсом самолета с интегратором в законе управления и ограничением скорости привода. Показана зависимость возникновения «виндапа» от параметров входного сигнала. Для предотвращения колебаний был разработан антивиндап-компенсатор [9], [10], [14], [15]. В данной работе рассмотрено проявление эффекта «виндапа» в строю БПЛА при скоростном ограничении сервопривода руля высоты, что приводит к возникновению цепочной неустойчивости даже для малых формирований, и его смягчение с помощью введения последовательного нелинейного корректирующего устройства в системе управления высотой БПЛА с интегральным законом управления.

# II. Описание системы управления БПЛА

#### А. Динамика продольного движения БПЛА

Система управления высотой полета содержит регулятор (автопилот) и нелинейное корректирующее устройство. Предполагается, что агенты имеют одинаковую динамику. В настоящем исследовании используются модели серводинамики БПЛА и руля высоты, взятые из [16], [17]; для краткости их описание опущено.

Серводинамика руля высоты описывается вектором переменных состояния  $x_s = [\delta_e, \omega_e]^T$ , где  $\omega_e(t)$  – скорость отклонения руля высоты,  $u_s = [0, \sigma_e]^T$ , где  $\sigma_e(t)$  – скорость привода, с ограничением  $\overline{\sigma}$ :  $\sigma_e = sat_{\overline{\sigma}}(u_s)$ .

Насыщение привода может привести к ухудшению качества управления и возникновению колебаний. Выявить негативное влияние насыщения можно, исследуя поведение системы при различных типах входных воздействий, также на него может влиять их сочетание с разнообразными начальными условиями. Численное моделирование, проведенное в разделе III, помогает выявить нежелательные режимы работы под влиянием насыщения привода.

Воспользуемся системой контроля высоты в простой форме обратной связи [18]. Вводя  $\Delta H(t)$  как рассогласование по высоте  $\Delta H(t) = H_{ref}(t) - H(t)$ , где H(t) и  $H_{ref}(t)$  – фактическая и опорная высоты соответственно. Пусть сигнал управления, подаваемый на сервопривод руля высоты, генерируется стандартным пропорционально-интегрально-дифференциальным регулятором (ПИД) [17], [19], [20]:

$$u_c(t) = K_p \Delta H(t) + K_d \Delta \dot{H}(t) + K_i \int_0^t \Delta H(\tau) d\tau ,$$
(2)

где  $K_n, K_d, K_i$  – коэффициенты регулятора.

Параметры регулятора установлены на номинальный режим работы. Однако регулятор выходит из строя, когда имеет место сочетание насыщения скорости привода и высоких амплитуд входного сигнала, поскольку начинает расти статическая ошибка [10]. Для предотвращения этого был разработан статический компенсатор [9], [21], который требует измерения величины насыщения на входе и выходе привода. К сожалению, это возможно реализовать не во всех конструкциях. Также сложной задачей является синтез динамического компенсатора насыщения [9]. В связи с этим предлагается следующий подход, основанный на коррекции амплитудно-частотной характеристики системы путем последовательного введения в контур управления нелинейного корректирующего устройства [22]. Основная идея нелинейной коррекции заключается в формировании амплитуды и фазы сигнала отдельно. Это позволяет добиться независимости качества нелинейной системы от изменений параметров входного сигнала. Устройство нелинейной коррекции описывается следующими уравнениями [23], [24]:

$$u_1 = |u_0|,$$
  
 $u_2 = sign(x),$  (3)  
 $x = W(s)u_0,$ 

где  $u_0$  – входной сигнал,  $W(s) = (T_2 s + 1) / (T_1 s + 1)$  – передаточная функция фильтра с постоянными времени  $T_1 < T_2$ .

Измерение насыщения скорости привода измеряется с помощью дополнительного канала:

$$u_3 = |\delta_e|. \tag{4}$$

Выход нелинейного корректирующего устройства описывается выражением:

$$y = (1 - u_3)u + u_1 u_2 u_3.$$
(5)

### В. Структура «Лидер-Ведомый»

Рассмотрим две возможные конфигурации для передачи данных о высоте полета. На рисунках 1, 2 представлены информационные графы сетей многоагентных систем из 9 агентов. Ведущий агент №1. Агенты №6–№9 последовательно получают информацию по сети от агентов №2–№5.



Рис. 1 Связный информационный граф; G как в (8)



Рис. 2 Циклический информационный граф; G как в (9)

Матрица смежности для сети, показанной на рис. 1 и рис. 2, имеют следующий вид:

	$\left\lceil 0 \right\rceil$	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>G</i> =	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	.5	.5	0	0	0	0	0	0
	0	0	.5	0	.5	0	0	0	0
	0	0	0	.5	.5	0	0	0	0
	0	.5	0	.5	0	0	0	0	0

	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	1	0	0	0	0	.5	0	0	5		
	1	0	0	0	0	.5	5	0	0		
	1	0	0	0	0	0	0	5	.5	(7	n
G =	1	0	0	0	0	0	.5	5	0	()	'
	0	.5	.5	0	0	0	0	0	0		
	0	0	.5	0	.5	0	0	0	0		
	0	0	0	.5	.5	0	0	0	0		
	0	.5	0	.5	0	0	0	0	0		

# III. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

# А. Случай І. Связный граф.

Рассмотрим первую сеть, описываемую (6). Для моделирования параметры БПЛА/автопилота принимаются как в [16], [17]:  $K_p = 8 \cdot 10^{-4}$ ,  $K_i = 9.6 \cdot 10^{-6}$ ,  $K_d = 14 \cdot 10^{-3}$ , V = 50 м/с, f = 10 м/с,  $H_{ref} = 3500$  м,  $T_1 = 0.35$  с,  $T_2 = 2.5$  с, элементы матрицы  $A: a_{11} = 4.35, a_{12} = 0$ ,  $a_{21} = 12.57, a_{22} = 3, b = 29.11, \sigma_e = 6$  рад/с.

На рис. 3 показано изменение высоты формации при насыщении привода, из которого видно, что все агенты колеблются. После введения нелинейного корректирующего устройства было проведено моделирование той же системы, результаты которого представлены на рис. 4. Видно, что колебания отсутствуют.



Рис. 3 Изменение высоты агентов во времени нескорректированной системы; граф (6)



Рис. 4 Изменение высоты агентов во времени скорректированной системы; граф (6)

(6)

## В. Случай 2. Циклический тнформационный граф.

Рассмотрим вторую сеть, описываемую (7). На рис. 5 и рис. 6 показано изменение высоты без нелинейной коррекции и с коррекцией соответственно. Видно, что изменение ребер и весов графа не повлияло на положительный результат.



Рис. 5 Изменение высоты агентов во времени нескорректированной системы; граф (7)



Рис. 6 Изменение высоты агентов во времени скорректированной системы; граф (7)

# IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена формация из БПЛА с двумя вариантами перекрестных связей между агентами, по которым передается информация о высоте полета. Показано, что при ограничении скорости привода руля высоты ПИД-регулятор не обеспечивает устойчивости системы, что приводит к колебаниям и разрушению группы. Лидеру достаточно потерять устойчивость, чтобы вся формация разрушилась. Включение нелинейного корректирующего фильтра в контур управления приводом увеличивает запасы устойчивости системы и способствует безопасности полета группы. Нелинейную коррекцию можно использовать вместе с регулятором.

# ЛИТЕРАТУРА

- J. Fax and R. Murray, Information flow and cooperative control of vehicle formations, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 8, pp. 1465–1476, 2004.
- [2] S. Tomashevich and B. Andrievsky, Stability and performance of networked control of quadrocopters formation flight, in *International*

Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops, vol. 2015–January, no. January, 2014, pp. 242–247.

- [3] K.-K. Oh, M.-C. Park, and H.-S. Ahn, A survey of multi-agent formation control, *Automatica*, vol. 53, pp. 424–440, 2015.
- [4] E.A. Bender and S. G. Williamson, *Lists, Decisions and Graphs*. S. Gill Williamson, 2010.
- [5] P. Manuel, S. Klavz'ar, A. Xavier, A. Arokiaraj, and E. Thomas, Strong edge geodetic problem in networks, *Open Mathematics*, vol. 15, no. 1, pp. 1225–1235, 2017.
- [6] R. H. Middleton and J. H. Braslavsky, String instability in classes of linear time invariant formation control with limited communication range, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 7, pp. 1519–1530, 2010.
- [7] A. Pant, P. Seiler, and K. Hedrick, Mesh stability of look-ahead interconnected systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 2, pp. 403–407, 2002.
- [8] S.Feng, Y.Zhang,S.E.Li,Z.Cao,H.X.Liu,andL.Li, Stringstability for vehicular platoon control: Definitions and analysis methods, *Annual Reviews in Control*, vol. 47, pp. 81–97, 2019.
- [9] S. Tarbouriech, I. Queinnec, J.-M. Biannic, and C. Prieur, *Pilot- Induced-Oscillations Alleviation Through Anti-windup Based Approach*, G. Fasano and J. D. Pinte'r, Eds. Cham: Springer International Publishing, 2016.
- [10] P. Hippe, Windup in control: Its effects and their prevention. London: Springer, 2008.
- [11] I. Zaitceva and B. Andrievsky, "Pilot-induced oscillations prevention during aircraft flight in formation," in 2021 5th Scientific School Dynamics of Complex Networks and their Applications (DCNA), 2021, pp. 206–210.
- [12] B. Andrievsky, N. Kuznetsov, O. Kuznetsova, G. Leonov, and S. Seledzhi, Nonlinear phase shift compensator for pilot-induced oscillations prevention, in 2015 IEEE European Modelling Symposium (EMS), 2015, pp. 225–231.
- [13] I. Zaitceva and L. Chechurin, The estimation of control systems stability boundaries by the describing function method by example of aircraft, *Cybernetics and Physics*, vol. 9, no. 2, pp. 117–122, 2020.
- [14] G. Leonov, B. Andrievskii, N. Kuznetsov, and A. Pogromskii, Aircraft control with anti-windup compensation, *Differential Equations*, vol. 48, no. 13, pp. 1700–1720, 2012.
- [15] F. Fichera, C. Prieur, S. Tarbouriech, and L. Zaccarian, Static antiwindup scheme for a class of homogeneous dwell-time hybrid controllers, in 2013 European Control Conference, ECC 2013, 07 2013, pp. 1681–1686.
- [16] T. Mandal and Y. Gu, Analysis of pilot-induced-oscillation and pilot vehicle system stability using UAS flight experiments, *Aerospace*, vol. 3, no. 42, pp. 1–23, 2016. [Online]. Available: https://www.mdpi.com/2226-4310/3/4/42
- [17] I. Zaitceva, Nonlinear oscillations prevention in unmanned aerial vehicle, in CEUR Workshop Proceedings, vol. 2590, 2020.
- [18] A. Bittar and N. Oliveira, Central processing unit for an autopilot: Description and hardware-in-the-loop simulation, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 70, 04 2013.
- [19] K. Astrom and T. Hagglund, The future of pid control, *Control Engineering Practice*, vol. 9, pp. 1163–1175, 2001.
- [20] S. Akyurek, U. Kaynak, and C. Kasnakoglu, Altitude control for small fixed-wing aircraft using h<sub>∞</sub> loop-shaping method, *IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 9, pp. 111–116, 2016.
- [21] B. Andrievsky, N. Kuznetsov, G. Leonov, and A. Pogromsky, Convergence based anti-windup design method and its application to flight control, in 2012 IV International Congress on Ultra Modern Telecom-munications and Control Systems, 2012, pp. 212–218.
- [22] I. Filatov and S. Sharov, Investigation of parametric sensitivity of non-linear dynamic correcting devices, *Engineering Cybernetics*, vol. 15, no. 2, pp. 166–169, 1977.
- [23] B. Andrievsky, I. Zaitceva, and N. Kuznetsov, Application of nonlinear correction method for attitude control and landing oscillations preven- tion, *IFAC-PapersOnLine*, vol. 55, no. 29, pp. 37–42, 2022.
- [24] I. Zaitceva, N. Kuznetsov, and B. Andrievsky, Serial nonlinear correction method in the flight vehicle systems, in *Cyber-Physical Systems and Control II*, ser. Lecture Notes in Networks and Systems, D. G. Arseniev and N. Aouf, Eds. Cham: Springer International Publishing, 2023, vol. 460 LNNS, pp. 315–324.

# Автономное наведение и управление мини-спутниками в низкоорбитальной группировке при площадной сканирующей съёмке

Е.И. Сомов Отдел Навигации, наведения и управления движением Самарский государственный технический университет Самара, Россия e\_somov@mail.ru С.А. Бутырин Отдел Навигации, наведения и управления движением Самарский государственный технический университет Самара, Россия butyrinsa@mail.ru

Аннотация—Представлены разработанные алгоритмы площадной съемки, которая выполняется группировками мини-спутников на солнечно-синхронных орбитах, и результаты компьютерной имитации, демонстрирующие их эффективность.

Ключевые слова—площадная космическая съемка, группировка мини-спутников, наведение и управление.

#### I. Введение

Для мини-спутников в составе низкоорбитальных группировок наблюдения Земли актуальны проблемы наведения, навигации и управления. Такие спутники имеют массу до 500 кг и крупногабаритные панели солнечных батарей для энергоснабжения бортовой аппаратуры, в том системы управления движением (СУД) с бесплатформенной инерциальной навигационной системой (БИНС), которая корректируется сигналами навигационных спутников и кластера звёздных датчиков. Применение мини-спутников наблюдения на низких орбитах имеет ряд достоинств как в конструкции космического аппарата (КА), так и в задачах его миссии. Современные исследования, разработки и достижения по этой тематике представлены в обзорной статье [1], включая проблемы СУД как для оптико-электронных (SkySat), так и для радиолокационных спутников с синтезированной апертурой (Capella-36). Данная статья представляет новые результаты по наведению и управлению мини-спутниками в низкоорбитальных группировках при площадных съемках.

#### II. МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Используются стандартные системы координат (СК) инерциальная (ИСК, базис  $I_{\oplus}$ ) с началом в центре Земли О, геодезическая Гринвичская (ГСК, базис Е), горизонтная (ГорСК, базис Н) с эллипсоидальными геодезическими координатами L, B и H, орбитальная (ОСК) и связанная с КА (ССК, базис В) системы координат с началом в его центре масс О. Используются также телескопная СК (ТСК, базис S) с началом в центре оптического проектирования S и CK поля изображения  $O_i x^i y^i z^i$  (ПСК, базис **F**) с началом в центре  $O_i$ фокальной плоскости телескопа. На поверхности Земли маршрут съемки отображается следом проекций оптиконных преобразователей (ОЭП), составляя полосу та. Такоу маршруту соответствует закон углового наведения КА, при котором происходит требуемое движение оптического изображения на поверхности ОЭП.

Т.Е. Сомова Отдел Навигации, наведения и управления движением Самарский государственный технический университет Самара, Россия te somova@mail.ru

Ориентация ССК в ИСК определяется кватернионом Λ и вектором σ модифицированных параметров Родрига (МПР). Используются векторы угловой скорости ω и ускорения  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , а также обозначения  $col(\cdot) = \{\cdot\}$ , line(·) = [·], (·)<sup>t</sup>, [·×] и символы  $\circ, \tilde{\cdot}$  для векторов, матриц и кватернионов. Ориентация ССК в ОСК определяется углами крена  $\phi_1$ , рыскания  $\phi_2$  и тангажа  $\phi_3$ , которые применяются в последовательности 312. При известном орбитальном движении центра масс КА авторы создали оригинальные аналитические методы синтеза законов наведения КА при сканирующих съемках на основе технологий космической геодезии. Эти методы основаны на анализе поля скоростей изображений наземных целей на матрицах ОЭП с временной задержкой и интегрированием (ВЗН). Задача вычисления кватерниона Л ориентации базиса В в инерциальном базисе  $I_{\oplus}$ , векторов угловой скорости и ускорения в виде явных функций времени решается на основе векторного сложения всех элементарных движений телескопа в ГСК с учетом текущей перспективы наблюдения при задании начальных координат наземной цели и геодезического азимута сканирования А.

Пусть векторы-столбцы  $\omega_e^s$  и  $v_e^s$  представляют в ТСК соответственно угловую скорость и скорость поступательного движения центра масс КА относительно ГСК, матрица  $\tilde{\mathbf{C}} = \|\tilde{c}_{ij}\|$  определяет ориентацию ТСК в ГСК, а скалярная функция D(t) представляет дальность наблюдения вдоль оси визирования. Тогда для любой точки фокальной плоскости телескопа продольная  $\tilde{V}_y^i(\tilde{y}^i, \tilde{z}^i)$  и поперечная  $\tilde{V}_z^i(\tilde{y}^i, \tilde{z}^i)$  составляющие вектора нормированной скорости движения изображения (СДИ) вычисляются по векторному соотношению

$$\begin{bmatrix} \widetilde{V}_{y}^{i} \\ \widetilde{V}_{z}^{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{y}^{i} & 1 & 0 \\ \widetilde{z}^{i} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^{i} \widetilde{v}_{e1}^{s} - \widetilde{y}^{i} \omega_{e3}^{s} + \widetilde{z}^{i} \omega_{e2}^{s} \\ q^{i} \widetilde{v}_{e2}^{s} - \omega_{e3}^{s} - \widetilde{z}^{i} \omega_{e1}^{s} \\ q^{i} \widetilde{v}_{e3}^{s} + \omega_{e2}^{s} + \widetilde{y}^{i} \omega_{e1}^{s} \end{bmatrix}.$$
 (1)

Здесь  $\tilde{y}^i = y^i / f_e$ ,  $\tilde{z}^i = z^i / f_e$  являются нормированными координатами с фокусным расстоянием телескопа  $f_e$ , функция  $q^i = 1 - (\tilde{c}_{21}\tilde{y}^i + \tilde{c}_{31}\tilde{z}^i)/\tilde{c}_{11}$  и  $\tilde{v}_{ei}^s = v_{ei}^s(t)/D(t)$ являются компонентами вектора нормированной скорости поступательного движения. С помощью численного интегрирования кинематического уравнения с применением (1) получаются компоненты вектора-столбца  $\boldsymbol{\omega}_e^s$ , кватерниона **Л** и вектора МПР **ס**. Далее с помощью векторных сплайнов выполняется аппроксимация измеряемых кинематических параметров наведения и в явном виде получаются векторы  $\boldsymbol{\omega}(t)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  и  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ ) для наведения при сканирующей съёмке.

Законы углового наведения спутников представляются последовательностью сканирующих маршрутов (СМ) и поворотных манёвров (ПМ) [2,3]. Созданные методы синтеза законов наведения конкретизированы для трассовой съёмки, протяженных маршрутов с выравниванием продольной СДИ, для площадного землеобзора с последовательностью ортодромических маршрутов, а также для получения стереоизображений

Множество исследований было выполнено по глобальным орбитальным структурам спутников [4-11], включая группировки мини-спутников землеобзора [12,13]. Основные задачи статьи состоят в разработке законов автономного наведения и управления миниспутниками в группировках площадного землеобзора и их компьютерной верификации.

# III. Сканирующие маршруты площадной съёмки

Осевые линии *ортодромических* сканирующих маршрутов (СМ) соответствуют геодезическим линиям заданной высоты над земным эллипсоидом, т.е. здесь оптико-электронное сканирование выполняется по дуге «большого геодезического круга» между точками начала и конца маршрута с заданными геодезическими координатами и заданным временем начала выполнения маршрута. При такой съёмке длительностью  $\tau = t_f - t_i$  для моментов времени  $t \in T \equiv [t_i, t_f]$ , когда на матрицах ОЭП формируется изображение маршрута, в точке  $O_i$  должны выполняться следующие два условия: (i) компоненты вектора СДИ удовлетворяют соотношениям

$$\widetilde{V}_y^i(0,0) = \widetilde{W}_y^i; \quad \widetilde{V}_z^i(0,0) = 0, \quad \widetilde{W}_y^i = W_y^i / f_e, \quad W_y^i = -W_y^s / D$$

при заданной СДИ  $W_y^i$ ; (ii) след оси визирования телескопа совпадает с дугой «геодезического круга» и вектор СДИ ортогонален оси  $O_i z^i$  ПСК.

Основная сложность синтеза закона наведения КА при ортодромическому закону состоит в соблюдении условия (ii). Созданный метод синтеза основан на применении некоторых поправок для приближенного обеспечения этого условия.

#### IV. НАВЕДЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Синтез законов наведения КА при площадном землеобзоре с помощью последовательности ортодромических СМ основан на аналитических соотношениях, где площадки составляются из 3 либо 5 сканов, и предполагается, что матрицы ОЭП обладают режимом реверса. Планирование площадного обзора при трех сканах выполняется в такой последовательности: (i) определяется допустимый угол отклонения линии визирования телескопа от надира, вычисляется ширина захвата центрального (второго) скана, выполняется кинематический расчет этого скана в прямом и обратном времени и вычисляются моменты времени его начала и конца, оцениваются временные затраты на ПМ КА с учетом ограничений; (ii) вычисляются геодезические координаты и моменты времени точек начала и конца третьего (правого) и первого (левого) сканов с учетом необходимого перекрытия смежных сканов; (iii) выполняется кинематический расчет совокупности СМ и ПМ каждого КА с оценкой запасов для выполнения всех ограничений при реализации площадной съёмки.

В СУД применяется силовой гироскопический кластер (СГК) с четырьмя гиродинами (ГД) по схеме 2-*SPE*. Вектор кинетического момента (КМ) каждого ГД ( $p = 1 \div 4$ ) имеет орт  $\mathbf{h}_p(\beta_p)$  с углом  $\beta_p$ , а СГК – векторы нормированного КМ  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) = \Sigma \mathbf{h}_p(\beta_p)$ ,  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_p\}$  и управляющего момента  $\mathbf{M}^{\mathrm{g}} = -h_{\mathrm{g}}\mathbf{A}_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{u}^{\mathrm{g}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{u}^{\mathrm{g}}$  с матрицей  $\mathbf{A}_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{\beta}) = \partial \mathbf{h}/\partial \boldsymbol{\beta}$  и собственным КМ ГД  $h_{\mathrm{g}}$ . Угловое движение КА как твердого тела с тензором инерции **J** представляется моделью

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\omega} / 2; \quad \mathbf{J} \dot{\mathbf{\omega}} = -[\mathbf{\omega} \times]\mathbf{G} + \mathbf{M}^{g} + \mathbf{M}^{m} + \mathbf{M}^{d}.$$
 (2)

Здесь  $\mathbf{H} = h_{g} \mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})$ ;  $\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}$ ;  $\mathbf{M}^{m}$  и  $\mathbf{M}^{d}$  – моменты магнитного привода и внешних возмущений, а вектор управляющего момента СГК  $\mathbf{M}^{g} = -\mathbf{H}'$ , где (·)' – символ локальной производной по времени. При векторе  $\mathbf{M}^{d} = \mathbf{0}$  и балансе СУД по вектору его КМ  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$  модель динамики спутника принимает вид  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}^{g}$ , а модель углового движения КА (2) – кинематическое представление

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\omega}/2; \quad \dot{\mathbf{\omega}} = \mathbf{\varepsilon}; \quad \dot{\mathbf{\varepsilon}} = \mathbf{\varepsilon}' = \mathbf{v},$$
 (3)

когда векторы  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  ограничены по модулю:  $|\boldsymbol{\omega}(t)| \leq \overline{\boldsymbol{\omega}}$ ,  $|\boldsymbol{\varepsilon}(t)| \leq \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  и  $|\boldsymbol{\varepsilon}'(t)| \leq \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'$ . Для ортодромических СМ разработаны законы наведения как векторов МПР  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  в виде сплайнов 7-го порядка [14].

Для кинематической модели (3) при указанных ограничениях возникает задача синтеза закона наведения КА при его ПМ  $\forall t \in T_p \equiv [t_i^p, t_f^p]$  с краевыми условиями

$$\mathbf{\Lambda}(t_i^p) = \mathbf{\Lambda}_i; \mathbf{\omega}(t_i^p) = \mathbf{\omega}_i; \mathbf{\varepsilon}(t_i^p) = \mathbf{\varepsilon}_i; \mathbf{\Lambda}(t_f^p) = \mathbf{\Lambda}_f; \mathbf{\omega}(t_f^p) = \mathbf{\omega}_f; \mathbf{\varepsilon}(t_f^p) = \mathbf{\varepsilon}_f; \mathbf{\varepsilon}'(t_f^p) = \mathbf{\varepsilon}'_f.$$

Для синтеза законов такого наведения КА разработан аналитический метод, основанный на необходимом и достаточном условии разрешимости задачи Дарбу, где функции  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  представляются векторными сплайнами. В результате в явном виде получается программное угловое движение КА  $\Lambda^{p}$ ,  $\boldsymbol{\omega}^{p}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$  в ИСК.

Кватернион ошибки  $\mathbf{E} = (e_0, \mathbf{e}) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}^p \circ \mathbf{\Lambda}$  соответствует вектору параметров Эйлера  $\mathbf{E} = \{e_0, \mathbf{e}\}$ , матрице ошибки  $\mathbf{C}^e(\mathbf{E}) = \mathbf{I}_3 - 2[\mathbf{e} \times]\mathbf{Q}_e^t$ , где  $\mathbf{Q}_e = \mathbf{I}_3 e_0 + [\mathbf{e} \times]$ , и вектору  $\delta \mathbf{\phi} = \{\delta \phi_i\} = \{2e_0e_i\}$  погрешности ориентации. Вектор ошибки по угловой скорости определяется соотношением  $\delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{C}^e \boldsymbol{\omega}^p(t)$ . При дискретной фильтрации вектора углового рассогласования  $\boldsymbol{\epsilon} = -\delta \boldsymbol{\phi}$  получаются значения вектора  $\boldsymbol{\epsilon}_k^f$  в моменты времени  $t_k$ , когда  $k \in N_0 = [0,1,2,..)$  с периодом  $T_u$ , которые применяются в цифровом законе управления кластером ГД [3]

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{B} \, \mathbf{g}_k + \mathbf{C} \, \boldsymbol{\epsilon}_k^{\mathrm{T}} \, ; \quad \widetilde{\mathbf{m}}_k = \mathbf{K} (\, \mathbf{g}_k + \mathbf{P} \, \boldsymbol{\epsilon}_k^{\mathrm{T}}) \, ; \\ \mathbf{M}_k^{\mathrm{g}} = \mathbf{\omega}_k \times \mathbf{G}_k + \mathbf{J} (\mathbf{C}_k^{\mathrm{e}} \mathbf{\varepsilon}_{\kappa}^{p} + [\mathbf{C}_k^{\mathrm{e}} \mathbf{\omega}_{\kappa}^{p} \times] \mathbf{\omega}_k + \widetilde{\mathbf{m}}_k) \, , \qquad (4)$$

где при матрицах **K**, **B**, **C**, **P**,  $C_k^e = C^e(\boldsymbol{E}(t_k))$  вектор **G**<sub>k</sub><sup>o</sup> = **J** $\boldsymbol{\omega}_k$  + **H**<sub>k</sub>. Вектор управляющего момента СГК **M**<sub>k</sub><sup>g</sup> (4) формируется с использованием явной функции распределения KM и аналитически «пересчитывается» в вектор **u**<sub>k</sub><sup>g</sup> командных угловых скоростей гиродинов.

# V. КОМПЬЮТЕРНАЯ ИМИТАЦИЯ

Исследована баллистическая схема группировки из 72 мини-спутников, при трёх КА в окрестности каждой из 24 плоскостей солнечно-синхронных орбит высотой около 600 км.

Компьютерная имитация космической площадной съемки выполнена для двух стратегических районов Земли – ОАЭ с Ормузским проливом и акватории Мраморного моря с окрестностями Стамбула.

При имитации использовалась модель (2) углового движения мини-спутников с массой 250 кг, тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag} (500, 300, 400)$  кг м<sup>2</sup> и СГК на основе четырёх ГД с КМ  $h_{\rm g} = 10$  Нмс с периодом управления  $T_{\mu} = 0.25$  с.

Планирование съёмки каждой локальной площадки из 3 сканов каждого мини-спутника выполнялось с условием достижения наивысшего качества получаемого изображения.

На рисунке 1 представлены ортодромические сканирующие маршруты КА#1 (три розовых скана) и КА#2 (три желтых скана) площадной съемки ОАЭ и сканирующие маршруты КА#3, КА#4 площадной съёмки собственно Ормузского пролива.

Значения долготы восходящего узла (ВУ)  $\Omega$  орбиты КА  $\#p(p=1\div 4)$  с центральным сканом и моментами времени  $t_i$  начала первого скана были рассчитаны следующим образом:

KA# 1: 
$$\Omega = 60^{\circ}40'50''$$
,  $t_i = 357.56$  c;  
KA# 2:  $\Omega = 61^{\circ}06'50''$ ,  $t_i = 359.00$  c;  
KA# 3:  $\Omega = 62^{\circ}08'30''$ ,  $t_i = 387.50$  c;  
KA# 4:  $\Omega = 63^{\circ}06'30''$ ,  $t_i = 388.94$  c.

Отсчет времени движения каждого КА выполняется от момента его прохождения ВУ очередного витка орбиты, период орбитального движения всех четырёх КА равен 5801.23 с.

На земной поверхности расчетная длина сканов равна 150 км, ширина скана с учётом перекрытия составляет 15 км, а общая ширина каждой их двух указанных площадок съёмки равна 90 км.



Рис. 1. Площадная съемка окрестностей Ормузского пролива

Таблица 1 представляет основные результаты планирования съёмки первой локальной площадки участка ОАЭ, выполняемого КА #1: моменты времени  $t_i$  начала поворотного манёвра (ПМ) либо сканирующего маршрута (СМ), их длительности  $\tau$ , а также значения требуемой продольной СДИ  $V_y$  при выполнении СМ. Здесь первый поворотный манёвр (ПМ 1) КА #1 выполняется от его номинального расположения в ОСК к требуемым краевым условиям  $\Lambda_i$ ,  $\omega_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\varepsilon'_i$  в момент времени  $t_i = 357.56$  с, когда начинается первый сканирующий маршрут (СМ 1) длительностью  $\tau = 16.31$  с при СДИ  $V_y = 50$  мм/с.

ТАБЛИЦА І. ПЛОЩАДНАЯ СЪЁМКА ОАЭ, КА #1, ПМ И СМ

Поворотные манёвры и	Параметры ПМ и СМ			
сканирующие маршруты	<i>t</i> <sub>i</sub> , c	τ, c	<i>V<sub>y</sub></i> , мм/с	
$\Pi M 1: OCK \Longrightarrow CM 1$	342.56	15.00		
CM 1	357.56	16.31	+50	
$\Pi M 2: CM 1 \Longrightarrow CM 2$	373.88	14.87		
CM 2	388.75	24.15	-40	
$\Pi M 3: CM 2 \Longrightarrow CM 3$	412.88	15.63		
CM 3	428.50	16.43	+50	
$\Pi M 4: CM 3 \Longrightarrow OCK$	444.94	15.00		



Рис. 2. Закон углового наведения КА #1



Рис. 3. КА#1, ошибки СУД и скорости ГД



Рис. 4. КА#1, скан 2, ошибки СУД и скорости ГД

На рисунке 2 представлен синтезированный закон углового наведения КА #1 в виде явных функций времени – ускорения  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , углового положения в ОСК  $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_i\}$  и вектора МПР  $\boldsymbol{\sigma}$ . Ошибки СУД КА#1 по скорости, углам ориентации, а также скорости ГД при реализации этого закона наведения, приведены на рис 3 с участками съёмки, выделенные розовым цветом. Рис. 4 представляет ошибки СУД КА#1 и скорости ГД при реализации центрального (второго) скана первой локальной площадки при съёмке этого участка ОАЭ.

На рисунке 5 приведена карта с тремя локальными площадками съёмки пролива Босфор и части Мраморного моря, каждая площадка с тремя СМ, которые выполняются тремя мини-спутниками – левым (КА#1, розовые сканы), центральным (КА#2, желтые сканы) и правым (КА #3, синие сканы) по расположению их трасс с увеличением долготы ВУ орбиты, именно

$$\Omega_i = 37^{\circ}.233 + \Delta\Omega \cdot (i-1), \quad \Delta\Omega_i = 0^{\circ}.84,$$

где  $i=1\div 3$  – номер мини-спутника. Центральный скан КА #2 имеет длину 150 км и ширину 15 км, с учетом перекрытия сканов каждая локальная площадка имеет размер  $150\times 44.5$  км<sup>2</sup>, а три таких смежных площадки – общую площадь  $150\times 131.8$  км<sup>2</sup>.

На рисунке 6 представлен закон наведения КА #3 с функциями ускорения, скорости, углового положения в ОСК и вектором МПР. Ошибки СУД КА #3 по угловой скорости и ориентации, а также скорости ГД при реализации закона наведения, приведены на рис. 7 с участками съёмки, выделенными синим цветом. Применяемая здесь последовательность сканирования земной поверхности происходит в западном направлении, т.е. "справа – налево". При таком методе сканирования восточный уход наблюдаемых наземных целей из-за вращения Земли частично компенсируется движением на запад при смене сканов. Такая последовательность сканов особенно предпочтительна для спутников наблюдения с солнечно-синхронных орбит, т.к. уменьшает максимальные значения углов крена мини-спутника при площадной съёмке.



Рис. 5. Съёмка части Мраморного моря и окрестностей Стамбула



Рис. 6. Закон углового наведения КА #3



Рис. 7. КА#3, ошибки СУД и скорости гиродинов

# VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены проблемы автономного наведения и управления движением мини-спутников в низкоорбитальных группировках землеобзора. Кратко описаны методы синтеза законов наведения, основанные на явных соотношениях, которые связывают движение изображения в фокальной плоскости телескопа с пространственным движением мини-спутника. Представлены разработанные законы наведения для площадной съемки, которая выполняется группировками мини-спутников на солнечно-синхронных орбитах, и результаты компьютерной имитации, демонстрирующие их эффективность.

#### Литература

- Crisp N., Roberts P., Romano F. et al. System modelling of very low earth orbit satellites for Earth observation. Acta Astronaut. 2021, vol. 187, pp. 475-491.
- [2] Somov Ye., Butyrin S., Somova T., Somov S. In-flight verification of attitude control system for a land-survey satellite at a final of its manufacturing. IFAC-PapersOnLine. 2018, vol. 51, no. 30, pp. 66-71.
- [3] Somov Ye., Butyrin S., Somova T. Guidance, navigation and control of a surveying satellite when an area imagery for disaster management. Math. Eng., Sci. Aerosp. 2019. Vol. 10, no. 3, pp. 433-449.
- [4] Ballard A. Rosette constellations of Earth satellites. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 1980, vol. 16, no. 5, pp. 656–673.

- [5] Walker J. Satellite constellations. Journal of the British Interplanetary Society. 1984, vol. 24, pp. 369-384.
- [6] Можаев Г. В. Синтез орбитальных структур спутниковых систем. М.: Машиностроение, 1989.
- [7] Lang T. Walker constellations to minimize revisit time in low Earth orbit. Adv. Astronaut. Sci., 2003, vol. 114, pp. 1127–1143.
- [8] Чернов А.А., Чернявский Г.М. Орбиты спутников дистанционного зондирования Земли. М.: Радио и Связь, 2004.
- [9] Улыбышев С. Ю. Применение солнечно-синхронных орбит для космического аппарата оперативного глобального мониторинга // Космические исследования. 2016, том 54, № 6, с. 486-492.
- [10] Razoumny Yu. Fundamentals of the route theory for satellite constellation design for Earth discontinuous coverage, Acta Astronaut. 2016, vol. 128; 129, pp. 722–740, 741–758; 447–458, 459–465.
- [11] Улыбышев С. Ю., Лысенко А. А. Проектирование спутниковых систем оперативного глобального мониторинга с суточной кратностью повторения трассы полёта// Космические исследования. 2019, том 57, № 3, с. 229–238.
- [12] Rodriguez-Donaire S., Sureda M., Garcia-Alminana D. et al. Earth observation technologies: low-end-market disruptive innovation. Satellites Missions and Technologies for Geosciences. IntechOpen. 2020, ch. 7, pp. 1–15.
- [13] Lappas V., Kostopoulos V. A survey on small satellite technologies and space missions for geodetic applications. Satellites Missions and Technologies for Geosciences. IntechOpen. 2020, ch. 8, pp. 1–22.
- [14] Somova T. Attitude guidance and control, simulation and animation of a land-survey satellite motion. Journal of Aeronautics and Space Technologies. 2016, vol. 9, no. 2, pp. 35–45.

# Управление космическим роботом при сближении с мини-спутниками в низкоорбитальной группировке землеобзора

Е.И. Сомов Отдел навигации, наведения и управления движением Самарский государственный технический университет, Отдел динамики и управления Самарский федеральный исследовательский центр Российской академии наук Самара, Россия <u>e\_somov@mail.ru</u> С.А. Бутырин Отдел навигации, наведения и управления движением Самарский государственный технический университет, Отдел динамики и управления Самарский федеральный исследовательский центр Российской академии наук Самара, Россия <u>butyrinsa@mail.ru</u>

Аннотация—Представляются алгоритмы управления космическим роботом при сближении с мини-спутниками в смежных орбитальных плоскостях группировки землеобзора и результаты их компьютерной верификации.

Ключевые слова—космический робот, группировка мини-спутников землеобзора, сближение, управление.

# I. Введение

Основные тенденции развития космических систем дистанционного зондирования Земли состоят в переходе от полноразмерных космических аппаратов (КА) к группировкам оптико-электронных (SkySat) и радиолокационных (Capella-36) мини-спутников с высокой периодичностью землеобзора с низких орбит. При сроке службы до 5 лет такие спутники имеют массу до 500 кг и крупногабаритные панели солнечных батарей (СБ) для энергоснабжения бортовой аппаратуры, в том системы управления движением (СУД) с электрореактивными двигательными установками (ЭДУ) и силовым гироскопическим кластером (СГК) на основе гиродинов (ГД). Измерение координат движения малого КА выполняется бесплатформенной инерциальной навигационной системой с коррекцией сигналами от спутников ГЛОНАСС/GPS и звездных датчиков.

Полётная дозаправка ЭДУ экономически невыгодна для «дешевых» микро-спутников массой до 100 кг, но для мини-спутников, оснащенных «дорогой» бортовой аппаратурой, необходимо оценить аспекты продления срока их службы за счет дозаправки ЭДУ топливом с помощью космических роботов-манипуляторов (КРМ) [1]. Для орбитальной группировки из 72 миниспутников землеобзора на солнечно-синхронных орбитах высотой около 600 км, по три КА в окрестности каждой из 24 базовых плоскостей, актуальны задачи управления КРМ при его орбитальных перелетах и сближении с любым мини-спутником. В статье исследуется задача перелета КРМ между смежными орбитальными плоскостями в низкоорбитальной группировке спутников землеобзора [2] – [9].

# II. МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания пространственного движения КРМ применяются геоцентрическая инерциальная система координат (ИСК)  $O_{\oplus}X^iY^iZ^i$  и обозначения  $\{\cdot\} = col(\cdot)$ ,  $[\cdot] = line(\cdot), (\cdot)^t, [\cdot\times], \langle \cdot, \rangle$  и  $\circ, \tilde{}$  для векторов, матриц и

С.Е. Сомов Отдел навигации, наведения и управления движением Самарский государственный технический университет, Отдел динамики и управления Самарский федеральный исследовательский центр Российской академии наук Самара, Россия s somov@mail.ru

кватернионов,  $S_{\alpha} = \sin \alpha$ ,  $C_{\alpha} = \cos \alpha$ ;  $i = 1, 2, ... m \equiv 1 \div m$ . Используются стандартные орбитальная (ОСК) и связанная с КРМ (ССК, О*хуz*, базис **B**) системы координат с началом в его центре масс О.

Предполагается, что вектор тяги  $\mathbf{P}^e$  плазменной ЭДУ направлен вдоль оси О*у* ССК. Ориентация ССК в ИСК определяется кватернионом  $\Lambda$  и вектором  $\sigma$  модифицированных параметров Родрига (МПР), а ориентация ССК в ОСК – углами крена  $\phi_1$ , рыскания  $\phi_2$  и тангажа  $\phi_3$ .

Если считать КРМ твёрдым телом с массой m и тензором инерции **J**, то при векторах положения **r** и скорости **v** КРМ модель его движения имеет вид

$$\mathbf{r}' + \mathbf{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}; \quad m(\mathbf{v}' + \mathbf{\omega} \times \mathbf{v}_r) = \mathbf{P}^e + \mathbf{F}^d; \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \circ \mathbf{\omega}/2; \quad \mathbf{J} \dot{\mathbf{\omega}} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{G} = \mathbf{M}^g + \mathbf{M}^e + \mathbf{M}^d.$$
(1)

Здесь вектор  $\omega$  представляет угловую скорость КРМ, вектор **G** = **J** $\omega$  + **H**, где **H** – вектор кинетического момента (КМ) СГК; векторы **P**<sup>e</sup>, **M**<sup>e</sup> и **M**<sup>g</sup> = -**H**' представляют тягу ЭДУ, моменты ЭДУ и СГК; **F**<sup>d</sup> и **T**<sup>d</sup> – векторы внешних возмущающих сил и моментов, а (·)' является символом локальной производной по времени.

При законе углового наведения  $\Lambda^p, \omega^p, \varepsilon^p = \dot{\omega}^p$  погрешность ориентации КРМ определяется кватернионом  $\mathbf{E} = (e_0, \mathbf{e}) = \widetilde{\Lambda}^p \circ \Lambda$  с вектором  $\mathbf{e} = \{e_i\}$  и вектором параметров Эйлера  $\mathbf{E} = \{e_0, \mathbf{e}\}$ , которым соответствуют матрица  $\mathbf{C}^e = \mathbf{I}_3 - 2[\mathbf{e} \times]\mathbf{Q}_e^t$ , где  $\mathbf{Q}_e = \mathbf{I}_3 e_0 + [\mathbf{e} \times]$ , вектор МПР  $\sigma^e = \{\sigma_i^e\} = \mathbf{e}/(1 + e_0) = \mathbf{e}^e \tan(\Phi^e/4)$  с ортом  $\mathbf{e}^e$  оси Эйлера и углом  $\Phi^e$  собственного поворота, а также вектор угловой погрешности  $\delta \boldsymbol{\Phi} = \{\delta \phi_i\} = \{4\sigma_e^e\}$ .

Вектор КМ *p*-го ГД (*p*=1÷4) имеет орт  $\mathbf{h}_p(\beta_p)$ , вектор КМ СГК – орт  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) = \Sigma \mathbf{h}_p(\beta_p)$ ; вектор момента  $\mathbf{M}^{g} = -h_g \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{u}^{g}, \ \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{u}^{g}, \ \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \partial \mathbf{h} / \partial \boldsymbol{\beta}$  и  $h_g$  – собственный КМ гиродинов. При дискретной фильтрации вектора углового рассогласования  $\boldsymbol{\epsilon} = -\delta \boldsymbol{\phi}$  получаются значения вектора  $\boldsymbol{\epsilon}_k^{\rm f}$  в моменты времени  $t_k$ , когда  $k \in \mathbb{N}_0 = [0,1,2,..)$  с периодом  $T_u$ , которые применяются в цифровом законе управления кластером ГД

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{B} \, \mathbf{g}_k + \mathbf{C} \, \boldsymbol{\epsilon}_k^{\mathsf{T}} ; \, \widetilde{\mathbf{m}}_k = \mathbf{K} (\, \mathbf{g}_k + \mathbf{P} \, \boldsymbol{\epsilon}_k^{\mathsf{T}}) ; \\ \mathbf{M}_k^{\mathsf{g}} = \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{G}_k + \mathbf{J} (\mathbf{C}_k^{\mathsf{e}} \boldsymbol{\varepsilon}_k^{p} + [\mathbf{C}_k^{\mathsf{e}} \boldsymbol{\omega}_k^{p} \times] \boldsymbol{\omega}_k + \widetilde{\mathbf{m}}_k)$$
(2)

с матрицами **K**, **B**, **C**, **P**,  $C_k^e = C^e(\boldsymbol{E}(t_k))$  и вектором  $\mathbf{G}_k = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_k + \mathbf{H}_k$ . Вектор управляющего момента СГК  $\mathbf{M}_k^g$  (2) формируется с использованием явной функции распределения KM и аналитически «пересчитывается» в вектор  $\mathbf{u}_k^g$  командных угловых скоростей гиродинов.

Для невозмущенной орбиты КРМ выделяются три элемента её ориентации (долгота восходящего узла  $\Omega$ , наклонение *i*, аргумент перигея  $\omega_{\pi}$ ) и три элемента, определяющих размеры и форму орбиты, а также положение КА – фокальный параметр *p*, эксцентриситет *e* и момент времени  $t_{\pi}$  прохождения перицентра орбиты.

Пусть в начальный момент времени  $t_i$  в ИСК известны векторы положения и скорости поступательного движения КРМ  $\mathbf{r}_r(t_i) = \mathbf{r}(t_i)$ ,  $\mathbf{v}_r(t_i) = \mathbf{v}(t_i)$  и цели  $\mathbf{r}_t(t_i)$ ,  $\mathbf{v}_t(t_i)$  (target, мини-спутник).

При введении опорной круговой орбиты радиуса  $r_r(t_i) = \text{const}$  удобно использовать цилиндрическую систему координат (ЦСК). Здесь координатами являются значения радиали r и угла u её отклонения от произвольного направления в плоскости опорной орбиты, а также боковое смещение z по нормали к этой плоскости. Поступательное движение КРМ в ИСК определяется соотношениями

$$\mathbf{r}_{r} = \{rC_{u}, rS_{u}, z\}; \mathbf{v}_{r} = \{\dot{r}C_{u} - rS_{u}\dot{u}, \dot{r}S_{u} + rC_{u}\dot{u}, \dot{z}\}.$$

Пусть  $w^r$ ,  $w^t$  и  $w^z$  представляют радиальную, трансверсальную и боковую компоненты вектора управляющего ускорения при движении КРМ, а  $\mu$  – гравитационный параметр Земли. Движение КРМ при его сближении с целью в центральном гравитационном поле Земли на интервале времени  $t \in [t_i, t_f]$  описывается уравнениями

$$\ddot{r} - r\dot{u}^2 + \mu/r^2 = w^r; r\ddot{u} + 2\dot{r}\dot{u} = w^t; \ddot{z} + \mu z/r^3 = w^t$$

при краевых условиях по орбитальным переменным

$$v^{r}(t_{i}) = \langle \mathbf{v}_{r}(t_{i}), \mathbf{e}_{i}^{r} \rangle, \ v^{r}(t_{f}) = \langle \mathbf{v}_{t}(t_{f}), \mathbf{e}_{f}^{r} \rangle;$$
  

$$v^{t}(t_{i}) = \langle \mathbf{v}_{r}(t_{i}), \mathbf{e}_{i}^{l} \rangle, \ v^{t}(t_{f}) = \langle \mathbf{v}_{t}(t_{f}), \mathbf{e}_{f}^{l} \rangle;$$
  

$$v^{z}(t_{i}) = \langle \mathbf{v}_{r}(t_{i}), \mathbf{e}_{i}^{z} \rangle, \ v^{z}(t_{f}) = \langle \mathbf{v}_{t}(t_{f}), \mathbf{e}_{f}^{l} \rangle;$$
  

$$u(t_{i}) = \varphi_{i}, \ u(t_{f}) = \varphi_{i} + \arccos(\langle \mathbf{e}_{i}^{r}, \mathbf{e}_{f}^{r} \rangle),$$

где орты е с различными индексами вычисляются по соотношениям  $\mathbf{e}_{i}^{r} = \mathbf{r}_{r}(t_{i})/r_{r}(t_{i})$ ;  $\mathbf{e}_{f}^{r} = \mathbf{r}_{t}(t_{f})/r_{t}(t_{f})$ ;

$$\mathbf{e}_{i}^{v} = \mathbf{v}_{r}(t_{i})/v_{r}(t_{i}) ; \ \mathbf{e}_{f}^{v} = \mathbf{v}_{t}(t_{f})/v_{t}(t_{f}) ; \ \mathbf{e}_{i}^{z} = \mathbf{e}_{i}^{r} \times \mathbf{e}_{i}^{v} ,$$
$$\mathbf{e}_{f}^{z} = \mathbf{e}_{f}^{r} \times \mathbf{e}_{f}^{v} ; \qquad \mathbf{e}_{i}^{t} = \mathbf{e}_{i}^{z} \times \mathbf{e}_{i}^{r} , \qquad \mathbf{e}_{f}^{t} = \mathbf{e}_{f}^{z} \times \mathbf{e}_{f}^{r} .$$

Здесь по явным соотношениям [10] выполняется прогноз векторов положения  $\mathbf{r}_t^p(t)$  и скорости цели  $\mathbf{v}_t^p(t)$  на интервале  $t \in [t_i, t_f]$  заданной длительности  $T_m = t_f - t_i$  и расчет векторов  $\mathbf{r}_t(t_f)$ ,  $\mathbf{v}_t(t_f)$ .

Общеизвестно, что изменения наклонения и долготы восходящего узла (ВУ) орбиты являются режимами СУД, требующие наибольших затрат топлива и энергии. Поэтому в данной статье внимание фокусируется на оценке возможностей СУД робота при продлении срока службы мини-спутников за счет дозаправки их ЭДУ. Задача состоит в разработке законов наведения и управления движением КРМ при его перелёте между двумя заданными смежными орбитальными плоскостями с разными значениями долготы  $\Omega$  восходящего узла.

#### III. Законы наведения и управления

На рисунке 1 представлена схема перелёта КРМ с орбиты #1 (синий цвет) на орбиту #2 (зеленый цвет), где располагается мини-спутник, с помощью ЭДУ. Эти орбиты отличаются только значениями долготы ВУ  $\Omega_i$ , i = 1,2 с разностью  $\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ . В теории мгновенных импульсов скорости решение рассматриваемой задачи [11] основано на повороте трансверсальной компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}_1$  КРМ на орбите #1 на двугранный угол  $\Delta \Omega$ . При этом КРМ должен находиться в одной из двух точек апекса:  $\mathbf{a}_n$  в северном либо  $\mathbf{a}_s$  в южном полушариях небесной сферы – точек, наиболее удаленных от земного экватора, см. крайние точки красной линии пересечения плоскостей орбит на рис. 1.



Рис. 1. Схема наведения КРМ при перелете между плоскостями

Для круговых орбит величина  $\Delta v$  требуемого импульса скорости вычисляется как  $\Delta v = 2v_1 \sin (\Delta \Omega/2)$ , где  $v_1$  – величина трансверсальной составляющей вектора скорости КРМ. При малой тяге ЭДУ такой импульс не может быть реализован за малое время, когда ориентацию КРМ можно считать постоянной, поэтому возникает задача углового наведения КРМ при его переходе в заданную орбитальную плоскость. Вектор импульса скорости КРМ  $\Delta v = v_2 - v_1$  лежит в касательной плоскости к обеим орбитам и, следовательно, перпендикулярен линии пересечения плоскостей. При  $\Delta \Omega \rightarrow 0$  это условие сохраняется, а положение линии пересечения плоскостей стремится к радиусу-вектору **r** КРМ с ортом  $\mathbf{r}^{o} = \{r_{x}^{o}, r_{y}^{o}, r_{z}^{o}\}$  в точке апекса. Изменение долготы ВУ орбиты представляется в ИСК её поворотом вокруг оси  $O_{\oplus}Z^{i}$  вращения Земли с ортом  $\mathbf{i}_{3} = \{0,0,1\}$ . При этом все точки апексов промежуточных орбит принадлежат окружности, расположенной в плоскости, параллельной экваториальной, а векторы  $\Delta \mathbf{v}$ , обусловленные вектором тяги ЭДУ, направлены ортогонально от орта  $\mathbf{i}_{3}$ . В итоге получаются 2 условия для определения орта р вектора  $\mathbf{P}^{e}$  тяги ЭДУ и одновременно вектора  $\Delta \mathbf{v}$ : ортогональность орту  $\mathbf{r}^{o}$  и принадлежность плоскости ( $\mathbf{r}^{o}, \mathbf{i}_{3}$ ) с учетом положения соответствующего апекса.

При обозначении  $\mathbf{w} = (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{r}^o) \times \mathbf{r}^o$ ,  $\mathbf{w} = |\mathbf{w}|$  орт **р** вычисляется по соотношению  $\mathbf{p} = (\mathbf{w}/\mathbf{w}) \operatorname{sign} r_z^o$ , а вектор тяги ЭДУ – как  $\mathbf{P}^e = \mathbf{P}^m \mathbf{p}$ , где  $P^m$  представляет значение тяги. Вектор тяги  $\mathbf{P}^e$  ЭДУ направлен по оси  $O_y$  ССК, поэтому угловое положение ССК в ИСК определяется матрицей ориентации  $\mathbf{A}_b^i = [\mathbf{a}_x \mathbf{a}_y \mathbf{a}_z]^t$ , где столбцы  $\mathbf{a}_x = \mathbf{r}^o \times \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{a}_y = \mathbf{p} \lor \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \times \mathbf{p}$ .

Нетрудно убедиться, что регулярное применение закона наведения орта  $\mathbf{p} = (\mathbf{w} / \mathbf{w}) \operatorname{sign} r_z^0$  снижает эффективность перемещения долготы ВУ при отдалении КРМ от соответствующей точки апекса. Поэтому использовать такой закон рационально только вблизи апексов, моменты времени прохождения которых определяются по прогнозу орбитального движения КРМ.

Прогноз выполняется на каждом витке орбиты КРМ по измерениям положения и скорости и известным соотношениям для бортового расчёта невозмущенного орбитального движения КРМ. При таком прогнозе определяются моменты времени  $t_n$  и  $t_s$  прохождения апексов в обоих полушариях, а также интервалы времени включения ЭДУ  $\forall t \in [t_j - T_d, t_j + T_d], j = n, s$  с половинным значением  $T_d$  полной длительности включения ЭДУ.

# IV. Компьютерная имитация

При имитации перелёта КРМ использовалась модель движения (1) робота массой 1500 кг и тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}$  (1600,1200,1800) кгм<sup>2</sup> с гравитационными возмущениями Земли, Луны, Солнца и ЭДУ с при скорости истечения рабочего тела 17363.7 м/с и  $P^{\text{m}} = 6$  H.

Основные исходные данные перелёта робота между орбитами соответствуют площадной съемке акватории Мраморного моря и окрестностей Стамбула, см. рис. 2:

- КРМ движется по солнечно-синхронной орбите высотой 570 км с периодом 5801.23 с, наклонением *i*=97.67 град, долготой ВУ Ω<sub>1</sub>=38.063 град и аргументом перигея ω<sub>π</sub> = 22 град, в начальный момент времени t<sub>0</sub> = 0 истинная аномалия v<sub>1</sub>(t<sub>0</sub>)= -2 град;
- мини-спутник (KA) имеет те же параметры орбиты, кроме долготы ВУ  $\Omega_2 = \Omega_1 + \Delta \Omega_0 = 38.903$  град, когда  $\Delta \Omega_0 = 0.84$  град, и истинная аномалия  $v_2(t_0) = 0$ .

Самый быстрый перелёт КРМ теоретически достигается при мгновенном импульсе скорости  $\Delta v = 111 \text{ м/c}$ 

в одной точке апекса. При непрерывном изменении ориентации КРМ с включенной ЭДУ требуемый перелёт КРМ реализуется в течение  $T_m = 1.35$  суток при N=20 витков орбиты с расходом топлива  $\Delta m = 40.2$  кг и модуле импульса скорости  $\Delta v = 465$  м/с



Рис. 2. Съёмка части Мраморного моря и окрестностей Стамбула

ТАБЛИЦА І. ОРБИТАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЁТЫ КРМ

Перелёты КРМ между орбитальными плоскостями					
Ν	$T_m$ ,	$T_d$ ,	$\Delta m$ ,	Δv,	
	сут	с	КГ	м/с	
28	1.85	450	17.53	201	
38	2.55	250	13.26	152	
62	4.14	125	10.75	124	

В таблице I приведены результаты имитации трёх вариантов перелётов КРМ с различными значениями параметра  $T_d$ , который определяет длительности  $S_d = 2T_d$  включения ЭДУ в точках апекса на каждом витке орбитального движения робота. При уменьшении  $T_d$  расход рабочего тела и импульс скорости также уменьшаются, но растут длительность перелёта и число витков орбиты из-за неточности прогноза апексов. Для дальнейших расчетов выбран компромиссный вариант  $T_d = 250$  с.



Рис. 3. Разность долготы ВУ орбиты КРМ  $\Delta\Omega$  на первых двух витках

Рисунок 3 представляет разность долготы ВУ орбиты КРМ  $\Delta\Omega$  на первых двух витках орбиты при включениях ЭДУ в окрестности каждого апекса, которые выделены розовым цветом.



Рис. 4. Разность долготы восходящего узла орбиты КРМ



Рис. 6. Разность скоростей мини-спутника и КРМ

Изменение разности долготы ВУ орбиты КРМ  $\Delta\Omega(t)$  демонстрируется на рис. 4, где перелёт завершается при  $t = t^*= 220200$  с ( $T_m = 2.55$  сут) с расходом рабочего тела 13.26 кг, см. таб. І.. На рисунках 5 и 6 представлены изменения дальности  $\Delta r$  и разности векторов скорости  $\Delta_V$  КА и КРМ при их сближении. В момент  $t^*$  окончания этого маневра получены разности положения  $\Delta r = 3.167$  км и скорости  $\Delta_V = 4.3$  м/с.

Как отмечено выше, вектор тяги ЭДУ всегда направлен вдоль оси +Oy ССК, поэтому после коррекция орбитального движения КРМ по долготе ВУ в точке очередного апекса необходимо развернуть КРМ вокруг оси Ox ССК на угол  $\approx \pi$  для выполнения аналогичной коррекции в точке следующего апекса. Краевые условия переориентации КРМ на заданном интервале времени определяются по измеренным и прогнозируемым координатам его пространственного движения с принятой кинематической параметризацией поворотного манёвра.



Рис. 7. Вектор МПР при разворотах КРМ на первом витке



Рис. 8. Угловые скорости КРМ при разворотах на первом витке

Имитация таких поворотных манёвров длительностью 200 сек выполнена при использовании СГК с собственным КМ гиродинов  $h_g = 30$  Нмс. На рисунках 7 – 9 представлены изменения векторов МПР  $\sigma$  и угловой скорости  $\omega$ , а также командных скоростей гиродинов, при двух разворотах КРМ на первом витке орбиты.



Рис. 9. Командные скорости ГД при разворотах КРМ на первом витке

ТАБЛИЦА II. ПЕРЕЛЕТЫ КРМ МЕЖДУ БАЗОВЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Варианты перелётов				
$P^{\mathrm{m}}$ ,	Ν	$T_m$ ,	$\Delta m$ ,	
Н		сут	КГ	
6	678	45.5	235.98	
100	39	2.6	224.16	

При дозаправке 100 кг каждого из трёх мини-спутников в окрестности двух смежных базовых плоскостей с разностью по долготе ВУ  $\Delta\Omega_0$ = 15 град и перелётов КРМ между ними расходуется 350 кг топлива. Основные параметры таких перелётов КРМ с тягой ЭДУ 6 H и 100 H представлены в таб. II.

#### V. Заключение

Кратко описаны разработанные алгоритмы наведения и управления космическим роботом при его сближении с мини-спутниками на низких солнечно-синхронных орбитах в составе группировки землеобзора и представлены результаты компьютерной имитации.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Somov Ye., Butyrin S., Somov S. Control of a space robot-manipulator at replacing the fuel tanks of a geostationary satellite. Proc. 2022 16th Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems. Moscow. 2022, pp 1-4.
- [2] Crisp N., Roberts P., Romano F. et al. System modelling of very low earth orbit satellites for Earth observation. Acta Astronaut. 2021, vol. pp. 475-491.
- [3] Somov Ye., Butyrin S., Somova T., Somov S. In-flight verification of attitude control system for a land-survey satellite at a final of its manufacturing. IFAC-PapersOnLine. 2018, vol. 51, no. 30, pp. 66-71.
- [4] Somov Ye., Butyrin S., Somova T. Guidance, navigation and control of a surveying satellite when an area imagery for disaster management. Math. Eng., Sci. Aerosp. 2019. Vol. 10, no. 3, pp. 433-449.
- [5] Rodriguez-Donaire S., Sureda M., Garcia-Alminana D. et al. Earth observation technologies: low-end-market disruptive innovation. Satellites Missions and Technologies for Geosciences. IntechOpen. 2020, ch. 7, pp. 1–15.
- [6] Lappas V., Kostopoulos V. A survey on small satellite technologies and space missions for geodetic applications. Satellites Missions and Technologies for Geosciences. IntechOpen. 2020, ch. 8, pp. 1–22.
- [7] Улыбышев С. Ю. Применение солнечно-синхронных орбит для космического аппарата оперативного глобального мониторинга // Космические исследования. 2016, том 54, № 6, с. 486-492.
- [8] Razoumny Yu. Fundamentals of the route theory for satellite constellation design for Earth discontinuous coverage, Acta Astronaut. 2016, vol. 128; 129, pp. 722–740, 741–758; 447–458, 459–465.
- [9] Улыбышев С. Ю., Лысенко А. А. Проектирование спутниковых систем оперативного глобального мониторинга с суточной кратностью повторения трассы полёта// Космические исследо-вания. 2019, том 57, № 3, с. 229–238.
- [10] Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, М.: Наука, 1965.
- [11] Curtis H.D. Orbital Mechanics for Engineering Students. 4th ed. Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2020.

# Подход к управлению угловым движением низкоорбитального наноспутника с использованием аэродинамических поверхностей

Е.В. Баринова Кафедра высшей математики Самарский университет Самара, Россия 15545@yandex.ru Н.А. Елисов НИЛ «Космические исследования» Самарский университет Самара, Россия mr07th@gmail.com

И.А. Ломака НИЛ «Космические исследования» Самарский университет Самара, Россия igorlomaka63@gmail.com А.В. Крамлих Межвузовская кафедра космических исследований Самарский университет Самара, Россия kramlikh.av@ssau.ru

Аннотация—В работе исследуется эффективность подхода по решению задач переориентации и стабилизации низкоорбитального наноспутника. Подход основан на использовании аэродинамических поверхностей в качестве органов управления. Программа управления углом отклонения аэродинамических поверхностей задается в виде функции Хевисайда, параметры которой определяются алгоритмом дифференциальной эволюции. Такой подход позволяет одновременно решать как задачу стабилизации, так и переориентации наноспутника. Приводятся результаты математического моделирования.

Ключевые слова—наноспутник, переориентация, свободномолекулярное течение, прямое моделирование Монте-Карло, дифференциальная эволюция

## I. Введение

В настоящее время наблюдается тенденция по активному использованию малоразмерных космических аппаратов, в том числе наноспутников (HC), на низких околоземных орбитах высотой до 250 км. Это обусловлено как интересом со стороны фундаментальной науки (изучение параметров атмосферы и ионосферы), так и с практической точки зрения (например, мониторинг земной поверхности с высоким качеством).

При реализации подобных космических миссий с использованием HC зачастую требуется обеспечить заданную ориентацию и стабилизацию. Особенностью углового движения низкоорбитальных HC является существенный уровень возмущений. Источниками таких возмущений выступают аэродинамические и гравитационные силы [1].

Для низкоорбитальных НС неизменяемой геометрии момент аэродинамических сил является восстанавливающим (система является консервативной). В связи с этим, при исследовании динамики углового неуправляемого движения НС уделяется внимание его внутренней компоновке для обеспечения требуемого запаса статической устойчивости [1–3]. Однако, в случае НС изменяемой геометрии система перестает быть консервативной и аэродинамический момент может быть использован для диссипации энергии. На основе данного принципа были решены задачи стабилизации углового движения НС [4–6]. В работах [4–6] задача стабилизации решалась за счет формирования аэродинамических моментов посредством вращающихся аэродинамических поверхностей (рис. 1а).

В данной работе рассматривается не только задача стабилизации, но и задача переориентации НС с использованием поворотных аэродинамических поверхностей (рис. 1б).



Рис. 1. Схема управления аэродинамическими поверхностями (а) в работах [3, 4] и (б) в данной работе

# II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

#### А. Динамика движения наноспутника

Угловое движение динамически симметричного наноспутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов в плоскости круговой орбиты описывается уравнением [1]:

$$\ddot{\alpha} = I_n^{-1} \left[ M_a(\alpha, \delta) + M_g \sin(2\alpha) \right], \tag{1}$$

где  $\alpha$  – угол атаки;  $M_a = C_{\tau}(\alpha, \delta) q_{\infty} S_m l_{ref}$  – аэродинамический момент;  $C_{\tau}(\alpha, \delta)$  – коэффициент продольного момента;  $q_{\infty}$  – скоростной напор;  $S_m$  – площадь миделя;  $l_{ref}$  – длина HC;  $M_g = 1.5(I_{\tau} - I_x)$  – гравитационный момент;

Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России

 $I_x$ ,  $I_n$  – продольный и поперечный моменты инерции HC, соответственно;  $\omega_{op\delta} = \sqrt{\mu r^{-3}}$  – орбитальная угловая скорость HC;  $\mu$  – гравитационный параметр Земли; r – радиус-вектор HC.

# В. Управление движением НС

Требуется построить программу управления аэродинамическим моментом  $M_a$ , который стабилизирует угловое движение HC. Кроме этого, необходимо сформировать программу управления, обеспечивающая перевод HC из начального положения в конечное в течение заданного времени *Т*. Изменение аэродинамического момента HC осуществляется за счет управления углом раскрытия ( $\delta$ ) аэродинамических поверхностей (АП).

Управление углом раскрытия АП строится с помощью аппроксимированной функции Хевисайда. Для описания переходных процессов раскрытия и складывания АП, аппроксимированная функция Хевисайда примет вид:

$$\delta(t) = \begin{cases} \Delta_i \left\{ 1 + \exp\left(-2k\left[t - t_i^{defl}\right]\right) \right\}, & t \ge t_i^{defl} \\ \Delta_i \left\{ 1 + \exp\left(-2k\left[t_i^{defl} + t_i^{unf} - t\right]\right) \right\}, & t < t_i^{defl} + t_i^{unf} \end{cases}$$
(2)

где  $\Delta_i$  – угол *i*-го раскрытия;  $t_i^{defl}$ ,  $t_i^{unf}$  – время *i*-го раскрытия и складывания АП, соответственно; k – коэффициент сглаживания.

Кроме этого, также определяется время конечного угла раскрытия на  $\delta = 180^{\circ} (t_{fin})$  для фиксации текущей ориентации НС. Отыскание параметров  $\Delta_i$ ,  $t_{packi}$ ,  $t_{cki}$  и  $t_{fin}$  осуществляется с помощью алгоритма дифференциальной эволюции [7]. Целевая функция имеет вид:

$$\Phi(\delta) = \left|\alpha_b - \alpha(T)\right| \pi^{-1} + \left(T\left|\omega(0)\right|\right)^{-1} \int_0^T \left|\omega(t)\right| dt.$$
(3)

В задаче стабилизации углового движения, выражение (3) упрощаются до следующего вида:

$$\Phi(\delta) = \left(T\left|\omega(0)\right|\right)^{-1} \int_{0}^{T} \left|\omega(t)\right| dt.$$
(4)

#### С. Аэродинамика наноспутника

Адекватность математической модели аэродинамических характеристик (АДХ) НС напрямую влияет на качество процессов управления его движением. Поэтому, в работе используется численный метод прямого моделирования Монте-Карло (ПММК) [8], учитывающий такие особенности, как тепловую скорость частиц, химический состав атмосферы, взаимное затенение элементов конструкции НС. Моделирование набегающего потока проводилось в расчетной области с размерами, равными одному калибру (максимальный габарит НС– 0.78 м при  $\delta = 90^\circ$ ) от каждой стороны НС. Расчетная область разбита на сетку, имеющую 69989 элементов, 978 из которых приходится на поверхность НС. В работе рассматривается НС с характеристиками, приведенными в табл. 1.

Расчет АДХ НС проводился для высоты полета H = 200 км, состав атмосферы на которой приведен в табл. 2 [4].

ТАБЛИЦА І. ХАРАКТЕРИСТИКИ НАНОСПУТНИКА

Характеристика	Величина
Продольный момент инерции $I_x$ , кг м <sup>2</sup>	0.014
Поперечный момент инерции $I_n$ , кг м <sup>2</sup>	0.072
Справочная длина <i>l</i> <sub>ref</sub> , м	0.34
Площадь миделя $S_m$ , м <sup>2</sup>	0.01
Длина АП <i>l<sub>AII</sub></i> , м	0.34
Минимальный угол раскрытия АП $\delta_{min}$ , °	0
Максимальный угол раскрытия АП $\delta_{max}$ , °	180

ТАБЛИЦА II. Состав атмосферы

Вещество	Молярная доля χ, %
Молекулярный азот N <sub>2</sub>	48.37
Молекулярный кислород $O_2$	2.15
Атомарный азот N	0.39
Атомарный кислород О	48.37
Гелий Не	0.067
Водород Н	0.0017
Аргон Ar	0.042

Для описания взаимодействия частиц с поверхностью НС использована модель Черчиньяни-Ламписа-Лорда (CLL) [10-12]. Коэффициенты аккомодации приняты равными  $\alpha_n = \sigma_\tau = 0.9$ . Для повышения точности расчетов, количество моделируемых частиц было принято равным  $N_{sim} = 10^6$ . Аэродинамические характеристики рассчитывались для диапазона углов атаки  $\alpha \in [-180; 180]^\circ$  с дискретностью 10° и углов раскрытия АП  $\delta \in [0; 180]^\circ$  с дискретностью 45°. Пример расчета методом ПММК приведен на рис. 2. Как видно из рис. 2, при ненулевом угле атаке происходит частичное затенение верхней АП.



Рис. 2. Распределение давления для случая  $\alpha = 40^{\circ}$  и  $\delta = 90^{\circ}$ 

Зависимость коэффициента продольного момента  $C_{\tau}(\alpha, \delta)$  от угла атаки и угла раскрытия АП приведена на рис. 3.



Рис. 3. Зависимость коэффициента продольного момента от угла атаки и угла раскрытия АП

Чтобы убедиться в правильности расчетов, был проведен анализ независимости сетки. Он осуществляется с помощью расчета индекса сходимости сетки (GCI) [13]. Результаты анализа независимости сетки приведены в табл. 3.

ТАБЛИЦА III. РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА НЕЗАВИСИМОСТИ СЕТКИ

Кол-во элементов сетки	Коэффициент продольного момента С <sub>т</sub>	Индекс сходи- мости сетки GCI21, %	Индекс сходимо- сти сетки GCI <sub>32</sub> , %
978	-11.3748		
1480	-11.2165	0.074	0.14
1990	-11.1048		

Как видно из табл. 3, увеличение количества элементов сетки не приводит к существенному изменению коэффициента продольного момента.

# III. Иллюстрация подхода

#### А. Задача стабилизации

Решение задачи стабилизации НС проводилось для диапазона начальных углов атаки  $\alpha(0) \in [-70; 70]^{\circ}$  и угловой скорости  $\omega_{\alpha}(0) \in [-10; 10]^{\circ}/c$ . Зависимость характера углового движения НС от начальных условий представлена на рис. 4. Синяя область соответствует колебаниям, которые могут быть задемпфированы АП. Красная область соответствует вращению. В данном случае, для стабилизации движения НС необходимо дополнительно решать задачу переориентации.



Рис. 4. Характеры углового движения НС в зависимости от начальных условий

Пример решения задачи стабилизации для колебательного движения ( $\alpha_0 = 70^\circ$  и  $\omega_0 = 3^\circ$ ) приведен на рис. 5. Как видно из рис. 5, четырех раскрытий АП достаточно для демпфирования колебаний. Конечная амплитуда угловой скорости составила  $3.2 \cdot 10^{-4}$  °/с.



Рис. 5. Зависимость угла атаки и угла раскрытия от времени (колебание)

Рассмотрим вращательное движение. Как упоминалось выше, для данного случая необходимо совместно решать задачи ориентации и стабилизации. Пример решения для вращательного режима ( $\alpha_0 = 70^\circ$  и  $\omega_0 = 4^\circ$ ) приведен на рис. 6. Для ориентирования HC по набегающему потоку (штатная ориентация) требуется одно раскрытие. Раскрытие на  $\delta = 16.8^\circ$  на заданных углах атаки приводит к изменению знака угловой скорости. Конечная амплитуда колебаний составила 0.06 °/с.



Рис. 6. Зависимость угла атаки и угла раскрытия от времени (вращение)

#### В. Задача переориентации

Решение задачи переориентации HC проводилось для краевых условий, приведенных в табл. IV. Первый случай может рассматриваться, как перевод HC в штатную ориентацию после вывода на орбиту. Второй случай необходим, когда HC требуется дать тормозной импульс для изменения орбиты или схода с орбиты.

ТАБЛИЦА IV. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Начальны		іе условия	Конечны	е условия
Случай №	Угол ата- ки а, °	Угловая скорость ω, °/с	Угол атаки а, °	Угловая скорость ѡ, °/с
1	180	0.1	0	0
2	0	0.1	180	0

Как видно из рис. 7, для переориентации НС требуется три раскрытия для случая №1. Время маневра составляет 800 с. Конечные амплитуды колебаний угла атаки и угловой скорости составили 0.54° и 0.017 °/с, соответственно.



Рис. 7. Зависимость угла атаки и угла раскрытия от времени (случай №1)

В отличие от случая №1, для случая №2 требуется одно раскрытие (рис. 8). Время переориентации уменьшилось до 500 с. Конечная угловая скорость составила 0.03 °/с.



Рис. 8. Зависимость угла атаки и угла раскрытия от времени (случай №2)

#### Заключение

Показана возможность использования АП для стабилизации движения и переориентации низкоорбитального НС. Номинальная программа управления строилась с помощью функции Хевисайда и алгоритма дифференциальной эволюции. Определена область колебаний и вращения в зависимости от начальной ориентации и угловой скорости. Приведены примеры решения задач стабилизации и переориентации. Представленный подход показал, что возможно задемпфировать угловую скорость HC с 9.5°/с до 0.001°/с за 10 минут.

#### Литература

- I.V. Belokonov, Timbai I.A., Barinova E.V., Design Parameters Selection for CubeSat Nanosatellite with a Passive Stabilization System, Giroskopiya I Navigatsiya, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 81–100.
- [2] E.V. Barinova, I.V. Belokonov, I.A. Timbai, Motion Features of Aerodynamically Stabilized Cubesat 6U Nanosatellites, 29th St. Pe-

tersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, CSRI Elektropribor, 2021, 4 p.

- [3] S.A. Rawashdeh, J.E. Lumpp, Aerodynamic Stability for CubeSats at ISS Orbit, Journal of Small Satellites, 2013, vol. 2, no. 1, pp. 85-104.
- [4] N.H. Crisp, S. Livadiotti, P.C.E. Roberts et al., Demonstation of Aerodynamic Control Manoeuvres in Very Low Earth Orbit using SOAR (Satellite for Orbital Aerodynamics Research), 70<sup>th</sup> International Astronautical Congress, Washington D.C., Washington Convention Center, 2019, pp. 1-12.
- [5] V. Canas, D. Gonzalez, J. Becedas et al., Attitude control for satellites flying in VLEO using aerodynamic surfaces, Journal of the British Interplanetary Society, 2020, vol. 73, no. 3, pp. 103-112.
- [6] S. Livadiotti, N.H. Crisp, P.C.E. Roberts et al., Uncertainties and Design of Active Aerodynamic Attitude Control in Very Low Earth Orbit, 2022, vol. 45, no. 2, pp. 1-16.
- [7] Storn, R., Price, K., Differential Evolution A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces, *Journal of Global Optimization*, 1997, no. 11, pp. 341–359.
- [8] G.A. Bird, Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford: Clarendon Press, 1994.
- [9] P. D. Mostaza, B.P. Graziano, Roberts P.C.E. Spacecraft drag modelling, Progress in Aerospace Sciences, 2014, vol. 63, pp. 56-65.
- [10] R.G. Lord, Some extensions to the Cercignani-Lampis gas-surface scattering kernel, Journal of Physics of Fluids, 1991, vol. 3, pp. 1427-1433.
- [11] R.G. Lord, Some further extensions of the Cercignani-Lampis gassurface scattering kernel, Journal of Physics of Fluids, 1995, vol. 7, pp. 1159-1161.
- [12] R.G. Lord, Application of the Cercignani-Lampis Scattering Kernel to Direct Simulation Monte Carlo Calculations, 17<sup>th</sup> International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Aachen, Rheinisch-Westfaelische Technische Hochschule Aachen, 1995, pp. 1427-1433.
- [13] L.E. Schwer, Is your mesh refined enough? Estimating discretization error using GCI, LS-DYNA Anwenderforum, Bamberg, 2008, pp. 45-54.

# К вопросу прогнозирования падения высоты орбиты наноспутника формата CubeSat с учётом его движения относительно центра масс

Е.В. Баринова Межвузовская кафедра космических исследований Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва Самара, Россия L5545@yandex.ru И.В. Белоконов Межвузовская кафедра космических исследований Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва Самара, Россия ibelokonov@mail.ru И.А. Тимбай Межвузовская кафедра космических исследований Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва Самара, Россия timbai@mail.ru

Аннотация—В данной работе рассматривается пространственное движение аэродинамически стабилизированного наноспутника формата CubeSat на околоземной круговой орбите. Выполнена процедура усреднения уравнений движения методом В.М. Волосова и получены усреднённые уравнения, которые описывают возмущённое движение аэродинамически стабилизированного наноспутника формата CubeSat на большом интервале времени. Определена область применимости усреднённых уравнений. Численное интегрирование усреднённых уравнений даёт существенное сокращение времени определения парамстров движения по сравнению с исходными уравнениями.

Ключевые слова—наноспутник формата CubeSat, аэродинамический момент, пространственный угол атаки, угол собственого вращения, усреднённые уравнения движения.

# I. Введение

Большинство наноспутников (НС) для проведения научных и технологических экспериментов в космосе запускается на низкие околоземные орбиты, где возможно эффективно использовать пассивную стабилизацию наноспутника по вектору скорости движения центра масс с помощью аэродинамического момента [1]– [4]. Следует отметить, что угловое ускорение наноспутника, обусловленное аэродинамическим моментом, значительно выше, чем у спутника с большими размерами и массой (при одинаковых значениях относительного запаса статической устойчивости и объемной плотности) [5]. Это расширяет диапазон высот, на которых аэродинамический момент, действующий на НС, является значимым и его можно использовать для пассивной аэродинамической стабилизации.

Движение аэродинамически стабилизированного HC при снижении высоты круговой орбиты описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими функциями, общее решение которой получить не представляется возможным. Кроме того, входящие в систему уравнений величины носят случайный характер, а это вызывает необходимость применения статистических методов расчёта. При численном же интегрировании уравнений движения для установления закономерностей движения требуется значительное число расчётов, а это даже с использованием современных быстродействующих ЭВМ приводит к большим затратам времени. Поэтому разработка математических моделей, позволяющих существенно ускорить процесс расчёта, является актуальной задачей.

Применению усреднённых уравнений для определения параметров движения космических аппаратов, посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов. Отметим наиболее близкие работы. В [6] разработан ускоренный метод расчёта траекторий снижения в атмосфере осесимметричных космических аппаратов с малой асимметрией. В основу метода положен принцип асимптотического разделения системы уравнений движения аппарата относительно центра масс на две подсистемы, описывающие медленную и быструю составляющие решения. В [7] построены усредненные уравнения возмущенного движения осесимметричного космического аппарата с полигармонической зависимостью восстанавливающего момента от угла атаки в интегро-дифференциальной форме без введения ограничений, накладываемых на характер движения.

Наноспутники формата CubeSat имеют форму прямоугольного параллелепипеда, поэтому, в отличие от аппаратов осесимметричной формы, аэродинамический момент зависит не только от пространственного угла атаки, но и от угла собственного вращения. Ранее авторами, в работах [5], [8], была показана возможность возникновения резонансных режимов движения вследствие формы HC и малой инерционно-массовой асимметрии. Такие режимы проявляются в резком изменении амплитуды колебаний по пространственному углу атаки, когда линейная целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю. В работе [8] даны рекомендации по предотвращению возникновения резонансов.

В данной работе рассматривается угловое движение НС формата CubeSat на продолжительных нерезонансных участках. С использованием метода В.М. Волосова [9] выполнена процедура усреднения и получены усреднённые уравнения, описывающие возмущённое движение аэродинамически стабилизированного наноспутника формата CubeSat на большом интервале времени. Численное интегрирование усреднённых уравнений даёт существенное сокращение времени определения параметров движения по сравнению с исходными уравнениями, что позволяет, например, эффективно решать задачу прогнозирования падения высоты орбиты наноспутника формата CubeSat в стохастической постановке. Для оценки погрешности было проведено сравнение результатов, полученных по усредненным уравнениям движения с численным интегрированием полной пространственной модели движения наноспутника. Определены ограничения, накладываемые на начальные условия углового движения, которые позволяют применять полученные усреднённые уравнения движения для ускоренных оценок времени существования НС.

# II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ

Рассмотрим модели движения относительно центра масс динамически симметричного аэродинамически стабилизированного наноспутника формата CubeSat при движении по круговой орбите.

Принято полагать, что на рассматриваемых высотах обтекание наноспутника является свободномолекулярным и удар молекул газа абсолютно неупругий. В этом случае аэродинамическая сила представляет собой силу сопротивления, которая определяется площадью проекции наноспутника на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока [10]. Тогда аэродинамическое угловое ускорение динамически симметричного HC формата CubeSat определяется выражением [11]:

$$M_{\alpha}(\alpha,\varphi,H) = m_{0}(H)(|\cos(\alpha)| + k_{s}\sin(\alpha)(|\sin(\varphi)| + |\cos(\varphi)|)\sin(\alpha)),$$
(1)

где  $m_0(H) = -c_0 \Delta_x Sq(H) / I_n$ ;  $\alpha$  – пространственный угол атаки;  $\phi$  – угол собственного вращения;  $k_s$  – отношение площади одной из боковых поверхностей НС к характерной площади;  $\Delta x$  – смещение центра масс относительно геометрического центра (центра давления) вдоль продольной оси;  $c_0 = 2,2 - коэффициент лобово$ го сопротивления; S – характерная площадь HC;  $q(H) = \rho(H) [V(H)]^2 / 2$ \_ скоростной напор;  $V(H) = \sqrt{\mu(R_E + H)}$  – скорость полёта; H – высота полёта;  $\rho(H)$  – плотность атмосферы;  $I_v = I_z = I_n$  – поперечный момент инерции НС; µ - гравитационный параметр Земли;  $R_{E}$  – радиус Земли.

Для проведения анализа пространственного углового движения НС в нерезонансном случае аэродинамическое угловое ускорение (1) можно усреднить по углу собственного вращения:

$$M_{\alpha}(\alpha, H) = m_0(H)(|\cos(\alpha)| + k_s \frac{4}{\pi}\sin(\alpha))\sin(\alpha).$$
 (2)

Для описания движения относительно центра масс аэродинамически стабилизированного НС формата CubeSat на круговых орбитах воспользуемся математическими моделями, приведёнными в [8]. Полная модель динамических и кинематических уравнений движения в данной работе используется для проверки результатов, полученных по усреднённым уравнениям. Упрощённая модель, при построении которой был использован подход В.А. Ярошевского [12], применяется для получения усреднённых уравнений движения. В данной работе, учитывая представление аэродинамического углового ускорения в виде (2), пренебрегая орбитальной угловой скоростью и гравитационным моментом, описывая изменение высоты орбиты согласно [13], уравнения упрощенной модели пространственного движения наноспутника в нерезонансном случае примут вид:

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha, H) = 0$$
$$\dot{H} = -2\sigma_x(\alpha)q(H)V(H) / g = \varepsilon \Phi_H(\alpha, H),$$
(3)

$$F(\alpha, H) = (G - R\cos\alpha)(R - G\cos\alpha) / \sin^3 \alpha - M_{\alpha}(\alpha, H),$$

где  $\sigma_x(\alpha) = c_0 (|\cos(\alpha)| + k_s \frac{4}{\pi} \sin(\alpha))S/m$  – баллистический коэффициент; m – масса HC;  $R = I_x \omega_x / I_n = const$ ,  $G = R\cos(\alpha) + (\omega_v \sin(\varphi) + \omega_z \cos(\varphi)) = const$  – OTHECËHные к поперечному моменту инерции I<sub>n</sub> проекции вектора кинетического момента на продольную ось НС и на направление скорости центра масс;  $I_x$  – продольный момент инерции;  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  – проекции вектора угловой скорости на оси связанной системы координат;  $g = g_E (R_E (R_E + H))^2$ ;  $g_E$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли; *Є* – малый параметр.

В зависимости от соотношения величин R и G реализуются различные типы прецессионного движения. При выполнении условия R > G реализуется «обратная» прецессия, при G > R - «прямая» прецессия [14].

#### III. УСРЕДНЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения для пространственного угла атаки и высоты (3) описывают пространственное движение НС формата CubeSat и представляют собой одночастотную возмущённую систему с медленно меняющимся параметром Н, причём колебания происходят в пределах  $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ .

При  $\varepsilon = 0$  и H = const первое уравнение системы (3) сводится к уравнению

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) = 0. \tag{4}$$

(5)

Общее решение невозмущенной системы (4) в явном виде найти не представляется возможным. Имеет место только первый интеграл невозмущенной системы

 $\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + W(\alpha) = E$ 

где

$$W(\alpha) = \int F(\alpha) d\alpha = \frac{(R^2 + G^2 - 2RG\cos\alpha)}{2\sin^2\alpha} + m_0(H) \left(\frac{1}{2}sign(\cos\alpha)\cos^2(\alpha) + \frac{2k}{\pi} \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha\right)\right),$$
(6)

причем  $E = W(\alpha_{\min}) = W(\alpha_{\max})$ , так как  $\alpha_{\min}$  и  $\alpha_{\max}$  – экстремумы, при достижении которых  $\dot{\alpha} = 0$ .

Проведем усреднение по методу Волосова для случая, когда общее решение уравнения невозмущённого движения неизвестно [9]. Из уравнения (5) получим

$$\dot{\alpha} = \pm \sqrt{2(W(\alpha_{\max}) - W(\alpha))} .$$
<sup>(7)</sup>

В предположении, что движение является периодическим, период колебаний найдем из интеграла

$$T = 2 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{2(W(\alpha_{\max}) - W(\alpha))}} \,. \tag{8}$$

Тогда усредненное уравнение для максимального угла атаки примет вид

$$\dot{\alpha}_{\max} = \frac{\varepsilon}{F(\alpha_{\max})} \left\{ \frac{2}{T} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\partial W(\alpha)}{\partial H} \frac{\Phi_H(\alpha, H) d\alpha}{\sqrt{2(W(\alpha_{\max}) - W(\alpha))}} - \frac{\partial W(\alpha_{\max})}{\partial H} \bar{\Phi}_H \right\}$$
(9)

Здесь

$$\frac{\partial W(\alpha)}{\partial H} = \frac{\partial m_0(H)}{\partial H} (\frac{1}{2} sign(\cos \alpha) \cos^2(\alpha) + \frac{2k}{3} (\sin 2\alpha - \alpha))$$
(10)

$$\dot{H} = \frac{2\varepsilon}{T} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\Phi_H(\alpha, H) d\alpha}{\sqrt{2(W(\alpha_{\max}) - W(\alpha))}} = \bar{\Phi}_H.$$
 (11)

Уравнения (8)-(11) записаны в явном виде с помощью известных функций  $\Phi_H(\alpha, H)$  и  $W(\alpha)$ . Для построения этих уравнений не требуется общего решения порождающего уравнения (4). Определенные интегралы в правых частях уравнений (8), (9), (11) зависят от тригонометрических функций так называемой «быстрой» переменной, поэтому целесообразно ввести следующую замену

$$u = \cos \alpha$$
,  $x = \cos \alpha_{\max}$ ,  $u_1 = \cos \alpha_{\min}$ . (12)

Тогда уравнения (8), (9), (11) примут вид

$$T = -2 \int_{x}^{u_{1}} \frac{du}{\sqrt{2(1-u^{2})(W(x)-W(u))}},$$
  

$$\dot{x} = -\frac{\varepsilon(1-x^{2})^{1/2}}{F(x)} \left[ \frac{2}{T} \int_{x}^{u_{1}} \frac{\partial W(u)}{\partial H} \frac{\Phi_{H}(u,H)du}{\sqrt{2(1-u^{2})(W(x)-W(u))}} \right]$$
  

$$-\frac{\partial W(x)}{\partial H} \bar{\Phi}_{H}$$

$$\dot{H} = \frac{2}{T} \int_{x}^{u_{1}} \frac{\Phi_{H}(u,H)du}{\sqrt{2(1-u^{2})(W(x)-W(u))}} = \bar{\Phi}_{H}.$$
(13)

Данные усреднённые уравнения движения получены для нерезонансных участков траектории движения аэродинамически стабилизированного HC без введения дополнительных ограничений на параметры движения относительно центра масс.

# IV. СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ РАСЧЕТОВ ПО ПОЛНЫМ И УСРЕДНЕННЫМ УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ

В работе проведено сравнение результатов моделирования с использованием усредненных уравнений (13) и результатов, полученных по полной модели пространственного движения [8], в которой учитывается влияние гравитационного момента и орбитальной угловой скорости.

Для примера был рассмотрен HC формата CubeSat со следующими параметрами: m = 3 кг,  $S = 0,01 \text{ м}^2$ ,  $k_s = 3$ ,  $I_x = 0,005 \text{ кг m}^2$ ,  $I_n = 0,025 \text{ кг m}^2$ ,  $\Delta x = 0,05 \text{ м}$ , при следующих начальных условиях движения: угол атаки  $\alpha_0 = 50^\circ$ , компоненты угловой скорости относительно орбитальной системы координат  $\omega_{x0} = 0,8^\circ/\text{с}$ ,  $\omega_{y0} = 0,02^\circ/\text{c}$ ,  $\omega_{z0} = 0,02^\circ/\text{c}$ . Рассмотрена два случая начальной высоты 350 км и 300 км. Результаты расчетов приведены в таблицах 1, 2. Следует отметить, что для изменения высоты орбиты результаты, полученные по модели (3) и модели (12) совпадают с точностью до нескольких метров.

ТАБЛИЦА 1. СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ РАСЧЕТОВ ВЫСОТЫ ПО ПОЛНЫМ И УСРЕДНЕННЫМ УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ (НАЧАЛЬНАЯ ВЫСОТА 350 KM)

<i>t</i> , дни	Полная модель движения, <i>H</i> , м	Усредненная модель движения, <i>H</i> , м	Относительная ошибка, %
1	349351	349356	0,8
2	348698	348706	0,6
3	348036	348050	0,7
4	347372	347388	0,6
5	346695	346720	0,8
6	346022	346045	0,6
7	345330	345364	0,7
8	344645	344677	0,6
9	343940	343983	0,7
10	343242	343283	0,6

ТАБЛИЦА 2. СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ РАСЧЕТОВ ВЫСОТЫ ПО ПОЛНЫМ И УСРЕДНЕННЫМ УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ (НАЧАЛЬНАЯ ВЫСОТА 300 КМ)

<i>t</i> , дни	Полная мо- дель движе- ния, <i>Н</i> , м	Усредненная мо- дель движения, <i>H</i> , м	Относительная ошибка, %
1	298203	298217	0,8
2	296331	296356	0,7
3	294381	294414	0,6
4	292351	292387	0,5
5	290235	290272	0,4
6	288026	288066	0,3
7	285725	285766	0,3
8	283323	283368	0,3
9	280821	280868	0,2
10	278195	278247	0,2

Как видно из таблиц 1, 2 относительная ошибка оценки снижения высоты не превосходит 1%.

Таким образом, в данной работе получены усреднённые уравнения, описывающие возмущённое движение аэродинамически стабилизированного наноспутника формата CubeSat на продолжительных нерезонансных участках движения. Данные уравнения применимы для диапазона высот, где аэродинамический момент является преобладающим, и для угловых скоростей, обеспечивающих аэродинамическую стабилизацию и отсутствие резонансного режима движения. Условия возникновения резонансных режимов движения, а также подход к предотвращению возможного появления резонансов для наноспутников класса CubeSat подробно изложены в работе [8].

Как показано в работе, полученные усреднённые уравнения движения позволяют с высокой точностью прогнозировать падение высоты орбиты с минимальными затратами вычислительных мощностей, что позволяет провести оценку времени существования НС на орбите. Предложенный подход может быть полезен тем, кто занимается проектированием, развертыванием и эксплуатацией наноспутников.

# V. БЛАГОДАРНОСТЬ

Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

#### Литература

- L. He, X. Chen, K. D. Kumar, T. Sheng, C. Yue, A novel threeaxis attitude stabilization method using in-plane internal massshifting, *Aerospace Science and Technology*, vol. 92, pp. 489–500, 2019.
- [2] S. Chesi, Q. Gong, M. Romano, Aerodynamic three-axis attitude stabilization of a spacecraft by center-of-mass shifting, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 40, no. 7, pp. 1613–1626, 2017.

- [3] И.В. Белоконов, И.А. Тимбай, Е.В. Баринова. Выбор проектных параметров наноспутника формата CubeSat с пассивной системой стабилизации // Гироскопия и навигация, Т. 28, № 1. с. 81-100, 2020.
- [4] M. L. Psiaki, Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing, *Journal of Guidance*, *Control, and Dynamics*, vol. 27, no. 3, pp. 347–355, 2004.
- [5] И.В. Белоконов, И.А. Тимбай, П.Н. Николаев. Анализ и синтез движения аэродинамически стабилизированных космических аппаратов нанокласса формата CubeSat // Гироскопия и навигация. Т. 26, № 3 (102), с. 69-91, 2018.
- [6] В.М. Белоконов, И.В. Белоконов, Ю.М. Заболотнов. Ускоренный расчет траекторий снижения в атмосфере неуправляемых КА с учетом их движения относительно центра масс // Космич. исслед. Т. 21. № 4. с. 512-521, 1983.
- [7] В.С. Асланов, И.А. Тимбай, В.В. Бойко. Пространственные колебания осесимметричного аппарата на произвольных углах атаки при снижении в атмосфере планеты // Cosmic Research (English Transl. Kosm. Issled.), Т. 19, №. 5, с. 680–687, 1981.
- [8] Е.В. Баринова, И.В. Белоконов, И.А. Тимбай. Предотвращение возможности возникновения резонансных режимов движения для низковысотных спутников класса CUBESAT // Гироскопия и навигация, Т. 29, № 4 (115), с. 1-19, 2021.
- [9] В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. МГУ. Москва, 1971.
- [10] В. В. Белецкий. Движение искусственного спутника относительно центра масс, Наука. Москва, 1965.
- [11] I.V. Belokonov, A.V. Kramlikh, I.A. Timbai, Low-orbital transformable nanosatellite: Research of the dynamics and possibilities of navigational and communication problems solving for passive aerodynamic stabilization, *Adv. Astronaut. Sci.* 153 (2015) 383–397.
- [12] В. А. Ярошевский. Движение неуправляемого тела в атмосфере, Машиностроение. Москва, 1978.
- [13] М. Б. Балк. Элементы динамики космического полета, Наука. Москва, 1965.
- [14] D. H. Platus, Dispersion of spinning missiles due to lift nonaveraging, AIAA J., 1977, vol. 15, no. 7, pp. 909–915.

# Гибридный алгоритм управления движением судна, исключающий насыщение контура управления

Г.М. Довгоброд *АО ЦНИИ Курс* Москва, Российская Федерация georgy.dovgobrod@yandex.ru Д.С. Бахтин АО ЦНИИ Курс Москва, Российская Федерация diod6681@mail.ru К. А. Дворников *АО ЦНИИ Курс* Москва, Российская Федерация dvornikov.kirill.kyrs@yandex.ru

Аннотация—В работе представлены результаты испытания гибридного алгоритма системы управления движением судна, который обеспечивает возвращение на заданную траекторию-аттрактор при любом боковом отклонении судна от заданной траектории. Была построена модель работы контура управления, состоящего из блока управления и модели динамики судна. Результаты вычислительных экспериментов демонстрируют устойчивость частных линейных и дискретных моделей в гибридной системы управления (СУ).

Ключевые слова—гибридный алгоритм, траектория движения судна, контур управления, автоколебания, боковое отклонение.

# I. Введение

Традиционные авторулевые для судов являются автоматизированной системой управления, использующей некоторый алгоритм управления, в котором алгоритм вычисления сигнала управления называется законом управления [1, 2, 3].

В реальных системах всегда есть ограничения на максимальную величину управляющего воздействия. В системах управления движением судна это предельное значение угла перекладки руля, предельная скорость перекладки.

При осуществлении настройки модели движения возникает необходимость иметь запас по управляемости и исключение насыщения контура управления [6].

Предлагаемый доклад посвящен разработке гибридного алгоритма системы управления движением судна, который исключает насыщение контура управления и обеспечивает возвращение судна на заданную траекторию-аттрактор при любом боковом отклонении судна от заданной траектории.

#### II. Постановка задачи.

В реальных системах всегда есть ограничения на максимальную величину управляющего воздействия [4, 5]. В системах управления движением судна это предельное значение угла перекладки руля, предельная скорость перекладки. Для выполнения автоматического движения можно задать линию заданного пути (ЛЗП) с заданной непрерывной кривизной, которая обеспечивает выполнение ограничений на сигнал управления [6]. Возможно дополнительно обеспечить запас по сигналу управления для парирования возмущающих воздействий.

Но судно находится в среде, которая может произвести возмущающее воздействовать на него такое, которое потребует для компенсации применения управляющего воздействия, превышающего технические ограничения. В системах автоматического управления при превышении сигналом управления ограничений может происходить явление насыщения (windup) и срыв процесса управления. Рассмотрим ЛЗП состоящую из трех путевых примитивов: 1) прямой отрезок, 2) полиномиальный криволинейный отрезок, 3) прямой отрезок и являющуюся траекторией с непрерывной ограниченной кривизной. На рис. 1 показана ситуация, когда судно в режиме автоматического движения по ЛЗП получило боковое отклонение около 1,5 км. Появление насыщения привело к возбуждению автоколебаний в контуре автоматического управления продольным движением судна.



Рис. 1 Примеры явления насыщения: а) автоколебания с выходом на заданную траекторию, б) автоколебания и срыв процесса управления

Целью работы является разработка гибридного алгоритма управления движением судна (ГАУДС), который ограничивает сигнал управления до заданной величины и обеспечивает возвращение на заданную траекториюаттрактор при любом боковом отклонении судна от заданной траектории.

# III. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Гибридный алгоритм – это алгоритм, который осуществляет как непрерывные, так и дискретные (переключения) изменения состояния.

Фазовое пространство разбивается гиперповерхностями переключения на области (рис. 2), в которых работают предназначенные для этих областей линейные модели движения.

Координаты х фазового пространства R3 соответствуют: боковому отклонению от ЛЗП, путевому углу и угловой скорости судна.



Рис. 2 Траектория движения судна при использовании гибридного алгоритма: — Граница элементарных отрезков линии заданного пути (ЛЗП); — Граница между областями, в которых в законе управления боковое отклонение судна от ЛЗП изменяется (для A, B, C) или постоянно

Исходная модель движения судна нелинейная, учитывающая диаграмму управляемости судна:

$$\dot{x} = vsinx_3, 
\dot{x}_2 = vcosx_3, 
\dot{x}_3 = x_4, 
\dot{x}_4 = \theta_1 x_3 + \theta_2 x^3_4 + b\delta,$$
(1)

где  $x_1$ ,  $x_2$  – декартовы координаты центра масс судна в плоскости,  $x_3$  – путевой угол судна, v – скорость объекта (v>0),  $x_4$  – угловая скорость поворота корпуса судна в плоскости  $\pi$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , b – коэффициенты модели динамики судна Норрбина,  $\delta$  – угол перекладки руля.

Методом линеаризации обратной связью модель преобразуется в линейную [6]. В качестве закона управления используется линейная обратная связь по состоянию [7]. Для областей фазового пространства A, B, C получаем замкнутые линейные системы вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_2} & -\frac{1}{k_3} \end{bmatrix} \mathbf{x}, \qquad (1)$$

где  $k = (k_1, k_2, k_3)^{T}$  – вектор коэффициентов обратной связи закона управления.

Собственные числа этих матриц при положительных  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  имеют отрицательные действительные части и, следовательно, системы асимптотически устойчивы.

Коэффициенты  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  всегда имеют положительные значения. Коэффициенты  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  могут быть одинаковыми для областей  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ , а также могут различаться для разных областей.

Для областей фазового пространства  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  получаем замкнутые аффинные СУ вида

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{k_2} & -\frac{1}{k_3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\tilde{x}_1}{k_1} \end{bmatrix}.$$
(2)

Units где  $\tilde{x}_1$  – величина, соответствующая пороговому боковому отклонению на зеленой гиперповерхности переключения. Два собственных числа этих матриц при положительных  $k_2$ ,  $k_3$  имеют отрицательные действительные части, третье собственное число равно нулю и, следовательно, системы устойчивы по Ляпунову.

Правила переключения:

А) Для зеленых границ: если оценка расстояния от судна до текущего путевого примитива меньше заданного порога, то работает модель (1), иначе – модель (2), в которой в качестве оценки расстояния от судна до текущего путевого примитива используется соответствующее пороговое боковое отклонение.

Б) Для желтых границ: при пересечении границы происходит переключение на выражение для соответствующего путевого примитива и соответствующий вектор *k*.

Область притяжения заданной траектории при использовании представленного алгоритма совпадает с декартовым произведением горизонтальной плоскостью и открытого отрезка  $\mathbf{R}^2 \times (-\pi/2, p/2)$ .

# IV. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для подтверждения работоспособности гибридного алгоритма моделировалась работа контура управления, состоящего из блока управления и модели динамики судна. Нелинейная модель динамики судна представлена системой уравнений (3) [8].

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega, \\ \dot{\beta} = -q_{21}\beta - r_{21}\omega - s_{21}\delta - h |\beta|\beta, \\ \dot{\omega} = -q_{31}\beta - r_{31}\omega - s_{32}\delta, \end{cases}$$
(3)

где  $\omega$  – угловая скорость,  $\delta$  – угол перекладки руля,  $\beta$  – угол дрейфа,  $\varphi$  – курс судна,  $q_{21}$ ,  $r_{21}$ ,  $s_{21}$ , h,  $q_{31}$ ,  $r_{31}$ ,  $s_{31}$  – гидродинамические коэффициенты судна.

Результаты моделирования показывают, что алгоритм управления, построенный по методу линеаризации обратной связью, работающий в условиях ограничения на сигнал управления, может приводить к автоколебаниям и последующему движению в обратном направлении (рис. 1). При использовании гибридного алгоритма управления эти явления исключаются (рис. 3).

Однако, устойчивость частных линейных и дискретных моделей в гибридной СУ не гарантирует устойчивость СУ в целом [9]. Реально проверить можно только достаточные критерии устойчивости. Johansson and Rantzer (1998) [10] разработали для непрерывных по времени кусочно-аффинных систем метод построения кусочно-квадратичных функций Ляпунова. В настоящее время для построения указанных функций используют нейронные сети [11,]. Планируется применить эти методы для подтверждения устойчивости ГАУДС.



Рис. 3. Траектория перемещения судна при использовании гибридного алгоритма

# V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если использовать закон управления, построенные по методу линеаризации обратной связью, в алгоритме управления движением объекта по заданной траектории с непрерывной ограниченной кривизной, то при наличии ограничения на величину сигнала управления и большом боковом отклонении вектор состояния модели движения судна может приближаться к точке сингулярности закона управления с возникновением автоколебаний. Это приводит к перегрузка механизмов системы управления и может привести к срыву процесса управления. При любом боковом отклонении гибридный алгоритм управления может обеспечить полное отсутствие выхода расчетного сигнала управления на граничную величину исполнительного сигнала управления. При этом работоспособность алгоритма управления сохраняется.

Использование усовершенствованного алгоритма управления особенно полезно для систем автоматического управления безэкипажными судами. Такие суда в настоящее время, как правило, имеют небольшое водоизмещение, и во многих случаях воздействие ветра и волн является для них непреодолимым. Как только это воздействие прекращается, усовершенствованный алгоритм управления сразу начинает эффективно парировать боковое отклонение без переключения на специальный алгоритм возврата на заданную траекторию.

Выводы подтверждаются результатами моделирования.

#### Литература

- Karl J. Astrom, Bjorn Wittenmark. Adaptive Control. Second edition. Dover publications, Inc. Mineola, New York. 2008.
- [2] Довгоброд Г.М. Стабилизация движения судна малым управлением // Гироскопия и навигация. 2020. №4. С. 106-122.
- [3] Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. Москва. «Мир» 1987.
- [4] Лукомский Ю.А., Корчанов В.М. Управление морскими подвижными объектами. ЭЛМОР, Санкт-Петербург, 1996.
- [5] Х. Халил. Нелинейные системы. Москва. «Ижевск». 2009.
- [6] Довгоброд Г.М. Формирование заданной траектории повышенной гладкости для метода согласованного управления // Гироскопия и навигация. 2016. №3. С. 143-151.
- [7] Довгоброд Г.М. Опыт настройки нелинейного адаптивного авторулевого численными методами // Морские информационноуправляющие системы. 2021. № 2 (20). С. 64-73.
- [8] Поселенов Е. Н. Обоснование и разработка адаптивного алгоритма управления движением водоизмещающего речного судна на мелководье. Диссертация. Нижний Новгород. Волжская государственная академия водного транспорта. 2010.
- [9] M.S. Branicky Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. IEEE Transactions on Automatic Control, IEEE Transactions on Automatic Control (Volume: 43, Issue: 4, April 1998).
- [10] A. Rantzer, M. Johansson Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems EEE Transactions on Automatic Control (Volume: 43, Issue: 4, April 1998).
- [11] H. Dai, B. Landry, M. Pavone, R.Tedrake. Counter-example guided synthesis of neural network Lyapunov functions for piecewise linear systems. Published in: 2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC).
# Выбор условий обеспечения продолжительной пассивной инспекции в близкой окрестности космического аппарата, двигающегося по высокоэллиптической орбите

И.В. Белоконов Межвузовская кафедра космических исследований Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва Самара, Россия Belokonov.iv@ssau.ru М.С. Щербаков Межвузовская кафедра космических исследований Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва Самара, Россия sherbakov.m.s@mail.ru С.А. Медведев Межвузовская кафедра космических исследований Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва Самара, Россия svatmedved99@gmail.com

Аннотация-В статье исследуется пассивное инспекционное движение на высокоэллиптических орбитах, при котором космический аппарат (КА) совершает облёт объекта инспекции (ОИ) в его орбитальной плоскости. В качестве номинальной инспекционной траектории используется оскулирующая траектория относительного движения. Она имеет сложную форму и зависит от эксцентриситета орбиты и значения истинной аномалии ОИ в начальный момент времени. Рассмотрено влияние двух возмущающих факторов на инспекционное движение: неоднородность гравитационного поля Земли и притяжение Луны, их воздействие приводит к деформации инспекционной траектории. Для оценки продолжительности пассивного инспекционного движения используется понятие времени допустимого разлёта - интервал времени, на котором расстояние между ОИ и КА не превысит заданного значения. Отдельно рассмотрен вопрос о влиянии погрешностей в определении положения и скорости КА относительно ОИ при формировании номинальной инспекционной траектории на продолжительность времени допустимого разлёта.

Ключевые слова—оскулирующая траектория относительного движения, высокоэллиптические орбиты, групповой полёт космических аппаратов, пассивное инспекционное движение, равенство орбитальных энергий.

#### I. Введение

Актуальность использования высокоэллиптических орбит (ВЭО) [1] для нашей страны продиктовано её географическим расположением на высоких, северных широтах. Космические аппараты, двигающиеся по ВЭО, позволяют установить информационное сопровождение экспедиций, работающих в районах крайнего севера, обеспечивают населённые пункты устойчивыми каналами связи и пр. Использование ВЭО в нашей стране началось с запуска КА Молния-1 в 1965 году.

Для увеличения срока активного существования космического аппарата, двигающегося по ВЭО, целесообразно использовать КА сервисного обслуживания (далее КА), который будет проводить осмотр, ремонт и дозаправку основного КА (далее объект инспекции (ОИ)).

В предыдущих работах [2, 3] было определено, что для нахождения КА в малой окрестности ОИ предпочтительно использовать частный тип группового полёта космических аппаратов – инспекционное движение (ИД). Под ИД понимается периодическое относительное движение, организованное таким образом, что КА за один орбитальный период совершает полный облёт ОИ в его орбитальной плоскости, при отсутствии возмущающих факторов. Одной из задач, для реализации ИД, является выбор условий обеспечения продолжительной пассивной инспекции в близкой окрестности ОИ при наличии возмущающих факторов. Необходимым условием для обеспечения продолжительной пассивной инспекции, является выполнение условия равенства орбитальных энергий КА и ОИ [4] в начальный момент времени.

В работе [5] рассмотрен вопрос выбора начальных параметров движения для формирования тэтраэдральной спутниковой формации на ВЭО. В [6] было установлено, что продолжительность пассивной инспекции существенно зависит от начального значения истинной аномалии  $\mathcal{P}_0$  ОИ при движении по круговой орбите в нормальном поле притяжения Земли. Помимо выбора начальных параметров движения, условие равенства орбитальных энергии используется при формировании управляющих воздействий для поддержания ИД на около круговых орбитах [7,8]. В работе [2] было определено, что существенное влияние на инспекционное движение оказывают погрешности в начальных параметрах движения ОИ и КА.

Отличием данной работы от предыдущих является то, что исследуется ИД на ВЭО в нормальном поле притяжения Земли, с учётом влияния притяжения Луны и погрешностей в начальных параметрах движения КА. В качестве номинальной инспекционной траектории рассматривается оскулирующая траектория относительного движения.

Для обеспечения продолжительных интервалов времени пассивного ИД на ВЭО сформирован подход, учитывающий особенности влияния возмущающих факторов. Для апробации предложенного подхода рассмотрено ИД на орбите Молния и геопереходной орбите (ГПО).

# II. Постановка задачи

Инспекционное движение КА рассматривается в орбитальной системе координат (OCK) ОХҮΖ, связанной с центром масс ОИ, ось ОХ направлена по радиусу-вектору ОИ, ось ОУ направлена в сторону орбитального движения ОИ, а ось ОZ дополняет систему координат до правой. Связь ОСК и Абсолютной геоцентрической системы координат (АГСК) О<sub>Г</sub>Х<sub>Г</sub>Ү<sub>Г</sub>Z<sub>Г</sub> показана на рисунке 1. Орбиты КА и ОИ являются компланарными орбитами в начальный момент времени. На рисунке 1 синим и красным цветом схематично показаны соответственно орбиты ОИ и КА;  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  – аргумент широты и орбитальная угловая скорость ОИ, **r** – радиус-вектор ОИ.





В качестве номинальной инспекционной траектории используется оскулирующая траектория относительного движения, отвечающая условию равенства орбитальных энергий КА и ОИ при движении в центральном поле притяжения Земли и отсутствии возмущающих факторов. Равенство орбитальных энергий обеспечивается за счёт выбора начальной скорости движения КА в ОСК с помощью выражений [9]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{0} &= \frac{y_{0}\dot{\theta}_{0}}{2} \\ \dot{y}_{0} &= -\dot{\theta}_{0}\left(r_{0} + x_{0}\right) + \sqrt{\dot{\theta}_{0}^{2}r_{0}^{2} - \left(\dot{x}_{0} - \dot{\theta}_{0}y_{0}\right)^{2}} - \\ &-\sqrt{2\dot{\theta}_{0}r_{0}}\frac{e_{0}\sin\theta_{0}}{1 + e_{0}\cos\theta_{0}}\left(\dot{x}_{0} - \dot{\theta}_{0}y_{0}\right) - \\ &-\sqrt{2\left(\frac{\mu_{3}}{r_{0}} - \frac{\mu_{3}}{\sqrt{\left(r_{0} + x_{0}\right)^{2} + y_{0}^{2} + z_{0}^{2}}}\right) - \dot{z}_{0}^{2}} \\ \dot{z}_{0} &= 0 \end{aligned}$$
(1)

где  $e_0$  – эксцентриситет орбиты ОИ,  $\mu_3$  – гравитационный параметр Земли.

Номинальная инспекционная траектория (ИТ), полученная с помощью (1), будет иметь сложную форму, которая зависит от параметров орбиты ОИ и начального положения КА  $(x_0, y_0, z_0)$  в ОСК.

Для учёта влияния на ИД возмущений нецентральности гравитационного поля Земли и притяжения Луны используется система дифференциальных уравнений в АГСК:

$$\begin{split} \ddot{X}_{OH} &= -\mu_{3} \frac{X_{OH}}{r_{OH}^{3}} + 1,5J_{2}\mu_{3} \left(\frac{R_{3}}{r_{OH}}\right)^{2} \left(5\frac{Z_{OH}}{r_{OH}^{2}} - 1\right) \frac{X_{OH}}{r_{OH}} + \mu_{\pi} \left(\frac{X_{\pi} - X_{OH}}{\left(r_{\pi} - r_{OH}\right)^{3}} - \frac{X_{\pi}}{r_{\pi}}\right) \\ \ddot{Y}_{OH} &= -\mu_{3} \frac{Y_{OH}}{r_{OH}^{3}} + 1,5J_{2}\mu_{3} \left(\frac{R_{3}}{r_{OH}}\right)^{2} \left(5\frac{Z_{OH}}{r_{OH}^{2}} - 1\right) \frac{Y_{OH}}{r_{OH}} + \mu_{\pi} \left(\frac{Y_{\pi} - Y_{OH}}{\left(r_{\pi} - r_{OH}\right)^{3}} - \frac{Y_{\pi}}{r_{\pi}}\right) \\ \ddot{Z}_{OH} &= -\mu_{3} \frac{Z_{OH}}{r_{OH}^{3}} + 1,5J_{2}\mu_{3} \left(\frac{R_{3}}{r_{OH}}\right)^{2} \left(5\frac{Z_{OH}}{r_{OH}^{2}} - 3\right) \frac{Z_{OH}}{r_{OH}} + \mu_{\pi} \left(\frac{Z_{\pi} - Z_{OH}}{\left(r_{\pi} - r_{OH}\right)^{3}} - \frac{Y_{\pi}}{r_{\pi}}\right) \\ \ddot{X}_{K4} &= -\mu_{3} \frac{X_{K4}}{r_{K4}^{3}} + 1,5J_{2}\mu_{3} \left(\frac{R_{3}}{r_{K4}}\right)^{2} \left(5\frac{Z_{K4}}{r_{K4}^{2}} - 1\right) \frac{X_{K4}}{r_{K4}} + \mu_{\pi} \left(\frac{X_{\pi} - X_{K4}}{\left(r_{\pi} - r_{K4}\right)^{3}} - \frac{X_{\pi}}{r_{\pi}}\right) \\ \ddot{Y}_{K4} &= -\mu_{3} \frac{X_{K4}}{r_{K4}^{3}} + 1,5J_{2}\mu_{3} \left(\frac{R_{3}}{r_{K4}}\right)^{2} \left(5\frac{Z_{K4}}{r_{K4}^{2}} - 1\right) \frac{Y_{K4}}{r_{K4}} + \mu_{\pi} \left(\frac{Y_{\pi} - Y_{K4}}{\left(r_{\pi} - r_{K4}\right)^{3}} - \frac{Y_{\pi}}{r_{\pi}}\right) \\ \ddot{Y}_{K4} &= -\mu_{3} \frac{Z_{K4}}{r_{K4}^{3}} + 1,5J_{2}\mu_{3} \left(\frac{R_{3}}{r_{K4}}\right)^{2} \left(5\frac{Z_{K4}}{r_{K4}^{2}} - 1\right) \frac{Y_{K4}}{r_{K4}} + \mu_{\pi} \left(\frac{Z_{\pi} - Z_{K4}}{\left(r_{\pi} - r_{K4}\right)^{3}} - \frac{Y_{\pi}}{r_{\pi}}\right) \\ \ddot{X}_{\pi} &= -(\mu_{3} + \mu_{\pi}) \frac{X_{\pi}}{r_{\pi}^{3}}} \\ \ddot{X}_{\pi} &= -(\mu_{3} + \mu_{\pi}) \frac{Y_{\pi}}{r_{\pi}^{3}}} \\ \ddot{Y}_{\pi} &= -(\mu_{3} + \mu_{\pi}) \frac{Y_{\pi}}{r_{\pi}^{3}}} \\ \ddot{Y}_{\pi} &= -(\mu_{3} + \mu_{\pi}) \frac{Y_{\pi}}{r_{\pi}^{3}}} \\ \ddot{Y}_{\pi} &= -(\mu_{3} + \mu_{\pi}) \frac{Z_{\pi}}{r_{\pi}^{3}}} \\ \dot{Y}_{\pi} &= -(\mu_{3} + \mu_{\pi}) \frac{Z_{\pi}}{r_{\pi}^{3}}} \\ \dot{Y}_{\pi} &= -(\mu_{3} + \mu_{\pi}) \frac{Z_{\pi}}{r_{\pi}^{3}}} \\ \ddot{Y}_{\pi} &= -(\mu_{3} + \mu_{\pi}) \frac{Z_{\pi}}{r_{\pi}^{3}}} \\ \dot{Y}_{\pi} &= -(\mu_{3} + \mu_{\pi}) \frac{Z_{\pi}}{r_{\pi}^{3}}} \\ \dot{Y}_{\pi} &= -(\mu_{\pi} + \mu_{$$

где  $X_{OH}, Y_{OH}, Z_{OH}$  – координаты положения ОИ в АГСК;  $X_{KA}, Y_{KA}, Z_{KA}$  – координаты положения КА в АГСК;  $X_{,\Pi}, Y_{,\Pi}, Z_{,\Pi}$  – координаты положения Луны в АГСК;  $r_{OH}, r_{KA}, r_{,\Pi}$  – радиус-вектор ОИ, КА и Луны в АГСК соответственно;  $J_2$  – коэффициент второй зональной гармоники гравитационного потенциала Земли;  $R_3$  – экваториальный радиус Земли;  $\mu_{,\Pi}$  – гравитационный параметр Луны.

Переход из АГСК в ОСК проводится в два этапа: определение относительной дальности и скорости между КА и ОИ  $\Delta \mathbf{r}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{r}}$ ; перевод  $\Delta \mathbf{r}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{r}}$  в ОСК по методике, предложенной в [6].

Для оценки деформации ИТ вводится понятие время допустимого разлета  $t^*$  – интервал времени на котором не нарушается критерий допустимой деформации ИТ:

$$\boldsymbol{\rho} | \le 1,05 \cdot | \boldsymbol{\rho}_{max} | \tag{3}$$

где  $\rho_{max}$  – максимальный радиус-вектор номинальной ИТ,  $\rho$  – текущий радиус вектор ИТ.

На рисунке 2 изображен процесс деформации инспекционной траектории, красным и синим цветом показаны номинальная и возмущённая траектории.



Для оценки влияния погрешностей в начальных параметрах движения, вследствие которого происходит нарушение равенства орбитальных энергий, было принято, что начальные координаты и проекции скорости КА в ОСК являются коррелированными случайными величинами, распределёнными по нормальному закону.

Вектор реализаций случайных величин, будет иметь вид:

$$X_{HY}^{(j)} = \left[ x_0^{(j)}, y_0^{(j)}, z_0^{(j)}, \dot{x}_0^{(j)}, \dot{y}_0^{(j)}, \dot{z}_0^{(j)} \right]^T$$
(4)

где  $j = \overline{1, n}$ ; n -количество испытаний.

Для определения (4) используется линейное преобразование [10]:

$$X_{HV}^{(j)} = A\beta_B^{(j)} + B \tag{5}$$

где A – матрица размера 6 х 6, полученная в результате решения уравнения  $AA^{T} = K_{0}$ ,  $K_{0}$  – симметричная ковариационная матрица случайных начальных параметров движения;  $\beta_{B}^{(j)}$  – реализация векторной случайной величины размера 6 х 1 с независимыми компонентами, имеющими стандартное нормальное распределение;  $B = \left[M_{x0}, M_{y0}, M_{z0}, M_{\dot{x}0}, M_{\dot{y}0}, M_{\dot{z}0}\right]^{T}$  – вектор математических ожиданий случайных начальных параметров движения КА.

# III. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Проведено исследование по определению  $t^*$  в зависимости от  $\mathcal{G}_0$  при реализации инспекционного движения на орбите Молния и ГПО. Параметры орбит приведены в таблице 1.

Таблина	1
1 / minute	

Орбита	i, °	$\omega_{\Pi}, \circ$	$h_{_A}$ , км	$h_{_{\varPi}}$ , км
Молния	63,4	270	39592	497
ГПО	51,6	0	35786	200

где  $i, \omega_{\Pi}, h_A, h_{\Pi}$  – наклонение, аргумент перицентра, высота в апогее и перигее орбиты ОИ. Начальное значение  $g_0$  варьируется в диапазоне от 0 до 360° с шагом 0,5°.

Начальные параметры движения КА формируются в OCK:  $x_0 = 5$  км,  $y_0 = 0$  км,  $z_0 = 0$  км, проекции скорости рассчитываются с помощью (1). Начальные параметры движения Луны относительно Земли соответствует её положению на 30 января 2023 года в 0 часов 00 минут. Инспекционное движение рассматривается на интервале времени не более 70 суток. Это обусловлено накоплением ошибок при численном интегрировании системы (2).

Проведено последовательное моделирование ИД на орбитах, представленных в таблице 1. Для каждой ВЭО было проведено два цикла расчётов для определения продолжительности  $t^*$ : с учётом и без учёта притяже-

ния Луны. Результаты моделирования приведены на рисунках 3-4, соответственно для орбит Молния и ГПО.



Рисунок 3



Рисунок 4

Из рисунков 3–4 видно, что существуют области продолжительного времени допустимой деформации ИТ  $t^*$ , имеющих неравнозначное значение. Это подтверждает предыдущие результаты [6]. Притяжение Луны негативно сказывается на продолжительности  $t^*$ , особенно это заметно для ГПО. Проведённый анализ показал, что начальное значение истинной аномалии ОИ предпочтительно выбирать из диапазона  $g_0 = 107..173^\circ$  для орбиты Молния,  $g_0 = 240..256^\circ$  для ГПО.

Проведена оценка влияния погрешностей начальных параметров движения (рассчитаны помощью (5)) на продолжительность  $t^*$ . Математические ожидания начальных проекций скорости КА в ОСК определяются с помощью (1). Матрица  $K_0$  имеет вид:

$$K_{0} = \begin{bmatrix} D_{x0} & K_{x0y0} & K_{x0z0} & K_{x0x0} & K_{x0y0} & K_{x0z0} \\ K_{x0y0} & D_{y0} & K_{y0z0} & K_{y0y0} & K_{y0y0} & K_{y0y0} \\ K_{x0z0} & K_{y0z0} & D_{z0} & K_{z0x0} & K_{z0y0} & K_{z0z0} \\ K_{x0x0} & K_{y0x0} & K_{z0x0} & D_{x0} & K_{x0y0} & K_{x0z0} \\ K_{x0y0} & K_{y0y0} & K_{z0y0} & K_{x0y0} & D_{y0} & K_{y0z0} \\ K_{x0y0} & K_{y0y0} & K_{z0y0} & K_{x0y0} & D_{y0} & K_{y0z0} \\ \end{bmatrix}$$

где  $D_{x0}, D_{y0}, D_{z0}, D_{x0}, D_{y0}, D_{z0}$  – дисперсии начальных значений координат и проекций скорости КА; элементы матрицы  $K_0$  определяются по формуле  $K_{ij} = r_{ij} \cdot \sqrt{D_i D_j}$ .

Для оценки влияния величины погрешностей в начальных параметрах движения было проведено 2 цикла статистических испытаний для каждого типа орбит. Каждый цикл включает в себя n = 1000 испытаний с заданными моментными характеристиками, приведёнными в таблице 2.

1 / 10/11/1// 2
-----------------

Maxaa	орб. Молния		ГПО	
моментные характеристики	1 цикл	2 цикл	1 цикл	2 цикл
${M_{{x0}}},\;$ м	5000		5000	
$M_{y0} = M_{z0}, \ m$	0		0	
${M}_{{\dot x}0}$ , м/с	0		0	
${M}_{{  y}0},$ м/с	-1,9		-3,3	
$M_{{\dot z}0},\;{ m M/c}$	0		0	
$\sigma_{\scriptscriptstyle cord}$ , M	10	1	10	1
$\sigma_{_{vel}},$ M/c	0,1	0,01	0,1	0,01
$r_{x0y0} = r_{x0z0} = r_{y0z0}$	0,2		0,2	
$r_{x0\dot{x}0} = r_{y0\dot{y}0} = r_{z0\dot{z}0}$	0,5		0,5	
$r_{x0\dot{y}0} = r_{x0\dot{z}0} = r_{y0\dot{x}0} =$	0		0	
$= r_{y0\dot{z}0} = r_{z0\dot{x}0} = r_{z0\dot{y}0}$	ÿ		•	

где  $M_{x0}, M_{y0}, M_{z0}, M_{\dot{x}0}, M_{\dot{y}0}, M_{\dot{z}0}$  – математические ожидания начальных координат и начальных проекций скорости КА;  $\sigma_{cord}, \sigma_{vel}$  – среднеквадратические отклонения начальных координат и проекций скорости КА в ОСК соответственно;  $r_{x0y0}, r_{x0z0}, r_{y0z0}, r_{x0\dot{x}0}, r_{y0\dot{y}0}, r_{z0\dot{z}0}, r_{x0\dot{y}0}, r_{x0\dot{z}0}, r_{y0\dot{y}0}, r_{z0\dot{z}0}, r_{x0\dot{y}0}, r_{x0\dot{z}0}, r_{y0\dot{y}0}, r_{z0\dot{z}0}, r_{x0\dot{y}0}, r_{x0\dot{z}0}, r_{y0\dot{y}0}, r_{z0\dot{z}0}, r_{x0\dot{y}0}, r_{x0\dot{z}0}, r_{y0\dot{y}0}, r_{y0\dot{z}0}, r_{x0\dot{y}0}, r_{z0\dot{z}0}, r_{x0\dot{y}0}, r_{x0\dot{z}0}, r_{y0\dot{y}0}, r_{y0\dot{z}0}, r_{x0\dot{y}0}, r_{z0\dot{z}0}, r_{x0\dot{y}0}, r_{x0\dot{z}0}, r_{y0\dot{y}0}, r_{z0\dot{z}0}, r_{x0\dot{y}0}, r_{x0\dot{z}0}, r_{y0\dot{y}0}, r_{z0\dot{z}0}, r_{z0\dot{y}0}, r_{z0\dot{z}0}, r_{z0\dot{y}0}, r_{z0\dot{z}0}, r_{z0\dot{z}0$ 

Начальное значение  $\mathcal{G}_0$  выбирается как среднее значение из предпочтительных диапазонов представленных выше.

Результаты статистического моделирования представлены в виде функции распределения вероятности  $F(t^*)$  на рисунках 5-6, соответственно для орбиты Молния и ГПО.





Из рисунков 5–6 следует, что погрешности начальных параметров движения КА доминирующим образом влияют на  $t^*$ . Продолжительность  $t^*$  не превышает одних и десяти суток и с вероятностью 0,9 соответственно для первого и второго циклов испытаний.

#### IV. Выводы

Проведённое исследование показывает, что при реализации инспекционного движения на ВЭО притяжение Луны оказывает негативное влияние на продолжительность  $t^*$ . Были определены области начальных значений истинной аномалии ОИ, обеспечивающие продолжительное пассивное инспекционное движение.

Погрешности начальных параметров движения КА оказывают значительно большее влияние на продолжительность  $t^*$  по сравнению с влиянием нецентральности гравитационного поля Земли и притяжения Луны. Это объясняется тем, что в начальный момент времени формирования инспекционного движения нарушается условие равенства орбитальных энергий КА и ОИ.

#### Благодарность

Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] FOCT P 52925-2018, C.2.
- [2] И.В. Белоконов, Е.В. Халецкая, М.С. Щербаков. Стратегия импульсного маневрирования для поддержания квазипериодического инспекционного движения наноспутника // Космонавтика и ракетостроение. № 2 (125), 2022, С. 112-124.
- [3] С.А. Медедев, М.С. Щербаков "Исследование возможности применения оскулирующих эллипсов относительного движения в задаче инспекции," Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. № 4, 2022, С. 28-31.
- [4] P. Gurfil, Relative Motion between Elliptic Orbits: Generalized Boundedness Conditions and Optimal Formationkeeping, Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 28, No. 4, July 2005, pp. 761-767.
- [5] М.Д. Коптеев, С.П. Трофимов. Проектирование, развертывание и поддержание тетраэдральной формации наноспутников на высокоэллиптических орбитах. Препринты ИПМ им. М.В. Келдышка, № 97, 2018, С.1-28.
- [6] I.V. Belokonov, M.S. Shcherbakov, Choosing the Motion Initial Conditions, Ensuring the Technical Sustainability of Spacecraft Formation Flight, 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, Proceedings, October 2020.
- [7] M. Sabatinia, R. Volpeb, G.B. Palmerini Centralized visual based navigation and control of a swarm of satellites for on-orbit servicing, Acta Astronautica, vol. 171, 2020, pp. 323-334.
- [8] C. Traub, S. Fasoulas, G. H. Herdric, A planning tool for optimal three-dimensional formation flight maneuvers of satellites in VLEO using aerodynamic lift and drag via yaw angle deviations, Acta Astronautica, vol. 198, 2022, pp. 135-151.
- [9] D.P Avaryaskin, I.V. Belokonov, M.S. Scherbakov, Investigation of a Single-Axis Control Algorithm for the Inspection Motion of a Gravitationally Stabilized Nanosatellite, 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, 2022.
- [10] И.В. Белоконов. Статистический анализ динамических систем (Анализ движения летательных аппаратов в условии статистической неопределенности), Учеб. пособие. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2001. 64 с.

# Синтез двухканального управления для стабилизации вращения малого асимметричного космического аппарата в атмосфере Марса

В.В. Любимов Кафедра динамики полета и систем управления Самарский университет Самара, Россия vlubimov@mail.ru

Аннотация—Рассмотрено управляемое движение малого асимметричного космического аппарата относительно центра масс в верхних слоях атмосферы планеты. Применение метода динамического программирования и метода усреднения позволяет синтезировать приближенный оптимальный двухканальный закон управления вращательным движением космического аппарата. Результаты моделирования показывают, что полученный закон управления обеспечивает эффективную стабилизацию движения КА относительно центра масс. Поэтому данный закон управления может быть использован для моделирования низкоорбитального движение в разряженной атмосфере Марса.

Ключевые слова—двухканальное управление, закон оптимального управления, малый космический аппарат, атмосфера планеты, асимметрия, стабилизация вращательного движения.

#### I. **В**ВЕДЕНИЕ

В современных публикациях по космонавтике широко обсуждаемой темой является изучение динамики движения космических аппаратов относительно центра масс в атмосфере планет земной группы. В частности, неуправляемое вращательное движение космического аппарата в атмосфере Земли рассматривается, например, в следующих работах [1-2]. Неуправляемое вращательное движение КА в марсианской атмосфере отражено, например, в [3-4]. Значительное количество публикаций также посвящено анализу управляемого движения космических аппаратов в разреженной атмосфере Марса [5-6]. В [7] получена нелинейная низкочастотная система уравнений движения космического аппарата с малой асимметрией в атмосфере. Аналогичная нелинейная низкочастотная система уравнений движения КА с малой асимметрией в атмосфере была получена методом интегральных многообразий в [8]. Эта система уравнений используется в рассматриваемой работе при исследовании управляемого движения космического аппарата относительно центра масс в атмосфере Марса после обезразмеривания переменных.

В работах [9–15] рассмотрены следующие задачи: оптимальное управление угловой скоростью асимметричного зонда в марсианской атмосфере, стабилизация угла атаки КА при спуске в марсианской атмосфере, управляемое снижение углового ускорения возвращающийся космический корабль с малой массой и аэродинамической асимметрией. Показано, что управляемая асимметрия обеспечивает нерезонансное движение И. Бакри Кафедра динамики полета и систем управления Самарский университет Самара, Россия ibrahimbakry0@gmail.com

асимметричного космического аппарата в атмосфере. Оптимальное одноканальное управление угловой скоростью КА и зонда как в дискретном, так и в непрерывном виде обеспечивает устойчивое уменьшение модуля угловой скорости зонда без возникновения резонанса.

Поддержание заданной ориентации асимметричного космического корабля в нестабильной разреженной атмосфере является актуальной задачей современной космонавтики. Выбор оптимальных законов управления возмущенным движением КА относительно центра масс имеет решающее значение для поддержания заданной ориентации КА. Основные результаты в области оптимального управления динамическими системами получены в работах Беллмана П. [16] в терминах динамического программирования, Понтрягина Л.С. [17] для оптимального процесса Болтянский В.Г. [18,19] за математические методы и оптимальное управление секреторными системами, Гамкрелидзе Р.В. [20] и Гурман В.И. [21,22] по основам оптимального управления и методам теории управления Моисеев Н.Н. [23, 24] для асимптотических методов, Черноусько Ф.Л. [25] для оптимального управления с малыми параметрами Кротова В.Ф. [26], Летова А.М. [27], Калман Р.Е. [28] по теории систем управления и др. ученых.

Дополнительно разрабатывается методика оценки допустимых отклонений параметров асимметрии КА, обеспечивающая нерезонансное движение при спуске КА в атмосфере Марса [29–32].

В данной работе рассматривается динамическая система, описывающая движение малого космического аппарата с малой асимметрией массы относительно центра масс в верхних разреженных слоях атмосферы планеты. Цель работы – синтез непрерывного приближенного оптимального двухканального закона движения космического аппарата относительно центра масс. В качестве каналов управления рассматриваются одновременные управляемые изменения пространственного угла атаки и угловой скорости КА. В процессе получения непрерывного приближенного оптимального двухканального закона управления движением КА использовались следующие методы: метод динамического программирования [16] и метод усреднения, что в свою очередь позволяет упростить решение задачи синтеза оптимального управления [33-35]. Предполагается, что управление пространственным углом атаки и угловой скоростью осуществляется с помощью бортовых реактивных двигателей малой тяги. При исследовании управляемого движения космического аппарата относительно центра масс данная система квазилинейных уравнений движения линеаризуется.

# II. ПРИБЛИЖЕННЫЙ ЗАКОН ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В данной работе применяются квазилинейные уравнения движения асимметричного космического аппарата относительно центра масс в атмосфере [1]. Следует отметить, что в этих уравнениях движение КА относительно центра масс моделируется при малых значениях пространственного угла атаки и с учетом малой асимметрии масс на борту КА. Кроме того, значения угловой скорости и пространственного угла атаки космического корабля управляемы при движении в разреженной атмосфере планеты. Предполагается, что космический аппарат летит по низкой круговой орбите вокруг планеты. Потери скорости КА, вызванные аэродинамическим трением, компенсируются работой маршевых двигателей КА. Управление движением КА относительно центра масс с заданными характеристиками осуществляется с помощью бортовых реактивных двигателей малой тяги. После разложения правых частей квазилинейных уравнений управляемого движения КА в ряды Маклорена для угловой скорости без учета нелинейных членов второго порядка по малости получим линеаризованную систему уравнений относительного движения для КА относительно центра масс, выраженного через безразмерные переменные и безразмерные функции управления:

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\varepsilon k_1 \overline{m} \omega^2 \overline{I}_x^{-1} \sin(\theta + \theta_1) + \varepsilon u_{\omega},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \varepsilon k_2 \frac{\overline{m} C_{y1} \omega}{2C_{x1}} \cos(\theta + \theta_1) + \varepsilon u_{\alpha},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = (1 - \overline{I}_x) k_3 \omega_x.$$
(1)

Здесь  $\omega_x$  – безразмерная угловая скорость,  $\alpha$  – безразмерный пространственный угол атаки,  $\theta$  – безразмерная быстрая фаза, t – безразмерное время,  $u_{\omega}$  – безразмерное управление угловой скоростью  $\omega_x$ ;  $u_{\alpha}$  – безразмерное управление пространственным углом атаки  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  – малый параметр характеризующий величину управлений и величины функции асимметрии  $\overline{m}$ ,  $\overline{m}$  – безразмерная функция, характеризующая величину смещений центра масс космического аппарата;

еменскими центра имеют вид:  $C_{y1}\overline{\Delta y}$   $m_2 = -\frac{C_{y1}\overline{\Delta z}}{m_{z1}}$ ;  $m_1 = -\frac{C_{y1}\overline{\Delta y}}{m_{z1}}$   $m_2 = -\frac{C_{y1}\overline{\Delta z}}{m_{z1}}$ ;  $\sin \theta_1 = -m_1 / \overline{m}$ ;  $\cos \theta_1 = m_{x2}^A / m_x^A$ ;  $\overline{\Delta y}, \overline{\Delta z}^2$  — малые безразмерные значения смещений центра масс,  $k_1 = t_0 \omega_{x0}^{-1}$ ,  $k_2 = t_0$ ,  $k_3 = t_0 \omega_{x0}$  — постоянные коэффициенты выраженные через начальные значения соответствующих переменных,  $t_0$  — постоянный коэффициент времени в секундах;  $\omega_{x0}$  — постоянный коэффициент угловой скорости в секундах в минус второй степени;  $C_{y1}, C_{x1}, m_{z1}$  — коэффициенты, характеризующие аэродинамические характеристики космического аппарата. В квазилинейном случае в системы координат  $OX_nY_nZ_n$  аэродинамические ческие параметры имеют вид:  $C_x = C_{x1}$ ,  $C_y = C_{y1}\alpha$ ,  $m_{zn} = m_{z1}\alpha$ , где коэффициенты  $C_{y1}, C_{x1}, m_{z1}$  определяются при  $\alpha = 0$ ;  $\bar{I}_x = I_x / I$ ,  $I_x$ ,  $\bar{I}_y = I_z = I$  – моменты инерции космического аппарата относительно осей системы координат *OXYZ*;  $\omega$  – частота прецессии при угловой скорости  $\omega_x = 0$ ,  $\omega = \sqrt{-m_{z1}qSL/I}$ , q – является постоянным значение скоростного напора, S – площадь миделя космического аппарата, L – длина космического аппарата,  $m_{z1}$  – коэффициент восстановления аэродинамического момента.

Таким образом, при наличии асимметрии в виде смещений центра масс и при отсутствии управлений в рассматриваемой системе (1) наблюдаются возмущения угловой скорости и пространственного угла атаки.

Рассмотрим задачу синтеза управления, основанную на нахождении непрерывного приближенного оптимального двухканального закона управления, обеспечивающего одновременную стабилизацию угловой скорости  $\omega_x$  и пространственный угол атаки в исследуемой динамической системе (1). В этом случае требуется определить приближенные малые функции управления  $u_a \in U_a$ ,  $u_\omega \in U_\omega$ , которые переводят начальный пространственный угол атаки  $\alpha_0 = \alpha(t_0)$  и начальную угловая скорость  $\omega_{x0} = \omega_x(t_0)$  к заданным малым значения  $\alpha_T = \alpha(T)$  и  $\omega_{xT} = \omega_x(T)$  в течение заданного времени полёта T.

Введём квадратичный критерий оптимальности 1:

$$I = \varepsilon \int_{0}^{T} (a_{\omega} \omega_{x}^{2} + a_{\alpha} \alpha^{2} + b_{\omega} u_{\omega}^{2} + b_{\alpha} u_{\alpha}^{2}) dt , \qquad (2)$$

где  $a_{\omega}, a_{\alpha}, b_{\omega}, b_{\alpha}$  — заданные положительные безразмерные коэффициенты критерия оптимальности, удовлетворяющие следующему равенству  $a_{\omega} + a_{\alpha} + b_{\omega} + b_{\alpha} = 1$ . Здесь подынтегральная функция:

$$V(\omega_x, \alpha, u_{\omega}, u_{\omega}) = a_{\omega}\omega_x^2 + a_{\alpha}\alpha^2 + b_{\omega}u_{\omega}^2 + b_{\alpha}u_{\alpha}^2,$$
(3)

является положительно определенной функцией.

Для решения задачи оптимизации применяется принцип Беллмана [16], который для системы (1) и критерия (2) приводит к соотношению:

$$\min_{u_{\alpha},u_{\alpha}} \left( a_{\omega} \omega_{x}^{2} + a_{\alpha} \alpha^{2} + b_{\omega} u_{\omega}^{2} + b_{\alpha} u_{\alpha}^{2} + \frac{\partial v}{\partial \omega_{x}} \frac{d\omega_{x}}{dt} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \right) = 0, (4)$$

Здесь *v*( $\omega_x, \alpha, \theta$ ) – функция Беллмана.

Подставляя производные из системы (1)  $\frac{d\omega_x}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$  в равенство (3), получаем:

$$\begin{split} & \min_{u_{\omega},u_{\alpha}} \left( \varepsilon a_{\omega} \omega_{x}^{2} + \varepsilon a_{\alpha} \alpha^{2} + \varepsilon b_{\omega} u_{\omega}^{2} + \varepsilon b_{\alpha} u_{\alpha}^{2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial v}{\partial \omega_{x}} \left( -\varepsilon \overline{m} k_{1} \omega^{2} \overline{I}_{x}^{-1} \sin(\theta + \theta_{1}) + \varepsilon u_{\omega} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \left( \varepsilon \frac{\overline{m} k_{2} C_{y1} \omega}{2 C_{x1}} \cos(\theta + \theta_{1}) + \varepsilon u_{\alpha} \right) + \frac{\partial v}{\partial \theta} (1 - \overline{I}_{x}) k_{3} \omega_{x} \right) = 0. \end{split}$$

$$(5)$$

Выделив в уравнении (5) отдельно слагаемые, зависящие от управлений  $u_{\omega}, u_{\alpha}$ , получим следующее выражение:

$$F(u_{\omega}, u_{\alpha}) = b_{\omega}u_{\omega}^{2} + b_{\alpha}u_{\alpha}^{2} + \frac{\partial v}{\partial \omega_{x}}u_{\omega} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}u_{\alpha}$$
(6)

Необходимые условия минимума функции  $F(u_{\omega}, u_{\alpha})$ имеют вид:

$$\frac{\partial F}{\partial u_{\omega}} = 2b_{\omega}u_{\omega} + \frac{\partial v}{\partial \omega_{x}} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha}} = 2b_{\alpha}u_{\alpha} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0.$$
(7)

Из решения системы уравнений (7) находим выражения для оптимальных управлений:

$$u_{\omega} = -\frac{1}{2b_{\omega}}\frac{\partial v}{\partial \omega_{x}},$$
(8)

$$u_{\alpha} = -\frac{1}{2b_{\alpha}} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha}.$$
 (9)

Матрица Гессе имеет следующий вид:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial u_{\omega}^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\omega}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_{\omega} \partial u_{\alpha}} & \frac{\partial^2 F}{\partial u_{\alpha}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{\omega} & 0 \\ 0 & 2b_{\alpha} \end{bmatrix}$$
(10)

Следовательно, в стационарных точках (10) выполняется критерий Сильвестра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{\omega}^2} = 2b_{\omega} > 0, \det H = 4b_{\omega}b_{\alpha} > 0.$$
(11)

Таким образом, выполнение условий (11) для положительно определенной матрицы Гессе обеспечивает минимум стационарных точек (8)–(9). Подставив управления (8)–(9) в уравнение (5) после упрощения, получим уравнение Беллмана:

$$a_{\omega}\omega_{x}^{2} + a_{\alpha}\alpha^{2} + \frac{1}{4b_{\omega}}\left(\frac{\partial v}{\partial \omega_{x}}\right)^{2} + \frac{1}{4b_{\alpha}}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^{2} - \frac{1}{2b_{\alpha}}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^{2} - \frac{1}{2b_{\alpha}}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^{2} - \frac{1}{2b_{\alpha}}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^{2} - \frac{1}{2b_{\omega}}\left(\frac{\partial v}{\partial \omega_{x}}\right)^{2} - \frac{1}{2b_{\omega}}\left(\frac{$$

В процессе усреднения уравнений (1) используются следующие выражения [1, 36]:

$$\begin{cases} \omega_{x} = \omega_{x}^{0} + \varepsilon f_{1\omega} \left( \omega_{x}^{0}, \alpha^{0}, \theta^{0} \right) + \dots \\ \alpha = \alpha^{0} + \varepsilon f_{1\alpha} \left( \omega_{x}^{0}, \alpha^{0}, \theta^{0} \right) + \dots \\ \theta = \theta^{0} + \varepsilon f_{1\theta} \left( \omega_{x}^{0}, \alpha^{0}, \theta^{0} \right) + \dots \\ \nu = \nu^{0} \left( \alpha^{0} \right) + \varepsilon \nu_{1} \left( \alpha^{0}, \theta^{0} \right) + \dots \end{cases}$$

$$(13)$$

Здесь  $\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0$  – новые переменные системы (1), в то время как функции:  $f_{j\omega}(\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0), \quad f_{j\alpha}(\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0),$  $f_{j\theta}(\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0), \quad v^0(\alpha^0), \quad v_j(\alpha^0, \theta^0), (j = 1, 2, ..)$  могут быть определены методом усреднения [1, 36, 37].

Подставив ряд (13) в уравнение (12) с использованием первого приближения метода усреднения, и опустив индекс "0" в новых переменных  $\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0$ , получим следующий вид уравнения Беллмана:

$$a_{\omega}\omega_{x}^{2} + a_{\alpha}\alpha^{2} - \frac{1}{4b_{\omega}}\left(\frac{\partial v}{\partial \omega_{x}}\right)^{2} - \frac{1}{4b_{\alpha}}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^{2} = 0.$$
(14)

На следующем шаге ищем порождающее решение уравнения (10) методом неопределенных коэффициентов. Это решение имеет вид:

$$v = A\omega_x^2 + B\alpha^2. \tag{15}$$

Здесь А, В – искомые постоянные коэффициенты

Для определения коэффициентов A, B произведем подстановку выражения (15) в уравнение (14):

$$\omega_x^2(a_{\omega} - \frac{A^2}{b_{\omega}}) + \alpha^2(a_{\alpha} - \frac{B^2}{b_{\alpha}}) = 0.$$
(16)

При одновременном неравенстве угловой скорости и пространственного угла атаки нулю уравнение (16) принимает вид следующей системы:

$$\frac{A^2}{b_{\omega}} - a_{\omega} = 0.$$

$$\frac{B^2}{b_{\alpha}} - a_{\alpha} = 0.$$
(17)

В результате решения полученной системы двух уравнений (17) получаем только положительные корни этой системы уравнений:

$$A_{\rm l} = \sqrt{a_{\omega} b_{\omega}} \ . \tag{18}$$

$$B_1 = \sqrt{a_\alpha b_\alpha} \ . \tag{19}$$

Действительно, отрицательные значения  $A_2 = -\sqrt{a_{\omega}b_{\omega}}$ ,

 $B_2 = -\sqrt{a_{\alpha}b_{\alpha}}$  следует отбросить, так как они не удовлетворяют условию положительной определенности функции (3).

Подставляя коэффициенты (18)–(19) в функцию Беллмана (15), определяем выражения для оптимальных управлений (8)–(9). Подставив полученные выражения в систему (1) и усреднив ее по быстрой фазе, учитывая только первое приближение, получим:

$$\left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = -\varepsilon K_a \alpha, \tag{20}$$

$$\left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle = -\varepsilon K_{\omega} \omega_x$$
(21)

Здесь  $K_{\omega} = \sqrt{a_{\omega}b_{\omega}^{-1}}$ ,  $K_{\alpha} = \sqrt{a_{\alpha}b_{\alpha}^{-1}}$ .

Таким образом, решение уравнений (20) и (21), полученное с учетом найденных приближенных оптимальных управлений, обеспечивающих асимптотическую устойчивость точек покоя  $\omega_x = 0$ ,  $\alpha = 0$ , для первого приближения метода усреднения.

Для реализации найденных законов управления предположим, что космический аппарат обладает следующими массово-инерционными характеристиками: наибольший радиус основания конуса r = 1,25 m, высота космического аппарата l = 2m и его масса  $m = 576 \kappa r$ .

Начальные условия для космического аппарата в атмосфере следующие: начальная скорость центра масс космического корабля  $V(0) = 3500 \text{ мc}^{-1}$ ; высота H(0) = 100 км; пространственный угол атаки равен амплитуде  $\alpha(0) = 0,32 \text{ раd}$ ; вторая амплитуда равна нулю; быстрая фаза равна  $\theta(0) = 0, 2\pi \text{ рad}$ ; угловая скорость равна  $\omega_x(0) = 0,1$ . Результаты применения полученных управлений в исходной системе представлены на рис.1.



Рис. 1. Уменьшение пространственного угла атаки и безразмерной угловой скорости в результате применения управлений

Из рис. 1 можно сделать вывод, что найденные законы управления надежно сходятся к малым значениям угловой скорости и пространственного угла присоединения в минутах, обеспечивая требуемую стабилизацию относительно центра масс.

На рис.2 показано изменение безразмерных значений управляющих функций,  $u_{\alpha}(t)$  и  $u_{\alpha}(t)$ , в процессе управляемого снижения угловой скорости и пространственного угла атаки, соответственно. При этом управляющие функций имеют малые отрицательные значения.



Рис. 2. Безразмерные значения функций управления, стабилизирующих угловую скорость и пространственный угол атаки

### III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается применение метода динамического программирования для синтеза непрерывного приближенного оптимального двухканального закона управления движением малого асимметричного космического аппарата относительно центра масс. При этом численные результаты работы подтверждают, что полученные приближенные непрерывные выражения для оптимизированного управления обеспечивают требуемую стабилизацию КА относительно центра масс, обеспечивают снижение угловой скорости до значений менее 0,01 рад /с и пространственного угла атаки до значений менее 0,01 рад за время менее трех минут. Следует отметить, что эти малые значения угловой скорости и угла атаки были получены при начальных значениях этих характеристик асимметричного движения КА, равных 0,1 рад/с и 0,3 рад соответственно.

#### Литература

- Yu.M. Zabolotnov, Asymptotic analysis of quasi-linear equations of motion in the atmosphere of a spacecraft with a small asymmetry. III, Cosmic Research, 1994, vol. 32., No. 4-5, pp. 112-125.
- [2] V.A. Yaroshevsky, Motion of an uncontrolled body in the atmosphere, Moscow: Mashinostroenie, 1978, pp.1-168.
- [3] E.V. Kurkina, Acceptable range parameters of asymmetry of spacecraft descending in the Martian atmosphere, IOP Conference Series. Materials Science and Engineering, 2020, vol. 868 (1).
- [4] N.L. Sokolov and D.A. Orlov, Design and ballistic studies of the problem of spacecraft descent in the atmosphere of Mars, Bulletin of the Moscow Aviation Institute, 2016, vol. 23., No. 1, pp. 98-106.
- [5] I. Bakry and V.V. Lyubimov, Application of the dynamic programming method to ensure of dual-channel attitude control of an asymmetric spacecraft in a rarefied atmosphere of Mars, Aerospace Science Journal, 2021, pp. 213–221.
- [6] I. Bakri, Approximate optimal discrete law of control by descent of a spacecraft with asymmetry in the atmosphere of Mars, Bulletin of the Moscow Aviation Institute, 2022, vol.29, No.2, pp.179-188.
- [7] V.M. Belokonov, I.V. Belokonov and Yu.M. Zabolotnov, Accelerated calculation of the trajectory of descent in the atmosphere of uncontrolled spacecraft, taking into account their motion relative to the center of mass, Cosmic Research, 1983, No. 4, pp.512 – 521.
- [8] Yu.M. Zabolotnov, Method of investigation of resonant motion of a nonlinear oscillatory system, Mechanics of Solids, 1999, No. 1, pp. 33-45.
- [9] V.V. Lyubimov and E.V. Kurkina, Probability of capture into resonance of an asymmetric capsule during a controlled descent in the atmosphere of Mars, Mechatronics, Automation, Control, 2017, vol.18, No.8, pp.564–571.
- [10] V.V. Lyubimov and E.V. Kurkina, Estimation of the Probability of Capture into Resonance and Parametric Analysis in the Descent of an Asymmetric Spacecraft in an Atmosphere, Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2018, vol. 12, No.3, pp. 492–500.
- [11] V.V. Lyubimov and E.V. Kurkina, Optimal control of the angular velocity of an asymmetric probe in the Martian atmosphere by means of low-thrust engines, All-Russian Scientific and Technical journal "Flight", 2019, No. 5, pp. 31-36.
- [12] V.V. Lyubimov and E.V. Kurkina, Optimal Discrete Control Law for Rotation of a Descent Probe with a Small Inertial Asymmetry during the Descent in the Atmosphere of Mars, Proceedings - 2019 21st International Conference of Complex Systems: Control and Modeling Problems, 2019, vol. 2019, pp. 504-508.
- [13] V.V. Lyubimov and V.S. Lashin, Asymptotic Analysis of the Stability of the Angle of Attack in an Atmospheric Descent of a Spacecraft with Small Mass and Inertial Asymmetries, 12th International Scientific and Technical Conference "Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines". 2019.
- [14] V.V. Lyubimov and E.V. Kurkina, Application of the dynamic programming method to obtain of the angular velocity control law of a spacecraft with a small geometric asymmetry in the atmosphere, Journal of Physics: Conference Series, 2019, vol. 1210, Issue 1.

- [15] V.V. Lyubimov, Dynamics and control of angular acceleration of a reentry spacecraft with a small asymmetry in the atmosphere in the presence of the secondary resonance effects, International Siberian conference on control and communications, SIBCON Proceedings, 2015, pp. 1-4.
- [16] R.E. Bellman, Dynamic programming, Princeton, NJ: Princeton University Press, 2010, pp.1-392.
- [17] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyansky, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishchenko, Mathematical theory of optimal processes, Moscow: Science, 1976, pp.1–392.
- [18] V.G. Boltyansky, Optimal control of discrete systems, Moscow: Science, 1973, pp. 1-446.
- [19] V.G. Boltyansky, Mathematical methods of optimal control, Moscow: Science, 1969, pp.1–408.
- [20] R.V. Gamkrelidze, Fundamentals of optimal control, Tbilisi: Tbilisi University, 1977, pp. 1–253.
- [21] V.I. Gurman, Degenerate optimal control problems, Moscow: Science, 1977, pp. 1-304.
- [22] V.I. Gurman, Models and methods of control theory, Proceedings of the international conference "Software systems: theory and applications", Pereslavl-Zalessky: Fizmatlit, 2004, vol. 1, pp. 101-116.
- [23] N.N. Moiseev, Asymptotic methods of nonlinear mechanics, Moscow: Science, 1969, pp.1-378.
- [24] N.N. Moiseev, Mathematical problems of system analysis, Moscow: Science, 1981, pp. 1–488.
- [25] F.L. Chernousko, Some optimal control problems with a small parameter, Applied Mathematics and Mechanics, 1968, vol. 32, Issue 1, pp. 15-26.
- [26] V.F. Krotov, B.A. Lagosha, S.M. Lobanov, N.I. Danilina and S.I. Sergeev, Fundamentals of the theory of optimal control, Moscow: Higher School, 1990, pp.1–430.
- [27] A.M. Letov, Flight dynamics and control, Moscow: Science, 1969, pp.1-360.

- [28] R.E. Kalman, On the general theory of control systems, Proceedings of the I Congress of the IFAC, Moscow: Izvestia of the USSR Academy of Sciences, 1961, vol. 2, pp. 521-547.
- [29] E.V. Kurkina, Acceptable range parameters of asymmetry of spacecraft descending in the Martian atmosphere, IOF Conference Series. Materials Science and Engineering, 2020, vol. 868, № 1. Work №012036.
- [30] V.V. Lyubimov, External stability of resonances in the dynamics of spacecraft motion with small asymmetry: Diss. doctors of technical sciences, Samara: SSAU, 2009, pp. 1-353.
- [31] V.V. Lyubimov, Numerical simulation of the resonance effect at reentry of a rigid body with low inertial and aerodynamic asymmetries into the atmosphere, Proceedings of International Conference Information Technology and Nanotechnology (ITNT-2015), Samara, Russia, 2015, pp.198-210, June 29 – July 1.
- [32] V.S. Lashin, A method for estimating the parameters of asymmetry in the design of a descent spacecraft, Bulletin of the Moscow Aviation Institute, 2020, vol. 27, No. 1, pp. 100-107.
- [33] M.I. Freidlin, The averaging principle and theorems on large deviations, Uspekhi Mat. Nauk, 1978, Vol. 33, Issue 5, p. 107-160.
- [34] A.L. Pyatnitsky, G.A. Chechkin, A.S. Shamaev, Averaging (Methods and some applications), Novosibirsk: Tamara Rozhkovskaya, 2007, pp. 1-246.
- [35] E.A. Grebepikov, Averaging method in applied problems, Moscow: Science, 1986, pp.1-256.
- [36] Yu.M. Zabolotnov, Asymptotic analysis of quasi-linear equations of motion in a spacecraft atmosphere with a small asymmetry. I, Cosmic Research, 1993, vol. 31, No. 6, pp. 39-50.
- [37] Yu.M. Zabolotnov, Asymptotic analysis of quasi–linear equations of motion in the atmosphere of a spacecraft with a small asymmetry. II, Cosmic Research, 1994, vol. 32, No. 2, pp. 22-33.
- [38] V.V. Lyubimov and I. Bakry, Two-channel optimal discrete law of control of spacecraft with aerodynamic and inertial asymmetry during descent in Mars atmosphere, Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering, 2022, vol. 21, No. 3, pp. 36-46.

# Исследование функционала уклоняющегося от обнаружения подвижного объекта в дискретной постановке

А.А. Галяев 38 лаборатория ИПУ РАН Москва, Россия galaev@ipu.ru ORCID: 0000-0001-6494-6880 А.С. Самохин 38 лаборатория ИПУ РАН Москва, Россия samokhin@ipu.ru ORCID: 0000-0002-0821-050X

Аннотация—В настоящей работе в дискретной постановке рассматривается задача поиска пути уклоняющегося управляемого подвижного объекта в конфликтной среде, представленной неподвижными обнаружителями. Интегральный функционал, отражающий риск обнаружения, вычислен аналитически для заданного пути, что позволяет в дальнейшем осуществить конечномерную оптимизацию.

Ключевые слова—конфликтная среда, дискретная постановка, функционал риска, траекторная оптимизация.

#### I. Введение

Рассматривается конфликтная среда [1], представленная обнаружителями и уклоняющимся подвижным объектом (УПО), перемещающимся между двумя заданными точками.

Предполагается, что местоположение обнаружителей, формирующих карту угроз, известно УПО [2]. Выбор маршрута уклоняющегося подвижного объекта и параметров движения осуществляется таким образом, чтобы минимизировать негативное воздействие конфликтной среды, а именно повысить скрытность. УПО минимизирует интегральный функционал, называемый риском [3–4].

Задача в непрерывной постановке и идея её дискретизации представлены в [5]. В настоящей работе продолжается исследование задачи построения карты локально-оптимальных путей в дискретной постановке, исследуется функционал задачи.

### II. Постановка задачи

Будем искать минимум функционала для траекторий, представляющих собой плоские ломаные с началом в точке старта и концом в точке финиша, причем скорость на каждом из звеньев ломаной постоянна.

На плоскости вводится декартова система координат следующим образом: начало координат совпадает с точкой старта, ось Oy проходит через точки старта и финиша и направлена от точки старта к точке финиша. Единичный отрезок выбирается таким, чтобы ордината конечной точки была равна 1. Пусть во введенной системе координат N точек – обнаружителей  $S_i$  – имеют координаты  $(a_i, b_i), i = 1, ..., N$ . Тогда минимизируемый функционал будет иметь вид:

М.А. Самохина 38 лаборатория ИПУ РАН Москва, Россия ph@ipu.ru ORCID: 0000-0002-7043-706X

$$I = \int_{0}^{T} \left( \sum_{i=1}^{N} q_{i} \frac{\mathbf{v}^{2}}{(x - a_{i})^{2} + (y - b_{i})^{2}} \right) dt \to \min, \qquad (1)$$

где T – общее время движения, v – скорость УПО,  $q_i$  – весовой коэффициент влияния обнаружителя  $S_i$ , i = 1, ..., N.

Часть траектории перемещения УПО схематично представлена на рис. 1.



Рис. 1. Путь УПО представляет собой ломаную

Введем следующие обозначения:

- М количество звеньев ломаной;
- $L_i(x_i, y_i) j$  -ая вершина ломаной, j = 1, 2, ..., M + 1;
- $L_j L_{j+1} j$ -ое звено ломаной, j = 1, 2, ..., M;
- $\Delta x_j = x_{j+1} x_j$ ,  $\Delta y_j = y_{j+1} y_j$  координаты вектора  $\overline{L_j L_{j+1}}$ , j = 1, 2, ..., M;

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант РНФ 23-19-00134).

•  $\ell_j = |L_j L_{j+1}| = \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}$  – длина *j*-го звена ломаной,  $j = 1, 2, \dots, M$ ;

- $v_j = const$  скорость на j -м звене ломаной, j = 1, 2, ..., M;
- $T_j = \frac{\ell_j}{v_j}$  время прохождения *j* -го звена ломаной, j = 1, 2, ..., M;
- $r_{ij} = |S_i L_j| = \sqrt{(x_j a_i)^2 + (y_j b_i)^2}$  расстояние от  $S_i$ до  $L_j$ ;

• 
$$w_{ij} = (x_j - a_i)\Delta y_j - (y_j - b_i)\Delta x_j$$
, где  
 $\left[\overline{S_i L_j} \times \overline{L_j L_{j+1}}\right] = (0, 0, w_{ij});$   
•  $s_{ij} = \langle \overline{S_i L_j}, \overline{S_i L_{j+1}} \rangle =$   
 $= (x_j - a_i)(x_{j+1} - a_i) + (y_j - b_i)(y_{j+1} - b_i).$ 

Начальные и конечные условия будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_{M+1} = 0, \\ y_{M+1} = 1. \end{cases}$$
а общее время движения  $\sum_{j=1}^M T_j = T$ .

### III. ИССЛЕДОВАНИЕ

На каждом звене ломаной движение будем считать равномерным, и координаты будут меняться линейно с течением времени:

$$\begin{aligned} x &= x_j + \frac{\Delta x_j}{T_j} t = x_j + \frac{\Delta x_j}{\ell_j} \mathbf{v}_j t, \\ y &= y_j + \frac{\Delta y_j}{T_j} t = y_j + \frac{\Delta y_j}{\ell_j} \mathbf{v}_j t, \end{aligned}$$
где  $t \in [0; T_j].$ 

По свойству аддитивности интеграла, минимизируемый функционал можно записать следующим образом:

$$I = \sum_{j=1}^{M} I_j, \text{ где}$$
$$I_j = \int_{0}^{T_j} \left( \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{v}_j^2}{\left( x_j + \frac{\Delta x_j}{T_j} t - a_i \right)^2 + \left( y_j + \frac{\Delta y_j}{T_j} t - b_i \right)^2} \right) dt -$$

вклад в функционал при прохождении j-го звена ломаной. Заметим, что задача вычисления  $I_j$  сводится к задаче вычисления интеграла вида

$$\int_{0}^{T_{j}} \frac{\mathrm{d}t}{At^{2} + Bt + C}, \text{ где } A = v_{j}^{2}, B = \frac{2}{T_{j}} z_{ij}, C = r_{ij}^{2}.$$
(2)

Выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции:

$$\int_{0}^{T_{j}} \frac{\mathrm{d}t}{At^{2} + Bt + C} = \int_{0}^{T_{j}} \frac{\mathrm{d}t}{A\left(\left(t + \frac{B}{2A}\right)^{2} - \frac{D}{4A^{2}}\right)}, \text{ rge } D = B^{2} - 4AC.$$

Подставив в D приведенные в (2) значения A, B, C и проведя элементарные преобразования, можно получить следующее выражение для D:

$$D = -4 \frac{\mathbf{v}_{j}^{2}}{\ell_{i}^{2}} w_{ij}^{2} \,. \tag{12}$$

Заметим, что

$$w_{ij} = \left[ \overline{S_i L_j} \times \overline{L_j L_{j+1}} \right] = \left| S_i L_j \right| \cdot \left| L_j L_{j+1} \right| \cdot \left| \sin \angle S_i L_j L_{j+1} \right|.$$

Значит, условие

$$D=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{S_i L_j} \parallel \overrightarrow{L_j L_{j+1}},$$

а условие

$$D < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{S_i L_j} \not\parallel \overrightarrow{L_j L_{j+1}}.$$

Рассмотрим вычисление интеграла (2) для этих двух случаев отдельно.

$$\int_{0}^{T_{j}} \frac{\mathrm{d}t}{At^{2} + Bt + C} = \frac{2}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2At + B}{\sqrt{-D}}\right)\Big|_{0}^{T_{j}} = \frac{2}{\sqrt{-D}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2AT_{j} + B}{\sqrt{-D}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{\sqrt{-D}}\right)\right).$$

Упростим полученное выражение. При этом углы  $\angle L_j S_i L_{j+1}$ ,  $\angle S_i L_j L_{j+1}$ ,  $\angle S_i L_j L_{j+1} L_j$  будем считать углами треугольника  $\Delta \angle S_i L_j L_{j+1}$ , т.е. каждый из углов принадлежит интервалу  $(0, \pi)$ .

$$\begin{cases} \sqrt{-D} = \frac{2}{T_j} |S_i L_j| \cdot \ell_j \cdot \sin \angle S_i L_j L_{j+1}; \\ B = -\frac{2}{T_j} |S_i L_j| \cdot \ell_j \cdot \cos \angle S_i L_j L_{j+1}; \Rightarrow \\ 2AT_j + B = \frac{2}{T_j} |S_i L_{j+1}| \cdot \ell_j \cdot \cos \angle S_i L_{j+1} L_j; \\ \Rightarrow \begin{cases} \arctan\left(\frac{B}{\sqrt{-D}}\right) = -\left(\frac{\pi}{2} - \angle S_i L_j L_{j+1}\right); \\ \arctan\left(\frac{2AT_j + B}{\sqrt{-D}}\right) = \frac{\pi}{2} - \angle S_i L_{j+1} L_j; \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{2AT_j + B}{\sqrt{-D}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{\sqrt{-D}}\right) = \\ = \angle L_j S_i L_{j+1} \in (0,\pi). \end{cases}$$

Поэтому в случае D < 0

$$I_{j} = \sum_{i=1}^{N} q_{i} \frac{\mathbf{v}_{j} \ell_{j}}{\left| \mathbf{w}_{ij} \right|} \arccos\left(\frac{s_{ij}}{r_{ij}r_{i,j+1}}\right).$$
(3)

В. Случай D = 0.

$$\int_{0}^{T_{j}} \frac{\mathrm{d}t}{At^{2} + Bt + C} = \int_{0}^{T_{j}} \frac{\mathrm{d}t}{A\left(t + \frac{B}{2A}\right)^{2}} =$$
$$= -\frac{1}{A}\left(t + \frac{B}{2A}\right)^{-1} \Big|_{0}^{T_{j}} = -\frac{1}{A}\left(\left(T_{j} + \frac{B}{2A}\right)^{-1} - \left(\frac{B}{2A}\right)^{-1}\right) =$$
$$= \frac{4AT_{j}}{2ABT_{j} + D + 4AC} = \frac{T_{j}}{B\frac{T_{j}}{2} + C} = \frac{T_{j}}{s_{ij}},$$

если  $\angle L_j S_i L_{j+1} = 0$ , то есть  $S_i \notin L_j L_{j+1}$ .

Замечание. Если  $\angle L_j S_i L_{j+1} = \pi$ , то  $L_j L_{j+1}$  содержит точку  $S_i$ , то есть траектория движения УПО проходит через обнаружитель, такая траектория некорректна, и функционал исходной задачи на ней будет равен  $+\infty$ .

Тогда в случае D = 0 при прохождении по j-му отрезку, не содержащему ни один из обнаружителей  $S_i$ , вклад в функционал будет равен

$$I_j = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{v}_j \ell_j}{s_{ij}}.$$
 (4)

#### IV. РЕЗУЛЬТАТ

Таким образом, суммируя (3), (4), интегральный функционал риска (1) удаётся выразить аналитически

$$I = \sum_{j=1}^{M} I_{j},$$
  
где  $I_{j} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} q_{i} \frac{\mathbf{v}_{j} \ell_{j}}{|w_{ij}|} \arccos\left(\frac{s_{ij}}{r_{ij}r_{i,j+1}}\right), \text{ если } w_{ij} \neq 0, \end{cases}$  (5)

через координаты вершин ломаной пути и скорости УПО на каждом из её звеньев для произвольного числа неподвижных обнаружителей, в работе приведены соответствующие математические выкладки. Выражение, полученное для функционала, допускает проведение различных исследований, в том числе в явном виде могут быть получены его производные, необходимые для решения задачи оптимизации. Отметим также, что значение функционала задачи в исходной непрерывной постановке в случае N > 1 могло быть получено лишь численно.

# V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача поиска путей в конфликтной среде. Произведена дискретизация исходной непрерывной задачи, пути уклоняющегося подвижного объекта при этом представлены ломаными с постоянными скоростями на каждом звене.

Для такого класса траекторий найдено аналитическое выражение (5) для функционала (1), позволяющее вычислить его точное значение для заданной траектории движения и получить различные оценки.

В результате исходная бесконечномерная задача оптимизации может быть сведена к серии конечномерных задач, которые могут решаться численно градиентными методами, а также могут быть исследованы на основе непрямых методов конечномерной оптимизации.

Также полученные результаты могут быть использованы для решения обратной задачи расстановки обнаружителей с целью противодействия УПО [6-7].

#### ЛИТЕРАТУРА

- T.G. Abramyants, A.A. Galyaev, E.P. Maslov, I.M. Rudko, V.P. Yakhno, Evasion of a moving object in a conflict environment from detection by the system of heterogeneous observers, Management and navigation of moving objects, no. 2, pp. 31–37, 2015.
- [2] A. Dogan, U. Zengin, Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map, Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 29, no. 4, pp. 723–732, 2006, doi: 10.2514/1.18386.
- [3] Л. П. Сысоев. Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Проблемы управления, № 6, с. 65–72, 2010.
- [4] A.A. Galyaev, E.P. Maslov, Optimization of laws of mobile object evasion from detection, Izv. RAS. Theory and Control Systems, no. 4, pp. 52–62, 2010, doi: 10.1134/S1064230710040064.
- [5] А.А. Галяев, А.С. Самохин, М.А. Самохина. О решении задачи построения траектории управляемого подвижного объекта в конфликтной среде при помощи дискретизации // Математическая теория управления и ее приложения: МТУИП-2022. Материалы 15-ой мультиконференции конференции по проблемам управления. Санкт-Петербург, с. 63–65, 2022.
- [6] A.A. Galyaev, A.S. Samokhin, M.A. Samokhina, On the problem of optimal placement of sensors on the plane, Mathematical control theory and its applications Conference proceedings, St. Petersburg, Concern CSRI Elektropribor, JSC, pp. 372–375, 2020, doi: 10.1088/1742-6596/1864/1/012075.
- [7] A. Galyaev, A. Samokhin, M. Samokhina, Application of the gradient projection method to the problem of sensors arrangement for counteraction to the evasive object, 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), Saint Petersburg, Russia, 2021, pp. 1–3, doi: 10.23919/ICINS43216.2021.9470857.

# О построении траектории перелёта космического аппарата к Фобосу с совершением пертурбационного манёвра у Луны на основе решения комбинации 4 задач Ламберта

А.С. Самохин 38 лаборатория ИПУ РАН Москва, Россия samokhin@ipu.ru, ORCID: 0000-0002-0821-050X

Аннотация—В работе рассматривается оптимизация межпланетного перелёта к Марсу в импульсной постановке. Сравниваются схемы перелёта с пертурбационным маневром у Луны и без него. Траектории представляют собой совокупности задач Ламберта и оптимизируются градиентными методами. При учёте одного притягивающего центра на каждом участке траектории схема с манёвром у Луны позволяет получить выигрыш по характеристической скорости порядка 150 м/с.

Ключевые слова—оптимизация межпланетных траекторий, полёт к Марсу, задача Ламберта, пертурбационный манёвр у Луны.

# I. Введение

На повестке дня России и других стран находится вопрос освоения дальнего космоса [1]. Известно, что при межпланетных перелётах пертурбационные маневры могут обеспечивать существенный выигрыш по доставляемой к планете-цели массе. В данной работе оценивается возможный выигрыш характеристической скорости от совершения пертурбационного маневра у Луны на траектории перелёта к естественному спутнику Марса Фобосу. Интерес к Фобосу возник давно [2], успешная миссия к данному небесному телу была реализована СССР ещё в 1980-х годах. Учёные предполагают, что на Фобосе может быть ближайшее к Земле реликтовое вещество, осуществить миссию по доставке к Земле которого в 2020-х годах планируют независимо Российская Федерация и Япония. Также недавно был представлен проект по созданию обитаемой космической базы на Фобосе с целью освоения Марса [3]. Работа посвящена математическим вопросам оптимизации траекторной части миссии.

#### II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваемая задача оптимизации перелёта космического аппарата (КА) к Фобосу с пертурбационным манёвром у Луны разбивается на четыре отдельных задачи Ламберта. При этом итоговая траектория получается склейкой четырёх кусков: 1) перелёт КА с орбиты искусственного спутника Земли до Луны; 2) затем перелёт от Луны до сферы действия Земли; 3) после этого гелиоцентрический перелёт от сферы действия Луны к сфере действия Марса; 4) и, наконец, перелёт от сферы действия Марса к Фобосу. На каждом участке учитывается притяжение только одного притягивающего центра, М.А. Самохина 38 лаборатория ИПУ РАН Москва, Россия ph@ipu.ru, ORCID: 0000-0002-7043-706X

вносящего основное возмущение в движение космического аппарата. Времена старта, финиша и пролёта всех промежуточных стыковочных точек, а также положение этих точек оптимизируется. Схема экспедиции приведена на рис. 1

Похожая схема экспедиции рассматривается в работах Р. В. Ельникова [4], [5]. В них рассматривается задача оптимизации перелёта к Марсу с пертурбационным манёвром у Луны. Учитываются эфемериды, рассматривается малая тяга с постоянной скоростью истечения реактивной струи. Однако, на разных участках полёта рассматриваются различные функционалы, в конечный момент времени КА попадает в Марс, подробно ареоцентрический участок не рассматривается.



Рис. 1. Схема перелёта КА к Фобосу с пертурбационным манёвром у Луны. Здесь 1 – точка старта КА; 5 – финиша; 2, 3, 4 – точки склейки различных кусков траектории;  $v_1$  – вектор гиперболического избытка скорости при входе в сферу действия Луны,  $v_3$  – вектор гиперболического избытка скорости при выходе из сферы действия Луны,  $v_2$  – вектор скорости КА в перицентре пертурбационного манёвра,  $\Delta_1$  – импульс в перицентре пертурбационного манёвра.

В настоящей работе космический аппарат управляется импульсными воздействиями в момент старта, финиша, а также в стыковочных точках. Минимизируется сумма величин всех пяти импульсов перелёта  $\sum_{i=0.4} \Delta_i$  в

# точках 1-5 рис. 1.

Пертурбационный маневр рассчитывается по методике точечных сфер действия с использованием интеграла энергии, при этом проверяется выполнение условия на минимально возможный радиус перицентра. Время старта выбирается с 2020 по 2030 год. Положения Земли, Марса и Луны соответствует эфемеридам DE424, Фобоса – MAR097, промежуточная гелиоцентрическая система координат считается инерциальной. Полагается, что КА стартует с космодрома Байконур, высота начальной орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) составляет 200 км, её наклонение задано. В работе Фобос и космический аппарат представляют собой непритягивающие материальные точки.

При расчёте траектории в каждый момент времени учитывается притяжение только одного тела: Солнца, Земли или Марса. Их гравитационные поля считаются центральными ньютоновскими. Уравнения  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{v}} = -\mu \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$  описывают изменение вектора  $\mathbf{r}$  координат КА и вектора скорости  $\mathbf{v}$ , где  $\mu$  – гравитационный параметр притягивающего центра на текущем участке траектории.

### III. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Всего на траектории с манёвром у Луны получилось 11 параметров оптимизации: время старта  $t_0$ , моменты склейки частей траектории миссии, представляющих собой куски конических сечений,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , момент финиша  $t_4$ , угол  $\varphi_0$ , задающий положение КА на исходной орбите, угол  $\Omega_0$  – долгота ее восходящего узла, углы  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$ , задающие точку пересечения КА сферы действия Земли в геоцентрической системе координат, углы  $\varphi_2$ ,  $\psi_2$ , задающие точку пересечения КА сферы действия Марса в ареоцентрической системе координат.

Задача решается численно градиентным методом, оптимизирующим перечисленные параметры. Метод стартует из различных узлов сетки в 11-мерном пространстве возможных значений данных параметров. Каждый фиксированный набор параметров оптимизации формирует 4 задачи Ламберта, которые решаются численно модифицированным методом Ньютона на основе универсального уравнения Кеплера [6]. Задачи Ламберта имеют решения для любого корректного набора параметров. Отметим, что часть траекторий в миссии является кусками гипербол, а гелиоцентрический участок представляет собой кусок эллипса. Для решения задачи авторами был реализован программный комплекс на ЭВМ с использованием пакета НАСА SPICE для учёта эфемерид, работа с ним описана в [7].

Импульсы  $\Delta_0$  и  $\Delta_4$  в точках 1, 5 рис. 1 находились как разницы векторов скоростей КА при движении по начальной геоцентрической орбите искусственного спутника Земли и скорости Фобоса относительно Марса в конечный момент времени с соответствующими векторами из решения задач Ламберта при перелётах из точки 1 в точку 2 и точки 4 в точку 5. Импульсы  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  в точках 3, 4 Рис. 1 находились как разницы векторов скоростей КА в конце 2 и 3 участка траектории с векторами скоростей КА в начале 3 и 4 участков соответственно, полученными также из решения задач Ламберта при перелётах из точки 2 в точку 3, 3 в 4 и 4 в 5.

#### IV. МАНЁВР У ЛУНЫ

Для нахождения импульса в точке 2 Рис. 1 сначала запишем интегралы энергии в сфере действия Луны. Для подлёта к Луне:

$$\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mu_M}{R_P} = \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} - \frac{\mu_M}{\rho_{1M}},\tag{1}$$

где v<sub>1</sub> – вектор скорости, с которым КА подлетает к Луне, v<sub>2</sub> – вектор скорости КА в перицентре пертурбационного манёвра,  $\mu_M$  – гравитационный параметр Луны,  $R_P$  – радиус перицентра при пролёте около Луны,  $\rho_{1M}$  – радиус сферы действия Луны.

И для отлёта:

$$\frac{\left(\mathbf{v}_{2}+\Delta_{1}\right)^{2}}{2}-\frac{\mu_{M}}{R_{P}}=\frac{\mathbf{v}_{3}^{2}}{2}-\frac{\mu_{M}}{\rho_{1M}},$$
(2)

где  $\Delta_1$  – вектор импульса в перицентре манёвра, совпадающий по направлению с направлением скорости KA,  $v_3$  – итоговый вектор скорости, с которым KA отлетает от Луны на её сфере действия.

Тогда из (1), можно заключить, что:

$$|\mathbf{v}_{2}| = \sqrt{\mathbf{v}_{1}^{2} + 2\mu_{M} \left(\frac{1}{R_{P}} - \frac{1}{\rho_{1M}}\right)}.$$
 (3)

Из (2) в свою очередь следует:

$$|\mathbf{v}_{2} + \Delta_{1}| = \sqrt{\mathbf{v}_{3}^{2} + 2\mu_{M} \left(\frac{1}{R_{P}} - \frac{1}{\rho_{1M}}\right)}.$$
 (4)

Тогда из (3), (4) можно выразить величину импульса:

$$\left|\Delta_{1}\right| = \sqrt{\mathbf{v}_{3}^{2} + 2\mu_{M}\left(\frac{1}{R_{P}} - \frac{1}{\rho_{1M}}\right)} - \sqrt{\mathbf{v}_{1}^{2} + 2\mu_{M}\left(\frac{1}{R_{P}} - \frac{1}{\rho_{1M}}\right)} \cdot (5)$$

Теперь, зная из решения задач Ламберта векторы  $v_1, v_3$ , можно по изменению направления движения КА при облёте Луны определить высоту перицентра манёвра. Действительно, по  $v_1$ ,  $v_3$ , используя уравнение  $(v_1, v_3) = |v_1| \cdot |v_3| \cos \delta$ , можно найти угол поворота  $\delta$  вектора гиперболического избытка скорости на сфере действия Луны. И далее из соотношения:

$$\delta = \arcsin \frac{\frac{\mu_M}{R_p}}{\mathbf{v}_1^2 + \frac{\mu_M}{R_p}} + \arcsin \frac{\frac{\mu_M}{R_p}}{\mathbf{v}_3^2 + \frac{\mu_M}{R_p}}, \tag{6}$$

можно отыскать радиус перицентра  $R_p$ . Несмотря на нелинейность (6) относительно  $R_p$ , левая часть этого уравнения является константой для текущего перелёта, а правая часть монотонно убывает с ростом  $R_p$ , так что его решение не представляет вычислительных трудностей.

Тем самым найдена формула (6), позволяющая проверить достаточность высоты пролёта над поверхностью Луны, при расчётах на ЭВМ проверялось выполнение неравенства  $R_p \ge R_M + 50$  км, где  $R_M$  – средний радиус Луны. А также получена формула (5) для нахождения по  $R_p$  величины импульса  $|\Delta_1|$ , возникающего при склейке первых двух кусков траектории, который в итоге может быть вычислен лишь по найденным численно при решении задач Ламберта векторам v<sub>1</sub> и v<sub>3</sub>.

#### V. РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате численного моделирования удалось построить траектории перелёта к Фобосу с пертурбационным маневром у Луны. На лучшей найденной траектории КА стартует к Марсу в 2026 году, все промежугочные импульсы в точках 2, 3, 4 склейки участков равны нулю, в том числе около Луны  $\Delta_1 = 0$ . Величина стартового импульса у Земли  $\Delta_0$  составила 3.45 км/с, конечного у Марса  $\Delta_4 = 1.95$  км/с. Выигрыш по сравнению со схемой перелёта напрямую от Земли к Фобосу без манёвра у Луны составил 148 м/с, что позволяет оценить целесообразность совершения такого манёвра на траектории к Марсу.

### VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена трёхмерная задача оптимизации межпланетного перелёта космического аппарата к Фобосу с учётом эфемерид. Миссия моделируется на основе комбинации задач Ламберта, оптимизация производится градиентным методом. Посчитан выигрыш от маневра у Луны, что позволяет оценить его целесообразность в экспедиции к Марсу. В качестве развития задачи предполагается рассмотрение на основе описанной методики перелётов на другие орбиты искусственных спутников Марса, к Венере, главному поясу астероидов, Юпитеру. Так как решение задач Ламберта не представляет никаких вычислительных трудностей, в данной постановке можно легко получить различные оценки. Полученные траектории могут использоваться в качестве хорошего начального приближения для исследования перелёта на основе принципа Лагранжа в более точной модели единой задачи нескольких тел, с учётом различных возмущающих факторов, а также в задаче с кусочнонепрерывной тягой.

#### Благодарности

Авторы выражают благодарность к.ф.-м.н., доц. кафедры вычислительной математики механикоматематического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова Григорьеву И.С., к.ф.-м.н., доц. кафедры общих проблем управления Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова Заплетину М.П. за плодотворное обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- T.M. Eneev, Pressing issues of the day in studying deep space, Cosmic research, vol. 43, no. 6, pp. 383–387, 2005.
- [2] Phobos-Grunt. Proyekt kosmicheskoy ekspeditsii. Nauchnoye izdaniye v dvukh tomakh. Tom 1, 2 (Phobos-Grunt. The space mission project. Scientific publication in two volumes. Vol. 1, 2), Moscow, Federal State Unitary Enterprise NPO SA Lavochkin Roscosmos, the Russian Academy of Sciences Space Research Institute, 2011.
- [3] A.Yu. Igritskaia, V.A. Igritsky, V.I. Mayorova, V.A. Pavlyuchenko, M.A. Denisov, F.A. Teplo, K.L. Graham, M.A. Sodano, The concept of creating a habitable base on Phobos, Conference dedicated to the memory of academician S.P. Korolev and other outstanding national scientists – pioneers of space exploration, Abstracts, vol. 1, pp. 609-612, 2020.
- [4] R.V. Elnikov, The analysis of a transfer Earth Mars with a lunar gravity assist maneuver and use of a small thrust, Spacecraft and Rockets, vol. 19, no. 5, pp. 38–44, 2012.
- [5] R.V. Elnikov, Use of lunar gravity assist maneuver in interplanetary electric propulsion trajectory design," Space technics and technology, no. 50, 24 p., 2012.
- [6] A. S. Samokhin, Optimization of expedition to Phobos using the impulse control and solution to Lambert problems taking into account attraction of the Earth and Mars, Moscow University Mathematics Bulletin, vol. 69, no. 2, pp. 84–87, 2014.
- [7] M.A. Samokhina, A.S. Samokhin, M.P. Zapletin, I.S. Grigoriev, Method of optimal trajectories design for a spacecraft with a jet engine of a large limited thrust in problems with the phasing condition, Advances in the Astronautical sciences, vol. 161, pp. 711–730, 2018.

# Алгоритм интегрального управления группировкой малых спутников

И.Д. Костин БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.Устинова г. Санкт-Петербург, Россия ORCID 0000-0001-9459-1929

> Ф.А. Попов БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.Устинова г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация—Статья посвящена разработке алгоритма системы управления формацией спутников, основанной на пассификации системы обратной связью. Рассмотрен вариант закона управления с использованием дополнительных выходов системы, и показано, что добавление интегральных составляющих позволяет повысить точность системы. Проведено моделирование для группы из 8 спутников на двух РСО орбитах.

Ключевые слова—групповое управление, спутники, система управления, пассификация, обратная связь.

#### I. Введение

В настоящее время проводится много исследований с целью разработки новых методов и алгоритмов управления координированным движением малых космических аппаратов на орбите Земли. Это является актуальной задачей, поскольку для повышения точности зондирования, съемки поверхности Земли или дальнего космоса и ряда других операций на орбите требуется создание некой апертуры из спутников. Однако, коммуникационные и вычислительные ограничения, малый энергетический ресурс, внешние возмущения среды усложняет задачу. Поэтому для их рационального решения необходимо также разработать оптимальную конфигурацию группы спутников. Помимо формирования конфигурации на орбите, необходимо поддерживать её в полёте.

Цель работы – разработка и исследование децентрализованного алгоритма управления движением группировки спутников по эллиптической орбите с учетом возмущений.

Задача управления группировкой спутников ставится так, имеется спутник – лидер, который движется по эллиптической орбите, но с малым эксцентриситетом, т.е. орбита близка к круговой орбите. Необходимо создать и поддерживать некую группировку спутников, которые располагаются в определенной формации относительно лидера и сохраняют эту формацию в течение времени. В случае круговой орбиты лидера, наиболее эффективными, с точки зрения расходования топлива двигателями спутников последователей, будет проекционные круговые орбиты, поскольку такие орбиты являются устойчивыми решениями уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшира [1]. Тогда управление будет расходоваться только на противодействие возмущениям и парирование неучтенных нелинейностей в модели.

### II. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА

# А. Постановка задачи

Для описания движения используется инерциальная система координат *XYZ*, начало которой связано с центром масс Земли.

А.М. Попов БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.Устинова г. Санкт-Петербург, Россия ORCID 0000-0002-0732-9111 Ю.В. Фадеева БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.Устинова г. Санкт-Петербург, Россия ORCID 0000-0002-2304-9806

В.А. Михайлов БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.Устинова г. Санкт-Петербург, Россия

Радиус-вектор  $\vec{r}_c$  и истинная аномалия  $\theta$  служат для задания положения спутника-лидера на орбите. Истинная аномалия  $\theta$  представляет собой угол между направлением на перицентр орбиты и вектором положения спутника-лидера  $\vec{r}_c$  с вершиной в центре масс Земли. Далее вектором  $\vec{r}_c$  и углом  $\theta$  задается абсолютное положение начала подвижной неинерциальной (относительной) системы координат *хуг.* Подвижная система координат жестко связана со спутником-лидером. Ось *x* направлена по радиус-вектору  $\vec{r}_c$ , ось *y* лежит в плоскости орбиты и перпендикулярна радиус-вектору в направлении движения, ось *z* дополняет тройку векторов до правой. Абсолютное положение спутника-последователя задается вектором  $\vec{r}$ , а положение в относительной системе координат – вектором  $\vec{\rho}$ .







Движение спутника-последователя вычисляется относительно спутника-лидера. Основная нелинейная система уравнений относительного движения описывается следующими выражениями [1]:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^{2}x + \frac{\mu}{\gamma}x + \frac{\mu}{\gamma}r_{c} - \frac{\mu}{r_{c}^{2}} \\ \ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^{2}y + \frac{\mu}{\gamma}y \\ \vdots + \frac{\mu}{\gamma}z \\ \ddot{r}_{c} = r_{c}\dot{\theta}^{2} - \frac{\mu}{r_{c}^{2}}, \quad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}_{c}\dot{\theta}}{r_{c}}, \qquad (1)$$

где x, y и z – переменные состояния для описания вектора относительного положения  $\vec{\rho}$  в x, y и z осях, соответственно;  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  орбитальные возмущения, такие как не сферичность Земли, сопротивление атмосферы и солнечный ветер.  $a_i = (f_i + d_i)/m_i \quad \forall j = \{x, y, z\}$ , где

 $m_f$  обозначает массу спутника, и  $f_j$  обозначает управляющий вход, приложенный к спутнику,  $d_j$  возмущения,  $\mu$  гравитационный параметр. Наконец,  $\gamma$  определена, как:

$$\gamma \equiv \left| \vec{r}_c + \vec{\rho} \right| = \left( (r_c + x)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}, \tag{3}$$

Для синтеза контура управления удобно представить систему (1) в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} , \qquad (4)$$

где переменными состояния являются относительные положения и скорости между спутником-лидером и спутниками-последователями.

Предполагается, что все состояния системы измеримы. Следовательно, может быть реализовано полное управление с обратной связью по состоянию. Чтобы максимально сохранить влияние нелинейности, следует

слагаемые  $\left(\frac{\mu}{\gamma}r_c - \frac{\mu}{r_c^2}\right)$  из (1) преобразовать к виду, где

можно явно выделить множитель х [2].

$$\frac{\mu}{\gamma}r_{c} - \frac{\mu}{r_{c}^{2}} = \mu \left( \frac{r_{c}}{\left(1 + \frac{2}{r_{c}}x + \frac{x^{2} + y^{2} + z^{2}}{r_{c}^{2}}\right)^{3/2}} \frac{1}{r_{c}^{3}} - \frac{1}{r_{c}^{2}} \right) =$$
(5)
$$= \frac{\mu}{r_{c}^{2}} \left[ \left[1 - \left(-\frac{2}{r_{c}}x - \frac{x^{2} + y^{2} + z^{2}}{r_{c}^{2}}\right)\right]^{-\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

Определим

$$\xi = -\frac{2}{r_c} x - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r_c^2} = \left(-\frac{2}{r_c} - \frac{x}{r_c^2}\right) x + \left(-\frac{y}{r_c^2}\right) y + \left(-\frac{z}{r_c^2}\right) z.$$
(6)

Далее, применив разложение в отрицательный биномиальный ряд, получаем следующее выражение:

$$\frac{\mu}{\gamma}r_{c} - \frac{\mu}{r_{c}^{2}} = \frac{\mu}{r_{c}^{2}} \left( \left(1 - \xi\right)^{-\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{\mu}{r_{c}^{2}} \left( 1 + \frac{3}{2}\Psi\xi - 1 \right) = \frac{3}{2}\frac{\mu}{r_{c}^{2}}\Psi\xi,$$
(7)

где  $\Psi \equiv 1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$   $\psi_1 \equiv \frac{\left(\frac{3}{2} + 1\right)}{2}\xi$ ,  $\psi_2 \equiv \frac{\left(\frac{3}{2} + 2\right)}{3}\psi_1\xi$ ,...

Тогда, с учетом (6), (7) примет вид

$$\frac{\mu}{\gamma}r_{c} - \frac{\mu}{r_{c}^{2}} = -\frac{3}{2}\frac{\mu}{r_{c}^{4}}\Psi((2r_{c}+x)x + y^{2} + z^{2}).$$
(8)

В. Цель управления

В работе рассматривается следующая задача – спутник-лидер свободно движется по своей траектории вокруг Земли, а спутник-последователь движется по некоторой заданной траектории в относительных координатах x - y - z. Пусть траектория задана функциями:

$$\mathbf{x}_{d}(t) = \begin{bmatrix} x_{d}(t) \\ y_{d}(t) \\ z_{d}(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}}_{d}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{d}(t) \\ \dot{y}_{d}(t) \\ \dot{z}_{d}(t) \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{x}}_{d}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{d}(t) \\ \ddot{y}_{d}(t) \\ \ddot{z}_{d}(t) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Введем вектор ошибки:

$$\mathbf{e} \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{x}_d. \tag{10}$$

Целью управления является минимизация сигнала ошибки:

$$\mathbf{e} \to 0 \text{ при } t \to \infty, \tag{11}$$

где  $\|\cdot\|$  соответствует стандартной  $L^2$  -норме.

С. Разработка закона управления на основе метода пассификации Вполом истровато и последние и развитие и последние и последние и последние и последние и последние и последние

Введем новые переменные:

$$e_{xj} = \int_{0}^{t} e_{x}(\tau) d\tau , \ e_{yj} = \int_{0}^{t} e_{y}(\tau) d\tau , \ e_{zj} = \int_{0}^{t} e_{z}(\tau) d\tau$$
(12)

Введем в рассмотрение дополнительные выходы системы (1):

$$y = \begin{bmatrix} \alpha_{10}e_{xj} + \alpha_{11}e_{xj} + \dot{e}_{x} & \alpha_{20}e_{yj} + \alpha_{21}e_{yj} + \dot{e}_{y} & \alpha_{30}e_{zj} + \alpha_{31}e_{zj} + \dot{e}_{z} \end{bmatrix}^{T}$$
(13)

где  $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$  – известные положительные числа.

Теперь система (1) примет следующий общий вид:

$$\dot{\mathbf{e}} = \overline{\mathbf{A}}(\mathbf{e}, \mathbf{t})\mathbf{e} + \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{e}.$$
 (14)

где матрицы имеют следующий вид:

где  

$$a_{74} = \dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{\gamma} + \frac{3}{2} \frac{\mu}{r_c^4} \Psi(2r_c + x), \quad a_{84} = -\ddot{\theta},$$
  
 $a_{75} = \ddot{\theta} + \frac{3}{2} \frac{\mu}{r_c^4} \Psi y, \quad a_{85} = \dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{\gamma}, \quad a_{76} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{r_c^4} \Psi z$   
 $a_{96} = -\frac{\mu}{\gamma}, \quad a_{87} = -2\dot{\theta}, \quad a_{78} = 2\dot{\theta}.$ 

Для выделения нуль-динамики были найдены постоянные матрицы  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$  и  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ , которые удовлетворяют соотношениям [3]:

$$\mathbf{C}\mathbf{M} = \mathbf{0}_{3\times 6}, \quad \mathbf{N}\mathbf{B} = \mathbf{0}_{6\times 3}, \quad \mathbf{N}\mathbf{M} = \mathbf{I}_6.$$
(17)

Уравнение нуль-динамики имеет следующий вид:

$$\dot{\eta} = \mathbf{A}_{n}(\mathbf{e})\eta \in \mathbb{R}^{3}, \qquad (120)$$

где  $\mathbf{A}_{\eta}(\mathbf{e}) \in \mathbb{R}^{6\times 6}$  и вычисляется по формуле:

$$\mathbf{A}_{n}(\mathbf{e}) = N\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{e}, t)M \tag{19}$$

Матрицы  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{9\times 6}$  и  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{6\times 9}$ , удовлетворяющие условиям (17), имеют вид:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{20} & 0 & 0 & -\alpha_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{30} & 0 & 0 & -\alpha_{31} \end{bmatrix},$$
(20)  
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
(21)

Тогда по формуле (19) получаем:

$$\mathbf{A}_{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_{10} & 0 & 0 & -\alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{20} & 0 & 0 & -\alpha_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{30} & 0 & 0 & -\alpha_{31} \end{bmatrix}.$$
 (22)

Учитывая, что коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  положительные, можно утверждать, что система (18) равномерно асимптотически устойчивая. Отсюда сразу следует вывод [4, 5], что система (14) строго минимально-фазовая.

Результат произведения матриц СВ :

$$\bar{CB} = \frac{1}{m_f} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
 (23)

И в таком случае, из [3] следует, что существует такая постоянная матрица коэффициентов обратной связи К по выходам у, которая делает систему (14) асимптотически устойчивой и достигается цель управления (11). Выходы (13) пассифицируют систему (14) [5], поскольку нуль-динамика системы равномерно асимптотически устойчива.

Закон управления имеет форму:

$$\overline{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{y}(t). \tag{24}$$

# D. Закон управления формацией спутников на основе алгоритма консенсуса

Полученный закон управления применяется отдельно к каждому спутнику группировки и не использует информацию о взаимном положении спутников в формации. Для повышения точности позиционирования формации можно применить мультиагентное управление на основе алгоритма(протокола) консенсуса [6].

В этом случае связь между спутниками можно описать с помощью теории графов. Для этого задается матрица смежности  $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , где  $a_{ii} = 0, a_{ij} = 1$ , если есть связь между *i* и *j* спутниками, и 0 в противном случае.

Мультиагентный закон управления формацией спутников (Passive-Integral-Consensus-Based Law) выглядит следующим образом [7]. Матрицу коэффициентов представляем в следующем виде  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & k_y & k_z \end{bmatrix}^T$ , где  $k_x & k_y & k_z \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ , и вектор  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_x & y_y & y_z \end{bmatrix}^T$ , получаем:

$$\overline{u}_{xi} = -\mathbf{k}_{x}\mathbf{y}_{i} - \gamma_{0}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\left(y_{xi} - y_{xj}\right),$$

$$\overline{u}_{yi} = -\mathbf{k}_{y}\mathbf{y}_{i} - \gamma_{0}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\left(y_{yi} - y_{yj}\right),$$

$$\overline{u}_{zi} = -\mathbf{k}_{z}\mathbf{y}_{i} - \gamma_{0}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\left(y_{zi} - y_{zj}\right).$$
(25)37)

где  $\overline{u}_{xi}$  – закон управления для *i*-го агента, N – число агентов в формации, i = 1, ..., N – номера агентов.

### III. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для подтверждения работоспособности разработанных алгоритмов управления было проведено моделирование в пакете MATLAB/Simulink. Рассмотрена система (1), (2) и закон управления (25). Была смоделирована ситуация: 8 спутников на двух РСО орбитах [1]. Орбита спутника лидера одинакова для всех расчетов:  $m_f = 10$  кг;  $\mu_e = 398.600$  км<sup>3</sup> с<sup>-2</sup>; радиус перигея  $R_p = 6971$  км; эксцентриситет e = 0.2,  $\Omega, \omega = i = M = 0$  рад/с. Была принята следующая модель возмущений [8]:

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = 1.2 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 - 1.5 \sin(nt) \\ 0.5 \sin(2nt) \\ \sin(nt) \end{bmatrix},$$
 (26)

где *n* – средняя угловая скорость лидера. Для моделирования заданы радиусы *r*<sub>drc</sub> РСО-орбит 1000 м, 2000 м:

$$\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_{dpc} / 2)\sin(nt + \phi) \\ r_{dpc}\cos(nt + \phi) \\ r_{dpc}\sin(nt + \phi) \end{bmatrix}.$$
 (27)

На первой и второй РСО-орбите располагаются по 4 спутника. Фазовый сдвиг  $\phi$  между малыми космическими аппаратами, расположенными на первой орбите

$$\frac{\pi}{2}$$
, а второй четверки, относительно первой  $\frac{\pi}{4}$ 

Коэффициенты для закона управления:

$$\alpha_{10} = \alpha_{20} = \alpha_{30} = 0.000001, \alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = 0.005,$$
  
$$\mathbf{k}_x = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_y = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 15 \end{bmatrix}, \gamma_0 = 15.5.$$

Критерием является точность позиционирования после двух витков вокруг Земли.

Результаты моделирования полета группы из 8 спутников представлены на рисунках 2-3.



Рис. 2. Passive-Integral-Consensus-Based Law. 3D

### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен закон управления, позволяющий построить и поддерживать формацию спутников, основанный на использовании метода пассификации (Passive-Integral-Consensus-Based Law). Было проведено математическое и компьютерное моделирование полученного алгоритма для 8 спутников на двух проекционных орбитах.

Полученные результаты показали хорошую работоспособность предложенного закона управления формированием спутников. Показано, что предложенный закон управления группой обладает устойчивостью к различным возмущениям.



Рис. 3. Passive-Integral- Consensus-Based Law. YZ-плоскость

#### Благодарности

Работа выполнена в организации БГТУ «ВОЕНМЕХ» при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (доп. соглашение от 09.06.2020 № 075-03-2020-045/2 на выполнение базовой части государственного задания «Разработка фундаментальных основ создания и управления группировками высокоскоростных беспилотных аппаратов космического и воздушного базирования и группами робототехнических комплексов наземного базирования»).

#### Литература

- K. Alfriend, S. Vadali, P. Gurfil. Spacecraft Formation Flying. Butterworth-Heinemann: Oxford, 2010.
- [2] H.E. Park, S.Y. Park, and K.H. Choi, Satellite formation reconfiguration and station-keeping using state-dependent Riccati equation technique, Aerospace Science and Technology 2011, vol. 15, pp. 440–452.
- [3] I. Barkana. Output feedback stabilizability and passivity in nonstationary and nonlinear systems. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing 2010, 24, 568–591.
- [4] Popov, A.M.; Kostrygin, D.G.; Shevchik, A.A.; Andrievsky, B. Speed-Gradient Adaptive Control for Parametrically Uncertain UAVs in Formation, Electronics, 2022, 11, 4187. <u>https://doi.org/10.3390/electronics11244187</u>.
- [5] B. Andrievsky; A. Fradkov. Method of passification in adaptive control, estimation, and synchronization. Automation and Remote Control 2006, 67, 1699–1731.
- [6] W. Ren; R.W. Beard. Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control; Springer London, 2008. doi:10.1007/978-1-84800-015-5
- [7] A.M. Popov; I. Kostin; J. Fadeeva; B. Andrievsky, Development and Simulation of Motion Control System for Small Satellites Formation. Electronics 2021, 10, 3111. <u>https://doi.org/10.3390/electronics10243111</u>.
- [8] Godard; K. Kumar, Fault Tolerant Reconfigurable Satellite Formations Using Adaptive Variable Structure Techniques, J. Guid. Control Dyn., 2010, 33, 969–984.

# Алгоритм адаптивного управления полетом БПЛА переменной массы

Д.Г. Кострыгин БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова г. Санкт-Петербург, Россия ORCID: 0000-0002-5256-5180

сенсуса.

А.М. Попов БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова г. Санкт-Петербург, Россия ORCID: 0000-0002-0732-9111 А.А. Шевчик БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова г. Санкт-Петербург, Россия ОRCID: 0000-0002-6223-0261

мость предложенного подхода для управления формацией БПЛА.

#### II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

#### А. Динамика движения БПЛА с точечной массой

В настоящей работе рассматривается математическая модель, описывающая динамику движения БПЛА с точечной массой [7-9]:

Аннотация—Настоящая работа посвящена проблеме

управления полетом беспилотного летательного аппарата

(БПЛА) переменной массы. Рассматривается нелинейная модель БПЛА с точечной массой, которая для решения

поставленной задачи линеаризуется обратной связью. В результате преобразования получается линейная модель,

содержащая неизвестное значение массы БПЛА. Закон

управления получен в виде «простого адаптивного управ-

ления» (англ. "simple adaptive control" (SAC)). Алгоритм управления распространен на задачу децентрализованного

управления формацией БПЛА на основе протокола кон-

### I. Введение

Одной из серьезных трудностей, возникающих при синтезе управления беспилотного летательного аппарата (БПЛА), является неопределенность некоторых параметров. Одним из подходов к решению возникающей проблемы может быть использование адаптивных законов управления.

Первые попытки реализации адаптивного управления, в том числе применительно к летательным аппаратам, были совершены в 60-х годах прошлого века [1, 2]. В этих работах впервые вводится ставший классическим метод адаптивного управления с эталонной моделью (англ. "model reference adaptive control" (MRAC)). Существенный недостаток подхода – эталонная модель (ЭМ) и объект управления (ОУ) с выбранным контуром управления должны удовлетворять условиям согласованности [3]. Особо значительна эта проблема для ОУ высокого порядка.

Альтернативный подход к реализации адаптивного управления – «простое адаптивное управление» (англ. "simple adaptive control" (SAC)) [4-6].

Метод SAC, как и MRAC, относится к алгоритмам адаптивного управления с ЭМ, однако ЭМ при реализации метода SAC не обязана подробно воспроизводить структуру ОУ. В общем случае ЭМ для реализации метода SAC должна отражать только преобразование заданного сигнала на входе в желаемый выходной сигнал, т.е. генерировать желаемую траекторию системы. Для реализации алгоритма требуется, чтобы ОУ был строго минимально-фазовым [3]. Применение метода SAC способно компенсировать неопределенность параметров ОУ.

Цель настоящей работы – разработать алгоритм адаптивного управления полетом БПЛА переменной массы методом *SAC* для решения задачи движения вдоль заданной траектории, а также показать примени-

$$\begin{cases} \dot{x} = V_g \cos(\gamma) \cos(\psi), \\ \dot{y} = V_g \cos(\gamma) \sin(\psi), \\ \dot{h} = V_g \sin(\gamma), \\ \dot{V}_g = \frac{F_{thrust} - F_{drag}}{m} - g \sin(\gamma), \\ \dot{\psi} = \frac{F_{lift} \sin(\phi)}{V_g m \cos(\gamma)}, \\ \dot{\gamma} = \frac{F_{lift} \cos(\phi)}{V_g m} - \frac{g \cos(\gamma)}{V_g}, \end{cases}$$
(1)

где x, y, h – координаты БПЛА,  $\gamma$  – угол наклона траектории,  $\psi$  – угол курса,  $\phi$  – угол крена,  $V_g$  – скорость относительно Земли,  $F_{thrust}$  – сила тяги,  $F_{lift} = \frac{1}{2} \rho_a V_g^2 S C_L$  – подъемная сила,  $F_{drag} = \frac{1}{2} \rho_a V_g^2 S C_D$  – сила лобового сопротивления,  $\rho_a$  – плотность воздуха, m – масса, g – ускорение свободного падения, S – площадь крыла БПЛА,  $C_L$  – коэффициент подъемной силы,  $C_D = C_{D_0} + k_c C_L^2$  – коэффициент сопротивления воздуха при нулевой подъемной силе;  $k_c$  – коэффициент индуцированного сопротивления. Сигналы управления:  $(F_{thrust} - C_L - \phi)^T$ .

#### В. Линеаризованная математическая модель

В работе [10] была предложена эквивалентная линейная модель, учитывающая изменение массы БПЛА:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}\overline{v}_1, \quad \ddot{y} = \frac{1}{m}\overline{v}_2, \quad \ddot{h} = \frac{1}{m}\overline{v}_3 - g.$$
(2)

где  $\overline{v_1}$ ,  $\overline{v_2}$ ,  $\overline{v_3}$  – виртуальные управления, которые могут быть однозначно пересчитаны в реальные управления. Строгое обоснование применения данного подхода следует из теории плоских систем [11]. Можно показать, что выходы x(t), y(t), h(t) системы (2) являются плоскими и переменные  $V_g$ ,  $\psi$ ,  $\gamma$  могут быть выражены через x, y, h и их производные, а также через сигналы управления.

Если учесть, что  $F_{lift} = \frac{1}{2} \rho_a V_g^2 S C_L$ , то можно принять в системе (1) реальные сигналы управления в виде  $u = (F_{thrust} \quad F_{lift} \quad \phi)^T$ , где  $F_{lift}$  используется вместо  $C_L$ . Тогда пересчет виртуальных управлений в реальные делается по следующим формулам [10]:

$$F_{thrust} = F_{drag} + \cos\gamma \left(\overline{v_1}\cos\psi + \overline{v_2}\sin\psi\right) + \overline{v_3}\sin\gamma,$$
  

$$F_{lift} = \left(\overline{v_3}\cos\gamma - \left(\overline{v_1}\cos\psi + \overline{v_2}\sin\psi\right)\sin\gamma\right) / \cos\phi, \quad (3)$$
  

$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{\overline{v_2}\cos\psi - \overline{v_1}\sin\psi}{\overline{v_3}\cos\gamma - \left(\overline{v_1}\cos\psi + \overline{v_2}\sin\psi\right)\sin\gamma}\right).$$

Допустимая область применения преобразований (3) в фазовом пространстве уравнений БПЛА (1) задается неравенствами:  $V_g > 0$ ,  $|\gamma| < \pi/2$ ,  $|\phi| < \pi/2$ . Отметим, что выражения (3) не включают массу БПЛА.

### III. Адаптивное управление

Полученная выше линеаризованная система ОУ (2) содержит массу БПЛА, которая в общем случае не является постоянной. Для того, чтобы компенсировать неопределенность данного параметра (в предположении, что он никак не измеряется), предлагается использовать метод *SAC*. Примем в качестве выходных сигналов ОУ:

$$y_1 = \alpha_1 x + \dot{x}, \quad y_2 = \alpha_2 y + \dot{y}, \quad y_3 = \alpha_3 h + \dot{h},$$
 (4)

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  – положительные константы. В [10,12] показано, что выходы (4) делают систему (2) пассивной.

Общий вид ОУ:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t)$$
(5)

где 
$$\mathbf{X} = \left(x, \dot{x}, y, \dot{y}, h, \dot{h}\right)^T \in \mathbb{R}^6, \mathbf{Y} = \left(y_1, y_2, y_3\right)^T \in \mathbb{R}^3,$$
$$\mathbf{U} = \left(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\right)^T \in \mathbb{R}^3,$$

вектор состояния, вектор выходных сигналов и вектор управления, соответственно, **A**, **B**, **C** – матрицы соответствующих размерностей.

Эталонная модель:

$$\dot{\mathbf{X}}_{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{m}}\mathbf{X}_{\mathbf{m}}(t) + \mathbf{B}_{\mathbf{m}}\mathbf{U}_{\mathbf{m}}(t), \mathbf{Y}_{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{C}_{\mathbf{m}}\mathbf{X}_{\mathbf{m}}(t)$$
(6)

$$\mathbf{X}_{\mathbf{m}} = \left(x_{m}, \dot{x}_{m}, y_{m}, \dot{y}_{m}, h_{m}, \dot{h}_{m}\right)^{T} \in \mathbb{R}^{6}, \mathbf{Y}_{\mathbf{m}} = \left(y_{1_{m}}, y_{2_{m}}, y_{3_{m}}\right)^{T} \in \mathbb{R}^{3},$$
  
**U**<sub>**m**</sub> =  $\left(\overline{v}_{1_{m}}, \overline{v}_{2_{m}}, \overline{v}_{3_{m}}\right)^{T} \in \mathbb{R}^{3}$ 

вектор состояния ЭМ, вектор выходных сигналов и вектор управления, соответственно,  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  – матрицы соответствующих размерностей в виде:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{m}} & \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{m}} & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{0}_{2\times 2} & \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{m}} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_{\mathbf{m}} = (0, \omega_n^2, 0, \omega_n^2, 0, \omega_n^2)^T, \\ \mathbf{C}_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

где  $\omega_n$ ,  $\xi$  – параметры эталонной модели,  $\mathbf{0}_{2\times 2}$  – нулевая матрица размерности 2х2.

Для оценки того, насколько поведение ОУ соответствует реакции ЭМ, вводится в рассмотрение отклонение ОУ от ЭМ:  $\mathbf{E}_{y} = \mathbf{Y}_{m} - \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{3}$ . Это отклонение используется при формировании адаптивного управления, которое в стандартном виде выглядит следующим образом [3]:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}_{\mathbf{e}}(t)\mathbf{E}_{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_{\mathbf{x}}(t)\mathbf{X}_{\mathbf{m}} + \mathbf{K}_{\mathbf{u}}(t)\mathbf{U}_{\mathbf{m}}$$
(8)

где  $\mathbf{K}_{e}(t) \in \mathbb{R}^{3\times3}$  — матрица коэффициентов управления, стабилизирующих систему,  $\mathbf{K}_{x}(t) \in \mathbb{R}^{3\times6}$  и  $\mathbf{K}_{u}(t) \in \mathbb{R}^{3\times3}$  — матрицы коэффициентов управления, которые способствуют поддержанию устойчивости системы и сведению ошибки слежения на выходе к нулю. Уравнения адаптивного регулятора:

$$\dot{\mathbf{K}}_{e}(t) = \mathbf{E}_{y}(t)\mathbf{E}_{y}^{T}(t)\Gamma_{e},$$
  
$$\dot{\mathbf{K}}_{x}(t) = \mathbf{E}_{y}(t)\mathbf{X}_{m}^{T}(t)\Gamma_{x},$$
  
$$\dot{\mathbf{K}}_{u}(t) = \mathbf{E}_{y}(t)\mathbf{U}_{m}^{T}(t)\Gamma_{u}.$$
(9)

где  $\Gamma_{e} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ,  $\Gamma_{x} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ ,  $\Gamma_{u} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$  – постоянные матрицы коэффициентов, характеризующие скорость адаптации.

# IV. Адаптивное управление группой БПЛА

### А. Базовая информация про алгоритм консенсуса

Граф *G* можно представить как некую пару (V, E), где V = 1, 2, ..., n – множество узлов графа, а  $E \in V \times V$  – набор его ребер. Причем каждое ребро показывает, как между собой связана пара различных узлов. Например, ребро (i, j) может показывать способность узла *j* получать информацию от узла *i*. Пусть граф *G* содержит *n* узлов. Матрица смежности  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  определяется как:  $a_{ii} = 0$ ,  $a_{ij} = 1$ , если  $(v_i, v_j) \in E$ , иначе  $a_{ij} = 0$ .

Пусть  $\xi_i \in \mathbb{R}$  содержит информацию о положении *i* - го агента. Для агентов с динамикой первого порядка фундаментальный алгоритм консенсуса [13]:

 $\dot{\xi}_i = u_i, \ u_i = \rho_0 \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \xi_i - \xi_j \right), \ \rho_0 > 0$  – постоянная величина.

Консенсус достигается асимптотически среди всех агентов, если для любых  $\xi_i(0)$  верно, что  $\|\xi_i(t) - \xi_j(t)\| \to 0$ , для всех  $i \neq j$  при  $t \to \infty$ .

# В. Адаптивное управление формацией БПЛА на основе протокола консенсуса

Расширенный алгоритм управления для *i*-го агента с дополнительными сигналами управления [13]:

$$\overline{v}_{1i} = \overline{v}_{1ai} - k_{xc} y_{1i} - \rho_x \sum_{j=1}^{N} a_{ij} (y_{1i} - y_{1i}),$$

$$\overline{v}_{2i} = \overline{v}_{2ai} - k_{yc} y_{2i} - \rho_y \sum_{j=1}^{N} a_{ij} (y_{2i} - y_{2i}), \quad (10)$$

$$\overline{v}_{3i} = \overline{v}_{3ai} - k_{hc} y_{3i} - \rho_h \sum_{j=1}^{N} a_{ij} (y_{3i} - y_{3i}),$$

где  $\overline{V}_{1ai}$ ,  $\overline{V}_{2ai}$ ,  $\overline{V}_{3ai}$  – адаптивные составляющие управления, вычисляемые по формуле (9),  $k_{xc} > 0$ ,  $k_{yc} > 0$ ,  $k_{hc} > 0$ ,  $\rho_x > 0$ ,  $\rho_y > 0$ ,  $\rho_h > 0$  – параметры алгоритма консенсуса,  $a_{ij}$  – коэффициенты матрицы смежности.

Управление (10) позволяет применить метод *SAC* для реализации движения формации БПЛА с неопределенными массами вдоль заданной траектории.

#### V. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Было произведено компьютерное моделирование в системе Matlab/Simulink различных сценариев работы полученного алгоритма адаптивного управления.

#### А. Общие данные для рассмотренных сценариев

В качестве желаемой была рассмотрена траектория движения по окружности постоянного радиуса 250 м на высоте 100 м:

$$\overline{v}_{1_m}(t) = 250\cos(0.2t), \ \overline{v}_{2_m}(t) = 250\sin(0.2t), \ \overline{v}_{3_m}(t) = 100.$$

Номинальные параметры БПЛА: m = 500 кг – номинальная масса;  $S = 7.98 \text{ м}^2$  – площадь поверхности крыльев;  $\rho_a = 1.225 \text{ кг/m}^3$  – плотность воздуха;  $C_{D_0} = 0.02$  – коэффициент сопротивления воздуха при нулевой подъемной силе;  $k_c = 0.1$  – коэффициент индуцированного сопротивления.

Постоянные параметры выходных сигналов (4) были заданы:  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_h = 2.5$ , а параметры эталонной модели:  $\omega_n = 2.5$ ,  $\xi = 0.7$ . Сила тяги ограничивалась снизу величиной: 50 H.

#### В. Управление одиночным БПЛА

В качестве начальных параметров моделирования были использованы следующие величины. Начальные

значения координат:  $x_0 = 175 \text{ м}$ ,  $y_0 = 10 \text{ м}$ ,  $h_0 = 95 \text{ м}$ . Начальное значение скорости:  $V_0 = 50 \text{ м/c}$ . Начальная ориентация в пространстве:  $\gamma_0 = 0$  рад,  $\psi_0 = \pi/2$  рад.

Начальное значение массы БПЛА m = 500 кг, далее масса меняется со скоростью -0.5 кг/с. В момент времени t = 200 с происходит скачкообразная потеря 50-ти кг массы.

Матрицы коэффициентов алгоритма адаптации:

 $\Gamma_{\rm e} = {\rm diag} \{ 0.025 \ 0.025 \ 0.025 \}, \Gamma_{\rm u} = 0.1 \Gamma_{\rm e},$ 

 $\Gamma_{\rm x} = {\rm diag} \{ 0.0025 \ 0.0025 \ 0.0025 \ 0.0025 \ 0.0025 \ 0.0025 \}.$ 

Полученные по результатам моделирования отклонения траекторий ОУ от ЭМ приведены на рисунке 1.



Рис. 1. Отклонения траекторий ОУ от ЭМ

#### С. Управление формацией БПЛА

Было произведено моделирование полета формации, состоящей из четырех БПЛА с неопределенными массами. Желаемая траектория аналогична траектории, рассмотренной выше. Строй в форме ромба со стороной 15 м выдерживался в течение всего времени моделирования.

Постоянные матрицы коэффициентов, характеризующие скорость адаптации, были взяты такими же, как при моделировании полета одиночного БПЛА. Были установлены параметры протокола консенсуса:  $k_{xc} = k_{yc} = k_{hc} = 850$ ,  $\rho_x = \rho_y = \rho_h = 700$ . Матрица смежности:

	0	0	1	1]	
<i>A</i> =	1	0	0	1	
	1	1	0	0	•
	0	1	0	0	

Общие начальные условия для всех БПЛА группы. Начальные значения скоростей:  $V_0 = 50$  м/с. Начальная ориентация в пространстве:  $\gamma_0 = 0$  рад,  $\psi_0 = \pi/2$  рад.

Остальные начальные параметры моделирования:  $m_1 = 500 \,\mathrm{kr}, \qquad x_{01} = 155 \,\mathrm{m}, \qquad y_{01} = 10 \,\mathrm{m}, \qquad h_{01} = 95 \,\mathrm{m},$  $m_2 = 450 \,\mathrm{kr}, \qquad x_{02} = 175 \,\mathrm{m}, \qquad y_{02} = 30 \,\mathrm{m}, \qquad h_{02} = 95 \,\mathrm{m},$ 

$$m_3 = 550 \text{ Kr}, \quad x_{03} = 175 \text{ M}, \quad y_{03} = -10 \text{ M}, \quad h_{03} = 95 \text{ M},$$
  
 $m_4 = 500 \text{ Kr}, \quad x_{04} = 195 \text{ M}, \quad y_{04} = 10 \text{ M}, \quad h_{04} = 95 \text{ M}.$ 

Массы агентов меняются линейно со скоростями: -0.5 кг/с, -0.35 кг/с, -0.6 кг/с и -0.5 кг/с, соответственно.

Полученные по результатам моделирования отклонения траекторий всех четырех ОУ от ЭМ приведены на рисунке 2.



Рис. 2. Отклонения траекторий ОУ от ЭМ

# VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе разработан алгоритм адаптивного управления полетом БПЛА переменной массы вдоль заданной траектории. Полученные адаптивные алгоритмы были также использованы для решения задачи децентрализованного управления формацией БПЛА с неизвестными массами на основе алгоритма консенсуса. Компьютерное моделирование полученных алгоритмов как для одиночного БПЛА, так и для группы показало хорошую работоспособность предложенного подхода в условиях переменной массы БПЛА.

#### Благодарности

Работа выполнена в организации БГТУ «ВОЕНМЕХ» при финансовой поддержке Министерства науки и выс-

шего образования Российской Федерации (доп. соглашение от 09.06.2020 № 075-03-2020-045/2 на выполнение базовой части государственного задания «Разработка фундаментальных основ создания и управления группировками высокоскоростных беспилотных аппаратов космического и воздушного базирования и группами робототехнических комплексов наземного базирования»).

#### Литература

- Whitaker, H. P. An Adaptive Performance of Aircraft and Spacecraft. Inst. Aeronautical Sciences, Paper 59-100, 1959.
- [2] Osborn, P. V., H. P. Whitaker and A. Kezer. New developments in the design of Model reference Adaptive Control Systems. Inst. Aeronautical Sciences, Paper 61-39, 1961.
- [3] H. Kaufman, I. Barkana, and K. Sobel, Direct Adaptive Control Algorithms: Theory and Applications, 2nd ed., Communications and Control Engineering Series, New York, NY: Springer, 1997.
- [4] Sobel K, Kaufman H, Mabus L. Implicit adaptive control for a class of MIMO systems. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 1982.
- [5] Barkana I, Kaufinan H, Balas M. Model reference adaptive control of large structural systems. Journal of Guidance, Control, and Dynamics 1983.
- [6] Barkana I, Kaufman H. Some applications of direct adaptive control to large structural systems. Journal of Guidance, Control, and Dynamics 1984.
- [7] Beard, R.W.; McLain, T.W. Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice; Princeton University Press: Princeton, NJ, USA, 2012.
- [8] Dobrokhodov, V. Kinematics and Dynamics of Fixed-Wing UAVs. In Handbook of Unmanned Aerial Vehicles; Springer Netherlands: Dordrecht, The Netherlands, 2015; pp. 243–277.
- [9] Miele, A. Flight Mechanics: Theory of Flight Paths; Dover Publications Inc.: New York, NY, USA, 2016.
- [10] Popov, A.M.; Kostrygin, D.G.; Shevchik, A.A.; Andrievsky, B. Speed-Gradient Adaptive Control for Parametrically Uncertain UAVs in Formation, Electronics, 2022, 11, 4187. <u>https://doi.org/10.3390/electronics11244187</u>.
- [11] Lévine, J. Analysis and Control of Nonlinear Systems A Flatness-Based Approach; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2009.
- [12] A.M. Popov; I. Kostin; J. Fadeeva; B. Andrievsky. Development and Simulation of Motion Control System for Small Satellites Formation. Electronics, 2021, 10, 3111. https://doi.org/10.3390/electronics10243111.
- [13] Ren, W.; Beard, R.W. Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control; Springer: London, UK, 2008.

# • ЗАСЕДАНИЕ IV – ВОПРОСЫ ТЕОРИИ •

# Пространственный осциллятор Ван дер Поля. Технические приложения в гироскопии

С.Е. Переляев Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН 119526, Москва, Россия Проспект Вернадского, 101-1 e-mail: ipm@ipmnet.ru

Аннотация-Публикация посвящена изложению основ фундаментальной теории «обобщенного» маятника Фуко, реализованного на основе принципиально новых модифицированных дифференциальных уравнений Вандер-Поля. Классические уравнения, описывающие автоколебания в квазилинейном одномерном осцилляторе, обобщаются на случай, когда порождающий изотропный осциллятор имеет произвольное число степеней свободы. Конкретно рассмотрены одномерный, двумерный (плоский) и трехмерный (пространственный) случаи. В отличие от классической задачи, в которой стабилизировалась заданная амплитуда колебаний, в общем случае можно стабилизировать не только энергию колебаний, но и площадь плоской эллиптической траектории, ее ориентацию в пространстве и прецессию. Указаны перспективные технические приложения новых математических моделей инерциальных датчиков.

Ключевые слова—осциллятор Ван-дер-Поля, классический маятник Фуко, «обобщенный» маятник Фуко, полусферический кварцевый резонатор (2-D волновой твердотельный гироскоп), сферический кварцевый резонатор (3-D сферический резонансный гироскоп СРГ/SRG).

#### I. Одномерный осциллятор Ван-дер-Поля

Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля в классической форме, приведенной, например, в публикации [1]

$$\ddot{q} + q = \mu(1 - q^2)\dot{q}, \quad \mu > 0$$
 (1.1)

здесь –  $\mu$  малый параметр, который определяет близость рассматриваемой системы к линейной консервативной. Это позволяет решать уравнение (1.1), как это часто и делают, методом осреднения. Для целей дальнейшего изложения нам удобно интерпретировать дифференциальное уравнение (1.1), как уравнение линейного пружинного осциллятора в одномерном пространстве (рис. 1) с наложенной на него обратной связью формализованной нелинейной правой частью уравнения (1.1). В.Ф. Журавлев Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН 119526, Москва, Россия Проспект Вернадского, 101-1 e-mail: ipm@ipmnet.ru



Рис. 1

В публикации [1] приведено решение этого уравнения, в частности, показано, что уравнение имеет два стационарных решения: неустойчивое q = 0, и асимптотически устойчивое:

$$q = 2\cos(t - t_0) \tag{1.2}$$

*t*<sub>0</sub> – произвольная постоянная.

Единственной причиной введения обратной связи в одномерном случае является стремление обеспечить периодический процесс, несмотря на неизбежное присутствие в реальных системах диссипативных сил. Отметим, что классический вид обратной связи

$$\mu(1-q^2)\dot{q}$$
 (1.3)

выбранный Ван-дер-Полем и используемый в различных последующих известных работах, по нелинейным методам, где это уравнение используется в качестве примера, для технических приложений не является лучшим.

Вместо него следовало бы дополнить уравнение обратной связи (1.3) квадратом производной рассматриваемой переменной

$$\mu (1 - q^2 - \dot{q}^2) \dot{q}, \qquad (1.4)$$

Действительно, при  $\mu = 0$  уравнение (1.1) имеет первый интеграл  $q^2 + \dot{q}^2 = const$  и, следовательно, при  $\mu \neq 0$  он меняется явно медленно в отличие от переменной  $q^2$ , являющейся во всех случаях быстро меняющейся. Это не только упрощает решение (1.1), но и улучшает само качество управления. Покажем это. Введем новую зависимую переменную  $p = \dot{q}$ , тогда от одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (1.1) перейдем к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\dot{q} = p, \ \dot{p} = -q + \mu (1 - q^2 - p^2)p$$
 (1.5)

При величине параметра  $\mu = 0$  решение системы уравнений (1.5) есть

$$q = rcos(\varphi), \quad p = -rsin(\varphi), \quad \varphi = \omega(t - t_0)$$
 (1.6)

Используя это решение для перехода к новым переменным  $(q, p) \rightarrow (r, \varphi)$ , найдем

$$\dot{r} = \mu (1 - r^2) r sin^2(\phi), \ \dot{\phi} = 1$$
 (1.7)

Получили систему с одной медленной переменной – г и одной быстрой –  $\varphi$ . Осреднение по быстрой переменной дает выражение  $\dot{r} = (1 - r^2)r/2$ , откуда непосредственно следуют два стационарных решения: 1) r = 0 (неустойчивое) и 2) r = 1 (асимптотически устойчивое).

Известны многочисленные технические приложения математической модели одномерного осциллятора Ван-дер-Поля (1.1), в частности, так может быть описана модель лампового генератора (правда, переменная q в этом случае не является пространственной переменной и играет роль анодного напряжения в электронной лампе). <u>Применительно к механике гироскопических систем и их базовых инерциальных датчиков</u> рассмотрим: однокомпонентный кварцевый маятниковый акселерометр (КМА), который имеют одну ось чувствительности.

Такие акселерометры измеряют проекцию составляющей кажущегося ускорения (ускорения от всех активных сил). Движение чувствительного элемента (ЧЭ) маятникового акселерометра в отсутствие ускорения от активных сил представляет собой свободные затухающие колебания, которые описываются дифференциальным уравнением второго порядка известного вида

$$m\ddot{x} + kx = -w\dot{x} \tag{1.8}$$

где: x = x(t) – перемещение кварцевого маятника акселерометра (ЧЭ) от положения равновесия. Уравнение (1.8) является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Отметим наличие в уравнении (1.8) члена, пропорционального первой производной перемещения (скорости такого перемещения), который соответствует сопротивлению среды (трению). Введем следующие известные обозначения:  $\omega_0^2 = k/m$ , где  $\omega_0^2$  – собственная (циклическая) частота незатухающих колебаний маятника (осциллятора). Кроме того, положим  $w/m = 2\xi$ , где коэффициент демпфирования  $\xi$ >0. В принятых здесь условных обозначениях исходное уравнение (1.8) запишется в следующем виде

$$\ddot{x} + 2\xi \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.9}$$

Введем в правую часть уравнения (1.9) измеряемое ускорение *a* от активных сил и компенсирующее воздействие силового магнитного привода, тогда (1.9) перепишем так

$$T_1^2 \ddot{x} + 2\xi \dot{x} + x = T_1^2 a(t) - F_u/c \qquad (1.10)$$

где:  $T_1^2 = m/k$  – постоянная времени;  $\xi$  – коэффициент демпфирования; a = a(t) – действующее ускорение от всех активных сил; m – масса чувствительного элемен-

та; k – коэффициент жесткости подвеса;  $F_u$ =F( $x, \dot{x}$ ) – компенсирующая сила электромагнитного силового привода, описываемая нелинейной функцией. В условиях действия активных сил уравнение одномерного осциллятора (1.10) достаточно достоверно описывает измерительную систему маятникового акселерометра, которую можно представить нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка вида:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = a(t) \tag{1.11}$$

 $\omega$  – круговая (циклическая) частота собственных колебаний ЧЭ одноосевого МКА ( $\omega^2 = k/m$ );  $\xi$  - коэффициент демпфирования ЧЭ одноосевого МКА; x – перемещение маятника акселерометра; a(t) – проекция вектора измеряемого ускорения на ось чувствительности МКА. Следует рассматривать уравнение одномерного осциллятора вида (1.11) в следующей размерной форме [3]:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \omega (x_0^k - |x|^k) \dot{x}$$
(1.12)

В отличие от обычной записи уравнения Ван-дер-Поля вида (1.1) обратная связь здесь выбрана в более общем виде. Найдем такое значение коэффициента  $k \in (0, 1.2...)$  чтобы стационарное, асимптотически устойчивое решение уравнения (1.12) отвечало максимальному по модулю отрицательному показателю Ляпунова.

В публикации [3] показано, что этот максимум достигается при k=3. Таким образом, доказано, что уравнение (1.12) управляемого осциллятора Ван-дер-Поля с максимальным эффектом управления по амплитуде имеет вид:  $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \omega (x_0^3 - |x|^3) \dot{x}$ 

# А. Одномерный осциллятор Ван-дер-Поля с управлением по энергии колебаний

Вместо традиционной формы обратной связи вида (1.3) по амплитуде колебаний в приведенной выше системе (1.12) рассмотрим обратную связь с управлением по энергии колебаний [3]:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2^n \varepsilon \omega (E^n - E_0^n) \dot{x}$$
(1.13)

$$E = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + cx^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega x^2)$$
(1.14)

или, в нормальной форме Коши

$$\begin{aligned} x &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x + \varepsilon \omega m ((y^2 + \omega^2 x^2)^n - (y_0^2 + \omega^2 x_0^2)^n) y \ (1.15) \end{aligned}$$

Выполним в системе уравнений (1.15) замену переменных  $(x, y) \rightarrow (r, \phi)$ :  $x = rcos(\phi)$ ,  $y = rsin(\phi)$ 

$$\dot{r} = \varepsilon \omega^{2n+1} (r^{2n} - r_0^{2n}) r \sin^2(\varphi)$$
(1.16)  
$$\dot{\varphi} = -\omega + \varepsilon \omega^{2n+1} (r^{2n} - r_0^{2n}) \sin(\varphi) \cos(\varphi)$$
(1.17)

После осреднения системы уравнений (1.16) и (1.17) по быстрой фазе ф имеем:

$$\dot{r} = \varepsilon \omega^{2n} (r^n - r_0^n) r, \ \dot{\varphi} = -\omega \qquad (1.18)$$

Стационарное решение системы (1.18) имеет вид  $r = r_0$ ,  $\varphi = -\omega t + \varphi_0$ , или, в исходных переменных

$$x = r_0 \cos(\omega t - \varphi_0)$$

Для исследования устойчивости этого решения запишем уравнение в вариациях для первого уравнения выше полученной системы уравнений (1.18):

$$\delta \dot{r} = n \varepsilon \omega^{2n} (r_0^n) \delta r \tag{1.19}$$

Устойчивость дифференциального уравнения (1.19) имеет место при коэффициенте обратной связи ε<0.

Модуль показателя Ляпунова  $\lambda = n|\varepsilon|\omega^{2n}(r_0^n)$  монотонно возрастает при увеличении показателя степени *n*, что говорит о том, что управление одномерным осциллятором с обратной связью по энергии колебаний *E* является существенно более эффективным, чем управление с известной обратной связью по амплитуде колебаний.

Под эффективностью управления понимается выбор таких законов формирования обратных связей, которые обеспечивают наискорейший выход одномерного осциллятора на стационарный режим функционирования.

### II. Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля с управлением по энергии колебаний

Уравнения двумерного управляемого осциллятора Ван-дер-Поля получены в [2] в виде:

Такой осциллятор в свободном режиме ( $d = p = \gamma = 0$ ) описывает эллиптическую траекторию (см.рис.2) в плоскости (q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>) с произвольными главными полуосями и с произвольным наклоном большой полуоси к оси абсцисс  $q_1$ . Также, как и в одномерном случае, обратная связь должна фиксировать значение удвоенной полной энергии колебаний. В отличие от классического одномерного осциллятора Ван-дер-Поля (1.1), в котором посредством специальной обратной связи поддерживается постоянной амплитуда колебаний, в двумерном случае в соответствии с уравнениями (2.1) можно стабилизировать полную энергию колебаний (коэффициент обратной связи d), площадь эллипса (квадратура с коэффициентом обратной связи *p*), его наклон к оси абсцисс и прецессию (коэффициент у). Задачи управления в двумерной системе (2.1) гораздо содержательнее, чем в одномерной системе (1.1). Общее решение системы (2.1) при равных нулю правых частях определяет известное уравнение эллиптической траектории в параметрической форме [2]:



Рис. 2

Скорость движения по этой эллиптической траектории:

$$\dot{q}_1 = -x_1 sint + x_3 cost, \ \dot{q}_2 = -x_2 sint + x_4 cost$$
 (2.3)

Произвольные постоянные  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  в выражениях (2.2) и (2.3) в дальнейшем будут рассматриваться как медленно меняющиеся фазовые переменные, в том случае, когда правые части не равны нулю и малы в сравнении с восстанавливающей силой самого осциллятора. Два первых интеграла системы (2.1) в случае Q = 0 представляют собой полную энергию колебаний [2,3]:

$$E = \frac{1}{2} \left( q_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \right) = \frac{1}{2} \left( x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \right) = \frac{1}{2} x^2$$
(2.4)

и момент количества движения (кинетический момент):

$$K = q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2 = x_1 x_4 - x_2 x_3 \tag{2.5}$$

Площадь эллипса (квадратура) [2]:

$$\pi rk = 1/2 \oint (q_1 dq_2 - q_2 dq_2) =$$
  
= 1/2  $\int_0^{2\pi} (q_1 q_2 - q_1 q_2) dt = \pi K$  (2.6)

где *r*- большая полуось эллипса, *k* - малая полуось.

Используя формулы (2.2) и (2.3) в качестве замены переменных  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$  в уравнениях (2.1), получим, после осреднения по времени, новые уравнения в фазовых переменных

$$\dot{x} = -dSe_2 - pKe_3 - \gamma e_1$$
(2.7)  
$$S = (x^2 - 1)/2, K = x_1x_4 - x_2x_3$$
(2.8)

Модель двумерного модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля (2.1) используется обычно для изучения работы волнового твердотельного гироскопа (кварцевого полусферического резонатора). В таком осцилляторе вместо известной классической обратной связи (см. (1.1)) также будем пользоваться модифицированной обратной связью. В плоскости координат  $(q_1, q_2)$  колеблющейся точки свободный двумерный осциллятор ( $\mu = 0$ ) описывает известную эллиптическую траекторию в соответствие с уравнениями:

$$\ddot{q} + q = \mu (1 - q^2 - \dot{q}^2) \dot{q}, \ q = (q_1, q_2)^T$$
 (2.9)

Так же как и в одномерном случае, обратная связь должна фиксировать значение удвоенной полной энергии колебаний. Поэтому задачи управления в новой модифицированной системе (2.9) гораздо содержательнее, чем в известной классической одномерной системе Ван-дер-Поля вида (1.1). В предлагаемой системе помимо управления амплитудой плоских колебаний можно эффективно управлять площадью описываемого эллипса, отношением его полуосей и наклоном большой полуоси к горизонтальной оси координат. В публикациях [2,4] для системы уравнений (2.1) приведен базис инфинитезимальных эволюций ее фазового состояния в окрестности нулевой квадратуры K, соответствующей прямолинейным колебаниям в плоскости исходных координат ( $q_1, q_2$ ).

Рассмотрим подробнее базис инфинитезимальных эволюций ее фазового состояния в окрестности нулевой квадратуры K. В четырехмерном пространстве  $x \in R^4$  рассматриваемое многообразие K = 0 представляет собой трехмерный конус. Если в двумерном осцилляторе (2.1) в случае Q=0, то материальная точка x(t) в фазовом пространстве  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  движет-

ся. В конфигурационном пространстве  $q = (q_1, q_2)$  этому движению соответствует эволюция начальной (невозмущенной) траектории, эллипса, или отрезка прямой. Будем отталкиваться от начальной траектории в виде отрезка прямой, поскольку в реальных технических приложениях современной гироскопии чаще всего это и требуется.

При этом имеется четыре типа простейших эволюций:

- а) прецессия формы колебаний вращение отрезка прямой в плоскости  $q = (q_1, q_2)$ , когда существует такая вращающаяся система координат, в плоскости  $q = (q_1, q_2)$ , в которой этот отрезок неподвижен;
- б) изменение амплитуды колебаний, когда меняется лишь длина отрезка прямой;
- в) изменение частоты колебаний q(t) вдоль неподвижного отрезка прямой;
- г) разрушение формы колебаний, это такая эволюция, которая не сводится к первым трем.

Этим эволюциям прямолинейной формы колебаний в плоскости  $q = (q_1, q_2)$ , соответствуют определенные направления движения точки x(t) в фазовом пространстве. Каждому из этих направлений соответствует один из четырех векторов, образующих базис инфинитезимальных эволюций, построенный по аналогии с публикациями [2,4]:

$$e_{1} = [x_{2}, -x_{1}, x_{4}, -x_{3}]; e_{2} = [x_{1}, x_{2}, x_{3}, x_{4}]; e_{3} = [x_{4}, -x_{3}, -x_{2}, -x_{1}]; e_{4} = [x_{3}, x_{4}, -x_{1}, -x_{2}]$$
(2.10)

где  $e_1$ - определяет прецессию прямолинейной формы,  $e_2$  – вариацию амплитуды,  $e_3$  – разрушение прямолинейной формы и  $e_4$  – изменение частоты колебаний.

Вычислим матрицу, составленную из попарных скалярных произведений векторов (матрица Грама):

$$\Gamma = \begin{vmatrix} (e_1, e_1) & \dots & (e_1, e_4) \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ (e_4, e_1) & \dots & (e_4, e_4) \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 0 & 2K \\ 0 & x^2 & -2K & 0 \\ 0 & -2K & x^2 & 0 \\ 2K & 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix}$$
(2.11)

В работах [2,4] для системы (2.1) приведен базис инфинитезимальных (бесконечно малых) эволюций ее фазового состояния в окрестности заданной нулевой квадратуры ( $K = q_1q_2 - q_1q_2 = 0$ ), соответствующей прямолинейным колебаниям в плоскости (q1, q2). Компоненты этого базиса позволяют выяснить, какие трансформации претерпевает эллиптическая траектория свободного двумерного осциллятора под воздействием перечисленных в [4] сил. Задачи управления в системе (2.1) гораздо содержательнее, чем в системе (1.1). Помимо управления амплитудой плоских колебаний можно управлять площадью описываемого эллипса, отношением его полуосей и наклоном большой полуоси к оси абсцисс. В публикации [2] система (2.7) изучалась в переменных (S,K) при g=0. Было показано, что устойчивость многообразия S=0, K=0, определяется отличным от нуля коэффициентом Ляпунова по переменной S, в то время как по квадратуре колебаний Kустойчивость имеет место с нулевым коэффициентом Ляпунова, т.е. определяется лишь нелинейными членами. Для повышения эффективности управления достаточно в уравнении (2.7) увеличить амплитуду обратной связи при малых x, для чего (2.7) следует изменить

$$\dot{x} = -dSe_2 - p(K/E)e_3 = -dSe_2 - (2K/x^2)e_3 \quad (2.12)$$

Переменные *S*, *K* определены (2.8). Перейдем (2.8) от переменных *x* к переменным *S*, *K*. В этом случае имеем

$$\dot{S} = \frac{dS}{dx}\dot{x} = x\left(-dSe_2 - p\frac{2K}{x^2}e_3\right)$$
 (2.13)

В силу (2.1) переменная  $x = e_2$ , а в силу уравнений (2.11) произведение  $(e_2 \cdot e_3) = 2K$ , поэтому (2.13) переписывается в виде

$$\dot{S} = -dS(2S+1) - 4p\left(\frac{K^2}{2S+1}\right)$$
 (2.14)

Аналогично

$$\dot{K} = \frac{dK}{dx}\dot{x} = e_3 \left(-dSe_2 - p\frac{2K}{x^2}e_3\right) = -2(dSK - pK)$$
(2.15)

$$\dot{S} = -dS(2S+1) - 4p\left(\frac{K^2}{2S+1}\right), \dot{K} = -2K(dS+p)$$
(2.16)

Система уравнений (2.16) содержит особую точку S=K=0, характеризующую стационарный режим колебаний с постоянной энергией  $x^2 = 1$  и с равной нулю квадратурой  $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$ . Линеаризация системы (2.16) в окрестности этой точки приводит к простой системе уравнений

$$\dot{S} = -dS, \ \dot{K} = -2pK \tag{2.17}$$

Таким образом, рассмотренное управление приводит к линейным в окрестности стационарного режима уравнениям в вариациях с характеристическими числами -d и -2p. Поставленная выше цель достигнута. В системе уравнений (2.1) новое эффективное управление выглядит так

$$\begin{aligned} \ddot{q_1} + q_1 &= -d(E - 1/2)\dot{q_1} - p(K/E) q_2 \\ \ddot{q_2} + q_2 &= -d(E - 1/2)\dot{q_2} - p(K/E) q_1 \\ E &= 1/2 \left(q_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right), K = q_1\dot{q_2} - \dot{q_1}q_2 \end{aligned}$$
(2.18)

Двумерные уравнения Ван-дер-Поля (2.18) с учетом стабилизации значения полной энергии и квадратуры колебаний, а также с управлением прецессией стоячей волны и стабилизацией частоты автоколебаний, приобретают следующий вид

$$\ddot{q_1} + q_1 = -d(E - 1/2)\dot{q_1} - p(K/E) q_2 - \gamma \dot{q_2} + cq_1 \ddot{q_2} + q_2 = -d(E - 1/2)\dot{q_2} - p(K/E) q_1 + \gamma \dot{q_1} + cq_2 (2.19)$$

В уравнениях (2.19) перейдем от исходных переменных  $(q_1, q_2)$  к переменным (S, K) по известным формулам

$$S = 2E - 1/2 = (q_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 1/2$$
  

$$K = q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2$$

После осреднения по времени получаем уравнения вида (2.16), которые на два порядка меньше исходных уравнений [2]. Изложенная математическая модель двумерного управляемого осциллятора Ван-дер-Поля находит техническое применение в качестве новой модели волнового твердотельного гироскопа [6]. Расширенная математическая модель двумерного осциллятора Ван-дер-Поля с внешним управлением эффективно используется для изучения режимов функционирования нового волнового твердотельного гироскопа (кварцевого полусферического резонатора) [2-6]. Рассматриваемый управляемый двумерный осциллятор Ван-дер-Поля, свободный по углу прецессии, относится к ВТГ интегрирующего типа. Такой ВТГ может использоваться в автономных инерциальных системах ориентации и навигации как новый инерциальный датчик интеграла от проекции угловой скорости на ось чувствительности прибора.

Три таких интеграла, соответственно от трех проекций произвольной угловой скорости подвижного основания на взаимно ортогональные оси ВТГ являются «квазикоординатами» ориентации.

### III. ТРЕХМЕРНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ВАН-ДЕР-ПОЛЯ – БИНС МАЯТНИКОВОГО ТИПА

Модель трехмерного осциллятора Ван-дер-Поля используется для изучения функционирования, например, бесплатформенной (бескарданной) инерциальной навигационной системы (БИНС) минимальной размерности - маятникового типа [7].

Такой трехмерный изотропный осциллятор обладает совершенно новым ярким гироскопическим свойством – описываемая им эллиптическая траектория, также, как и в случае классического маятника Фуко, неподвижна в абсолютном (инерциальном) пространстве (см. рис. 3).



Рис. 3

Технически реализация такой БИНС значительно проще, чем платформенной ИНС с известным технологически сложным и дорогим кардановым подвесом [8,9].

Для классической БИНС [7] требуется: три акселерометра, три гироскопа, интеграторы линейных ускорений и кинематических уравнений ориентации Пуассона. Классическую БИНС можно значительно упростить, если удастся наблюдать оси, параллельные инерциальным осям непосредственно на самом подвижном объекте, не прибегая к помощи технологически сложной в изготовлении гиростабилизированной платформы [8, 9].

Указанный в [7, 10] способ реализации нового типа БИНС позволит строить матрицу ориентации (поворота), обходясь без традиционных гироскопов и блока интегрирования кинематических уравнений Пуассона. Реализовать эту идею принципиально нетрудно. Для этого достаточно наблюдать на борту подвижного объекта применения БИНС колебания пространственного изотропного осциллятора. Конструктив 3D- изотропного осциллятора - точечная масса, закрепленная на объекте посредством трех взаимно ортогональных «пружин» одинаковой жесткости. Если вначале предположить, что подвижный объект совершает только вращение вокруг неподвижной точки, то любое свободное движение такого 3D осциллятора представляет собой эллиптическую траекторию, не меняющую свою ориентацию по отношению к инерциальным (неподвижным) осям, как бы ни двигался подвижный объект. Если снять показание рассматриваемого 3D осциллятора (рис. 3) в момент его нахождения в максимально удаленной от точки подвеса точке эллипса М и в ближайшей к центру точке N и вычислить векторное произведение соответствующих единичных векторов  $e_1 \times e_2 = e_3$ , то матрица ориентации  $A = ||e_1, e_2, e_3||$ , составленная из этих векторов, и будет искомой матрицей поворота, переводящей подвижную (связанную с объектом) систему отсчета  $y_1, y_2, y_3$  в неподвижную инерциальную  $x_1, x_2, x_3$ .

Кроме того, в общем случае ускоренного движения центр рассматриваемого эллипса будет смещаться в сторону, противоположную ускорению, и перед выполнением указанных выше процедур следует выделить из показаний осциллятора гармоническую часть.

Оставшаяся непериодическая часть измерений, пропорциональная ускорению от активных сил, может быть использована для построения информации о движении точки подвеса 3D осциллятора, т.е. изотропный осциллятор может использоваться не только для построения матрицы поворота А, но и для измерения вектора «кажущегося» ускорения от действия активных сил [7, 10].

Для определения абсолютного ускорения объекта и реализации автономной инерциальной навигации в окрестности Земли [8,9] требуются знания гравитационного поля в окрестности перемещения самого подвижного объекта. Переходя к трем пространственным координатам  $(q_1, q_2, q_3)$  имеем наглядную (рис.4) геометрическую интерпретацию БИНС минимальной размерности.





Трехмерный изотропный осциллятор обладает уникальным свойством - описываемая им эллиптическая траектория, также как и в случае маятника Фуко, неподвижна в инерциальном пространстве. При этом инерциальные оси  $(I_1, I_2, I_3)$ , образованные большой, и малой полуосями эллипса и перпендикуляром к ним не вращаются относительно неподвижных звезд, как бы ни вращалась система  $(q_1, q_2, q_3)$  координат, жестко связанная с подвижным объектом. Это дает возможность использовать 3D- изотропный осциллятор Вандер-Поля в качестве БИНС маятникового типа минимальной размерности.

В такой инерциальной системе нет необходимости иметь триаду гироскопов и интегрировать известные кинематические уравнения Пуассона для получения информации об относительной ориентации осей измерительного и сопровождающего трехгранников. Обобщение исходного одномерного уравнения вида (1.1) на трехмерный случай в введенных трехмерных координатах  $(q_1, q_2, q_3)$  выглядит так

$$\ddot{q} + q = \mu (1 - q^2 - \dot{q}^2) \dot{q}, q = (q_1, q_2, q_3)^{\mathrm{T}}$$
(3.1)

Для того чтобы 3D-изотропный осциллятор Вандер-Поля мог быть практически реализован как пространственный гироскоп, необходимо ввести в уравнения (3.1) управляющие воздействия, сообщающие ему устойчивость по отношению к малым внешним возмущениям.

Эллиптическая траектория 3D-изотропного осциллятора вида (3.1) не является устойчивой по отношению к сколь угодно малым возмущениям. Так при малых вариациях эллиптическая траектория в общем случае перестает быть плоской и замкнутой, и описанный в [7,10] алгоритм построения матрицы ориентации (поворота) технически реализован быть не может. При этом, если возмущение мало, то выход траектории из плоскости можно интерпретировать как медленный поворот этой плоскости в инерциальном пространстве, т.е. как инструментальный "уход" построенного трехмерного гироскопа. При этом обеспечить устойчивость плоскости колебаний изотропного 3D - осциллятора, т.е. гарантировать пространственный гироскоп от "ухода" невозможно в принципе, поэтому такую проблемную задачу не будем ставить и рассматривать. С другой стороны, обеспечить орбитальную асимптотическую устойчивость некоторой выделенной эллиптической траектории в плоскости колебаний можно и этого вполне достаточно для реализуемости изложенного в публикациях [7,10] алгоритма определения ортогональной матрицы ориентации подвижного объекта. В публикации [10] представлены аналитические выкладки для построения на борту объекта матрицы поворота подвижного триэдра относительно неподвижного в случаях, когда траектория 3D- осциллятора в инерциальной системе отсчета не является ни отрезком прямой, ни окружностью. В рассматриваемой БИНС маятникового типа (минимальной размерности) вполне возможно эффективно стабилизировать эллипс с постоянной полной энергией колебаний динамической системы и постоянной площадью (квадратурой), для этого исходные уравнения (3.1) 3D-осциллятора Ван-дер-Поля должны быть дополнены следующими составляющими:

$$\ddot{q} + q = \mu (1 - q^2 - \dot{q}^2) \dot{q} + + n \left( q \times \dot{q} \times q - q \times \dot{q} \times q \right)_0 - \Gamma \dot{q}$$
(3.2)

где  $q = (q_1, q_2, q_3)^{\mathrm{T}}$  – трехмерный вектор;  $\Gamma$  – кососимметрическая матрица гироскопических сил.

Приложенные к маятнику в соответствии с уравнением (3.2) силы стабилизируют колебания пространственного осциллятора с постоянной амплитудой и квадратурой и обеспечивают выполнимость изложенных в публикациях [10,11] алгоритмов. Для практической реализации рассматриваемого способа построения новой БИНС маятникового типа необходимо воспользоваться конкретным техническим примером изотропного упругого подвеса пространственного осциллятора Вандер-Поля, приведенного в публикациях [10,11].

### IV. ТРЕХМЕРНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ВАН-ДЕР-ПОЛЯ – 3D СФЕРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНСНЫЙ ГИРОСКОП

Модель трехмерного осциллятора Ван-дер-Поля может быть использована для изучения функционирования пространственного (3D) сферического резонансного гироскопа (СРГ) или трехмерного волнового твердотельного гироскопа на основе полого сферического высокодобротного кварцевого резонатора. Пространственный осциллятор Ван дер Поля в данном случае используется для описания функционирования сферического резонансного гироскопа (СРГ) или пространственного ВТГ (3D-HRG). На поверхности такого сферического высокодобротного резонатора на одной из низших мод колебаний возбуждается и поддерживается пространственная механическая стоячая волна, которая обладает для нового гироскопа всеми необходимыми инерционными свойствами.

# Пространственный эффект инертности упругих волн на полной сфере

# *А. Уравнения колебаний упругого сферически симметричного тела*

Перейдем к рассмотрению упругих колебаний тонкой сферической оболочки. Возьмем упругое сферически симметричное твёрдое тело  $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_3)$  со свободной границей, на которое действуют массовые силы плотности  $\boldsymbol{f}$ . Главный вектор, всех сил, действующих на упругое тело,  $\int_{V} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{m}$  без ограничения общности будем полагать равным нулю. Под действием главного момента  $\int_{V} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} d\boldsymbol{m}$  рассматриваемое тело меняет свою ориентацию в пространстве ( $\boldsymbol{r}$  - радиусвектор произвольной точки тела,  $d\boldsymbol{m}$  - элемент массы,  $\boldsymbol{V}$ - область, занятая сферическим телом). Для описания упругих деформаций тонкой сферической оболочки введём систему координат  $\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_3$  связанную с рассматриваемым упругим телом так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\int_{V} x dm = 0, \quad \int_{V} r \times x dm = 0$$
 (4.1)

где  $x = (x_1 x_2 x_3)$  – упругое смещение материальной точки, в недеформированном состоянии занимавшей положение r. Условия (4.1) характеризуют координатный трехгранник, относительно которого упругое тело в среднем (по всем частицам) не перемещается и не поворачивается. <u>Ставится следующая задача</u>: зная абсолютную угловую скорость  $\omega(t)$  трехгранника  $x_1x_2x_3$  в проекциях на его же оси, определить, как ведут себя стоячие волны упругих деформаций. Запишем принцип Даламбера-Лагранжа рассматриваемого тела следуя монографии [12]

$$\int_{V} \left[ \ddot{x} + \boldsymbol{\omega} \times \left( \boldsymbol{\omega} \times (r+x) \right) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (r+x) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{x} + \frac{1}{\rho} \nabla \Pi - f \right] \delta x \times dm = 0$$
(4.2)

Здесь  $\rho$  – плотность, зависящая только от модуля радиус-вектора |r|,  $\nabla \Pi$  – градиент квадратичного функционала линейной теории упругости.

Координаты, определяющие угловое положение тела как целого, не варьируются, предполагается, что угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}(t)$  – известная функция времени. Для выбора обобщённых координат рассмотрим частный случай  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ . В монографии [12] показано, что спектр собственных колебаний свободного твёрдого тела при выполнении, введенных выше условий (4.1) дискретен. Это означает, что возрастающая последовательность частот собственных колебаний  $\boldsymbol{v}_1 \leq \boldsymbol{v}_2 \leq ...$  неограниченна, а собственные элементы  $\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{r}), ...$  соответствующие этим последовательностям частот, образуют ортонормированную систему функций, полную в конфигурационном пространстве рассматриваемой задачи:

$$\int_{V} h_n(r) h_1(r) dm = \delta_n^l \tag{4.3}$$

Это позволяет ввести независимые Лагранжевы координаты, описывающие все степени свободы при деформировании упругого тела, в общем случае  $\omega(t) \neq 0$  следующим образом:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) h_n(r) \tag{4.4}$$

Задача о собственных колебаниях сферически симметричного свободного тела допускает группу SO(3), поэтому спектр собственных частот вырожден и состоит из последовательности, по крайней мере, трехкратных частот:  $v_1 = v_2 = v_3 \le v_4 = v_5 = v_6 \le ...$  конфигурационное пространство при этом представляет собой прямое произведение трёхмерных собственных подпространств:

$$\{h_1, h_2, h_3\} \times \{h_4, h_5, h_6\} \times$$

Фиксируем номер *т* произольного собственного подпространства и введём обозначения для соответствующих обобщённых координат:

$$q_{3m-1} = u, \ q_{3m-2} = v, \ q_{3m-3} = w \ (m = 1, 2...).$$

Подставляя (4.4), а также выражение  $\delta x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta q_n h_n(r)$  в исходные тождества (4.1) и приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях  $\delta q_n$ , получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменных  $q_n$ :

$$\ddot{u} + au + bv + cw - v(\dot{\omega}, k_3) + w(\dot{\omega}, k_2) - -2\dot{v}(\omega, k_3) + 2\dot{w}(\omega, k_2) + F_1 + L_1 = 0 \ddot{v} + bu + bv + ew + u(\dot{\omega}, k_3) - w(\dot{\omega}, k_1) + +2\dot{u}(\omega, k_3) - 2\dot{w}(\omega, k_1) + F_2 + L_2 = 0 \ddot{w} + cu + ev + fw - u(\dot{\omega}, k_2) + v(\dot{\omega}, k_1) - -2\dot{u}(\omega, k_2) + 2\dot{v}(\omega, k_1) + F_3 + L_3 = 0$$

$$(4.5)$$

В системе дифференциальных уравнений (4.5) скалярные коэффициенты имеют следующий вид

$$\begin{split} a &= \int_{V} (h_{3m-2}, \omega)^{2} dm - \omega^{2}, \\ b &= \int_{V} (h_{3m-2}, \omega) (h_{3m-1}, \omega) dm, \\ c &= \int_{V} (h_{3m-2}, \omega) (h_{3m}, \omega) dm, d = \int_{V} (h_{3m-1}, \omega)^{2} dm - \\ \omega^{2}, e &= \int_{V} (h_{3m-1}, \omega) (h_{3m}, \omega) dm, \\ f &= \int_{V} (h_{3m}, \omega)^{2} dm - \omega^{2}, \\ F_{1} &= \int_{V} (\nabla \Pi, h_{3m-2}) dV, \quad F_{2} &= \int_{V} (\nabla \Pi, h_{3m-1}) dV, \\ F_{3} &= \int_{V} (\nabla \Pi, h_{3m}) dV. \end{split}$$

 $L_1, L_2, L_3$  представляют собой линейные функции обобщённых координат, соответствующих другим собственным подпространствам. Присутствие этих членов характеризует тот факт, что системы типа (4.5) для различных подпространств не являются независимыми друг от друга. При получении уравнений (4.5) было предположено для простоты, что массовые силы f ортогональны всем собственным функциям:

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f} h_n(r) dm = 0.$$

Это означает, что в силах f присутствует лишь постоянная составляющая ( $\int_V \mathbf{r} \times f dm \neq 0$ ), обеспечивающая вращение тела со скоростью  $\omega(t)$ . В выражении (4.5) векторные коэффициенты  $k_1, k_2, k_3$  имеют вид

В силу сферической симметрии выбор собственных векторов ( $h_{3m-2}, h_{3m-1}, h_{3m}$ ) можно осуществить так, чтобы выполнялись следующие тождества:

 $k_1 = \upsilon(1,0,0), k_2 = \upsilon(0,1,0), k_3 = \upsilon(0,0,1) \quad (4.6)$ 

где  $\upsilon = \pm |k_1| = \pm |k_2| = \pm |k_3| = \pm |\int_V h_{3m-1} \times h_{3m} dm|.$ 

Используя неравенство Коши-Буняковского для (4.6), получим масштабный коэффициент в диапазоне  $0 \le k \le 1$ . Подчеркнем, что для полной сферической оболочки масштабный коэффициент Брайяна носит пространственный характер. Если теперь ввести обозначения:

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \ \omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \ L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix},$$

то уравнения (4.5) можно переписать в следующей компактной векторной форме [10,13]:

$$\ddot{z} + Az + \upsilon \dot{G}z + 2\upsilon G \dot{z} + L = 0 \tag{4.7}$$

где A – симметрическая матрица позиционных сил, состоящая из коэффициентов упругих сил  $F_1, F_2, F_3$  и соответственно скалярных коэффициентов a, b, c, d, e, f.

# В. Пространственная прецессия стоячей волны на поверхности упругой сферы

Векторное уравнение (4.7) определяет пространственную эволюцию *m*-ой формы (моды) колебаний свободного сферического упругого твердого тела, вызванную наличием вращения. Эта эволюция определяется двумя обстоятельствами. Во-первых, сама форма колебаний непосредственно реагирует на вращение тела, что определяется наличием в (4.7) членов G и  $\dot{G}$ . Во-вторых, рассматриваемая форма колебаний подвергается воздействию со стороны других форм. Сразу отметим, что это воздействие является незначительным, поскольку, к примеру, при решении уравнений (4.7) методом осреднения все члены, определяемые линейными функциями обобщенных координат L, в первом приближении исчезают. Кроме того, имеет место следующий факт. Существует такая система координат  $z \rightarrow y$ : z = My, где M – зависящая от времени ортогональная матрица преобразования координат, в которой уравнение (4.7) при выполнении тождества L = 0 имеет самосопряжённую форму. В этой системе координат уравнение (4.7) допускает решение типа стоячей волны. Покажем это.

Подставляя уравнение z = My, в полученное выше выражение (4.7), найдём

$$\ddot{y} + 2M^{T}(M + kGM)\dot{y} + M^{T}(M + 2kGM + kGM) + AM)y = 0$$
(4.8)

Потребуем выполнения следующего дифференциального уравнения первого порядка, которое получено из уравнения (4.8):

$$\dot{M} = -kGM \tag{4.9}$$

В результате получим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\ddot{M} = -k\dot{G}M + k^2G^2M$$

и, подставляя его в (4.8), найдём следующее уравнение второго порядка

$$\ddot{y} + M^T (A - k^2 G^2) M y = 0.$$

Таким образом, если в неподвижном упругом полом сферическом теле возбудить пространственную механическую стоячую волну упругих колебаний с какимнибудь чистым тоном и после этого привести тело во вращение с произвольно меняющейся во времени угловой скоростью  $\omega(t)$ , то стоячая волна будет поворачиваться относительно самого тела по закону (4.9). Следует заметить, что дифференциальное уравнение первого порядка (4.9) есть известное кинематическое уравнение Пуассона. Сравним уравнение (4.9) с известным уравнением Пуассона для самого твердого тела  $\dot{N} = -GN$ , в котором ортогональная матрица N определяет ориентацию твёрдого тела в абсолютном (инерциальном) пространстве. Откуда видно, что угловая скорость стоячей волны относительно тела пропорциональна угловой скорости тела относительно пространства:

$$\Omega_0(\mathbf{t}) = -k\omega(\mathbf{t}), \qquad (4.10)$$

или для скорости механической стоячей волны относительно абсолютного пространства имеем

$$\Omega(t) = (1 - k)\omega(t) \tag{4.11}$$

Соотношение (4.10) представляет собой обобщение известного скалярного соотношения Линча-Скотта на пространственный случай. Отметим, что для полной сферической упругой оболочки коэффициент Брайана носит пространственный характер. Он определяет пропорциональность друг другу векторов угловых скоростей (4.10), в отличие от случая кольца, когда рассматривались угловые скорости плоского вращения. Стоячая волна в виде, к примеру, эллипсоида, прецессирует относительно тела с вектором угловой скорости, пропорциональным вектору угловой скорости самого тела относительно абсолютного (инерциального) пространства.

### С. Случай тонкой полной сферической оболочки

Вычисление масштабного коэффициента Брайана k замкнутой сферической оболочки осуществляется при конкретных предположениях о распределении плотности по радиусу  $\rho(r)$ . Рассмотрим случай тонкой полной сферической оболочки. В проекциях на традиционно принимаемые в теории оболочек оси u, v, w направленные по меридиану, параллели и нормали к поверхности, собственные векторы имеют вид [13,14]:

$$\boldsymbol{U}_{1} = \begin{pmatrix} A_{n} \left( \frac{dP_{n}^{k}}{d\theta} \right) \cos k \varphi \\ -A_{n}k \sin^{-1} \theta P_{n}^{k} \sin k \varphi \\ P_{n}^{k} \cos k \varphi \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{U}_{2} = \begin{pmatrix} A_{n} (dP_{n}^{k}/d\theta) \sin k \varphi \\ A_{n} \sin^{-1} k \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
(4.12)

где  $P_n^k$  – присоединённые функции Лежандра,  $\varphi, \theta$  – сферические координаты,  $A_n$  – коэффициент, зависящий от числа волн по меридиану и от частоты колебаний  $\nu$ .

Для коэффициентов  $A_n$  и частоты колебаний  $\nu$  в приближении Лэмба имеем следующие соотношения ( $\mu$  - коэффициент Пуассона) [14]:

$$A_n = \left[-2(1+\mu) + \frac{(1-\mu)\nu^2}{2}\right] \left[(1+\mu)n(n+1)\right]^{-1}$$

Частотное уравнение Лэмба имеет вид [14]:

$$(1 - \mu)\nu^4 - 2\nu^2(1 + 3\mu + n(n+1) + +4(1 + \mu)(n^2 + n - 2) = 0$$
(4.13)

Векторы (4.12) представляют собой два собственных вектора из трёх, определяющих трёхмерное собственное подпространство (при фиксированных n и k). Третий может быть получен из выписанных при помощи преобразования осей, однако для вычисления коэффициента k в этом уже нет необходимости. Переход от переменных u, v, w к принятым в настоящей работе переменным  $x_1, x_2, x_3$  выражается известной формулой преобразования координат

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Откуда имеем аналитическое выражение первого вектора

$$\boldsymbol{h}_{1} = \frac{1}{\|\boldsymbol{U}_{1}\|} \cdot \\ \begin{pmatrix} A_{n} \frac{dP_{n}^{k}}{d\theta} \cos k \,\varphi \cos \theta \cos \varphi \cos \varphi - \frac{A_{n}k}{\sin \theta} P_{n}^{k} \cos k \,\varphi \cos \theta \sin \varphi + \\ +P_{n}^{k} \cos k \,\varphi \sin \theta \\ -A_{n} \frac{dP_{n}^{k}}{d\theta} \cos k \,\varphi \sin \varphi - A_{n} \frac{k}{\sin \theta} P_{n}^{k} \sin k \,\varphi \cos \varphi \\ -A_{n} \frac{dP_{n}^{k}}{d\theta} \cos k \,\varphi \sin \theta \cos \varphi + \frac{A_{n}k}{\sin \theta} P_{n}^{k} \sin k \,\varphi \sin \theta \sin \varphi + \\ +P_{n}^{k} \cos k \,\varphi \cos \theta \end{pmatrix}$$

Аналогичное аналитическое выражение можно получить и для второго собственного вектора  $h_2$ . После чего вычисляем коэффициент Брайана  $\upsilon$  тонкой полной сферической оболочки для использования ее в качестве инерциального датчика трех квазиуглов поворота основания гироскопа относительно инерциального пространства

$$\upsilon = \left| \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \boldsymbol{h}_{1} \times \boldsymbol{h}_{2} \sin\theta \ d\theta d\varphi \right| =$$
$$= \frac{2\pi k A_{n}}{\|\boldsymbol{U}_{1}\|^{2}} \left| \left\{ \int_{0}^{\pi} \frac{dP_{n}^{k}}{d\theta} P_{n}^{k} \sin\theta \ d\theta, 0, \frac{dP_{n}^{k}}{d\theta} P_{n}^{k} \cos\theta \ d\theta \right\} \right|$$

Интеграл, определяющий первую компоненту написанного вектора, равен нулю. Для второго интеграла получим аналитическое выражение

$$\int_{0}^{n} \frac{dP_n^k}{d\theta} P_n^k \cos\theta \ d\theta = -\frac{(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}$$

Учитывая, что норма  $U_1$  имеет вид

$$\|\boldsymbol{U}_1\|^2 = \frac{2\pi}{(2n+1)} [1 + n(n+1)A_n^2] \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \quad (k \neq 0)$$

окончательно находим аналитическое выражение для коэффициента Брайана

$$\mathbf{k}_{BR} = kA_n^2 [1 + n(n+1)A_n^2]^{-1}$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда k = n = 2,  $\mu = 0$ . По выше выведенным формулам (4.13) имеем

$$v^2 = 7 + \sqrt{33}, \qquad A_n = (7 + \sqrt{33})/12 - 1/3)$$

Для полной сферической оболочки коэффициент Брайана [15], равный примерно одной четверти (k=0,25), оказывается меньше, чем он получен для кольца (или цилиндра), равного 2/5. Подчеркнём, что для полной сферической оболочки коэффициент Брайана носит пространственный характер. Он определяет пропорциональность друг другу векторов угловых скоростей (4.10), в отличие от случая кольца, когда рассматривались угловые скорости плоского вращения. Механическая стоячая волна в виде, к примеру, эллипсоида, прецессирует относительно самого тела с вектором угловой скорости, пропорциональным вектору угловой скорости тела относительно абсолютного (инерциального) пространства [13].

# V. Технические приложения в современной гироскопии

Как обычно, для создания нового работоспособного инерциального датчика ориентации, использующего пространственный эффект инертности упругих волн на сфере, необходимо создать условия устойчивого наблюдения этого явления в подвижной системе координат.

Упругая система с осевой симметрией обладает спектром двойных частот, каждой из которых соответствует пространственный парциальный осциллятор. Для осуществления инерциальных измерений достаточно возбудить один из этих пространственных осцилляторов.

# А. Резонатор пространственного интег-рирующего волнового твердотельного гироскопа

Следуя патенту [17] рассмотрим полезную модель, которая относится к области приборостроения, в частности к конструкции чувствительных элементов – резонаторов твердотельных волновых гироскопов, которые используются для определения параметров ориентации и угловых скоростей в навигационных устройствах на подвижных объектах различных классов, в частности на летательных аппаратах. Технической проблемой заявляемой полезной модели является создание резонатора пространственного интегрирующего твердотельного волнового гироскопа с длительным сроком службы в экстремальных условиях эксплуатации.

Техническим результатом является повышение надежности и долговечности резонатора пространственного интегрирующего твердотельного волнового гироскопа методом повышения однородности магнитных слоев. Указанный технический результат достигается тем, что в резонаторе пространственного интегрирующего твердотельного волнового гироскопа, содержащем концентрически размещенные одна внутри другой наружную и внутреннюю полые сферы, тонкостенную сферу, размещенную с наружной стороны внутренней сферы и выполненную охватывающей внутреннюю сферу с ее наружной стороны, обмотки электромагнитного центрирования, электроды управления и вспомогательный электрод, датчики измерения положения стоячей волны, во внутренней сфере размещен источник питания, согласно полезной модели, на наружную и внутреннюю поверхности внутренней и наружной сфер соответственно нанесены слои моноэлектрета, имеющие заряд одного знака и величины, при этом электроды управления и вспомогательный электрод расположены на слое моноэлектрета, размещенном на наружной поверхности внутренней сферы, а датчики измерения положения стоячей волны расположены на слое моноэлектрета, размещенном на внутренней поверхности наружной сферы. (см. рис. 5.).

Наиболее близким к заявляемому является резонатор пространственного интегрирующего твердотельного волнового гироскопа (см. патент РФ № 2763688 по RU 216 847 U1, кл. МПК G01С 19/56, опуб. 30.12.2021), выполненный в виде пространственного вакуумированного модуля, состоящего из концентрически размещенных одна внутри другой наружной и внутренней полых сфер из магнитного материала с взаимно- противоположным направлением намагничивания, причем во внутренней сфере размещен источник питания, обмотки электромагнитного центрирования и блок управления, а на наружной стороне внутренней сферы размещены электроды управления и вспомогательный электрод; на внутренней стороне наружной сферы размещены датчики измерения положения стоячей волны и на наружной стороне наружной сферы размещены обмотки электромагнитного центрирования.

Недостатком резонатора является сложность и трудоемкость изготовления наружной и внутренней полых сфер из магнитного материала с взаимнопротивоположным направлением намагничивания, содержащих слои магнитного материала значительной толщины, а также сложность обеспечения равномерного намагничивания магнитных слоев, что в итоге может привести к неравномерности взаимного движения сфер при неравномерном (в т.ч. ускоренном) движении подвижного объекта и, как следствие, недостаточная надежность и долговечность в экстремальных условиях эксплуатации, например, при ударных нагрузках и т.д.

Технической проблемой заявляемой полезной модели является создание резонатора пространственного интегрирующего твердотельного волнового гироскопа с длительным сроком службы в экстремальных условиях эксплуатации. Техническим результатом является повышение надежности и долговечности резонатора пространственного интегрирующего твердотельного волнового гироскопа за счет повышения однородности магнитных слоев.

Указанный технический результат достигается тем, что в резонаторе пространственного интегрирующего твердотельного волнового гироскопа, содержащем концентрические размещенные одна внутри другой наружную и внутреннюю полые сферы, тонкостенную сферу, размещенную с наружной стороны внутренней сферы и выполненной охватывающей внутреннюю сферу с ее наружной стороны, обмотки электромагнитного центрирования, электроды управления и вспомогательный электрод, датчики измерения положения стоячей волны, во внутренней сфере размещен источник питания, согласно полезной модели, на наружную и внутреннюю поверхности внутренней и наружной сфер соответственно нанесены слои моноэлектрета, имеющие заряд одного знака и величины, при этом электроды управления и вспомогательный электрод расположены на слое моноэлектрета, размещенном на наружной поверхности внутренней сферы, а датчики измерения положения стоячей волны расположены на слое моноэлектрета, размещенном на внутренней поверхности наружной сферы. Полезная модель иллюстрируется чертежом, где схематично представлена конструкция резонатора в виде пространственного вакуумированного модуля.

На чертеже рис. 5. цифрами обозначены основные элементы конструкции СРГ: 1 – наружная полая сфера; 2 – внутренняя полая сфера; 3 – тонкостенная сфера; 4 – обмотки электромагнитного центрирования; 5 – источник питания; 6 – слой моноэлектрета; 7 – электроды управления; 8 – вспомогательный электрод; 9 – датчики измерения положения стоячей волны; 10 – втулки.





Резонатор выполнен в виде пространственного вакуумированного модуля и содержит концентрически размещенные одна внутри другой наружную 1 и внутреннюю 2 полые сферы, тонкостенную сферу 3, размещенную с наружной стороны внутренней сферы 2 и выполненную охватывающей внутреннюю сферу 2 через немагнитные втулки 10. Тонкостенная сфера 3 выполнена из материала с малыми параметрами внутреннего трения (то есть высокой добротностью), например, из аморфного или нанокристаллического металла/сплава. На наружную и внутреннюю поверхности внутренней 2 и наружной 1 сфер нанесены слои моноэлектрета 6, имеющие заряд одного знака и величины, представляющие собой, например, моноэлектретную пленку. Во внутренней сфере 2 размещен источник питания 5 с преобразователем DC-AC для питания обмоток электромагнитного центрирования 4, установленных во внутренней сфере 2. Электроды управления 7 и вспомогательный электрод 8 расположены на слое моноэлектрета, размещенном на наружной поверхности внутренней сферы, а датчики измерения положения стоячей волны 9 расположены на слое моноэлектрета, размещенном на внутренней поверхности наружной сферы 1. Внутренняя 2 и наружная 1 сферы изготовлены из немагнитного материала, например, из высокопрочных композитных материалов малой плотности (р=1,45...1,6 г/см3) на основе, например, углепластиков; либо полидициклопентадиена. Резонатор СРГ работает следующим образом.

При подаче напряжения питания (включении гироскопа) на обмотки электромагнитного центрирования 4 активируется пространственный вакуумированный модуль резонатора, обеспечивая бесконтактный подвес внутренней полой сферы 2 и тонкостенной сферы 3. Для параметрического возбуждения пространственной механической стоячей волны к тонкостенной сфере 3 прикладываются две диаметрально противоположные силы, создаваемые электродами управления 7.

Количество электродов управления обусловлено особенностями конструкции ТВГ и параметрами создаваемой стоячей волны в резонаторе, т.к. эти электроды задают генерацию стоячей волны. В прототипе такие электроды использовались в количестве 16 штук, а располагались они в местах пучности стоячей волны. Под действием приложенных сил тонкостенная сфера 3 примет эллипсоидальную форму.

Приложенные силы в заданные моменты времени становятся равными нулю, а тонкостенная сфера 3, обладающая определенной жесткостью, проходя через недеформированное состояние, под действием сил инерции будет деформироваться в ортогональном направлении. Возбуждение пространственной стоячей волны в тонкостенной сфере 3 происходит в режиме автогенератора на собственной частоте колебаний. По достижении заданной амплитуды колебаний тонкостенной сферы 3 электроды управления 7 отключаются, и включается вспомогательный электрод 8, поддерживающий постоянство амплитуды колебаний в тонкостенной сфере 3 для любого положения стоячей волны относительно основания. При колебаниях тонкостенной сферы 3 изменяется площадь перекрытия электродов датчиков 9, выполняющих функцию измерения положения стоячей волны.

Выходные сигналы электродов датчиков 9, соответствующие трем компонентам вектора входной угловой скорости подвижного объекта, подаются на блок управления ТВГ. После программной математической обработки сигнала в электронном блоке вычислителя определяется угол поворота/угловая скорость объекта, на котором установлен СРГ.

Величина осевой "жесткости" пространственного вакуумированного модуля резонатора обеспечивается конструктивно на этапе проектирования, исходя из заданных параметров линейного и углового движения подвижного объекта, а также выбором параметров обмоток электромагнитного центрирования, то есть формой и количеством витков, напряжением питания, электростатическими зарядом моноэлектрета и др.; а также геометрическими размерами внутренней 2 и наружной 1 сфер из немагнитного материала, в которых на наружную и внутреннюю поверхности внутренней и наружной сферы соответственно нанесены слои моноэлектрета, имеющие заряд одного знака и величины, определяющими величину электростатических сил, характеризующих силы взаимного отталкивания.

Технический результат реализации – расширение функциональных возможностей волнового твердотельного гироскопа за счет обеспечения возможности предложенной конструкции пространственного интегрирующего датчика СРГ/SRG определять одновременно три компоненты вращательного движения подвижного объекта, характеризующие его пространственное угловое положение – параметры ориентации самого объекта.

#### VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для полной сферической упругой оболочки получен масштабный коэффициент Брайана, который равен одной четверти (k = 0.25). Данное значение масштабного коэффициента оказывается несколько меньше, чем он был ранее получен для кольца (или цилиндра), равного 0.4, или для полусферы (k = 0.312).

Особенно подчеркнем, что для полной сферической оболочки коэффициент Брайана носит пространственный характер. Он определяет пропорциональность векторов угловых скоростей друг другу, в отличие от случая кольца (цилиндра, полусферы), когда учитываются угловые скорости вращения плоскости. В трехмерном пространстве трехмерная механическая стоячая волна, реализованная в виде, например, эллипсоида вращения перемещается относительно упругого твердого тела с вектором угловой скорости, пропорциональным с коэффициентом Брайана (k = 0.25) вектору вращения самого упругого тела относительно абсолютного пространства. При этом пространственная механическая стоячая волна, реализованная на поверхности упругой двумерной сферы в виде, например, эллипсоида вращения, перемещается относительно тела с вектором угловой скорости, пропорциональным (вектору угловой скорости самого тела относительно абсолютного пространства. Ускорение пространственной стоячей волны относительно упругой сферы составляет такую же определённую долю от ускорения сферы относительно инерциального пространства.

Таким образом, для многочисленных практических применений мы имеем в одном гироскопическом устройстве весьма компактный трёхмерный инерциальный датчик угловой скорости, позволяющий одновременно измерять приращения трёх квазикоординат углов псевдоориентации, входящие в кинематические дифференциальные уравнения, интегрируя которые решаем классическую задачу Дарбу пространственной ориентации движущегося объекта в трёхмерном пространстве с использованием известных по измерениям 3-D датчика СРГ/SRG угловых скоростей тела.

#### ЛИТЕРАТУРА

- V.F. Zhuravlev, On the Formation of Feedbacks in the Spatial Oscillator of Van der Pol., Mechanics of Solids, vol. 55, p.926-931 (2020).
- [2] Журавлёв В.Ф. Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля с внешним управлением // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. №2. С. 211–222.
- [3] V.F. Zhuravlev, On the Formation of Feedbacks in the Spatial Oscillator of Van der Pol. // Прикладная математика и механика. 2020, том 84, № 2, с. 151–157
- [4] Журавлёв В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela, No. 3, р. 6– 19.[Mech. Solids (Engl. Transl.1993.)].
- [5] A. Matthews, The Operation and Mechanization of the Hemispherical Resonator Gyroscope, 2018 IEEE, pp. 7–14.
- [6] S.E. Perelyaev, V.P. Zhuravlev, S.B. Bodunov, B.P. Bodunov. New Gyroscopes of the "Generalized Foucault Pendulum" Family: Some Fundamental Issues of Theory and Applied Aspects of Its Implementation in the Engineering Practice of Modern Gyroscopy, 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, IEEE, Publication Year: 2020.
- [7] V.Ph. Zhuravlev, A Strapdown Inertial System of Minimum Dimension (A 3D Oscillator as a Complete Inertial Sensor), Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela, No.5, 5–10 (2005) [Mech. Solids (Engl. Transl.) 40 (5), 1–5 (2005)].
- [8] A.Yu. Ishlinskii, Orientation, Gyroscopes, and Inertial Navigation (Nauka, Moscow, 1976, 670.P.) [in Russian].
- [9] K. Magnus, Kreisel: Theorie und Anwendungen, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971, 527 P.
- [10] Журавлёв В.Ф. Бесплатформенная инерциальная система маятникового типа (БИНС МТ) // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 6–17.
- [11] V. Zhuravlev, S. Perelyaev, D.Borodulin, Strapdown Inertial Navigation System of Minimum Dimension (3D oscillator as a complete inertial sensor), DGON Inertial Sensors and Systems Symposium. IEEE. Publication Year: 2018, Page(s): 1–12.
- [12] В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов. «Прикладные методы в теории колебаний». М.: Наука. 1988. 325с.
- [13] D.M. Klimov, V.Ph. Zhuravlev, Y.K. Zhbanov, «Quartz hemispherical resonator (wave solid-state gyroscope)», Moscow. 2017. pp. 40–45.
- [14] Чернина В.С. Свободные колебания тонкой замкнутой сферической оболочки // Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973.
- [15] V. Zhuravlev, S. Perelyaev. The Generalized Foucault Pendulum is a 3D Integrating Gyroscopes Using the Three-Dimensional Precession of Standing Waves in a Rotating Spherically Symmetric Elastic Solid. DGON Inertial Sensors and Systems Symposium. IEEE. Publication Year: 2019, Page(s): 1–12.
- [16] Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Пространственный эффект инертности упругих волн на сфере // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 3. С. 3-6.
- [17] Переляев С.Е., Скрипник А.А., Черкасова О.А. Патент №216847 RU Российская федерация, МПК G01.С 19/58 (2006/01). Описание полезной модели. Резонатор пространственного интегрирующего твердотельного волнового гироскопа. Заявл. 14.11.2022, Опубл. 03.03.2022 г.

# Вывод уравнений динамики движения кольцевого волнового твердотельного и маятникового гироскопов методом голономной механики

В.М. Котлов

ФАУ Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем 125319, Москва, Россия ул.Викторенко 7, к.2 e-mail:<u>vadimkot366@vandex.ru</u>

Аннотация-Представлен новый взгляд на теорию кольцевого осциллятора волнового твердотельного гироскопа в той же постановке, что [1], т.е., при условии нерастяжимости средней линии кольца. Для получения инерциальной информации введенный в [1] новый физический принцип — инертные свойства упругих волн – заменяется на принцип инерциального движения упругих деформаций резонатора, которые подобны движениям струй жидкости, что позволяет организовать режимы возбуждения и измерения колебаний резонатора, исходя из закона Паскаля: «давление на жидкость передается во все стороны без изменений». Инерциальные движения упругих деформаций резонатора следуют из решений его уравнений. С другой стороны, на их основе [2, стр. 175] строится бесплатформенная инерциальная навигационнная система маятникового типа.

Ключевые слова—неголономность, волновой твердотельный гироскоп (ВТГ), датчик угловой скорости (ДУС), интегрирующий ВТГ.

#### I. Введение

В основании принципа функционирования волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) лежит эффект инертности упругих волн: "...наблюдая в 1890 г. в микроскоп колеблющуюся кромку "звенящего" тонкостенного бокала, английский механик Дж.Х.Брайан обнаружил, что при вращении вокруг ножки бокала число узлов стоячей волны, проходящей через объектив микроскопа, меньше числа поворотов ножки бокала". Наблюдаемое "проскальзывание" между углом поворота стоячей волны и углом поворота тела ножки характеризуется как свойство "инертности" стоячей волны гибких колебаний материала тонкостенного бокала, которое свидетельствует о возможности построения датчика углового разворота относительно инерциальной системы отсчета. Современная теория гироскопического датчика на основе одноосного кольцевого резонатора ВТГ разработана в 80-х годах двадцатого века в известных работах Д.М.Климова и В.Ф. Журавлева [1,2].

Однако попытки адаптации этой оригинальной теории отечественными и зарубежными вузовскими учеными, инженерами-разработчиками и конструкторами применительно к инерциальным датчикам ориентации на основе ВТГ не увенчались должными успехами. К причинам такого объективно неэффективного положения дел следует отнести, прежде всего, трудности использования инженерами достаточно сложного аппарата математической физики и уравнений шестого порядка в частных производных. К трудностям разработки и применения современной теории ВТГ, прежде всего, следует отС.Е. Переляев Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН 119526, Москва, Россия Проспект Вернадского, 101-1 e-mail: ipm@ipmnet.ru

нести следующие особенности задачи построения динамических уравнений движения.

**Во-первых**, неголономность задачи построения динамических уравнений движения тела тонкостенного гибкого кольца, которое является основным чувствительным элементом ВТГ.

Условие, при котором ставится задача построения динамических уравнений движения тонкостенного гибкого кольца – условие нерастяжимости средней линии кольца, которое является кинематическим условием (на изменение координат), т.е., по классификации Г.Герца, это неголономное условие.

**Во-вторых**, условие нерастяжимости средней линии кольцевого резонатора вводится в нелинейной форме ([1] стр.18, ф.(2.3)):

$$\left(\frac{\partial v[\tau,\phi]}{\partial \phi} + R + r[\tau,\phi]\right)^2 + \left(\frac{\partial r[\tau,\phi]}{\partial \phi} - v[\tau,\phi]\right)^2 = R^2$$
(1.1)

где R,  $\phi$  – радиус и угловая координата кольца, r, v – малые деформации точки кольца вдоль его радиуса и перпендикулярно к нему,  $\tau = \kappa$  t-нормализованное время,

До сих пор в мировой практике способ решения задачи с нелинейным неголономным условием не разработан. Более того, как пишет автор [1], неголономная задача с нелинейным неголономным условием с физическим содержанием еще даже не поставлена.

**В-третьих**, движение упругой деформации в кольцевом резонаторе определяется двумя параметрами - местом расположения упругого элемента внутри резонатора и временем его движения, так что динамические уравнения должны быть уравнениями в частных производных по этим параметрам.

В [1] динамические уравнения представлены как уравнение 6-го порядка в частных производных, а его решение рассматривается только в форме разложения в двойной ряд Фурье по переменным  $\{\tau, \phi\}$ . Для построения гироскопического датчика в решении принималась во внимание только одна гармоника по  $\phi$  - (вторая форма колебаний  $2\phi$ ) [3]:

$$r[\tau, \varphi] = a[\tau] \operatorname{Sin}[2\varphi + \psi[\tau]] \operatorname{Cos}[n\tau] + b[\tau] \operatorname{Cos}[2\varphi + \psi[\tau]] \operatorname{Sin}[n\tau], \quad (1.1)$$

уравнение для угла  $\psi[\tau]$  есть:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\psi[\tau] = \Omega[\tau] \tag{1.2}$$

 $\Omega[\tau] = \frac{\Omega o[\tau]}{\kappa}$  – нормализованная угловая скорость кольца, к – коэффициент при потенциальной энергии (см. [1], с. 1)

Целью настоящей работы является построение динамических уравнений для движения упругих деформаций кольцевого резонатора ВТГ в той же постановке, что [1]. Вывод уравнений динамики производился при учете условия нерастяжимости средней линии резонатора, в процессе вывода доказывается голономность условия нерастяжимости.

Отметим, что учет голономности упрощает синтез динамических уравнений движения одноосного кольцевого ВТГ, их, в частности, можно получить, применяя компьютерную систему аналитических преобразований. При наложении условия нерастяжимости как голономного на функцию Лагранжа для одноосного кольцевого ВТГ синтезированы уравнения движения в форме системы трех дифференциальных уравнений, второго порядка каждое.

Функции Лагранжа, равной кинетической энергии тонкого упругого кольца во времени отвечает система первых двух дифференциальных уравнений, функции Лагранжа, равной потенциальной энергии, отвечает оставшееся третье дифференциальное уравнение.

Полученная в настоящей работе система трех дифференциальных уравнений в целом эквивалентна уравнению шестого порядка в частных производных для одноосного кольцевого резонатора [1, (1.26)]. Причем система двух первых дифференциальных уравнений эквивалентна обыкновенным дифференциальным уравнениям с полной производной по времени, оставшееся третье дифференциальное уравнение эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению с полной производной по углу.

Но, в отличие от [1], из решений системы трех дифференциальных уравнений следует, что инерциальная информация, определяющая гироскопический эффект, зависит не от инертных свойств волн упругих колебаний, а от инерциального движения деформаций резонатора.

Инерциальные движения упругих деформаций резонатора, входящих в кинетическую энергию, подобны движениям струй жидкости, которые в инерциальном пространстве представляют собой прямые линии без учета силы тяжести (или параболы с его учетом).

# II. Доказательство голономности условия нерастяжимости средней линии тонкого кольцевого резонатора

Условие нерастяжимости средней линии кольцевого резонатора переводится из нелинейной формы в общем виде в линейную относительно переменных  $\frac{\partial v[\tau,\phi]}{\partial \phi}$ ,  $\frac{\partial r[\tau,\phi]}{\partial \phi}$ ,  $r[\tau,\phi]$ ,  $v[\tau,\phi]$  путем введения нового угла Q:

$$\frac{\partial v[\tau,\phi]}{\partial \phi} + R + r[\tau,\phi] = R \operatorname{Cos}[Q],$$

$$\frac{\partial r[\tau,\phi]}{\partial \phi} - v[\tau,\phi] = R \operatorname{Sin}[Q]$$
(2.2)

т.е., учет условий нерастяжимости можно задать как наложение линейного преобразования:

$$Us[vs, rs] = \begin{cases} vs \to -r - R (1 - Cos[Q]), \\ rs \to v + R Sin[Q] \end{cases}$$
(2.3)

где rs= $\frac{\partial r}{\partial \phi}$ , vs= $\frac{\partial v}{\partial \phi}$ 

Методом Даламбера, модифицированного механиком Сусловым Г.К. к системам с неинтегрируемыми связями ([4], п. 299, стр. 596) получим систему уравнений динамики кольцевого ВТГ.

Для этого необходимо учесть нерастяжимость средней линии кольца при получении вариации плотности функции Лагранжа L:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta[L] dt d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta[(T-U)] dt d\varphi$$

где Т – плотность кинетической энергии движения гибкого кольца, U-плотность потенциальной энергии;

$$T = \frac{1}{2} ((v^{\circ} + (R + r)\Omega)^2 + (r^{\circ} - v\Omega)^2, \qquad (2.4)$$

$$U = \kappa^{2} \frac{1}{2} (rss - vs)^{2}, \qquad (2.5)$$
$$v^{\circ} = \frac{\partial}{\partial \tau} v, r^{\circ} = \frac{\partial}{\partial \tau} r, rs = \frac{\partial r}{\partial \phi}, vs = \frac{\partial v}{\partial \phi}, rss = \frac{\partial rs}{\partial \phi}$$

Вначале применим видоизменный метод Даламбера к плотности кинетической энергии Т (2.4). При учете условий нерастяжимости средней линии кольца (2.3) переменные {  $r^{\circ}, v^{\circ}, r, v$ } и плотность кинетической энергии Т не меняется, следовательно, изменений как самой Т, так и вариации плотности кинетической энергии не происходит.

Значит, кинематическая связь, отвечающая условию нерастяжимости, не влияет на выражение (2.4), не приводит к появлению дополнительных сил и, следовательно, является голономной для плотности кинетической энергии. Далее, применим видоизменный метод Даламбера к плотности потенциальной энергии U (2.5). Изменение вариации плотности потенциальной энергии при учете условий кинематической связи (2.3) по Суслову Г.К. есть:

$$\delta[U] = \frac{\partial U}{\partial (rss - vs)} (d[\delta[rs - v]] - \delta[d[rs - v]]) = = (rss - vs) (d[\delta[rs - v]] - \delta[d[rs - v]]), \quad (2.6)$$

где: d[] – операция взятия дифференциала, δ[] – операция взятия вариации.

При наложении условий нерастяжимости средней линии кольца (2.3) на правую часть (2.6), получим, что первый множитель у (2.6) изменится как:

$$(rss - vs) = \frac{\partial [rs - v]}{\partial [\varphi]} \xrightarrow{Us[vs, rs]} \frac{\partial [RSin[Q]]}{\partial [\varphi]}.$$
 (2.7)

а второй множитель в правой части (2.6) будет нулевым:

$$d[\delta[rs - v]] - \delta[d[rs - v]] \xrightarrow{Us[vs, rs]} d[\delta[RSin[Q]]] - \delta[d[RSin[Q]]] = 0.$$

Следовательно, правая часть (2.6), как произведение этих двух сомножителей, равна нулю, значит, равна нулю и  $\delta$ [U]. Итак, изменений вариации плотности потенциальной энергии при учете условий нерастяжимости средней линии не происходит.

Следовательно, кинематическая связь, отвечающая условию нерастяжимости средней линии кольца, является голономной для гармонических осцилляторов, соответствующих как T, так и U.
## III. ПОЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Таким образом, после учета голономного кинематического условия нерастяжимости средней линии кольца плотность функции Лагранжа с учетом (2.7) будет выглядеть:

$$L = \frac{1}{2} ((v^{\circ} + (R + r)\Omega)^{2} + (r^{\circ} - v\Omega)^{2}) - \frac{1}{2} \left( R \frac{\partial \text{Sin}[Q]}{\partial \varphi} \right)^{2}, \qquad (3.1)$$

В соответствии с принципом стационарного действия Гамильтона ([5], гл.6, стр. 320), уравнения движения кольца следуют из условия равенства нулю вариации интеграла от полученной плотности функции Лагранжа (2.2):

$$\int_{\phi^{1}}^{\phi^{2}} \int_{t^{1}}^{t^{2}} L \, d\tau \, d\phi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\phi^{1}}^{\phi^{2}} \int_{\phi^{1}}^{\phi^{2}} (v^{\circ} + (R + r)\Omega)^{2} + (r^{\circ} - v\Omega)^{2} \, d\tau \, d\phi +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\phi^{1}}^{\phi^{2}} \int_{t^{1}}^{t^{2}} (R \frac{\partial Sin[\theta]}{\partial \phi})^{2} \, d\phi \, d\tau. \qquad (3.2)$$

Перейдем от плотности функции Лагранжа к плотности функции Гамильтона используя преобразования Рауса ([6], часть VI, §66, стр. 279). На основе преобразования Рауса подынтегральное выражение первого слагаемого у (3.2) заменяется по правилу:

$$\frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{\mathbf{v}} + (\mathbf{R} + \mathbf{r})\Omega \right)^{2} + \left( \overset{\circ}{\mathbf{r}} - \mathbf{v}\Omega \right)^{2} \right) d[\tau] d[\phi] \rightarrow$$
  

$$\rightarrow \left( \left( \overset{\circ}{\mathbf{v}} + (\mathbf{R} + \mathbf{r})\Omega \right) (d[\mathbf{v}] + (\mathbf{R} + \mathbf{r})\Omega d[\tau]) + \left( \overset{\circ}{\mathbf{r}} - \mathbf{v}\Omega \right) (d[\mathbf{r}] - \mathbf{v}\Omega d[\tau]) - \left( \overset{\circ}{\mathbf{r}} + (\mathbf{R} + \mathbf{r})\Omega \right)^{2} + \left( \overset{\circ}{\mathbf{r}} - \mathbf{v}\Omega \right)^{2} d[\tau]) d[\phi] \quad (3.3)$$

Подынтегральное выражение второго слагаемого у (2.2) заменяется по правилу:

$$\frac{1}{2} \left( R \frac{\partial Sin[\theta]}{\partial \varphi} \right)^2 d[\varphi] \ d[\tau] \rightarrow$$
$$\rightarrow \left( \left( R \frac{\partial Sin[Q]}{\partial \varphi} \right) d[RSin[Q]] - \frac{1}{2} \left( R \frac{\partial Sin[\theta]}{\partial \varphi} \right)^2 d[\varphi] \right) d[\tau]$$
(3.4)

Из гамильтоновых дифференциальных форм (см. в 3.3, 3.4 части справа от «→») получим, что система уравнений динамики кольцевого резонатора состоит из двух независимых между собой систем уравнений движения.

Первая из (3.3), при условии постоянства  $\varphi$ :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\mathbf{r}} - \left(2\overset{\circ}{\mathbf{v}}\Omega + v\Omega + (\mathbf{r} + \mathbf{R})\Omega^{2}\right) = 0, \\ \Box_{\circ\circ} \\ \mathbf{v} - \left(-2\overset{\circ}{\mathbf{r}}\Omega - (\mathbf{r} + \mathbf{R})\Omega + v\Omega^{2}\right) = 0. \end{cases}$$
(3.5)  
rge:

$$\overset{\circ\circ}{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{r}^{\circ}, \overset{\circ\circ}{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{v}^{\circ}, \overset{\circ}{\mathbf{\Omega}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \Omega$$
  
Вторая из (3.4), при условии постоянства т:

$$R\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \operatorname{Sin}[Q] = 0 \tag{3.6}$$

IV. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА И ИХ СВОЙСТВА

Решение систем уравнений (3.5, 3.6) описывает движение деформации кольцевого резонатора:

$$\{r[\tau, \Delta \varphi] + R, v[\tau, \Delta \varphi]\} =$$

$$= \{\Delta Xno + Vxn \tau, \Delta Yno + Vyn \tau\}.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \cos[\Delta \varphi + \psi] & -\sin[\Delta \varphi + \psi] \\ \sin[\Delta \varphi + \psi] & \cos[\Delta \varphi + \psi] \end{bmatrix} + f[\Delta \varphi] \quad (4.1)$$

где

$$\begin{split} f[\Delta \varphi] &= \{a, b\}. \begin{bmatrix} Cos[\Delta \varphi] & -Sin[\Delta \varphi] \\ Sin[\Delta \varphi] & Cos[\Delta \varphi] \end{bmatrix} + \\ &+ \{c[\Delta \varphi], d[\Delta \varphi]\} & (4.2) \\ &a = R(-Cos[Qo] + \epsilon Sin[Qo]), \\ b &= R(Cos[Qo] - \epsilon Sin[Qo])Tan[Qo], \\ c[\Delta \varphi] &= \frac{1}{2}R \operatorname{Sec}[Qo](1 + \epsilon \Delta \varphi(1 - Cos[2Qo])) \\ &- \epsilon \operatorname{Sin}[2Qo]), \\ d[\Delta \varphi] &= R \left((-1 + \epsilon \Delta \varphi) \operatorname{Cos}[Qo] \\ &+ \epsilon \operatorname{Sin}[Qo]\right)Tan[Qo]. \\ &\Delta \varphi = (\varphi - \varphi o), \\ RSin[Qo] &= (RSin[Q]) \\ &\varphi \rightarrow \varphi_{o}, (RSin[Qo])_{so} = \\ &= \left(\frac{d}{d\varphi} RSin[Q]\right) \\ &\epsilon = -\frac{(RSin[Qo])_{so}}{RSin[Qo]}, \end{split}$$

Qo,  $\phi$ o — начальные значения параметров, величины { $\Delta$ Xno,  $\Delta$ Yno, Vxn, Vyn} – постоянные.

Раскладывая деформацию (4.1) в ряд Фурье по переменным  $\{\tau, \Delta \phi\}$  получим, что она дает полное волновое движение, т.е., движение, содержащее в себе все члены разложения в ряд Фурье по гармоникам  $\{Sin[k\phi], Cos[k\phi]\}, k = 1, 2, ...$ 

В точке резонатора, где находится максимальное значение деформации (4.1), она будет удовлетворять соотношению:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \{ r[\tau, \Delta \varphi] + \mathrm{R}, v[\tau, \Delta \varphi] \} = \{0, 0\}, \quad (4.3)$$

Для нее существует зависимость, позволяющая определить проекцию абсолютной угловой скорости на ось чувствительности резонатора:

$$\Omega = \frac{Vyn\Delta Xn - Vxn\Delta Yn}{\Delta Xn^2 + \Delta Yn^2}$$
(4.4)

Из (4.1) для каждого  $\Delta \phi i$  = Const получаем выражение  $\psi$  как интеграла от проекции абсолютной угловой скорости на ось чувствительности:

$$\Delta \varphi i + \psi[\tau] =$$

$$= \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{\Delta \operatorname{Yno} + \operatorname{Vyn} \tau}{\Delta \operatorname{Xno} + \operatorname{Vxn} \tau} \right] - \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{\nu[\tau, \Delta \varphi i]}{r[\tau, \Delta \varphi i] + R} \right] (4.5)$$

Итак, из решений системы трех дифференциальных уравнений (3.5),(3.6) следует, что инерциальная информация, определяющая гироскопический эффект, зависит не от инертных свойств волн упругих колебаний, а от инерциальных движений деформаций резонатора, что:

- дает возможность построить датчик, измеряющий как проекцию абсолютной угловой скорости на ось чувствительности (4.4), так и интеграл от нее (4.5),
- позволяет формировать инерциальный датчик и без волны, как, например маятник-гироскоп в [2], стр.184 (объяснение эффекта на стр.176, рис. 32).

При этом необходимо отметить, что движения упругих деформаций резонатора, входящих в кинетическую энергию, подобны движениям струй жидкости, что позволяет организовать режимы возбуждения и измерения колебаний резонатора, исходя из закона Паскаля: «давление на жидкость передается во все стороны без изменений».

К новым результатам теории одноосного кольцевого резонатора ВТГ, следует отнести следующее:

- доказательство интегрируемости кинематического условия нерастяжимости средней линии кольцевого резонатора и упрощение подхода к выводу уравнений динамики движения одноосного ВТГ;
- получение уравнений динамики движения одноосного ВТГ как обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, независимых между собой по времени и углу,
- инерциальная информация, определяющая гироскопический эффект, зависит от инерциального движения деформаций резонатора, что дает обоснование инертности упругих волн.

Из полученных в данном исследовании дифференциальных уравнений динамики движения кольцевого резонатора следует:

- возможность разработки как инерциального датчика угла поворота (интегрирующего гироскопа), так и ДУС без возбуждения механических стоячих волн упругих колебаний кромки кольцевого резонатора;
- возможность использования полученных аналитических выражений с целью обработки измеряемых первичных параметров для определения угловой скорости и/или интеграла от угловой скорости основания гироскопа;
- возможность формирования механических стоячих волн как изгибных колебаний кромки кольцевого резонатора ВТГ, которые могут служить датчиком инерциальной информации, как и инертное твердое тело.
- возможность формирования полной волны гибких колебаний резонатора.
- при формировании движения упругих деформаций резонатора, исходя из подобия их движения с движением жидкости, использовать закон Паскаля.

#### Литература

- [1] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985.
- [2] Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К. Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Ким Л.А., 2017.
- [3] Klimov D.M., On The Motion of an Elastic Inextensible Ring, Mech.Solids, Vol.5. No.6, 2021, pp. 930-931.
- [4] Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.-Л: ГИТТЛ, 1946.
- [5] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965.
- [6] Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001.

# Аналитическое моделирование и проектирование теплового акселерометра на основе обобщенной сферической модели

М.А. Басараб НУК «Информатика и системы управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана Москва, Россия basarab@bmstu.ru A. Жиани Институт электроники и систем, Университет Монпелье Монпелье, Франция alain.giani@ies.univ-montp2.fr

Аннотация—Получены явные аналитические выражения для стационарного трехмерного распределения тепла в полости теплового акселерометра на основе обобщения известного аналитического подхода, ранее предложенного Харди для случая двух концентричных сфер. Изучено влияние искажений геометрии внутреннего источника тепла по сравнению с идеальной сферической формой.

#### Ключевые слова—тепловой акселерометр, моделирование.

#### I. Введение

Тепловые акселерометры [1-3] имеют ряд важных преимуществ перед обычными датчиками ускорения на основе микроэлектромеханических систем (МЭМС). В частности, благодаря отсутствию движущихся механических частей, конвективные акселерометры обладают высокой надежностью, дешевизной производства, а также способностью выдерживать и измерять высокие нагрузки, вызванные, например, ударным воздействием. Принцип работы теплового акселерометра основан на эффекте конвекции жидкости или газа в замкнутой полости под действием внешних сил инерции. Его характеристики, например чувствительность, зависят от множества как физических параметров жидкости или газа, так и от конструкции и геометрии полости.

Поскольку на практике трудно реализовать дорогостоящие прецизионные эксперименты, особенно для устройств МЭМС, обычно для исследования и оптимизации теплового акселерометра используется математическое моделирование. Два подхода являются наиболее популярными для решения соответствующей задачи вычислительной гидродинамики (CFD) внутри резонатора теплового акселерометра. Первый, полуаналитический, основан на разложении неизвестных функций в ряд по соответствующим базисным функциям. Неизвестные коэффициенты разложения определяются с помощью итерационных процедур. Поскольку найти подходящий базис, удовлетворяющий соответствующим граничным условиям, сложно, обычно используют два типа геометрий: модель концентрических цилиндров Ходнетта-Бишопа [5], которую также можно рассматривать как двумерную модель кругового кольца, и концентрическую сферическую модель [6,7]. Хотя в случае симметрии по азимутальному углу модель Харди также двумерна, она дает результаты, более близкие к полученным экспериментально. Из-за ограниченности простых цилиндрической и сферической геометрий наиболее популярным способом моделирования динамики теплового акселероФ. Комбетт Институт электроники и систем, Университет Монпелье Монпелье, Франция philippe.combette@ies.univmontp2.fr Б.С. Лунин Химический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова Москва, Россия luninboris@yandex.ru

метра является метод конечных элементов (МКЭ). Однако последний метод имеет существенный недостаток, связанный с необходимостью громоздкого представления сеточных решений в областях сложной формы. Некоторые авторы также отмечают существенное влияние размера сетки и ее топологии на результаты вычислений.

В данной работе предлагается новая методика, обобщающая идею Харди и позволяющая применить его подход к произвольным полостям со сферической симметрией. В качестве начального приближения можно использовать известное аналитическое решение для стационарного теплообмена, например, полученное методом функций Грина в сферической полости с внутренним источником тепла другой формы.

Для численных экспериментов рассмотрены два примера. Первая – эталонная модель концентрических сфер Харди. Сравнение наших результатов с эталонными позволяет сделать вывод об адекватности предложенной методики и продемонстрировать ее эффективность по сравнению с МКЭ. Вторая задача более реалистична, при этом геометрия внутренней границы незначительно меняется от сферической до эллипсоидальной. Внешняя граница остается сферической, поскольку имеет хорошее приближение к некоторым реальным геометриям устройств, включая кубическую и др., с учетом большого соотношения между внешним и внутренним радиусами или характерной длиной.

Полученные явные аналитические выражения позволяют оценить влияние геометрических соотношений элементов устройства на его характеристики и оптимизировать его конструкцию.

#### II. Принцип действия

Устройство включает в себя нагревательный элемент, создающий вокруг себя симметричное тепловое поле. На противоположных сторонах этого элемента расположены термодатчики S1 и S2 (рис. 1). При отсутствии внешнего ускорения система уравновешена, и тепловые датчики выдают одинаковый сигнал.

При наличии внешнего ускорения профиль температуры изменяется, что приводит к разности температур  $\Delta T$  между датчиками в зависимости от величины ускорения. Ненулевая разница температур между тепловыми датчиками преобразует входное сопротивление в выходной электрический сигнал.



Рис. 1. Принцип действия теплового акселерометра

# III. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Система осесимметричных безразмерных уравнений для функции тока  $\psi$  и температуры T в сферических координатах  $(r, \theta)$  имеет вид

$$D^{4}\psi = -\operatorname{Ra} r \sin \theta \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{Pr}} \sin \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{D^{2}\psi}{r^{2} \sin^{2}\theta},$$
(1)  
$$\nabla^{2}T = \frac{1}{r^{2} \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right),$$
(1)  
$$u = \frac{1}{r^{2} \sin^{2}\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \upsilon = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

где Pr – число Прандтля, Ra – число Рэлея;

$$D^{2} = \frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2}}{\partial \theta^{2}} - \frac{\cot\theta}{r^{2}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad D^{4}\psi = D^{2}(D^{2}\psi),$$
$$\nabla^{2} = \frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2}}{\partial \theta^{2}} + \frac{\cot\theta}{r^{2}} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Внешняя ("холодная") граница  $\partial \Omega_o$  при  $r = r_o$ ( $r_o > 1$ ) соответствует границе полости прибора, а внутренняя ("горячая") граница  $\partial \Omega_i$  при r = 1 - границе области внутреннего источника тепла. Таким образом, имеем следующий набор краевых условий:

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{Ha} \quad \partial \Omega,$$
  

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \pi,$$
  

$$T = 1 \quad \text{Ha} \quad \partial \Omega_i, \quad T = 0 \quad \text{Ha} \quad \partial \Omega_o.$$
(2)

#### IV. РЕШЕНИЕ ХАРДИ

Харди [6,7] предложил следующую итерационную схему:

$$T = \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{Ra}^{j} T_{j}(r,\theta), \quad \psi = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Ra}^{j} \psi_{j}(r,\theta).$$
(3)

которая приводит к последовательности систем уравнений на каждом шаге *j*:

$$\nabla^{2}T_{j} = \frac{1}{r^{2}\sin\theta} \sum_{k=1}^{j} \left( \frac{\partial\psi_{k}}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial\psi_{k}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) T_{j-k},$$

$$D^{4}\psi_{j} = -r\sin\theta \left( \sin\theta \frac{\partial T_{j-1}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial T_{j-1}}{\partial\theta} \right) + \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\Pr} \sin\theta \sum_{k=1}^{j-1} \left( \frac{\partial\psi_{k}}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial\psi_{k}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \frac{D^{2}\psi_{j-k}}{r^{2}\sin^{2}\theta}.$$

Краевые условия (2) принимают вид

 $T_i$ 

$$\psi_{j} = \frac{\partial \psi_{j}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on} \quad \partial \Omega,$$
  

$$\psi_{j} = \frac{\partial \psi_{j}}{\partial \theta} = \frac{\partial T_{j}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = 0, \pi; \quad (5)$$
  

$$= \begin{cases} 1, \quad j = 0; \\ 0, \quad j > 0 \quad \text{on} \quad \partial \Omega_{i}, \quad T_{j} = 0 \quad \text{on} \quad \partial \Omega_{o}. \end{cases}$$

Тривиальная функция тока, удовлетворяющая краевым условиям (5), есть  $\psi_0 \equiv 0$ . Таким образом, первое уравнение, которое необходимо решить:

$$\nabla^2 T_0 = 0. ag{6}$$

Для случая концентрических сфер решение (6) хорошо известно:

$$T_0 = 1 - \frac{r_o}{r} \frac{r - 1}{r_o - 1}.$$
 (7)

Подставив (7) во второе уравнение в (4), получим

$$\psi_1 = \left(B_4 r^4 + B_3 r^3 + B_2 r^2 + B_1 r + B_0 + B_{-1} r^{-1}\right) \sin^2 \theta, \quad (8)$$

а подставив (7) и (8) в первое уравнение в (4), имеем

$$T_{1} = \left(C_{2}r^{2} + C_{1}r + C_{0} + C_{-1}r^{-1} + C_{-2}r^{-2} + C_{-3}r^{-3} + \hat{C}_{1}r\ln r\right)\cos\theta.$$
(9)

Соответствующие выражения для коэффициентов  $B_k, C_k, \hat{C}_1$ , полученные в явном виде, представлены в [6,7]. В [7] также приведены более сложные выражения для высших аппроксимаций  $T_i, \psi_i$  (j > 1).

#### V. Возмущенная геометрия

Пусть внутренняя граница описывается общим выражением  $r = r_i(\theta)$ . Для произвольной достаточно гладкой осесимметричной границы, функция  $r_i(\theta)$  может быть разложена в ряд Фурье

$$r_i(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \cos 2n\theta.$$
 (10)

В данной работе мы ограничимся первыми двумя членами разложения Фурье (10), рассматривая следующую геометрию внутренней границы модели:

$$r_i(\theta) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\cos 2\theta = 1 - \varepsilon \cos^2 \theta.$$
(11)

Мы также будем рассматривать относительно малые отклонения от уравнения идеальной границы r = 1, т.е.

 $0 \le \varepsilon << 1$ . По аналогии с (7) общее выражение для приближения температуры 0-го порядка в возмущенной области, удовлетворяющее граничным условиям для температуры в (2), можно записать в виде

$$\tilde{T}_0 = 1 - \frac{r_o}{r} \frac{r - r_i(\theta)}{r_o - r_i(\theta)}.$$
(12)

Подставляя (11) в (12) и пренебрегая членами порядка  $O(\varepsilon^2)$ , получим

$$\tilde{T}_0 = T_0 + T_{0\varepsilon}, \qquad (13)$$

где

$$T_{0\varepsilon} = \tau (1 + \cos 2\theta), \quad \tau(r) = \varepsilon \frac{r_o}{2(r_o - 1)^2} \left( 1 - \frac{r_o}{r} \right). \tag{14}$$

Для приближения функции тока 1-го порядка имеем

$$D^{4} \tilde{\psi}_{1} = -r \sin \theta \left( \sin \theta \frac{\partial T_{0}}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T_{0}}{\partial \theta} \right) - r \sin \theta \left( \sin \theta \frac{\partial T_{0\varepsilon}}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T_{0\varepsilon}}{\partial \theta} \right).$$
(15)

Положив

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \psi_{1\varepsilon}, \qquad (16)$$

где  $\psi_1$  – известное решение для геометрии концентрической сферы, (8), необходимо будет решить уравнение

$$D^{4}\psi_{1\varepsilon} = -r\sin\theta \left(\sin\theta \frac{\partial T_{0\varepsilon}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial T_{0\varepsilon}}{\partial \theta}\right)$$
(17)

с краевыми условиями

$$\psi_{1\varepsilon} = \frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on} \quad \partial \Omega_o,$$
  
$$\psi_{1\varepsilon} = -\psi_1, \quad \frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{on} \quad \partial \Omega_i,$$
  
$$\psi_{1\varepsilon} = \frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = 0, \pi.$$
 (18)

Подставляя (14) в правую часть (17), получаем

$$D^{4}\psi_{1\varepsilon} = \varepsilon \frac{r_{o}}{8(r_{o}-1)^{2}} \left(2 - \frac{r_{o}}{r}\right) (1 - \cos 4\theta).$$
(19)

Решение (19) можно найти в виде

$$\psi_{1\varepsilon}(r,\theta) = \alpha_4(r)\cos 4\theta + \alpha_2(r)\cos 2\theta + \alpha_0(r), \qquad (20)$$

где  $\alpha_i$  (*i* = 0,2,4) – неопределенных функций, которые по аналогии с решением Харди могут быть представлены в виде линейных комбинаций основных функций  $r^m \ln^n r$  с неизвестными коэффициентами.

Можно показать, что после подстановки (20) в левую часть (19) и приравнивания членов, соответствующих одним тем же гармоникам, имеем

$$\alpha_{4}(r) = a_{-3}^{(4)}r^{-3} + a_{-1}^{(4)}r^{-1} + a_{3}^{(4)}r^{3} + a_{4}^{(4)}r^{4} + a_{6}^{(4)}r^{6} + \hat{a}^{(4)}r^{4} \ln r,$$

$$\alpha_{2}(r) = a_{-3}^{(2)}r^{-3} + a_{-1}^{(2)}r^{-1} + a_{1}^{(2)}r + a_{2}^{(2)}r^{2} + a_{3}^{(2)}r^{3} + a_{4}^{(2)}r^{4} + a_{6}^{(2)}r^{6} + \hat{a}^{(2)}r^{4} \ln r,$$

$$\alpha_{0}(r) = a_{-3}^{(0)}r^{-3} + a_{-1}^{(0)}r^{-1} + a_{0}^{(0)} + a_{1}^{(0)}r + a_{2}^{(0)}r^{2} + a_{3}^{(0)}r^{3} + a_{4}^{(0)}r^{4} + a_{6}^{(0)}r^{6} + \hat{a}^{(0)}r^{4} \ln r.$$
(21)

Коэффициенты

$$\{a^{(4)}_3, \hat{a}^{(4)}, a^{(2)}_{-3}, a^{(2)}_3; \hat{a}^{(2)}, a^{(2)}_6, a^{(0)}_{-3}, a^{(0)}_{-1}; a^{(0)}_4, a^{(0)}_6, \hat{a}^{(0)}_3\}$$

в (21) можно найти непосредственно, приравняв слагаемые, соответствующие одинаковым степеням *r* в обеих частях (19).

Остальные 12 коэффициентов в (21), а именно

$$\{a_{-3}^{(4)}, a_{-1}^{(4)}, a_{4}^{(4)}, a_{6}^{(4)}; a_{-1}^{(2)}, a_{1}^{(2)}, a_{2}^{(2)}, a_{4}^{(2)}; a_{0}^{(0)}, a_{1}^{(0)}, a_{2}^{(0)}, a_{3}^{(0)}\}.$$

можно определить по первым 4 граничным условиям (18) для каждой из 3 гармоник угла  $\theta$ , т.е. всего 12 условий.

На следующем шаге решаем краевую задачу для оценки приближения температуры 1-го порядка:

$$\nabla^{2} \tilde{T}_{1} = \frac{1}{r^{2} \sin \theta} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_{1}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{\psi}_{1}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tilde{T}_{0}, \qquad (22)$$
$$\tilde{T}_{1} = 0 \quad \text{on} \quad \partial \Omega_{i} \bigcup \partial \Omega_{o}.$$

Полагая

$$\tilde{T}_1 = T_1 + T_{1\varepsilon}, \qquad (23)$$

где *T*<sub>1</sub> – «регулярное» приближение температуры по Харди 1-го порядка, и опустив квадратичный член

$$\frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial \theta} \frac{\partial T_{0\varepsilon}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial r} \frac{\partial T_{0\varepsilon}}{\partial \theta} \sim O(\varepsilon^2),$$

получаем следующее уравнение для «нерегулярного» приближения температуры 1-го порядка:

$$\nabla^2 T_{1\varepsilon} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \frac{\partial T_{0\varepsilon}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial T_{0\varepsilon}}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial \theta} \frac{\partial T_0}{\partial r} \right).$$
(24)

с соответсвующими краевыми условиями

$$T_{1\varepsilon}(r_{o},\theta) = 0, \quad T_{1\varepsilon}(r_{i}(\theta),\theta) = -T_{1}(r_{i}(\theta),\theta).$$
(25)

Введем следующее обозначение:

$$\psi_1 = \gamma(\cos 2\theta - 1). \tag{26}$$

где из (8)

$$\gamma = \frac{1}{2} \Big( B_4 r^4 + B_3 r^3 + B_2 r^2 + B_1 r + B_0 + B_{-1} r^{-1} \Big).$$

Окончательно, (24) примет вид

$$\nabla^2 T_{1\varepsilon} = \delta_3 \cos 3\theta + \delta_1 \cos \theta, \qquad (27)$$

где

$$\delta_{3} = \frac{2}{r^{2}} (\gamma' \tau - \gamma \tau' - 4\alpha_{4} T_{0}'),$$
  

$$\delta_{1} = -\frac{2}{r^{2}} [2\gamma \tau' + (4\alpha_{4} + \alpha_{2})T_{0}'].$$
(28)

Если решение искать в виде

$$T_{1\varepsilon} = \eta_3 \cos 3\theta + \eta_1 \cos \theta, \qquad (29)$$

получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\eta_3'' + \frac{2}{r}\eta_3' - \frac{12}{r^2}\eta_3 = \delta_3, \ \eta_1'' + \frac{2}{r}\eta_1' - \frac{2}{r^2}(\eta_1 + 3\eta_3) = \delta_1,$$
(30)

с однородными краевыми условиями

$$\eta_3(r_o) = \eta_1(r_o) = 0, \quad \eta_3|_{r=r_i(\theta)} = \eta_1|_{r=r_i(\theta)} = 0.$$
 (31)

Можно показать, что

$$\delta_{3}(r) = \sum_{\substack{k=-7,\\k\neq-6}}^{2} \mu_{k}^{(3)} r^{k} + \hat{\mu}^{(3)} \ln r,$$

$$\delta_{1}(r) = \sum_{\substack{k=-7,\\k\neq-6,-4,1}}^{2} \mu_{k}^{(1)} r^{k} + \hat{\mu}^{(1)} \ln r,$$
(32)

с известными коэффициентами  $\mu_k^{(3)}, \hat{\mu}^{(3)}, \mu_k^{(1)}, \hat{\mu}^{(1)}$  .

Решение системы (30) имеет вид

$$\eta_{3}(r) = \sum_{k=-5}^{4} \chi_{k}^{(3)} r^{k} + \hat{\chi}_{2}^{(3)} r^{2} \ln r + \hat{\chi}_{3}^{(3)} r^{3} \ln r,$$
  

$$\eta_{1}(r) = \sum_{k=-5}^{4} \chi_{k}^{(1)} r^{k} + \hat{\chi}_{2}^{(1)} r^{2} \ln r + \hat{\chi}_{3}^{(1)} r^{3} \ln r,$$
(33)

где коэффициенты  $\chi_k^{(3)}, \hat{\chi}_2^{(3)}, \hat{\chi}_3^{(3)}, \chi_k^{(1)}, \hat{\chi}_2^{(1)}, \hat{\chi}_3^{(1)}$  могут быть определены по аналогии с коэффициентами аппроксимации 1-го порядка функции тока.

#### VI. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Чувствительность прибора определяется разностью температур в противоположных точках в направлениях  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Для совершенной сферической модели, из (3) и (9) имеем

$$\Delta T = \Delta T_1(r,0) - \Delta T_1(r,\pi) = 2 \operatorname{Ra} \left( C_2 r^2 + C_1 r + C_0 + C_{-1} r^{-1} + C_{-2} r^{-2} + C_{-3} r^{-3} + \hat{C}_1 r \ln r \right).$$
(34)

Далее сравним (34) с разницей температур для случая возмущенной геометрии:

$$\Delta T = \Delta T + \operatorname{Ra} \Delta T_{1\varepsilon}.$$
 (35)

Здесь мы учли, что согласно (14)  $\Delta T_{0\varepsilon} = 0$ .

Таким образом, с первым порядком точности добавка к тепловой чувствительности равна

$$\operatorname{Ra}\Delta T_{1\varepsilon}(r) = \operatorname{Ra}\left[\eta_1(r) + \eta_3(r)\right].$$
(36)

Рис. 2 демонстрирует разницу между измерениями для двух рассмотренных геометрий внутреннего источ-

ника. Параметры задачи были выбраны следующие:  $Ra = 1 \cdot 10^3$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $r_o = 2$ .



Рис. 2. Разность температур в противоположных направлениях  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  для концентрической сферической (сплошная линия) и возмущенной геометрии (пунктирная линия)

#### Заключение

Полученная модель позволяет получить более адекватные результаты по сравнению со идеальной сферической моделью. Эти результаты хорошо согласуются с расчетами, полученными МКЭ [8], однако, благодаря своей явной форме позволяют оптимизировать параметры прибора (геометрию, положение датчиков и др.) аналитически. Следует отметить, что можно продолжить описанный выше процесс и получить аппроксимации функции тока и температуры высших порядков. Однако соответствующие аналитические выражения будут значительно сложнее. Одним из возможных решений здесь является использование полуаналитического метода R-функций (RFM), который ранее эффективно применялся для моделирования теплового акселерометра в связи с обобщением модели концентрических цилиндров [2-4].

## Литература

- A. Garraud, A. Giani, P. Combette, B. Charlot, and M. Richard, A dual axis CMOS micromachined convective thermal accelerometer, Sensors and Actuators A: Physical, vol. 170 (1-2), pp. 44-50, 2011.
- [2] A. Giani, P. Combette, A. Deblonde, A. Garraud, V.A. Matveev, and M.A. Basarab, A Highly Sensitive Thermal Accelerometer with Improved Bandwidth, Proc. of The 20th St.-Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, Saint-Petersburg, Russia, pp. 191-198, 27-29 May, 2013.
- [3] M. Basarab, A. Giani, and P. Combette, Thermal accelerometer simulation by the R-functions method, Applied Sciences (Switzerland), vol. 10, issue 23, 2020.
- [4] M. Basarab, A. Giani, P. Combette, and I. Ivanov, Solving the convection-diffusion problem in the horizontal cylindrical annulus by the R-function method and its application for thermal accelerometer simulation, AIP Conf. Proc., Vol. 2293, Art.no 030031, 2020.
- [5] P.F. Hodnett, Natural convection between horizontal heated concentric circular cylinders, Z. Angew. Math. Phys., vol. 24, pp. 507-516, 1973.
- [6] L.M. Mack L.M. and H.C. Hardee, Natural convection between concentric spheres at low Rayleigh numbers, Int. J. Heat Mass Tran., vol. 11, pp. 387-396, 1968.
- [7] H.C. Hardee, Natural convection between concentric spheres at low Rayleigh numbers, PhD thesis, Texas University, 1966.
- [8] A. Garraud, A melioration des performances et nouveaux concepts de detecteurs de capteurs inertiels a detection thermique. PhD thesis. Universite Montpellier 2, 2011.

# Аналитический квазиоптимальный алгоритм программного управления угловым движением осесимметричного космического аппарата

А.В. Молоденков Институт проблем точной механики и управления РАН Саратов, Россия molalexei@yandex.ru Я.Г. Сапунков Институт проблем точной механики и управления РАН Саратов, Россия SapunkovYaG@mail.ru Т.В. Молоденкова Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина Саратов, Россия moltw@yandex.ru

Аннотация—Рассматривается классическая задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат программного разворота космического аппарата как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях. С помощью замен переменных исходная задача упрощается до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. В рамках концепции Пуансо об интерпретации углового движения твердого тела вокруг неподвижной точки, с использованием принципа максимума Понтрягина получено квазиоптимальное аналитическое решение задачи. Описываются численные примеры, показывающие близость квазиоптимального решения задачи к оптимальному.

Ключевые слова—космический аппарат, осесимметричное твердое тело, программный разворот, оптимальное управление, квазиоптимальное аналитическое решение, обобщенное коническое движение, алгоритм, произвольные граничные условия.

## I. Введение

По проблеме программного управления пространственным угловым движением космического аппарата (КА) опубликовано большое количество работ, но аналитическая нерешенность задачи в общем виде оставляет актуальной эту тематику исследований. При произвольных краевых условиях точное решение не известно даже в случае сферически-симметричного КА, поэтому в общем случае используют только приближенные решения задачи. Явное решение задачи оптимального управления угловым движением КА имело бы не только теоретическую, но и большую прикладную значимость, так как позволило бы использовать в системе управления заранее полученные выражения для управления и траектории КА. Это касается, например, КА нанокласса, которые имеют ограничения на вычислительные мощности.

В докладе исследуется классическая задача оптимального управления угловым движением КА как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА без ограничения на управление. В качестве критерия оптимальности используется квадратичный функционал энергии затраченной на маневр космического аппарата с фиксированным временем переходного процесса. С помощью взаимно-однозначных замен переменных исходная задача упрощается (в отношении динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. При этом правый конец переходного процесса представляет собой многообразие в восьмимерном фазовом пространстве.

С использованием кватернионов и принципа максимума Понтрягина получены формулы краевой задача оптимизации. Кратко описано численное решение этой краевой задачи на основе алгоритма Левенберга-Марквардта, представляющего собой комбинацию модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Основываясь на проведенных численных экспериментах для различных параметров задачи, сделан вывод о близости решений упрощенной классической задачи и ниже описываемой модифицированной задачи оптимального управления угловым движением КА.

В докладе получено явное решение модифицированной задачи оптимального по энергии управления угловым движением КА с произвольными краевыми условиями по угловой скорости и ориентации КА, доведенное до алгоритма. В рамках классической концепции Пуансо, интерпретирующей произвольное угловое движение твердого тела в терминах конусов прецессии, или иначе обобщенного конического движения, проведена модификация задачи оптимального управления угловым движением КА, а его траектория задана явными выражениями в этом классе движений, содержащими произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. При этом общность исходной задачи практически не нарушается: известные точные решения классической задачи оптимального углового движения динамически-симметричного КА в случаях плоского поворота или регулярной прецессии и аналогичные решения модифицированной задачи полностью совпадают; в других случаях в числовых расчетах классической и модифицированной задач относительная погрешность между значениями функционала оптимизации составляет не более нескольких процентов, включая угловые маневры КА на большие углы. Поэтому предлагаемое решение модифицированной задачи может трактоваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче оптимального углового движения КА. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА исходной классической постановки, на основе решения обратной задачи динамики твердого тела получена формула вектора управляющего момента КА. Полученные результаты на основе решения обратной задачи динамики могут быть обобщены на случаи управления КА при наличии в постановке задачи различных возмущений.

В приведенных численных примерах при решении традиционной и модифицированной задачи расхождение между величинами функционала качества, который является определяющей характеристикой задачи, составляет от долей процента до нескольких процентов, включая развороты КА на 180°. Примеры показывают, что предложенное аналитическое решение задачи справедливо для КА по своей динамической конфигурации близких к осевой симметрии.

## II. ПОСТАНОВКА КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Движение КА как твердого тела с одной осью симметрии вокруг центра масс описывается уравнениями

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{w} \,, \tag{1}$$

$$I_{1}\dot{w}_{1} = M_{1},$$

$$I_{2}\dot{w}_{2} = M_{2} - (I_{1} - I_{2})w_{1}w_{3},$$

$$I_{2}\dot{w}_{3} = M_{3} + (I_{1} - I_{2})w_{1}w_{2}.$$
(2)

Здесь фазовыми координатами являются L(t) – нормированный кватернион поворота КА

$$\mathbf{L}(t) = l_0(t) + l_1(t)i_1 + l_2(t)i_2 + l_3(t)i_3 = [l_0(t), l_1(t), l_2(t), l_3(t)]^{\mathrm{T}}, \quad \|\mathbf{L}\| = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1,$$

где  $i_1, i_2, i_3$  – орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами  $i_1, i_2, i_3$  жестко связанного с КА трехмерного векторного пространства, и w(t) – вектор угловой скорости КА

$$\mathbf{w}(t) = w_1(t)\mathbf{i}_1 + w_2(t)\mathbf{i}_2 + w_3(t)\mathbf{i}_3 = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^{\mathrm{T}},$$

причем символ " $\circ$ " означает кватернионное умножение, а управление — вектор  $\mathbf{M}(t)$  действующего на КА внешнего момента

$$\mathbf{M}(t) = M_1(t)\mathbf{i}_1 + M_2(t)\mathbf{i}_2 + M_3(t)\mathbf{i}_3 = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^{\mathrm{T}}.$$

Фазовые координаты и управление подчинены требованиям задачи понтрягинского типа ( $\mathbf{L}(t), \mathbf{w}(t)$  – непрерывные функции,  $\mathbf{M}(t)$  – кусочно-непрерывная функция). В динамических уравнениях Эйлера (2) для КА с одной осью симметрии (направленной в нашем случае вдоль орта  $\mathbf{i}_1$  связанной с КА системы координат)  $I_1, I_2$  - главные центральные моменты инерции твердого тела,  $I_1, I_2 = \text{const} > 0$ .

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_0, \quad \mathbf{L}(T) = \mathbf{L}_T \tag{3}$$

и угловой скорости КА

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}(T) = \mathbf{w}_T \,. \tag{4}$$

Требуется определить оптимальное управление  $\mathbf{M}^{\text{opt}}(t)$  системой (1), (2) при граничных условиях (3). (4), доставляющее минимум квадратичному критерию энергозатрат с фиксированным временем *T* 

$$J = \int_{0}^{T} \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \, dt \tag{5}$$

# III. Замены переменных

Так как основная переменная задачи кватернион L является безразмерной величиной, в задаче осуществляется переход к безразмерным переменным [1], при котором вид формул (1)–(4) не изменится, T=1, а функционал (4) запишется так

$$J = \int_{0}^{1} \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \, dt \tag{6}$$

С целью упрощения (в отношении динамических уравнений Эйлера (2)) задачи (1)–(4), (6) осуществим замены переменных типа [1–3], сводящие исходную задачу к задаче оптимального разворота КА со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. Для этого перепишем уравнения (2) в виде:

$$\dot{w}_1 = m_1, \ \dot{w}_2 = b_1 m_2 - b w_1 w_3, \ \dot{w}_3 = b_1 m_3 - b w_1 w_2,$$

где  $m_1 = M_1/I_1$ ,  $m_2 = M_2/I_1$ ,  $m_3 = M_3/I_1$ ,  $b_1 = I_1/I_2$ ,  $b = (I_1 - I_2)/I_2$ . Заменим переменные  $w_1, w_2, w_3$  на новые  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$
(7)

Тогда получим уравнения Эйлера (1.2) в кватернионной записи

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \widetilde{\mathbf{B}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \mathbf{B},\tag{8}$$

$$\mathbf{B}(t) = \exp\{\mathbf{i}_1 \theta(t) / 2\}$$
(9)

где "~" – сопряжение кватерниона, " $\exp\{.\}$ " – кватернионная экспонента, вектор  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^{\mathrm{T}}$ , а

$$\theta(t) = b_2 \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau , \qquad (10)$$

 $b_2 = bb_1^{-1} = 1 - I_2/I_1 = 1 - b_1^{-1}$ . Отметим, что  $|\mathbf{B}(t)| = 1$ ,  $\forall t$ . Кватернионное уравнение углового движения КА (1) при этом запишется так:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{B} \circ (b_1^{-1}\omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3) \circ \widetilde{\mathbf{B}}$$
(11)

где кватернион **В** определяется (9). С учетом начального условия по угловой скорости КА (4) уравнение (8) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \boldsymbol{\beta}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \exp\left\{\mathbf{i}_1 b_2 \int_0^t \left(\int_0^\tau m_1(\xi) d\xi + w_{01}\right) d\tau/2\right\}$$
(13)

Нелинейное выражение, стоящее в правой части (12) и зависящее только от переменных  $m_k(t)$ ,  $k = \overline{1,3}$ , примем за новое управление  $\mathbf{u}(t)$ :

$$\mathbf{u} = \widetilde{\boldsymbol{\beta}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \boldsymbol{\beta}, \tag{14}$$

где **β** определяется (13). Отметим, что  $u_1(t) = b_1 m_1(t)$ , и поэтому в замене переменных (14) всегда можно совершить обратный ход: по новой векторной переменной  $\mathbf{u}(t)$  (когда она будет известна) восстановить управление  $\mathbf{m}(t)$  задачи (1)–(4), (6). Модуль вектора нового управления связан с модулем вектора управляющего момента КА так:

$$|\mathbf{u}| = \left| \widetilde{\boldsymbol{\beta}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \boldsymbol{\beta} \right| = b_1 \left| \widetilde{\boldsymbol{\beta}} \right| |\mathbf{m}| |\boldsymbol{\beta}| = b_1 |\mathbf{m}| = b_1 |\mathbf{M}| / I_1 = |\mathbf{M}| / I_2.$$

Исходя из (11), осуществим еще одну замену переменных:

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Lambda} \circ \widetilde{\mathbf{B}} \,, \tag{15}$$

где  $\Lambda = \Lambda(t)$  – новая кватернионная переменная описывающая угловое положение КА.

С учетом всех указанных выше замен переменных задача оптимального разворота КА (1)-(4), (6) примет вид:

$$2\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega} , \qquad (16) \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u} , \qquad (17)$$

$$\dot{\theta} = b_2 \omega_1,$$
 (18)  $\theta(0) = 0,$  (19)

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 = b_1 w_{01} \mathbf{i}_1 + w_{02} \mathbf{i}_2 + w_{03} \mathbf{i}_3, \boldsymbol{\Lambda}(0) = \boldsymbol{\Lambda}_0 = \mathbf{L}_0,$$
(20)

$$\boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T = \widetilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(T)) \circ (b_1 w_{T_1} \mathbf{i}_1 + w_{T_2} \mathbf{i}_2 + w_{T_3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(T)),$$
  
$$\boldsymbol{\Lambda}(T) = \boldsymbol{\Lambda}_T = \mathbf{L}_T \circ \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(T)), \qquad (21)$$

$$J = I_2^2 \int_0^1 \mathbf{u}^2 \, dt \to \min, \tag{22}$$

где  $w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{T1}, w_{T2}, w_{T3}$  – компоненты вектора  $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^{\mathrm{T}}$  в начальный и конечный моменты времени соответственно, а кватернион  $\mathbf{B}(\theta(T))$ определяется по формуле (9).

Согласно (15), (21), задачу (16)–(22) можно переформулировать так: в восьмимерном фазовом пространстве  $\Lambda \times \omega \times \theta$  управляемую систему (16)–(18) необходимо оптимально в смысле критерия (22) перевести из начального состояния (19), (20) на многообразие, которое определяется соотношениями

$$\boldsymbol{\omega} - \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \circ (b_1 w_{T_1} \mathbf{i}_1 + w_{T_2} \mathbf{i}_2 + w_{T_3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = 0,$$
  
vect $(\mathbf{A} \circ \widetilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}) \circ \widetilde{\mathbf{L}}_T) = 0,$  (23)

где vect(.) обозначает векторную часть кватерниона.

~ / \

Из этой задачи найдем оптимальные управление  $\mathbf{u}^{\text{opt}}$  и траекторию  $\Lambda^{\text{opt}}, \boldsymbol{\omega}^{\text{opt}}$ . Как видно, векторное

дифференциальное уравнение (17) имеет структуру, соответствующую динамическим уравнениям Эйлера для сферически-симметричного твердого тела. Это существенно облегчает исследование задачи. Далее будем рассматривать задачу (16) – (22) ((23)).

# IV. О МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВОРОТА КА

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального разворота твердого тела является разрешимость классической задачи Дарбу – аналитического определе-ния  $\Lambda(t)$  из уравнения (16) при известных  $\Lambda_0$ ,  $\omega(t)$ . При условии, что вектор угловой скорости  $\omega(t)$  принудительно задается своим выражением в классе обобщенных конических движений [4]

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K} \circ (\mathbf{i}_1 f(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 f(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}$$
(24)

 $\sim$ 

в котором f(t) и g(t)-произвольные функции времени, К-произвольный постоянный кватернион, известно решение, удовлетворяющее начальному условию (20)

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_0 \circ \mathbf{\tilde{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ$$
  
 
$$\circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}.$$
 (25)

Формулы (24), (25) включают в себя все известные точные аналитические решения классической задачи оптимального разворота твердого тела при его динамической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения твердого тела постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1]. Предлагаемая структура угловой скорости (24) хорошо соотносится с концепцией Пуансо, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела [4]. Граничные условия задачи удовлетворяются следующим образом:

$$\begin{split} \mathbf{K} &\circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \\ &+ \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K} = \mathbf{\omega}_T, \\ &\widetilde{\mathbf{K}} &\circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \\ &+ \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K} = \mathbf{\omega}_0, \end{split}$$

$$\mathbf{\Lambda}_0 \circ \mathbf{K} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K} = \mathbf{\Lambda}_T.$$

Относительно функций f и g, их первых и вторых производных (которые рассматриваются в качестве новых управлений) ставится оптимизационная задача, которая аналитически решается на основе принципа максимума Понтрягина; вектор управляющего момента КА получается из вектора угловой скорости на основе решения обратной задачи динамики твердого тела. Аналитическое решение модифицированной задачи доведено до алгоритма и допустимо как квазиоптимальное аналитическое решение классической задачи оптимального разворота КА.

# V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитическое квазиоптимальное решение задачи программного управления угловым движением осесимметричного КА с произвольными краевыми условиями применимо в системах управления КА. Предлагаемый алгоритм имеет теоретическое обоснование и с хорошими точностями решает задачу оптимальной переориентации КА. Отметим, что аналитическое решение модифицированной задачи оптимального разворота осесимметричного КА при произвольных граничных условиях, полученное на основе решения приведенной задачи (16)-(22), оказалось существенно точнее, чем решение [5] (применительно к осевой симметрии КА), где квазиоптимальный управляющий момент КА строился на основе обратной задачи динамики КА по результатам решения модифицированной задачи без приведения с помощью замен переменных системы уравнений Эйлера для осесимметричного твердого тела к такой же системе для тела со сферической динамической симметрией.

#### ЛИТЕРАТУРА

- А.В.Молоденков, Я.Г. Сапунков. Аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия РАН. Теория и системы управления, № 6, С. 129-145, 2016.
- [2] А.В.Молоденков, Я.Г. Сапунков. Особый режим управления в задаче оптимального разворота осесимметричного космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления, № 6, С. 61–69, 2010.
- [3] Ю.Н. Челноков. Об осцилляторном и ротационном движениях одного класса механических систем // Известия АН СССР. Механика твердого тела, №1, С. 28–35, 1989.
- [4] A.V. Molodenkov, S.E. Perelyaev, Solution of approximate equation for modified rodrigues vector and attitude algorithm design, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 44, no. 6, 2021, pp. 1224-1227.
- [5] А.В.Молоденков, Я.Г.Сапунков. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота произвольного твердого тела при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Механика твердого тела, № 2, С. 160–173, 2019.

# Бикватернионное решение задачи оптимального по быстродействию управления пространственным движением космического аппарата

И.А. Панкратов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Институт проблем точной механики и управления РАН Саратов, Россия PankratovIA.mechanic@gmail.com

Аннотация-В докладе с использованием новых бикватернионных дифференциальных уравнений пространственного движения твёрдого тела решена в нелинейной постановке задача оптимального в смысле быстродействия программного управления пространственным движением космического аппарата (КА) в инерциальной системе координат. КА рассматривается как свободное твёрдое тело произвольной динамической конфигурации, совершающее пространственное движение, эквивалентное композиции углового (вращательного) и поступательного (орбитального) движений. Граничные условия по угловому и линейному положениям аппарата, а также по его угловой и линейной скоростям произвольны, дуальная вектор-функция управления (композиция углового и линейного ускорений) ограничена по дуальному модулю. В рамках концепции решения обратных задач динамики с использованием принципа максимума Понтрягина получена дифференциальная краевая задача двадцать восьмого порядка. Приведены примеры численного решения краевой задачи для случаев, когда распределение масс КА соответствует сферически-симметричному твердому телу или международной космической станции (МКС). При этом отличие между начальной и конечной ориентациями КА велико в угловой мере и мало по линейному перемещению (задача пространственного маневрирования КА). Дан анализ полученных численных решений, выявлены их характерные свойства и закономерности.

Ключевые слова—космический аппарат, пространственное движение, обратная задача динамики, принцип максимума, оптимальное в смысле быстродействия управление, кватернион, бикватернион.

#### I. Постановка задачи

Рассмотрим свободное твердое тело, например, КА, способное совершать относительно инерциальной системы координат произвольное пространственное движение, эквивалентное пространственному винтовому движению (композиции поступательного движения тела вместе с произвольно выбранной его точкой и вращения тела вокруг этой точки). Тело находится под действием произвольного главного вектора и главного момента внешних сил, включающих в себя вектор управляющей силы и вектор управляющего момента. Бикватернионные уравнения пространственного движения твердого тела, используемые для решения задачи с помощью концепции решения обратных задач динамики и принципа максимума имеют вид [1–3]: Ю.Н. Челноков Институт проблем точной механики и управления РАН Саратов, Россия ChelnokovYuN@gmail.com

$$\dot{\mathbf{U}}_{x} = \mathbf{\varepsilon}_{x} + s\mathbf{w}_{x} = \mathbf{H}_{x}, \qquad 2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{U}_{x};$$
  

$$\mathbf{\varepsilon}_{x} = \varepsilon_{1}\mathbf{i} + \varepsilon_{2}\mathbf{j} + \varepsilon_{3}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{w}_{x} = w_{1}\mathbf{i} + w_{2}\mathbf{j} + w_{3}\mathbf{k},$$
  

$$\mathbf{H}_{x} = H_{1}\mathbf{i} + H_{2}\mathbf{j} + H_{3}\mathbf{k}, \qquad H_{k} = \varepsilon_{k} + sw_{k}; \qquad (1)$$
  

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_{0} + \mathbf{\Lambda}_{v} = \mathbf{\Lambda}_{0} + \mathbf{\Lambda}_{1}\mathbf{i} + \mathbf{\Lambda}_{2}\mathbf{j} + \mathbf{\Lambda}_{3}\mathbf{k} = \mathbf{\lambda} + s\mathbf{\lambda}^{0},$$
  

$$\mathbf{\Lambda}_{j} = \mathbf{\lambda}_{j} + s\mathbf{\lambda}_{j}^{0}.$$

Здесь фазовыми переменными являются бикватернион  $U_x = \omega_x + sv_x$  (отображение кинематического винта U КА на связанный базис X) и бикватернион  $\Lambda = \lambda + s\lambda^0$ конечного перемещения КА в инерциальном пространстве, главная часть которого (кватернион  $\lambda$ ) характеризует ориентацию КА в инерциальной системе координат, а моментная (кватернион  $\lambda^0$ ) – местоположение КА в этой системе координат (декартовые координаты  $x_k$  (k =1, 2, 3) центра масс КА в этой системе координат), а дуальным управлением – бикватернион  $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$ , являющийся дуальной композицией требуемого абсолютного углового ускорения  $\boldsymbol{\varepsilon}_x$  и требуемой составляющей  $\mathbf{w}_x$  абсолютного линейного ускорения КА.

Необходимо построить бикватернионное программное управление  $\mathbf{H}_x = \mathbf{\epsilon}_x + s\mathbf{w}_x$ , обеспечивающее программный перевод КА, движение которого описывается уравнениями (1) из его произвольного заданного начального состояния

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\lambda}(0) + s\mathbf{\lambda}^0(0), \qquad \mathbf{U}_x(0) = \mathbf{\omega}_x(0) + s\mathbf{v}_x(0) \qquad (2)$$

в его заданное конечное состояние

$$\mathbf{\Lambda}(t_1) = \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{K}} = \mathbf{\lambda}_{\mathbf{K}} + s\mathbf{\lambda}_{\mathbf{K}}^0, \qquad \mathbf{U}_{\mathbf{X}}(t_1) = \mathbf{U}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{K}} = \mathbf{\omega}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{K}} + s\mathbf{v}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{K}}$$
(3)

за минимальное время  $t_1$ .

Пусть также на управления наложены следующие ограничения

$$|\mathbf{\varepsilon}_x| \le \varepsilon_{\max}, \qquad |\mathbf{w}_x| \le w_{\max}.$$
 (4)

Известно, что нормы кватерниона  $\lambda$  и бикватерниона  $\Lambda$  равны единице (они являются первыми частными интегралами задачи). Поэтому правое краевое условие, наложенное первым из соотношений (3) на бикватернион ориентации и местоположения КА  $\Lambda$ , заменим на

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00218).

равенства нулю векторных частей от главной и моментной частей бикватернионного произведения  $\widetilde{\Lambda}(t_1) \circ \Lambda_{\kappa}$ :

vect 
$$\left[\widetilde{\lambda}(t_1) \circ \lambda_{\kappa}\right] = \mathbf{0}$$
, vect  $\left[\widetilde{\lambda}(t_1) \circ \lambda_{\kappa}^0 + \widetilde{\lambda}^0(t_1) \circ \lambda_{\kappa}\right] = \mathbf{0}$ , (5)

эквивалентные шести скалярным (в (5) и далее верхняя волна означает сопряженный кватернион, а vect [...] – векторная часть кватерниона). Такая замена правого кватернионного краевого условия повышает эффективность численного решения задачи.

Декартовые координаты  $\xi_k$  центра масс КА (т.е. проекции радиус-вектора **r** центра масс КА на оси инерциальной системы координат  $\xi$ ) и проекции  $x_k$  этого вектора на оси связанной с КА системы координат X находятся через компоненты кватернионов  $\lambda$  и  $\lambda^0$  по формулам [4, 5]:

$$\mathbf{r}_{\xi} = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = 2\lambda^0 \circ \widetilde{\lambda}, \quad \mathbf{r}_x = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} = \widetilde{\lambda} \circ \lambda^0.$$

После решения поставленной задачи в построенном управлении  $\mathbf{H}_x = \mathbf{\epsilon}_x + s\mathbf{w}_x$  необходимо выделить главную  $\mathbf{\epsilon}_x$  и моментную  $\mathbf{w}_x = \dot{\mathbf{v}}_x$  части.

После этого выделения законы формирования управляющей силы  $\mathbf{F}_{cx}$  и управляющего момента  $\mathbf{M}_{cx}$  получаются в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики по известным аналитическим формулам.

Заметим, что задача построения управлений  $\mathbf{w}_x$  и  $\mathbf{\varepsilon}_x$ носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, так как уравнения (1) справедливы для любого такого движущегося объекта. Специфика объекта (его массово-инерционные и другие характеристики, действующие внешние возмущающие силы и их моменты) учитываются при построении управляющей силы  $\mathbf{F}_{cx}$  и управляющего момента  $\mathbf{M}_{cx}$  на основе конечных соотношений (в их правые части в общем случае включаются главный вектор  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ других внешних сил, действующих на твердое тело (сил гравитации, сопротивления движению и других сил взаимодействия тела с внешней средой) и главный момент  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t, \lambda, \omega)$  этих сил, вычисленный относительно центра масс тела, полагаемые известными функциями времени *t* и переменных  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\lambda$ ,  $\omega$ ).

#### II. ПЕРЕХОД К БЕЗРАЗМЕРНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Перейдем от размерных переменных задачи к безразмерным по формулам (кватернион  $\lambda$  является безразмерным) [6]:

$$I^{\text{MacIII}} = \left( \left( I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \right) / 3 \right)^{1/2}, \quad I_k^{\text{6espas}} = I_k / I^{\text{MacIII}};$$
  
$$\boldsymbol{\omega}_x^{\text{6espas}} = \left( \frac{I^{\text{MacIII}}}{M_{\text{max}}} \right)^{1/2} \boldsymbol{\omega}_x, \qquad t^{\text{6espas}} = \frac{t}{T} = \left( \frac{M_{\text{max}}}{I^{\text{MacIII}}} \right)^{1/2} t,$$
  
$$\mathbf{M}^{\text{6espas}} = \frac{\mathbf{M}}{M_{\text{max}}}, \qquad \boldsymbol{\lambda}^{\text{06espas}} = \frac{\boldsymbol{\lambda}^0}{L}.$$

Тогда безразмерные кватернионные фазовые уравнения, соответствующие бикватернионным фазовым уравнениям (1), примут вид (верхние индексы «безраз» здесь и далее опущены, а точка обозначает производную по безразмерному времени):

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{x} = N_{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{x}, \qquad \dot{\boldsymbol{v}}_{x} = N_{w} \cdot \boldsymbol{w}_{x},$$

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_{x}, \qquad 2\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{0} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{v}_{x} + \boldsymbol{\lambda}^{0} \circ \boldsymbol{\omega}_{x}.$$

$$(6)$$

Здесь 
$$N_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\max} \cdot I^{\text{масш}}}{M_{\max}}$$
 и  $N_{w} = \frac{w_{\max} \cdot I^{\text{масш}}}{L \cdot M_{\max}}$  – без-

размерные параметры задачи.

Отметим, что размерные и безразмерные уравнения для переменных  $\lambda$  и  $\lambda^0$  совпадают по своей форме.

При этом ограничения на управления примут вид

$$|\mathbf{\varepsilon}_x| \le 1,$$
  $|\mathbf{w}_x| \le 1.$  (7)

Положим, что в выражении для управляющей силы главный вектор других внешних сил обусловлен силой гравитационного притяжения КА к Земле, а главный момент других внешних сил равен нулю. Тогда выражения для управляющей силы и момента в безразмерном виде запишутся так

$$\mathbf{F}_{cx} = N_{w} \cdot \mathbf{w}_{x} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{x})\mathbf{v}_{x} + N_{G} \cdot \mathbf{r}_{x} / r^{3},$$
  
$$\mathbf{M}_{cx} = N_{\varepsilon} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_{x} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{x})\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{x}.$$
(8)

Здесь  $N_G = G \cdot M_0 \cdot T^2 / L^3$  – безразмерный параметр задачи, G – гравитационная постоянная, а  $M_0$  – масса притягивающего тела (Земли).

#### III. Закон оптимального управления

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Для этого введем дополнительные безразмерные бикватернионные переменные  $\Psi = \varphi + s\chi$  и  $\mathbf{M} = \mu + s\mu^0$ , сопряженные по отношению к безразмерным фазовым переменным  $\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s \mathbf{v}_x$  и  $\mathbf{\Lambda} = \lambda + s\lambda^0$  соответственно. Здесь  $\varphi$ ,  $\chi$  – это векторы (кватернионы с нулевыми скалярными частями), а  $\mu$  и  $\mu^0$  – это кватернионы с ненулевыми скалярными частями. В этом случае функция Гамильтона-Понтрягина примет вид

$$H = -1 + N_{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varepsilon}) + N_{w}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_{x})/2 + (\boldsymbol{\mu}^{0}, \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{v}_{x} + \boldsymbol{\lambda}^{0} \circ \boldsymbol{\omega}_{x})/2,$$

где «( . , . )» – скалярное произведение соответствующих трехмерных и четырехмерных переменных.

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид (нижний индекс «*v*» обозначает векторную часть кватерниона):

$$2\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \operatorname{vect} \left[ (\boldsymbol{\lambda}_{v} - \boldsymbol{\lambda}_{0}) \circ \boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{\lambda}_{v}^{0} - \boldsymbol{\lambda}_{0}^{0}) \circ \boldsymbol{\mu}^{0} \right]$$
$$2\dot{\boldsymbol{\chi}} = \operatorname{vect} \left[ \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\mu}^{0} \right]$$
$$(9)$$
$$2\dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}^{0} \circ \boldsymbol{v}_{x} + \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\omega}_{x}, \qquad 2\dot{\boldsymbol{\mu}}^{0} = \boldsymbol{\mu}^{0} \circ \boldsymbol{\omega}_{x}.$$

Закон оптимального в смысле быстродействия управления (т.е. закон управления, удовлетворяющий необходимому условию оптимальности) находится из условий максимума функции Гамильтона-Понтрягина по переменным  $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ ,  $\mathbf{w}_x$  с учетом наложенного ограничения (7) и имеет вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x}^{\text{opt}} = \frac{\boldsymbol{\varphi}}{|\boldsymbol{\varphi}|}, \qquad \qquad \mathbf{w}_{x}^{\text{opt}} = \frac{\boldsymbol{\chi}}{|\boldsymbol{\chi}|}. \tag{10}$$

Условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа, имеют вид:

$$t = t^{*}, \qquad (\lambda_{\kappa}, \mu^{0}) = 0,$$
  
- $\lambda_{\kappa 0}^{0} (\operatorname{vect} \lambda_{\kappa}, \operatorname{vect} \mu^{0}) + \lambda_{\kappa 0} (\operatorname{vect} \lambda_{\kappa}^{0}, \operatorname{vect} \mu^{0}) +$   
+ $\lambda_{\kappa 0} (\operatorname{vect} \lambda_{\kappa}, \operatorname{vect} \mu) = 0.$  (11)

Таким образом, задача оптимального по быстродействию управления пространственным движением КА сведена в рассматриваемой постановке к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (6), (9), (10) двадцать восьмого порядка и двадцатью шестью краевыми условиями (2), (3), (5), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (11) и равенством  $H^o\Big|_{t^*} = 0$ , имеющим место для оптимального управления  $\mathbf{\varepsilon}_x^{opt}$ ,  $\mathbf{w}_x^{opt}$  и оптимальной траектории.

## IV. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Предложенный нами алгоритм численного решения задачи основан на методе Левенберга–Марквардта. Он реализует комбинацию метода Рунге-Кутта 4-го порядка точности и двух методов решения краевых задач: модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска [7].

Для твердых тел (КА) с различным распределением масс сравним результаты полученного решения задачи быстродействия с граничными условиями, приведенными в [6] (рассмотрим случай поворота КА из положения покоя в положение покоя):

 $\lambda(0) = (0.7951, 0.2981, -0.3975, 0.3478), \quad \boldsymbol{\omega}_{x}(0) = (0, 0, 0);$  $\lambda_{\kappa} = (0.8443, 0.3984, -0.3260, 0.1485), \quad \boldsymbol{\omega}_{x}^{\kappa} = (0, 0, 0).$ 

Тело 1. Сферически-симметричное твердое тело:  $I_1 = I_2 = I_3 = 1.0$  (безразмерные величины).

Тело 2. Международная космическая станция (МКС) (ранняя версия [8]) как произвольное твердое тело:  $I_1$ =4853000 кг·м<sup>2</sup>,  $I_2$ =23601000 кг·м<sup>2</sup>,  $I_3$ =26278000 кг·м<sup>2</sup>, (размерные моменты инерции) или  $I_1$  = 0.2358,  $I_2$  = 1.1466,  $I_3$  = 1.2766 (безразмерные величины).

Для того чтобы результаты расчётов можно было сравнить с тем, что получено в работе [6], нужно положить начальное и конечное значения вектора линейной скорости КА равными нулевому вектору.

При этом начальные и конечные значения компонент радиус-вектора центра масс КА (в инерциальной системе координат) также должны совпадать. Пусть безразмерные компоненты радиус-вектора соответствуют [9]:  $x^0 = x^{\kappa} = 23399727.8 \text{ м}, y^0 = y^{\kappa} = 23962416.6 \text{ м}, z^0 = z^{\kappa} = -18801552.4 \text{ м}.$ 

Также нужно принять  $N_w = 0$ , тогда линейная скорость КА будет равна нулю во всё время его движения, т.е. КА будет совершать только вращательное движение.

В данной постановке задачи вид распределения масс КА учитывается только в самом конце, при вычислении управляющего момента, и не участвует в формировании оптимального управления. Поэтому нужно будет менять величину  $N_{\varepsilon}$  так, чтобы модуль безразмерного управляющего момента был меньше единицы (как в работе [6]).

При отсутствии поступательного перемещения для случая сферического распределения масс (при  $N_{\varepsilon} = 1$ ) безразмерное время движения оказалось равным 1.3856 безразмерных единиц. Это близко к указанным в работе [6; с. 146] для этого случая 1.3916 безразмерным единицам. Значения компонент кватерниона ориентации  $\lambda$  и вектора угловой скорости  $\omega$  в промежуточной точке (примерно середина интервала движения) также близки к тем, что указаны в табл. 2 работы [6; с. 146].

Пусть масштабные множители для расстояния и времени соответствуют работе [10]: L = 37000000.0 м, T = 11272.855470 сек. Тогда, с учётом известных значений для массы Земли  $M_0 = 5.9722 \cdot 10^{24}$  кг, и гравитационной постоянной  $G = 6.67408 \cdot 10^{-11}$  H·м<sup>2</sup>·кг<sup>-2</sup>, безразмерный параметр задачи будет равен  $N_G = 0.99997 \approx 1.0$ .

Аналогичные расчёты были проведены для случая, когда распределение масс КА соответствует МКС при  $N_{\varepsilon} = 0.78444$ . Время движения оказалось равным 1.56442 безразмерных единиц, что почти совпадает с указанными в [6; с. 146] для этого случая 1.5645 безразмерными единицами.

Законы изменения фазовых координат и оптимального управляющего момента близки к тем, что получены в работе [6; с. 154] на рис. 2 при решении модифицированной задачи управления поворотом КА.

Заметим, что при отсутствии поступательного перемещения значения компонент безразмерного радиусвектора не влияют на законы изменения фазовых переменных и оптимального управления, а также на время окончания управляемого процесса. При этом лишь моментная часть бикватерниона  $\Lambda$  умножается на постоянный кватернион, и меняются начальные значения сопряжённых переменных.

Рассмотрим теперь общий случай, когда начальные и конечные значения компонент радиус-вектора КА и вектора его скорости не совпадают. Пусть безразмерные компоненты радиус-вектора и вектора скорости соответствуют размерным параметрам орбиты из книги [11]: для начального положения КА  $x^0 = -12194795.0$  м,  $y^0 = 21779195.0$  м,  $z^0 = 8278547.0$  м,  $v_x^0 = -1080.750$  м/сек,  $v_y^0 = -1849.256$  м/сек,  $v_z^0 = 3274.225$  м/сек; для конечного

положения КА  $x^{\kappa} = -12110249.0 \text{ м}, y^{\kappa} = 21643438.0 \text{ м},$  $z^{\kappa} = 8744787.0 \text{ м}, v_x^{\kappa} = -1063.392 \text{ м/сек}, v_y^{\kappa} = -1905.728 \text{ м/сек}, v_z^{\kappa} = 3247.462 \text{ м/сек}.$ 

Положим, что максимальное значение ускорения от тяги реактивного двигателя равно  $w_{\text{max}} \approx 1 \text{ мм/сек}^2$  (на два порядка меньше, чем в работе [10]), что соответствует ЭРДУ малой тяги [12]. При этом безразмерный параметр задачи будет равен  $N_w = 0.0035$ .

В случае сферического распределения масс при  $N_{\varepsilon} = 1$  время движения оказалось равным 6.6863 безразмерных единиц или 20.937 ч. Таким образом, при наличии поступательного перемещения длительность управляемого процесса увеличилась примерно в 4.84 раза.

Отметим, что компоненты вектора линейной скорости КА являются медленно меняющимися функциями времени. При этом на графике изменения каждой из компонент вектора угловой скорости выделяются два этапа разгона, сменяющиеся этапами торможения. Величина компоненты  $\omega_1$  в конце второго разгонного этапа в несколько раз меньше, чем в конце первого; напротив, величина компоненты ω2 в конце второго разгонного этапа примерно на 15% больше, чем её же значение в конце первого этапа. В то же время значение третьей компоненты вектора угловой скорости в конце обоих этапов разгона близки друг к другу. Момент времени, в который меняются этапы, совпадает со сменой знака соответствующей компоненты вектора углового ускорения КА. Оптимальные законы изменения компонент вектора углового ускорения имеют разрывный характер. На каждом из участков активного движения КА они сохраняют постоянное значение. В рассматриваемом случае эти законы полностью совпадают с законами изменения компонент вектора оптимального управляющего момента. При этом компоненты оптимального вектора линейного ускорения являются непрерывными функциями времени, близкими к гармоническим колебаниям. Первая и третья из них дважды меняют знак. До момента времени t = 1 безразмерных единиц каждая из компонент вектора управляющей силы достигает своего абсолютного максимума, а затем до момента времени  $t \approx 5$  колеблется около нуля, несколько раз меняя знак (отклонение от оси абсцисс в несколько раз меньше соответствующего абсолютного максимума).

Также в работе приведены результаты расчётов для случая, когда распределение масс КА соответствует МКС при  $N_{\varepsilon} = 0.78444$ . В этом случае время движения оказалось равным 7.5447 безразмерных единиц или 24.283 ч, что почти в 5 раз больше, чем длительность соответствующего управляемого движения при отсутствии поступательного перемещения центра масс КА.

Законы изменения искомых величин при этом качественно остались такими же, как и в предыдущем случае, за исключением управляющего момента. Компоненты вектора управляющего момента более не являются постоянными в течение каждого из участков активного движения КА. Отметим также, что уменьшились максимальные значения каждой из компонент вектора угловой скорости КА.

Отметим выявленную неединственность численного решения краевой задачи оптимального управления пространственным движением КА, связанную с нелинейностью дифференциальных уравнений задачи. При одних и тех же граничных условиях в постановке краевой задачи оптимального управления получены различные решения для законов движения, управления и поведения сопряженных переменных. Из них было выбрано то, которое соответствует меньшему значению времени окончания управляемого процесса.

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами построена бикватернионная теория оптимального по быстродействию управления пространственным движением КА, даны примеры численного решения этой задачи управления для случая сферической симметрии КА и случая, когда распределение масс КА соответствует МКС. Выявлены характерные свойства и закономерности процесса управления. Комбинирование двух методов решения краевых задач позволило повысить точность и эффективность их численного решения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Челноков Ю.Н. Управление пространственным движением твердого тела с использованием дуальных кватернионов // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 20–24 августа 2019 г.): Сборник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 288-290. DOI: 10.22226/2410-3535-2019congress-v1.
- [2] Chelnokov Yu.N. Synthesis of Control of Spatial Motion of a Rigid Body Using Dual Quaternions, Mechanics of Solids, 2020, Vol. 55, No. 7, pp. 59–80. DOI: 10.3103/S0025654420070080
- [3] Chelnokov Yu.N. Controlling the Spatial Motion of a Rigid Body Using Biquaternions and Dual Matrices, Mechanics of Solids, 2021, Vol. 56, No. 1, pp. 13-33.
- [4] Челноков Ю.Н. Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32-39.
- [5] Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
- [6] Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G. Analytical quasi-optimal solution of the problem of the time-optimal rotation of a spacecraft, Journal of Computer and Systems Sciences International, 2021, vol. 60, no. 4, pp. 639–653.
- [7] Моисеев Н.Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М.: Наука, 1971.
- [8] Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М. Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт № 57. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2002. 19 с.
- [9] Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
- [10] Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Кватернионные модели и алгоритмы решения общей задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20. Вып. 1. С. 93–104.
- [11] Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. 254 с.
- [12] Старинова О.Л. Расчет межпланетных перелетов космических аппаратов с малой тягой. Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2007. 196 с.

# Бикватернионное квазиоптимальное аналитическое решение задачи программного управления пространственным движением космического аппарата

Ю.Н. Челноков, А.В. Молоденков, М.Ю. Логинов Институт проблем точной механики и управления РАН Саратов, Россия ChelnokovYuN@gmail.com; mike.loginov@gmail.com

Аннотация-В докладе изложено аналитическое решение задачи построения квазиоптимального программного управления пространственным движением космического аппарата (КА) произвольной динамической конфигурации в инерциальной системе координат с использованием дуальных параметров Эйлера (Родрига-Гамильтона) и бикватернионов Клиффорда (дуальных кватернионов). Для решения задачи использована новая модель пространственного движения КА, состоящая из дифференциальных уравнений для дуальных параметров Эйлера и дуальных скоростей КА, а также из динамических алгебраических соотношений для формирования векторов управляющей силы и управляющего момента. Краевые условия по угловому и линейному положениям КА в инерциальном пространстве и по его угловой и линейной скоростям произвольны, дуальные управления не ограничены. Время управления зафиксировано. Минимизируется дуальный интегральный квадратичный функционал качества в отношении взаимосвязанного управления угловым (вращательным) и поступательным (орбитальным) движениями КА. Решение получено в классе обобщенных дуальных конических движений с использованием метода решения обратных задач динамики и принципа максимума.

Ключевые слова—космический annapam, программное квазиоптимальное управление, пространственное движение, дуальные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), бикватернион Клиффорда, угловое (врашательное) и поступательное (орбитальное) движения, дуальный интегральный квадратичный функционал качества.

## I. Введение

Применение бикватернионов Клиффорда (дуальных кватернионов) в задачах управления пространственным движением твердого тела было начато в кинематических задачах управления его движением. В последнее время бикватернионы стали широко использоваться для решения задач управления пространственным движением твердого тела, в частности, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело, в динамической постановке. Уравнения динамики твердого тела записываются в бикватернионной форме, объединяющей динамические уравнения вращательного и поступательного движений твердого тела, и дополняются бикватернионным кинематическим уравнением. Для построения законов управления по принципу обратной связи часто используется один из современных методов теории управления - управление с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control или MPC). MPC позволяет получить квазиоптимальное решение для нелинейных объектов при наличии ограничений на управление и фазовых ограничений, но имеет и ряд недостатков, среди которых – неаналитичность, достаточно высокое потребление вычислительных ресурсов, поскольку этот метод требует численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Для синтеза законов управления по принципу обратной связи также широко используется метод "бэкстеппинг" ("backstepping"). Это – рекурсивная процедура, в которой совмещены задачи нахождения функции Ляпунова и соответствующего ей закона управления. Метод был предложен Кокотовичем в 1990 году. В соответствии с этим методом задача построения закона управления для всей системы разбивается на последовательность соответствующих подзадач для систем меньшего порядка. Алгоритм бэкстеппинга заключается в том, чтобы сделать каждый интегратор объекта устойчивым путем добавления обратной связи, вычисленной по этому алгоритму, и представляет собой набор действий, выполняемых для каждого дифференциального уравнения математической модели объекта. Для задачи управления пространственным движением твердого тела на первом этапе рассматривается кинематическая задача управления движением тела, описываемая бикватернионным кинематическим уравнением. На этом этапе кинематический бикватернионный стабилизирующий закон управления часто берется в виде логарифмической обратной связи, т.е. в виде, использующем логарифмическое представление дуального кватерниона (бикватерниона) пространственного перемещения тела.

В докладе в нелинейной динамической постановке с использованием дуальных параметров Эйлера (Родрига-Гамильтона) и бикватернионов Клиффорда (дуальных кватернионов) построено аналитическое решение задачи квазиоптимального программного управления пространственным движением КА произвольной динамической конфигурации в инерциальной системе координат для дуального интегрального квадратичного функционала качества и фиксированного времени управления. Решение получено в классе обобщенных дуальных конических движений с использованием метода решения обратных задач динамики и принципа максимума. Для решения задачи использована новая бикватернионная модель пространственного движения КА, предложенная в работах [1-4], где также приводятся другие новые бикватернионные модели пространственного движения твердого тела и даются их приложения к решению задач

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00218).

управления пространственным движением твердого тела по принципу обратной связи. Приводимое нами решение является бикватернионным аналогом кватернионного решения задачи построения квазиоптимального программного управления вращательным движением КА, построенным в [5, 6].

# II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ КА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Введем обозначения: **r** и **v** – радиус-вектор и вектор скорости центра масс КА в инерциальной системе координат  $\xi$ ,  $\lambda$  – кватернион ориентации КА в этой системе координат, компонентами которого являются параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера)  $\lambda_j$  (j = 0, 1, 2, 3),  $\omega$  и  $\varepsilon$  – векторы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения КА, **F**<sub>c</sub> и **M**<sub>c</sub> – векторы управляющей силы и управляющего момента, приложенных к КА, **F** = **F**(t, **r**, **v**) и **M** = **M**(t,  $\lambda$ ,  $\omega$ ) – главный вектор других внешних сил, действующих на КА (сил гравитации, сопротивления движению и других сил взаимодействия КА с внешней средой) и главный момент этих сил, вычисленный относительно центра масс КА, полагаемые известными функциями времени t и переменных **r**, **v** и  $\lambda$ ,  $\omega$ .

Дифференциальные уравнения движения КА, рассматриваемого как свободное твердое тело, имеют вид

$$m[\dot{\mathbf{v}}_{x} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{x})\mathbf{v}_{x}] = \mathbf{F}_{x}(t, \mathbf{r}_{x}, \mathbf{v}_{x}) + \mathbf{F}_{cx},$$
  
$$\dot{\mathbf{r}}_{x} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_{x})\mathbf{r}_{x} = \mathbf{v}_{x};$$
 (2.1)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{x} = \boldsymbol{\varepsilon}_{x} = \mathbf{J}^{-1} \Big[ \mathbf{M}_{x} \big( t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_{x} \big) - \mathbf{K} \big( \boldsymbol{\omega}_{x} \big) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{x} + \mathbf{M}_{cx} \Big], (2.2)$$
$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_{x}; \qquad (2.3)$$

$$= \mathbf{\lambda} \circ \mathbf{\omega}_{x}; \qquad (2.$$

$$\mathbf{r}_{x} = x_{1}\mathbf{i} + x_{2}\mathbf{j} + x_{3}\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{x} = \dot{x}_{1}\mathbf{i} + \dot{x}_{2}\mathbf{j} + \dot{x}_{3}\mathbf{k},$$
$$\mathbf{v}_{x} = v_{1}\mathbf{i} + v_{2}\mathbf{j} + v_{3}\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{v}}_{x} = \dot{v}_{1}\mathbf{i} + \dot{v}_{2}\mathbf{j} + \dot{v}_{3}\mathbf{k};$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_{0} + \lambda_{v} = \lambda_{0} + \lambda_{1}\mathbf{i} + \lambda_{2}\mathbf{j} + \lambda_{3}\mathbf{k},$$
$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\lambda}_{0} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_{v} = \dot{\lambda}_{0} + \dot{\lambda}_{1}\mathbf{i} + \dot{\lambda}_{2}\mathbf{j} + \dot{\lambda}_{3}\mathbf{k};$$

$$\mathbf{\omega}_x = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{\omega}}_x = \dot{\omega}_1 \mathbf{i} + \dot{\omega}_2 \mathbf{j} + \dot{\omega}_3 \mathbf{k},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x} = \varepsilon_{1} \mathbf{i} + \varepsilon_{2} \mathbf{j} + \varepsilon_{3} \mathbf{k};$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь в уравнениях (2.1) и (2.2)  $\mathbf{r}_x$ ,  $\mathbf{v}_x$ ,  $\mathbf{\omega}_x$ ,  $\mathbf{\varepsilon}_x$ ,  $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{M}_x$ ,  $\mathbf{F}_{cx}$ ,  $\mathbf{M}_{cx}$  – вектор-столбцы размерами 3×1 или, далее, кватернионы с нулевыми скалярными частями, составленные из проекций  $x_k$ ,  $v_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $F_k$ ,  $M_k$ ,  $F_{ck}$ ,  $M_{ck}$  (k = 1, 2, 3) векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{F}_c$ ,  $\mathbf{M}_c$  на оси связанной с КА системы координат X; m – масса КА,  $\mathbf{J}$  – постоянная матрица инерции КА;  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)$  – кососимметрическая матрица угловых скоростей КА, сопоставляемая вектору  $\boldsymbol{\omega}$ ;  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – векторные мнимые единицы Гамильтона;  $\mathbf{a}_y$  – отображение вектора  $\mathbf{a}$  на базис Y ( $Y = \xi$ , X), определяемое как кватернион  $\mathbf{a}_y = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ , компоненты которого – проекции  $a_k$  вектора  $\mathbf{a}$  на базис Y; верхняя точка означает производную по времени t, знак " $\circ$ " – кватернионное умножение.

Первое матричное уравнение (2.1) и матричное уравнение (2.2) являются динамическими, а второе матричное уравнение (2.1) и кватернионное уравнение (2.3) – кинематическими уравнениями пространственного движения КА, представляющего собой композицию поступательного (траекторного) и углового (вращательного) движений. Они образуют систему нелинейных, нестационарных дифференциальных уравнений тринадцатого порядка относительно переменных  $x_k$ ,  $v_k$  и  $\lambda_j$ ,  $\omega_k$ .

Поставим следующую задачу: построить программные управления

$$\mathbf{F}_{cx} = \mathbf{F}_{cx}(t), \ \mathbf{M}_{cx} = \mathbf{M}_{cx}(t),$$
(2.4)

обеспечивающие программный перевод КА из его произвольного заданного начального состояния

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{r}_x(0), \quad \mathbf{v}_x = \mathbf{v}_x(0), \quad \lambda = \lambda(0), \quad \omega_x = \omega_x(0)$$
 (2.5)

в его заданное конечное состояние

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{r}_x(t_1), \quad \mathbf{v}_x = \mathbf{v}_x(t_1), \quad \lambda = \lambda(t_1), \quad \boldsymbol{\omega}_x = \boldsymbol{\omega}_x(t_1) \quad (2.6)$$

в классе оптимальных обобщенных дуальных конических движений.

Поставленную задачу будем решать, учитывая действующие гравитационные силы  $\mathbf{F}_{xgr}$  и пренебрегая действующими возмущающими силами и моментами, с использованием концепции решения обратных задач динамики. Законы формирования управляющей силы и управляющего момента в соответствии с этой концепцией получаются на основе уравнений (2.1), (2.2) и имеют вид

$$\mathbf{F}_{cx} = m \Big[ \dot{\mathbf{v}}_{x} + \mathbf{K} \Big( \boldsymbol{\omega}_{x} \Big) \mathbf{v}_{x} \Big] - \mathbf{F}_{xgr} \Big( t, \mathbf{r}_{x} \Big), \quad (2.7)$$
$$\mathbf{M}_{cx} = \mathbf{J} \boldsymbol{\varepsilon}_{x} + \mathbf{K} \Big( \boldsymbol{\omega}_{x} \Big) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{x}. \quad (2.8)$$

Входящие в первые слагаемые законов управления (2.7) и (2.8) требуемая составляющая  $\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x$  абсолютного линейного ускорения и требуемое абсолютное угловое ускорение  $\varepsilon_x$  могут быть построены на основе матричных (2.9) и кватернионных (2.10) уравнений:

$$\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x;$$
 (2.9)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{r} = \boldsymbol{\varepsilon}_{r}, \quad 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_{r}, \quad (2.10)$$

получающихся из уравнений (2.1)-(2.3).

Фигурирующие в этих уравнениях величины  $\mathbf{w}_x$  и  $\mathbf{\varepsilon}_x$  рассматриваются нами в дальнейшем как новые управления.

Таким образом, задача построения управляющей силы  $\mathbf{F}_{cx}$  и управляющего момента  $\mathbf{M}_{cx}$  в рассматриваемой постановке сводится к построению требуемой составляющей  $\mathbf{w}_x$  абсолютного линейного ускорения и требуемого абсолютного углового ускорения  $\varepsilon_x$ , входящих в качестве управлений в уравнения (2.9) и (2.10). Задача построения управлений  $\mathbf{w}_x$  и  $\varepsilon_x$  носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, так как уравнения (2.9) и (2.10) справедливы для любого такого движущегося объекта. Специфика объекта (его массово–инерционные характеристики, действующие гравитационные силы) учитываются при построении управляющей силы  $\mathbf{F}_{cx}$  и управляющего момента  $\mathbf{M}_{cx}$  на основе конечных соотношений (2.7) и (2.8).

Введем в рассмотрение кинематический винт U KA, отображение которого  $U_x$  на связанный с KA базис X определяется бикватернионом

$$\mathbf{U}_{x} = U_{1}\mathbf{i} + U_{2}\mathbf{j} + U_{3}\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}_{x} + s\mathbf{v}_{x}, \quad U_{k} = \boldsymbol{\omega}_{k} + s\boldsymbol{v}_{k}, (2.11)$$

где s – символ (комплексность) Клиффорда, обладающий свойством  $s^2 = 0$ ;  $U_k = \omega_k + sv_k$ , k = 1,2,3 – дуальные ортогональные проекции кинематического винта U на базис X.

Тогда векторно-матричные (2.9) и кватернионные (2.10) дифференциальные уравнения можно заменить двумя следующими бикватернионными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{\varepsilon}_{\mathbf{x}} + s\mathbf{w}_{\mathbf{x}} = \mathbf{H}_{\mathbf{x}}, \qquad (2.12)$$

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{U}_{\chi}; \qquad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x} = \boldsymbol{\varepsilon}_{1} \mathbf{i} + \boldsymbol{\varepsilon}_{2} \mathbf{j} + \boldsymbol{\varepsilon}_{3} \mathbf{k}, \quad \mathbf{w}_{x} = w_{1} \mathbf{i} + w_{2} \mathbf{j} + w_{3} \mathbf{k},$$
$$\mathbf{H}_{x} = H_{1} \mathbf{i} + H_{2} \mathbf{j} + H_{3} \mathbf{k} = \boldsymbol{\varepsilon}_{x} + s \mathbf{w}_{x}, \qquad (2.14)$$

$$H_{k} = \varepsilon_{k} + sw_{k},$$
  

$$\Lambda = \Lambda_{0} + \Lambda_{v} = \Lambda_{0} + \Lambda_{1}\mathbf{i} + \Lambda_{2}\mathbf{j} + \Lambda_{3}\mathbf{k} = \lambda + s\lambda^{0},$$
  

$$\Lambda_{j} = \lambda_{j} + s\lambda_{j}^{0}; \quad \mathbf{U}_{X} = \boldsymbol{\omega}_{X} + s\mathbf{v}_{X},$$
(2.15)

в которых фазовыми переменными являются бикватернион  $U_{\chi}$  (отображение кинематического винта U KA на связанный базис X) и бикватернион  $\Lambda$  конечного перемещения KA в инерциальном пространстве, главная часть которого (кватернион  $\lambda$ ) характеризует ориентацию KA в инерциальной системе координат, а моментная (кватернион  $\lambda^0$ ) – местоположение KA в этой системе координат (декартовые координаты  $x_k$  (k = 1, 2, 3) центра масс KA в этой системе координаты), а дуальным управлением является бикватернион  $\mathbf{H}_x$ , являющийся дуальной композицией требуемого абсолютного углового ускорения  $\varepsilon_x$  и требуемой составляющей  $\mathbf{w}_x$  абсолютного линейного ускорения KA.

Декартовые координаты  $\xi_k$  центра масс тела (т.е. проекции радиус-вектора **r** центра масс КА на оси инерциальной системы координат  $\xi$ ) и проекции  $x_k$  этого вектора на оси связанной с КА системы координат X находятся через компоненты кватернионов  $\lambda$  и  $\lambda^0$  по формулам

$$\mathbf{r}_{\xi} = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = 2\lambda^0 \circ \overline{\lambda}, \quad \mathbf{r}_x = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} = \overline{\lambda} \circ \lambda^0.$$

Задачу построения требуемой составляющей  $\mathbf{w}_x$  абсолютного линейного ускорения и требуемого абсолютного углового ускорения  $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ , входящих в качестве управлений в уравнения (2.9) и (2.10), сформулируем в бикватернионной постановке следующим образом: необходимо построить бикватернионное программное управление  $\mathbf{H}_{x} = \mathbf{\varepsilon}_{x} + s\mathbf{w}_{x}$ , обеспечивающее программный перевод КА, движение которого описывается уравнениями (2.12) и (2.13), из его произвольного заданного начального состояния

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\lambda}(0) + s\mathbf{\lambda}^{0}(0), \quad \mathbf{U}_{x}(0) = \mathbf{\omega}_{x}(0) + s\mathbf{v}_{x}(0) \quad (2.16)$$

в его заданное конечное состояние

 $\Lambda(t_1) = \lambda(t_1) + s\lambda^0(t_1)$ ,  $U_x(t_1) = \omega_x(t_1) + sv_x(t_1)$  (2.17) и минимизирующее дуальный интегральный квадратичный функционал качества (критерий энергетических затрат)

$$J = \int_{0}^{t_{1}} \mathbf{H}_{x}^{2} dt = \int_{0}^{t_{1}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{x} + s\mathbf{w}_{x})^{2} dt =$$

$$= \int_{0}^{t_{1}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{1}^{2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{2}^{2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{3}^{2}) dt + s2 \int_{0}^{t_{1}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{1}w_{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{2}w_{2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{3}w_{3}) dt, \qquad (2.18)$$

где время *t*<sub>1</sub> фиксировано и задано.

Краевые условия  $\lambda^0(0)$  и  $\lambda^0(t_1)$  находятся через заданные начальные и конечные значения кватернионов  $\lambda$  и  $\mathbf{r}_{\varepsilon}$  по формуле

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^{0} &= (1/2)\mathbf{r}_{\xi} \circ \boldsymbol{\lambda} = \\ &= (1/2) \Big( \boldsymbol{\xi}_{1} \mathbf{i} + \boldsymbol{\xi}_{2} \mathbf{j} + \boldsymbol{\xi}_{3} \mathbf{k} \Big) \circ (\boldsymbol{\lambda}_{0} + \boldsymbol{\lambda}_{1} \mathbf{i} + \boldsymbol{\lambda}_{2} \mathbf{j} + \boldsymbol{\lambda}_{3} \mathbf{k} ). \end{aligned}$$

После решения поставленной задачи в построенном управлении  $\mathbf{H}_x = \mathbf{\epsilon}_x + s\mathbf{w}_x$  необходимо выделить главную  $\mathbf{\epsilon}_x$  и моментную  $\mathbf{w}_x = \dot{\mathbf{v}}_x$  части. После этого выделения законы формирования управляющей силы  $\mathbf{F}_{cx}$  и управляющего момента  $\mathbf{M}_{cx}$  получаются в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики по формулам (2.7) и (2.8).

# III. Решение задачи квазиоптимального программного управления

С использованием принципа перенесения Котельникова-Штуди, позволяющего распространить кватернионные формулы, описывающие управление угловым движением, на бикватернионные формулы, описывающие управление общим пространственным движением твердого тела, получен квазиоптимальный алгоритм программного управления пространственным движением КА. Этот алгоритм строится путем обобщения приближенного аналитического решения кватернионной задачи оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота КА при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА [5, 6], которое, в свою очередь, получено на основе точного решения введенной Я.Г. Сапунковым модифицироваенной задачи оптимального разворота твердого тела [7, 8]. Кратко опишем этот подход.

В случае, когда свободное твердое тело совершает пространственное обобщенное винтовое коническое

движение, для которого кинематический винт  $\mathbf{U}_x$  тела имеет вид

$$\mathbf{U}_{x} = U_{1}\mathbf{i} + U_{2}\mathbf{j} + U_{3}\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}_{x} + s\mathbf{v}_{x} =$$
  
=  $(\dot{F}(t)\sin G(t))\mathbf{i} + (\dot{F}(t)\cos G(t))\mathbf{j} + \dot{G}(t)\mathbf{k}$  (3.1)

где F(t), G(t),  $\dot{F}(t)$ ,  $\dot{G}(t)$  – произвольные дифференцируе-мые функции времени, бикватернионное кинематическое уравнение (2.13) имеет аналитическое решение

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\Lambda}_0 \circ \exp\{-(G(0)/2)\mathbf{k}\} \circ \exp\{-(F(0)/2)\mathbf{j}\} \circ \\ \circ \exp\{(F(t)/2)\mathbf{j}\} \circ \exp\{(G(t)/2)\mathbf{k}\}$$
(3.2)

дуальный аналог кватернионного решения [5-8],
 "exp{.}" обозначает бикватернионную экспоненту.

Винтовое движение свободного твердого тела (КА), описываемое соотношениями (3.1), (3.2) можно обобщить, добавив произвольный дуальный поворот в инерциальной системе координат на дуальный постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой поворот задается с помощью произвольного постоянного бикватерниона  $\mathbf{K} = \mathbf{\kappa} + s \mathbf{\kappa}^0$ ,  $\|\mathbf{K}\| = 1$  (в правые части формула (3.1), (3.2) добавятся умножения слева и справа на бикватернионы  $\widetilde{\mathbf{K}}$  и  $\mathbf{K}$  соответственно, где  $\widetilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{K} = \mathbf{K} \circ \widetilde{\mathbf{K}} = 1$ ).

Формулы (3.1), (3.2) включают в себя все известные точные кватернионные аналитические решения классической задачи оптимального разворота твердого тела при его динамической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения твердого тела постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [9, 10] и их дуальные аналоги. Предлагаемая структура кинематического винта (3.1), в кватернионном случае – вектора угловой скорости КА, хорошо соотносуются с концепцией Пуансо: всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела.

С использованием выражений (3.1), (3.2) в начальный и конечный моменты движения удовлетворяются граничные условия задачи (2.16), (2.17).

Относительно функций F(t), G(t) и их первых и вторых производных (которые рассматриваются в качестве новых дуальных управлений) ставится оптимизационная задача, которая аналитически решается на основе принципа максимума Понтрягина; бикватернион управления КА получается из кинематического винта  $U_x$  на основе решения обратной задачи динамики движения свободного твердого тела. Аналитическое решение дуальной модифицированной задачи допустимо как квазиоптимальное аналитическое решение задачи оптимального пространственного движения (маневрирования) КА.

Для проведения математического моделирования управляемого движения КА с построенными законами управления были разработаны программы моделирования, реализующие дуальную алгебру. Проведенное моделирование показало эффективность разработанной теории квазиоптимального программного управления пространственным движением КА.

#### Литература

- Челноков Ю.Н. Управление пространственным движением твердого тела с использованием бикватернионов и дуальных матриц. Известия РАН. Механика твердого тела. 2021. № 1. С. 17–43.
- [2] Chelnokov Yu.N., Controlling the Spatial Motion of a Rigid Body Using Biquaternions and Dual Matrices, Mechanics of Solids, 2021, vol. 56, no. 1, pp. 13–33.
- [3] Челноков Ю.Н. Синтез управления пространственным движением твердого тела с использованием дуальных кватернионов. Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 5-6. С. 704–733.
- [4] Chelnokov Yu.N., Synthesis of Control of Spatial Motion of a Rigid Body Using Dual Quaternions, Mechanics of Solids, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 59–80.
- [5] Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота произвольного твердого тела при произвольных граничных условиях, Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 2. С. 160–173.
- [6] Molodenkov A.V., Sapunkov Y.G., Analytical quasi-optimal solution for the problem on turn maneuver of an arbitrary solid with arbitrary boundary conditions, Mechanics of Solids, 2019, vol. 54, no. 3, pp. 474-485.
- [7] Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного твердого тела при произвольных граничных условиях в классе обобщенных конических движений, Известия РАН. Механика твердого тела. 2014. № 5. С. 22-34.
- [8] Molodenkov A.V., Sapunkov Y.G., Solutions of the Optimal Turn Problem for a Spherically Symmetric Body under Arbitrary Boundary Conditions in the Class of Generalized Conical Motion, Mechanics of Solids, 2014, vol. 49, no. 5, pp. 495-505.
- [9] Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений, Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 6. С. 129-145.
- [10] Molodenkov A.V., Sapunkov Y.G., Analytical Solution of the Optimal Slew Problem for an Axisymmetric Spacecraft in the Class of Conical Motions, Journal of Computer and Systems Sciences International, 2016, vol. 55, no. 6, pp. 969-985.

# Приближенные решения задач динамики для приборов систем автоматического управления с применением матричного описания и матричных операторов

В.М. Никифоров АО «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина» Москва, Россия

Д.В. Груненков АО «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина» Москва, Россия А.А. Гусев АО «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина» Москва, Россия

Е.С. Сумнительный АО «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина» Москва, Россия

А.С. Аккуратова АО «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина» Москва, Россия

Аннотация — Статья рассматривает применение аппарата приближенных вычислений с использованием матричного описания систем и матричных операторов для решения задач динамики для приборов систем автоматического управления. Представлены результаты приближенных вычислений при разложении сигналов в системах базисных функций на основе функций Уолша и смещенных ортогональных многочленов Лежандра при различных размерностях базисов. Найдены оптимальные размеры базисов без потери точности вычислений.

Ключевые слова — матричные методы, приближенные решения, системы базисных функций, акселерометр, гиростабилизатор.

## I. Введение

Аналитические решения прямой задачи динамики для анализа современных приборов систем автоматического управления под действием различных возмущающих факторов в большинстве случаев требует значительных временных и вычислительных ресурсов, а в некоторых случаях их практически нельзя найти. Одним из вариантов решения прямой задачи динамики, а также обратной задачи динамики, является использование аппарата приближенных вычислений на основе матричного описания систем и матричных операторов [1, 2].

Целью работы является расширение возможностей при анализе систем автоматического управления, используя аппарат приближенных вычислений на основе матричного описания систем, матричных операторов интегрирования, дифференцирования и т.д., а также спектрального представления сигналов в различных системах базисных функций.

Объектами исследования являются стационарные системы, такие как одноосный гиростабилизатор [3] и маятниковый акселерометр [4], заданные структурными схемами с передаточными функциями 7-го и 4-го порядка, соответственно.

Предметом исследования являются метод нахождения приближенных решений в виде переменных состояния системы с использованием матричного описания систем, матричных операторов и спектрального представления сигналов в различных системах базисных функций. В качестве базисных функций могут выступать: функции Уолша, тригонометрические функции, полиномы Лежандра, полиномы Чебышева и другие.

# II. Постановка задачи

Задачу работы можно сформулировать следующим образом: для прибора системы автоматического управления, представленного структурными схемами с передаточными функциями, необходимо показать применимость метода нахождения приближенных решений в виде переменных состояния системы с использованием матричного описания систем, матричных операторов и спектрального представления сигналов в различных системах базисных функций без потери точности вычислений.

Передаточная функция одноосного гиростабилизатора

 $W(s) = \frac{0.001282 \cdot s^5 + 15.46 \cdot s^4 + 2.786 \cdot 10^4 \cdot s^3 + 1.474 \cdot 10^7 \cdot s^2 + 1.954 \cdot 10^9 \cdot s}{s^7 + 1.206 \cdot 10^4 \cdot s^6 + 2.173 \cdot 10^7 \cdot s^5 + 1.151 \cdot 10^9 \cdot s^4 + 1.537 \cdot 10^2 \cdot s^3 + 4.282 \cdot 10^4 \cdot s^2 + 1.184 \cdot 10^6 \cdot s + 8.052 \cdot 10^{16} \cdot s^4 + 1.516 \cdot s^4$ 

Передаточная функция маятникового акселерометра

 $W(s) = \frac{242.67 \cdot s^2 + 8.897 \cdot 10^4 \cdot s + 4.853 \cdot 10^4}{s^4 + 3187 \cdot s^3 + 2.441 \cdot 10^6 \cdot s^2 + 8.898 \cdot 10^8 \cdot s + 4.853 \cdot 10^8}$ 

# III. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

В работе рассмотрены система базисных функций на основе функций Уолша применимо к одноосному гиростабилизатору и на основе смещенных ортогональных многочленов Лежандра применимо к маятниковому акселерометру. При использовании рассматриваемого метода происходит переход из временной области в область спектров сигналов. Таким образом все вычисления при решении задач происходят в спектральной области сигналов с использованием матричных операторов, которые определяются системами базисных функций. Использование спектров сигналов позволяет перейти от решения сложных систем дифференциальных уравнений к решению относительно простых систем

К.А. Андреев АО «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина» Москва, Россия

А.С. Ширяев АО «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина» Москва, Россия линейных уравнений, применяя матричные методы. Точность приближенных решений в свою очередь зависит от размерности выбранного базиса и от вида базисных функций. Обратный переход от спектральной области к временной может быть достаточно просто произведен в матричном виде.

Для решения задачи динамики для одноосного гиростабилизатора использована система базисных функций на основе функций Уолша, которые являются полной ортонормированной системой, относящихся к несинусоидальным ортогональным системам функций и принимающим лишь два значения ±1.

Матрица систем функций Уолша  $W_n$  размерностью 8 на 8 имеет вид

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1.

На основе данной матрицы определяются коэффициенты разложения (спектральные характеристики) входных сигналов системы.

В системе функций Уолша определены операторы интегрирования, дифференцирования и т.д. Оператор интегрирования (часть оператора 10 на 10) имеет вид:

•	0.5000	0.2500	0	0.1250	0	0	0	0.0625	0	0 ]
	-0.2500	0	0.1250	0	0	0	0.0625	0	0	0
	0	-0.1250	0	0	0	0.0625	0	0	0	0
	-0.1250	0	0	0	0.0625	0	0	0	0	0
	0	0	0	-0.0625	0	0	0	0	0	0
А <sub>и</sub> =	0	0	-0.0625	0	0	0	0	0	0	0
	0	-0.0625	0	0	0	0	0	0	0 (	0.0313
	-0.0625	0	0	0	0	0	0	0	0.0313	3 0
	0	0	0	0	0	0	0	-0.0313	0	0
	0	0	0	0	0	0	-0.0313	0	0	0

В результате решения матричных уравнений, полученных на основе дифференциальных уравнений, определяется спектральная характеристика выходного сигнала  $C^{Y_{\alpha}}$ .

Выходной сигнал  $Y_{\alpha}$  определяется как произведение матрицы систем функций Уолша на спектральную характеристику.

$$Y_{\alpha} = W_n C^{Y_{\alpha}}$$
.

Для решения задачи динамики для маятникового акселерометра использована система базисных функций на основе смещенных ортогональных многочленов Лежандра на временном отрезке  $[t_0; T]$ .

$$\tilde{P}_{n}(t) = \frac{(T-t_{0})^{n}}{n!2^{2n}} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \left[ \left( \frac{2(t-t_{0})}{T-t_{0}} - 1 \right)^{2} - 1 \right]^{n}.$$

Разложение сигнала на временном отрезке  $[t_0; T]$  осуществляется по формуле с коэффициентами полинома Лежандра  $C_n$ .

$$f(t) = C_0 \tilde{P}_0(t) + C_1 \tilde{P}_1(t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \tilde{P}_n(t);$$
$$C_n = \frac{(f, \tilde{P}_n)}{\|\tilde{P}_n\|^2} = \frac{2n+1}{T-t_0} \int_{t_0}^T f(t) \tilde{P}_n(t) dt.$$

Матрица оператора интегрирования в базисе из многочленов Лежандра имеет вид:

$$A_{\rm H} = \frac{T - t_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{(2n-3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(2m-3)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(2n-3)} & 0 \end{bmatrix}$$

Определение спектральной характеристики выходного сигнала  $C_n^{\dot{W}}$  происходит аналогично определению при разложении по системе базисных функций Уолша.

Выходной сигнал i(t) определяется по формуле:

$$i(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{\dot{W}} P_n(t).$$

#### IV. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проведено моделирование переходных процессов в системе динамического моделирования с различными размерностями базисов и проведено сравнение полученных переходных процессов с эталонными. В случае одноосного гиростабилизатора промоделированы переходные процессы передаточных функций, связывающих угол стабилизации с возмущающими моментами, в случае маятникового акселерометра промоделированы переходные процессы передаточной функции, связывающей ток задатчика момента с вектором кажущегося ускорения. Моделирование проводилось с различными размерностями базисов для нахождения оптимального соотношения ошибки вычислений и времени вычислений. На рис. 1–4 представлены изменения угла стабилизации гиростабилизатора при различных размерностях базиса на основе функций Уолша.



Рис. 1. Изменение угла стабилизации при N = 8



Рис. 2. Изменение угла стабилизации при N = 32



Рис. 3. Изменение угла стабилизации при N = 128



Рис. 4. Изменение угла стабилизации при N = 512

На рис. 5 представлена кривая Парето зависимости времени вычислений и ошибки вычисления от размерности базиса на основе функций Уолша.

При использовании в качестве базисной системы функции Уолша на переходном процессе при небольшой размерности базиса отчётливо просматривается дискретность процесса, что свойственно функциям Уолша. При увеличении размерности базиса уменьшается влияние дискретности и уменьшается ошибка относительно эталонного переходного процесса. Однако при достаточно большой размерности базиса может накапливаться ошибка и увеличиваться расхождение с эталонным переходным процессом. Оптимальная размерность базиса N = 856.

Переходной процесс с использованием базисной системы на основе смещённых ортогональных многочленов Лежандра имеет более гладкую форму.

На рис. 6 представлены переходные процессы маятникового акселерометра при различных размерностях базисной системы на основе смещённых ортогональных многочленов Лежандра. Оптимальная размерность базиса n = 20.





Рис. 6. Переходные процессы маятникового акселерометра при различных размерностях базиса

С увеличением размерности базиса также необходимо учитывать вычислительные ресурсы, затрачиваемые на решение задач.

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате моделирования с использованием систем базисных функций и матричных операторов получены кривые Парето зависимости времени вычислений и ошибки вычисления от размерности базисов. Найдены оптимальные размеры базисов для функций Уолша и смещённых ортогональных многочленов Лежандра без потери точности вычислений.

В результате работы можно сделать следующие выводы:

- приближенные вычисления на основе матричного описания систем, матричных операторов интегрирования, дифференцирования и т.д., а также спектрального представления сигналов в различных системах базисных функций. могут применяться для анализа систем автоматического управления без потери качества;
- при использовании данного метода приближенных вычислений необходимо предварительно определять оптимальное значение размерности базиса с учётом времени вычислений и требуемой точности вычислений;
- применение слишком большой размерности базисных функций может привести к накоплению ошибки вычисления и расхождению с эталонными значениями решения (аналитическими решениями).

# ЛИТЕРАТУРА

- Пупков, К.А. Матричные методы расчета и проектирования сложных систем автоматического управления для инженеров / К.А.Пупков, Н.Д.Егупов. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 664 с.
- [2] Пупков, К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти тт.; 2-у изд., перераб. Доп. Т.4: Теория оптимизации систем автоматического управления / К.А.Пупков, Н.Д.Егупов. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 744 с.
- [3] Никифоров, В.М. «Сверхмягкое» управление конечными параметрами одноосного иростабилизатора / А.А. Гусев, К.А. Андреев, Т.А. Жукова, А.С. Ширяев // XXVI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2019. С. 213-215.
- [4] Никифоров, В.М. Идентификация математической модели маятникового акселерометра с учётом параметрической неопределённости / А.А. Гусев, С.С. Золотухин, Т.А. Жукова, А.А. Нижегородов // XXIV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. С. 329-332.

# Новая сдвиговая математическая модель колебаний пластинчатых пористых функционально градиентных акселерометров с присоединенной массой в температурном поле

И.В. Папкова Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов E-mail: <u>ikravzova@mail.ru</u> Т.В. Яковлева Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов E-mail: <u>van-tan1987@mail.ru</u>

Аннотация—В работе построена новая математическая модель пластинчатых акселерометров с присоединенной массой, находящихся в температурном поле из пористого функционально-градиентного материала (PFGM). Под пластинчатыми структурами будем понимать пластинки и пологие оболочки малой кривизны. Решена задача на собственные значения методом Бубнова-Галеркина в высших приближениях. Приводятся численные примеры.

Ключевые слова—НЭМС, МЭМС, PFGM, математическая модель, нанопластина с присоединенными массами, модифицированная моментная теория упругости, собственные частоты.

# I. Введение

Бурное развитие авиакосмической отрасли промышленности привело к необходимости создания приборов навигации нового типа, в частности чувствительных элементов акселерометров с присоединенными массами. Это привело к построению математических моделей с учетом функционально – градиентных материалов, обладающих высокой удельной прочностью и жесткостью. В научной литературе отсутствуют работы, посвященные исследованию пластинчато-оболочечных систем с присоединенными массами из пористого функционально-градиентного материала.

#### II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Объектом исследования является прямоугольные в плане пластинчато-оболочечные структуры малой кривизны, занимающие в пространстве  $R^3$  (рис. 1) область  $\Omega$ 

$$\Omega = \left\{ 0 \le x \le a; 0 \le y \le b; -h \le z \le h \right\}$$
(1)

При построении математической модели приняты следующие гипотезы: материал пластины упругий и ортотропный; температурное поле определяется из решения трехмерного уравнения теплопроводности; учитывается закон Дюамеля-Неймана; нано эффекты учитываются на базе модифицированной моментной теории упругости Янга; присоединенная масса - с помощью дельта-функции Дирака; кинематическая модель - С.П. Тимошенко. А.В. Крысько Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов E-mail: anton.krysko@gmail.com В.А. Крысько Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов E-mail: <u>tak@sun.ru</u>



Рис. 1. Расчетная схема

Разрешающие уравнения движения нано пластинчато-оболочечной структуры получены из принципа Остроградского – Гамильтона:

$$\int_{t_{0}}^{t_{1}} \left(\delta K - \delta \Pi + \delta' W\right) dt = 0, \qquad (2)$$

где К, П – кинетическая и потенциальная энергия соответственно,  $\delta'W$  – работа внешних сил. Потенциальная энергия (3) с учетом классической (подчеркнуто одной чертой) и модифицированной моментной теории упругости Yang [1] (подчеркнуто двумя чертами) записана в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \underbrace{\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}}_{\Omega} + \underbrace{m_{ij} \chi_{ij}}_{\Omega} \right) d\Omega$$
(3)

Связь между напряжениями и деформациями для ортотропного материала:

$$\sigma_{11} = A_{1111}e_{11} + A_{1122}e_{22}, (1, 2),$$
  

$$a_{13} = A_{1313}e_{13}, \ \sigma_{23} = A_{2323}e_{23}, \ \sigma_{12} = A_{1212}e_{12}.$$
(4)

где

$$A_{1111} = \frac{E_1}{1 - v_1 v_2}, A_{1122} = \frac{E_1 v_2}{1 - v_1 v_2}, (\overrightarrow{1, 2})$$
$$A_{1212} = G_{12}, A_{1313} = G_{13}, A_{2323} = G_{23}.$$

Кинетическая энергия системы:

σ

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega \quad (5)$$

Вариация работы внешних сил:

$$\delta'W = \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} q(x,t) \delta w dy dx$$
 (6)

Исследования выполнены при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-71-10083, <u>https://rscf.ru/project/22-71-10083/</u>

где  $\rho$  – плотность материала оболочки, q(x,t) – внешняя нормальная нагрузка.

Согласно функционально-градиентной теории [2, 3] модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона для изотропного материала с однородной пористостью записываются следующем виде (7):

$$E = (E_{c} - E_{m}) (0.5 + z / h)^{k} + E_{m} - (E_{c} + E_{m})\Gamma / 2,$$

$$\rho = (\rho_{c} - \rho_{m}) (0.5 + z / h)^{k} + \rho_{m} - (\rho_{c} + \rho_{m})\Gamma / 2,$$

$$v = (v_{c} - v_{m}) (0.5 + z / h)^{k} + \rho_{m} - (v_{c} + v_{m})\Gamma / 2,$$
(7)

где  $E_m$ ,  $\rho_m$ , и  $v_m$  – модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона изотропного металла,  $E_c$ ,  $\rho_c$  и  $v_c$  – модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона керамики.

Из принципа Гамильтона-Остроградского (2) получены вариационные, дифференциальные, граничные уравнения и начальные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{yz}}{\partial y^2} &= \int_{-h}^{h} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f_1(x, y, t), \\ \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{yz}}{\partial x \partial y} &= \int_{-h}^{h} \rho dz \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f_2(x, y, t), \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_{xz} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zz}}{\partial y} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_{yz}}{\partial y^2} = \int_{-h}^{h} \rho z^2 dz \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2} + \varphi_1(x, y, t) \end{aligned}$$
(8)  
$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_{yz} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zz}}{\partial x} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_{xz}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_{yz}}{\partial x \partial y} = \int_{-h}^{h} \rho z^2 dz \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial t^2} + \varphi_2(x, y, t) \\ \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{yy}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{12}}{\partial x^2} + q = \\ &= \int_{-h}^{h} \rho dz \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f_3(x, y, t) \end{aligned}$$

где

$$\begin{split} f_{i}(x,y,t) &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ M^{i} \left[ \frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} \delta(x-x_{i}) \delta(y-y_{i}) + h \frac{\partial^{2} \gamma_{x}}{\partial t^{2}} \right. \\ &\delta(x-x_{i}) \delta(y-y_{i}) - (z_{i}-h) \frac{\partial^{3} w}{\partial x \partial t^{2}} \delta(x-x_{i}) \delta(y-y_{i}) - \\ &- \frac{1}{4} J_{z}^{i} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^{3} v}{\partial x \partial t^{2}} \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{4} J_{z}^{i} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^{3} \gamma_{x}}{\partial x \partial t^{2}} \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{4} J_{z}^{i} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^{3} y}{\partial x \partial t^{2}} \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) - \\ &- \frac{1}{4} J_{z}^{i} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) - \\ &- \frac{1}{2} J_{z}^{i} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} J_{z}^{i} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} J_{z}^{i} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^{3} w}{\partial x \partial t^{2}} \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{h}{\partial t} \left[ \int_{z}^{i} \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{h}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial x \partial t^{2}} \right) \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ h \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial x \partial t^{2}} \right) \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ h \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial x \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ h \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial x \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial^{3} y}{\partial y \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(x-x_{i}) + \\ &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}} \right] \delta(y-y_{i}) \right] \delta(y-y$$

$$-J_{yy}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^{3}w}{\partial x\partial t^{2}}\delta(x-x_{i})\right]\delta(y-y_{i})-$$

$$-J_{xy}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^{3}w}{\partial x\partial t^{2}}\delta(x-x_{i})\right]\delta(y-y_{i})+$$

$$+J_{xz}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\frac{\partial^{3}v}{\partial x\partial t^{2}}-\frac{\partial^{3}u}{\partial y\partial t^{2}}+h\left(\frac{\partial^{3}\gamma_{y}}{\partial x\partial t^{2}}-\frac{\partial^{3}\gamma_{x}}{\partial y\partial t^{2}}\right)\right]\delta(y-y_{i})\right\}\cdot$$

$$\delta(x-x_{i})-J_{yz}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{\partial^{3}v}{\partial x\partial t^{2}}-\frac{\partial^{3}u}{\partial y\partial t^{2}}+h\left(\frac{\partial^{3}\gamma_{y}}{\partial x\partial t^{2}}-\frac{\partial^{3}\gamma_{x}}{\partial y\partial t^{2}}\right)\right]\delta(x-x_{i})\right\}\delta(y-y_{i})\right\}$$

В качестве метода исследования выбран метод Бубнова-Галеркина в высших приближениях. Для получения достоверных результатов исследуется его сходимость.



Рис. 2 Влияние относительной толщины на линейную собственную частоту панели



Рис. З. Влияние присоединенной массы на линейную собственную частоту панели

# III. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Исследуем собственные колебания полноразмерной пластинчато-оболочечной структуры несущую присоединенные массы. На рис. 2 приведены частоты  $ω* = a\sqrt{\rho / A_{1111}}ω$ , в зависимости от  $\lambda_1 = a / 2h$  $=\lambda_{2}=b/2h$  полноразмерной цилиндрической панели  $(k_x = 6, k_y = 0)$  для ряда значений  $G_{13} / E = G_{23} / E =$ G // Е. Сплошные линии 1 и 2 соответствуют собственным колебаниям для структуры с одной степенью свободы при G' = 0.2; 0.1, a для цилиндрической панели с присоединенной массой  $\overline{M} = 0.5 M_0$  в центре, штриховыми линиями 3 и 5. Штриховые линии 4 и 6 - колебания цилиндрической панели с девятью степенями свободы. На рис. З приведена зависимость основной частоты цилиндрической панели от величины присоединенной массы, для различных геометрических и физических параметров:  $\lambda_1 = 10$  (при G' / E = 0.2 – кривая 1, при G' / E = 0.1 – кривая 2) и  $\lambda_1 = 50$  (при  $G \lor E = 0.2$  – кривая 3, при G' / E = 0.1 -кривая 4).

На рис.4 приведены зависимости собственных частот нано пластинчато-оболочечной структуры без учета температурного поля с параметрами кривизны  $k_x = k_y = 0$ , в зависимости от параметра k, приведенного в (7). Кривая 1 соответствует  $\gamma = 0.5$ ,  $\Gamma = 0.4$ , кривая 2 -  $\gamma = 0$ ,  $\Gamma = 0.4$ , кривая 3  $\gamma = 0.5$ ,  $\Gamma = 0.1$ , кривая 4 –  $\gamma = 0$ ,  $\Gamma = 0.1$ .



Рис. 4. Влияние к на линейную собственною частоту пластины

Исследование собственных частот в зависимости от коэффициента пористости  $\Gamma$ , коэффициента соотношения долей керамической и металлической фаз k и размерно-зависимого параметра  $\gamma$  показало, что сочетание параметров мелкая пористость ( $\Gamma = 0.1$ ) и высокое содержание керамики (k=0.1) приводит к частоте колебаний пластины, которая выше, чем частота чисто керамической пластины с присоединенными массами. Зависимость  $\omega(k)$  имеет локальный минимум при k\*=0.75.

#### Выводы

1. В работе построена математическая модель динамики ортотропных пластинчато-оболочечной структур кинематической модели С.П. Тимошенко с учетом присоединенной массы в центре. Данная математическая модель позволяет исследовать динамику МЭМС/НЭМС, выполненных из ортотропного материала с учетом поперечных сдвигов.

- Построена математическая модель для пористых функционально-градиентных конструктивных элементов МЭМС/НЭМС с учетом поперечных сдвигов.
- Исследовано влияние величины пористости материала на собственные колебания нано пластинчато-оболочечных структур в зависимости от величины и места приложения присоединенных масс.

# Литература

- DCC Lam, F, Yang ACM Chong, J. Wang, P. Tong "Experiments and theory in strain gradient elasticity". J Mech Phys Solids, vol. 51, Issue 8, 2003, pp. 1477-1508
- [2] Mergen H. Ghayesh "Nonlinear vibration analysis of axially functionally graded shear-deformable tapered beams". Applied Mathematical Modelling. Vol. 59, 2018, pp. 583–596
- [3] Saeid Sahmani, Mohammad Mohammadi Aghdam, Timon Rabczuk "Nonlinear bending of functionally graded porous micro/nano-beams reinforced with graphene platelets based upon nonlocal strain gradient theory", Composite Structures, Vol. 186, 15 February 2018, pp. 68-78.

# Условия возникновения хаотических колебаний размерно-зависимых планарных компонентов МЭМС/НЭМС-датчиков

М.А. Барулина Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского Саратов, Россия 0000-0003-3867-648X Д.В. Кондратов

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского Саратов, Россия 0000-0003-4266-2718 Р. Романов Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского Саратов, Россия 0009-0004-0289-8800

С.А. Галкина

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского Саратов, Россия galkina@iptmuran.ru

# Е.В. Панкратова

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского Саратов, Россия

# pankratova@iptmuran.ru

Аннотация—В настоящей работе построена математическая модель динамической деформации размернозависимых планарных компонентов МЭМС/НЭМС. Уравнения движения были получены на основе полностью корректной нелокальной градиентной теории и теории деформаций пластин третьего порядка. Нанопластина рассматривается как зависящая от размера изотропная тонкая пластина. Построенная математическая модель динамической деформации размерозависимых плоских компонентов датчиков существенно нелинейна, в связи с чем возможны хаотические колебания даже при детерминированном законе изменения движущей силы. Сформулированы условия устойчивости.

Ключевые слова—MEMS, NEMS, размерно-зависимая пластина, хаотические колебания, градиентная теория, теория деформации пластины третьего порядка.

#### I. Введение

Достижения в области технологий позволили разработать датчики MEMS/NEMS с компонентами, эффективные размеры которых находятся в диапазоне от 30 до 200 нм. Одной из проблем использования таких компонентов является отсутствие адекватных математических моделей для описания их динамической деформации. Это можно объяснить несколькими причинами. Во-первых, необходимо использовать теории деформации пластин высокого порядка для описания деформации компонентов, работающих как высокочастотные резонаторы. Вовторых, для объектов таких размеров нарушается основная гипотеза о сплошности среды, поэтому классические теории упругости в данном случае неприменимы.

К настоящему времени разработано несколько неклассических теорий нелокальной упругости [1-6]. Большинство этих теорий можно рассматривать как попытки обобщения классической теории упругости. Практическое применение этих обобщенных теорий затруднено из-за множества новых параметров, вводимых для описания размерно-зависимых эффектов, определение которых затруднено. Одним из классов обобщенных теорий упругости является класс градиентных нелокальных теорий упругости. Количество новых параметров в градиентных нелокальных теориях может быть сведено к минимуму, что позволяет использовать их для практического моделирования. Но, с другой стороны, градиентная теория упругости может стать некорректной после уменьшения числа параметров, так как будут нарушены фундаментальные свойства симметрии механических свойств конструкций.

Целью работы было разработать математическую модель движения размерно-зависимых компонентов МЭМС/НЭМС-датчиков и найти условия возможного возникновения их хаотических колебаний.

Для достижения этой цели были сделаны следующие предположения. Рассматривались только компоненты, которые можно представить в виде тонких пластин. Материал предполагался изотропным. Общая корректная теория градиента с двумя дополнительными параметрами, зависящими от размера, использовалась для отражения эффектов, зависящих от размера. Для описания кинематики пластины использовалась теория деформации пластины третьего порядка. В качестве возмущающей силы рассматривалось электростатическое воздействие, нелинейно зависящее от прогиба пластины.

#### II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим изотропную тонкую пластину с постоянной толщиной h (Рис. 1) и плотностью  $\rho_0$ . Возмущающая сила приложена на поверхность  $x_3 = -h/2$ . Координатная система показана на рис. 1.



Рис. 1. Планарный компонент MEMS/NEMS

Выражения для поля перемещений  $(u_1, u_2, u_3)$  в соответствии с теорией деформации пластин Зго порядка имеет вид [7]:

$$u = u_0 + x_3 \phi - c x_3^3 (\phi + w),$$
 (1)

где  $u=u(t,x_1,x_2,x_3)$  вектор перемещения точки,  $\phi$  – вектор поворота,  $w = (u_{3,1}^0, u_{3,2}^0, 0)^T$ ,  $c=4/(3h^2)$ .

Общая корректная нелокальная градиентная теория для изотропного тела может быть записана в виде [6]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

$$\mu_{ijk} = a_1 \left( \Delta u_k \delta_{ij} + \Delta u_j \delta_{ik} + \theta_i \delta_{jk} \right) +$$

$$+ 2a_2 \left( \theta_k \delta_{ij} + \theta_j \delta_{ik} \right) + a_7 \Delta u_i \delta_{jk} +$$

$$+ 2a_8 u_{i,jk} + 2a_{11} \left( u_{j,ik} + u_{k,ij} \right),$$
(2)

где  $\lambda$ ,  $\mu$  коэффициенты Ламэ;  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$  тензор напряжений;  $a_i$  некие положительные константы, которые используются при определении тензора градиентных модулей  $A = A_{ijklm}$ ;  $\mu_{ijk} = A_{ijklm}u_{l,mn} = A_{ijklm}\varepsilon_{lm,n} - градиентный тензор.$ 

Константы *a<sub>i</sub>* могут рассматриваться как размернозависимые параметры.

Условия симметрии:

$$u_{i,jk} = u_{i,kj},$$

$$\mu_{ijk} = \mu_{ikj} = \mu_{kij}.$$
(3)

Электростатическая движущая сила:

$$F_{el} = -\frac{d}{dx_3} \left( \frac{1}{2} C_{FB} V^2 \right)$$

$$C_{FB} = \varepsilon_0 b_2 \left[ \frac{b_1}{d_0 - x_3} + 0.77 + 1.06 \left( \frac{b_1}{d_0 - x_3} \right)^{0.25} + 1.06 \left( \frac{h}{d_0 - x_3} \right)^{0.5} \right] \qquad (4)$$

$$V = V_{dc} + V_{ac} sin\omega t$$

Соотношения (1-4) являются основными для построения математической модели с использованием принципа виртуальных перемещений.

Полученная математическая модель динамической деформации размерно-зависимых планарных компонентов МЭМС/НЭМС имеет вид:

$$N_{11,1} + N_{12,2} - \mathcal{H}_{1} = I_{0}\tilde{u}_{1}^{0} + J_{1}\check{\phi}_{1} - cI_{3}\tilde{u}_{3,1}^{0}$$

$$N_{22,2} + N_{12,1} - \mathcal{H}_{2} = I_{0}\tilde{u}_{2}^{0} + J_{1}\check{\phi}_{2} - cI_{3}\tilde{u}_{3,2}^{0}$$

$$N_{13,1} + N_{23,2} - 3c(R_{13,1} + R_{23,2}) +$$

$$+c(P_{11,11} + P_{22,22} + 2P_{12,12}) - \mathcal{H}_{3} =$$

$$= F_{dr}(t, x) + I_{0}\tilde{u}_{3}^{0} + cI_{3}(\tilde{u}_{1,1}^{0} + \tilde{u}_{2,1}^{0}) +$$

$$+cJ_{4}(\check{\phi}_{1,1} + \check{\phi}_{2,2}) - c^{2}I_{6}(\tilde{u}_{3,11}^{0} + \tilde{u}_{3,22}^{0})$$

$$(M_{11} - cP_{11})_{,1} + (M_{12} - cP_{12})_{,2} - (N_{13} - 3cR_{13}) - \mathcal{H}_{4} =$$

$$= J_{1}\tilde{u}_{1}^{0} + J_{1}^{2}\check{\phi}_{1} - cJ_{4}\tilde{u}_{3,1}^{0}$$

$$(M_{22} - cP_{22})_{,2} + (M_{12} - cP_{12})_{,1} - (N_{23} - 3cR_{23}) - \mathcal{H}_{5} =$$

$$= J_{1}\tilde{u}_{2}^{0} + J_{1}^{2}\check{\phi}_{2} - cJ_{4}\tilde{u}_{3,2}^{0}$$

где  $\mathcal{H}_i$  – неклассическая часть уравнений (5). Выражения для  $\mathcal{H}_i$  носят нелинейный характер. Например, для  $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}}$  выражение имеет вид:

 $\begin{aligned} \mathcal{H}_{3} &= c(P_{111}^{0} + S_{111}^{1} + K_{111}^{3})_{,111} + c(P_{222}^{0} + S_{222}^{1} + K_{222}^{3})_{,222} + \\ &+ 3c(P_{112}^{0} + S_{112}^{1} + K_{112}^{3})_{,112} + 3c(P_{122}^{0} + S_{122}^{1} + K_{122}^{3})_{,122} + \\ &+ \left( N_{113}^{0} + R_{113}^{2} - 6c(S_{113}^{2} - 6cR_{113}^{0}) \right)_{,11} + \\ &+ \left( N_{223}^{0} + R_{223}^{2} - 6c(R_{223}^{0} - S_{223}^{2}) \right)_{,22} + \\ &+ 2(N_{123}^{0} + R_{123}^{2} - 6cR_{123}^{0} - 6cS_{123}^{2})_{,12} + \\ &+ 6c(M_{133}^{0} + R_{133}^{1} + S_{133}^{3})_{,1} + 6c(M_{233}^{0} + R_{133}^{1} + S_{233}^{3})_{,2} \end{aligned}$ 

Выражения для *N*, *M*, *P*, *R*, *S*, *K* различны для классической и неклассической частей математической модели (5) и выражаются через компоненты тензоров напряжений и градиентов:

$$\begin{split} N_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} \, dx_3 \qquad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{ij} \, dx_3 \qquad R_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 \sigma_{ij} \, dx_3 \qquad P_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^3 \sigma_{ij} \, dx_3 \\ N_{ijk}^{l} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta_{ijk}^{l} \, dx_3 \qquad M_{ijk}^{l} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \zeta_{ijk}^{l} \, dx_3 \qquad R_{ijk}^{l} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 \zeta_{ijk}^{l} \, dx_3 \\ P_{ijk}^{l} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^3 \zeta_{ijk}^{l} \, dx_3 \qquad S_{ijk}^{l} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^4 \zeta_{ijk}^{l} \, dx_3 \qquad R_{ijk}^{l} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^6 \zeta_{ijk}^{l} \, dx_3 \end{split}$$

где параметры  $\zeta_{ijk}^{d}$  зависят от размерных параметров  $a_i$ , и определяют зависимость компонент тензора градиента от координат. Ненулевые компоненты тензора градиента имеют вид:

$$\begin{split} \mu_{111} &= \zeta_{111}^0 + x_3 \zeta_{111}^1 + x_3^3 \zeta_{111}^3 & \mu_{233} = \zeta_{233}^0 + x_3 \zeta_{233}^1 + x_3^3 \zeta_{233}^3 \\ \mu_{122} &= \zeta_{122}^0 + x_3 \zeta_{122}^1 + x_3^3 \zeta_{122}^3 & \mu_{333} = \zeta_{333}^0 + x_3^2 \zeta_{233}^2 \\ \mu_{133} &= \zeta_{133}^0 + x_3 \zeta_{113}^1 + x_3^3 \zeta_{133}^3 & \mu_{113} = \zeta_{113}^0 + x_3^2 \zeta_{113}^2 \\ \mu_{222} &= \zeta_{222}^0 + x_3 \zeta_{222}^1 + x_3^3 \zeta_{222}^3 & \mu_{223} = \zeta_{223}^0 + x_3^2 \zeta_{223}^2 \\ \mu_{112} &= \zeta_{112}^0 + x_3 \zeta_{112}^1 + x_3^3 \zeta_{112}^3 & \mu_{123} = \zeta_{123}^0 + x_3^2 \zeta_{123}^2 \end{split}$$

#### III. Условия устойчивости

Построенная нестационарная математическая модель (5) динамической деформации размерно-зависимых планарных компонентов датчиков существенно нелинейна. Первые условия устойчивости для тензора градиентов были сформулированы в [6]. Для определения других условий устойчивости систем уравнение (5) необходимо линеаризовать. Таким образом можно установить сочетания значений размерно-зависимых параметров и параметров возбуждения, приводящие к хаотическому движению. Движущую электростатическую силу линеариззовать следует с осторожностью, поскольку линеаризация приводит к отсечке возможных хаотических колебаний при численном моделировании. В результате предотвратить такие колебания, которые могут возникнуть в реальном устройстве, будет невозможно.

#### Литература

- S. Emam, A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams, Applied 255 Mathematical Modelling, 2013, 37(10-11), pp. 6929-6939.
- [2] L. Amar, A. Kaci, R. Yeghnem, A new four-unknown refined theory based on modified couple stress theory for size-dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro-plate, Steel And Composite Structures, 26(1), pp. 89-102.

- [3] F. Jouneghani, H. Babamoradi, R. Dimitri, F. Tornabene, A Modified Couple Stress Elasticity for Non-Uniform Composite Laminated Beams Based on the 281 Ritz Formulation, Molecules, 2020, 25(6).
- [4] Y. Joshan, N. Grover, B. Singh, A new non-polynomial four variable shear deformation theory in axiomatic formulation for hygro-thermomechanical analysis of laminated composite plates, Composite Structures, 2017, 182, pp. 685-693.
- [5] M. Barulina, D. Kondratov, S. Galkina, O. Markelova, Analytical Solution for Bending and Free Vibrations of an Orthotropic Nano-

plate based on the New Modified Couple Stress Theory and the Third-order Plate Theory, Journal of Mathematical and Fundamental Sciencesthis link is disabled, 2022, 54(1), pp. 11-38.

- [6] A. Gusev, S. Lurie. Symmetry conditions in strain gradient elasticity. Mathematics and Mechanics of Solids, 2017, 22(4), pp. 683–691.
- [7] J. Reddy, Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis, CRC, 2004

# КРУГЛЫЙ СТОЛ «Перспективы развития гироскопии»

# Современное состояние и перспективы развития волоконно-оптических гироскопов

А.А. Унтилов АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» Санкт-Петербург, Россия untilov\_aa@mail.ru Е.В. Драницына АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия evdranitsyna@itmo.ru

Аннотация—В докладе рассматривается современное состояние разработки волоконно-оптических гироскопов (ВОГ). Делается обзор современного рынка гироскопов для инерциальной навигации, отмечается ниша, занимаемая ВОГ. Кратко описывается принцип действия, приводится классификация существующих видов ВОГ, рассматриваются преимущества и недостатки, приводятся некоторые примеры существующих образцов. В докладе отмечены основные отечественные и зарубежные производители ВОГ. В завершение отмечены направления развития ВОГ и оценка развития рынка гироскопов в будущем.

#### Ключевые слова—волоконно-оптический гироскоп.

# I. Введение

Гироскопы – это устройства, которые определяют угловую скорость движения или изменение углового положения основания, на которое они установлены. Гироскопы используются на многих подвижных объектах для стабилизации технических средств, определения их навигационных и динамических параметров движения. В настоящее время разработано и разрабатывается значительное количество различных типов гироскопов, но доминирующие объемы мирового рынка гироскопической техники занимают оптические гироскопы, чей принцип действия основан на эффекте Саньяка [1]. Лазерный гироскоп (ЛГ), обладающий в настоящее время дрейфом нуля 0,1-0,001°/ч, открыл возможность построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем и стал безальтернативным датчиком в авиации [2]. Как видно из диаграммы, представленной на рис. 1, ЛГ в настоящее время занимают около половины рынка гироскопических датчиков и не собираются быстро сдавать свои позиции.



Д.А. Егоров

АО «Концерн «ЦНИИ

«Электроприбор»

Санкт-Петербург, Россия

egorov da@mail.ru

Рис. 1. Распределение различных типов гироскопов на рынке инерциальных датчиков на 2019 год и прогноз на 2025 год

Любой гироскоп проходит определенные стадии своего жизненного цикла, как это представлено на рис. 2 [3]. Технология изготовления ЛГ освоена, ожидать дальнейшего повышения его точности не приходится, и по прогнозам он движется к закату вслед за классическими механическими гироскопами. Основными конкурентами ЛГ среди гироскопов, освоенных в производстве, являются волоконно-оптические гироскопы (ВОГ) интерферометрического типа (ИВОГ) и твердотельные волновые гироскопы (ТВГ). ТВГ на основе кварцевого полусферического резонатора сочетают в себе высокую точность и уникальные эксплуатационные характеристики, но их применение пока ограничено высокой стоимостью. ИВОГ после своего появления классифицировались как гироскопы низкого и среднего класса точности. За счет увеличения длины оптического контура в катушке можно обеспечить уникальную чувствительность, что делает ИВОГ привлекательной технологией для построения гироскопических систем в тех случаях, когда требуется обеспечить длительную высокоточную автономную работу. Известны серийно изготавливаемые образцы с дрейфом меньше  $10^{-4}$  °/ч (Marins M11, IXBlue, France) [4]. Развитие волоконно-оптических телекоммуникационных сетей привело к значительному совершенствованию и удешевлению производства волоконно-оптических компонентов, что, в свою очередь, позитивно сказывается на стоимости ВОГ.

В настоящее время технология ИВОГ находится на стадии зрелости, другими словами, считается, что все основные научные разработки уже выполнены и повышение характеристик идет за счет совершенствования технологии производства.



Рис. 2. Стадии жизненного цикла гироскопов и акселерометров

# II. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ВОГ

В основе работы оптических гироскопов лежит эффект Саньяка. Он был открыт в 1913 г. Жоржем Саньяком в результате изучения динамики вращения Земли Майкельсоном и Морли [5] и наблюдения электромагнитной волны в неинерциальных системах отсчета [6]. Принцип Саньяка, как вывод общей теории относительности, гласит, что два встречных оптических луча, распространяющихся в замкнутом контуре, изменяют свою относительную фазу, если контур вращается; таким образом, можно связать изменение фазы с угловой скоростью контура.

В соответствие с эффектом Саньяка при распространении двух лучей света (световых волн) во встречных направлениях в катушке оптоволокна в случае поворота катушки за время распространения в ней световых волн одна волна приобретет сдвиг фазы Саньяка  $+\phi_s/2$ , а другая -  $-\phi_s/2$ . Зависимость  $\phi_s$  от угловой скорости поворота катушки  $\Omega$  выражается формулой

$$\Delta \varphi_s = \frac{2\pi LD}{\lambda c} \Omega,$$

где  $\lambda$  – длина световой волны (средневзвешенная, в вакууме); *с* – скорость распространения оптического излучения в вакууме; *L* – длина волокна в катушке; *D* – диаметр катушки ВОГ. Чем больше длина волокна (больше число витков катушки), тем выше чувствительность ВОГ.

Изменение интерференционной картины или разности фаз встречных волн определяется по изменению интенсивности света *I* на фотоприемнике, которая будет изменяться по формуле

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos k\Delta \varphi_s \,,$$

где *I* – интенсивности встречных волн, *k* – волновое число.

Волоконно-оптические гироскопы отличаются от лазерных тем, что имеют пассивный оптический контур, излучение в который вводится от внешнего источника. На рис. 3 приведена классификация ВОГ. Существующие на настоящий момент и разрабатываемые ВОГ можно разделить по принципу выделения полезного сигнала на интерферометрические и резонансные. В интерферометрических ВОГ в волоконном контуре распространяются две встречные оптические волны, не взаимодействуя друг с другом, и интерференционное изменение интенсивности регистрируется уже после прохождения контура. В ИВОГ за счет введения модуляции оптического сигнала рабочую точку переносят в область максимальной линейности интерференционной картины для повышения чувствительности в области малых угловых скоростей. Такие гироскопы относят к ВОГ с открытой схемой обработки сигнала. Основные недостатки: ограничение динамического диапазона, нелинейность выходного сигнала, обусловленная синусоидальной зависимостью измеряемого сигнала демодуляции от измеряемой скорости, ограниченная точность.

Для расширения динамического диапазона, повышения линейности масштабного коэффициента и достижения средней и высокой точности (лучше 0,05°/ч) используется замкнутая схема обработки сигнала ВОГ, суть которой заключается в том, что модуляционный сигнал включен в контур обратной связи и всегда находится в точке с максимальной чувствительностью, а выходной сигнал вырабатывается по данным обратной связи [7]. Замкнутая схема характеризуется линейным откликом и хорошей стабильностью. Однако по линейности масштабного коэффициента ИВОГ с обратной связью все равно уступают ЛГ. Потенциально достижимая точность ИВОГ с обратной связью находится на уровне 10<sup>-5</sup> °/ч. Для достижения такой точности (разрешающей способности) необходимо использовать волоконный контур, достигающий в длину нескольких километров, что приводит к значительной чувствительности к изменению теплового поля и появлению термически индуцированного смещения нуля выходного сигнала и погрешности масштабного коэффициента.



#### Рис. 3. Классификация ВОГ

Развитие ВОГ продолжается не только в части технологических усовершенствований интерферометрических ВОГ. За последние несколько лет были предложены различные решения для улучшения характеристик ВОГ. Большие усилия направлены на развитие резонансных ВОГ (РВОГ) и особенно резонансных микрооптических гироскопов (РМОГ). Причины этого в том, что РВОГ и РМОГ имеют больший потенциал в миниатюризации и удешевлении, чем классические ИВОГ. Обзор современного состояния оптических резонаторных гироскопов дан в [31], где отмечено, что резонаторными гироскопами уже достигнут уровень ИВОГ с открытой схемой управления.

В резонансных ВОГ (РВОГ) аналогично резонатору ЛГ за счет варьирования частоты лазера в контуре возбуждается стоячая волна, и детектирование угловой скорости осуществляется по смещению резонансного пика. Теоретически РВОГ позволяет достичь той же точности измерений, что и ИВОГ, при использовании волокна на несколько порядков меньшей длины [7, 8, 34]. РВОГ обладает большим потенциалом к снижению стоимости, габаритов, веса и потребляемой мощности. Кроме того, благодаря более короткой длине волокна он менее чувствителен к термически индуцированной невзаимности.

В [33] впервые представлен полнофункциональный прототип трехлазерного источника на основе кремниевой фотоники для использования в компактном РВОГ, предназначенном для коммерческих навигационных приложений. Источник света обеспечивает очень низкий фазовый шум, что позволяет достичь точности 0,15°/ч. Авторы ожидают, что дальнейшее усовершенствования такого источника излучения позволит создать РВОГ навигационного класса точности, достаточного для создания систем курсоуказания.

Микрооптические гироскопы пока не вышли из стадии опытных образцов, но уже показывают неплохие результаты – стабильность дрейфа на уровне около 4°/ч при размерах резонатора на уровне единиц мм [9].

В эпоху миниатюризации возможность интеграции оптических волноводов приводит к еще более компактным решениям. На рис. 6 приведена структурная схема интерферометрического микрооптического ВОГ (ИМОГ), который реализован по технологии SOI. При размерах элемента 600 µm × 700 µm достигнута чувствительность 51,3°/с [10].



Рис. 6. Структурная схема ИМОГ

Таким образом, РМОГ и ИМОГ являются многообещающими кандидатами для приложений, требующих небольших, легких и надежных гироскопов.

## III. ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ ИВОГ

Современные исследования и разработки в области ВОГ, как и любых других гироскопов, направлены на снижение критерия SWaP+C (size, weight and power + cost) и улучшение эксплуатационных характеристик при достижении высоких точностей. При этом в области обеспечения высокоточной инерциальной навигации точность является главным требованием.

Преимуществом технологии ВОГ можно считать универсальность, которая позволяет создавать практически на тех же элементах и по одинаковой технологии и высокоточные ВОГ, и миниатюрные дешевые датчики, которые могут конкурировать с наиболее точными представителями микромеханических гироскопов (ММГ), превосходя последние по эксплуатационным характеристикам (устойчивость к вибрациям и перегрузкам).

Основным преимуществом ИВОГ является потенциально достижимая высокая точность на уровне  $10^{-5}$  °/ч, что позволит достичь точности навигации на уровне одной морской мили в месяц [11–15]. При достижении подобной точности БИНС на ИВОГ может стать полноценной альтернативой прецизионной ИНС на электростатическом гироскопе. Наиболее точный ИВОГ, исходя из анализа открытых публикаций, используется в БИНС Marins M11 (IXBlue, France): дрейф ВОГ меньше  $10^{-4}$  °/ч [4].

А в области систем курсоуказания и стабилизации превалирующим становится снижение габаритов и стоимости для применения в автономных воздушных, морских, наземных беспилотниках. Соответственно, требуется повышение надежности и стойкости. Наиболее миниатюрные представители ВОГ интерферометрического типа – ВОГ ВГ091А («Физоптика», Россия) с размерами Ø 24×50 мм и с дрейфом нуля 3°/ч и ВОГ ER-FOG-25 (Егіссо, Китай) с размерами Ø24×40 мм и дрейфом нуля  $1...5^{\circ}/4$  [16, 17]. Оба ИВОГ используют открытую схему обработки выходного сигнала. Также стоит выделить БИНС Umix (IXBlue, France), которая имеет размеры Ø89×75 мм (трехосный инерциальный модуль показан на рис.4), дрейф ВОГ при стабильной температуре не превышает 0,005°/ч [18].



Рис. 4. Внешний вид инерциального модуля Umix (IXBlue, France)

Существенным преимуществом ВОГ является родственность технологии и компонентов к телекоммуникационному оборудованию. Бурное развитие волоконнооптических телекоммуникационных компонентов позволяет также улучшать характеристики ВОГ. Соответственно, по сравнению со своими конкурентами ВОГ отличаются более низкой стоимостью технологии и меньшими затратами на ее развитие.

ВОГ за счет отсутствия подвижных частей и достаточно простой конструкции с минимальным количеством компонентов отличаются высокой надежностью. Так, БИНС Vega V5, Phins (IXBlue, France) имеет наработку до отказа (MTBF) не менее 100000 ч, а непосредственно ВОГ – 500000 ч [4]. Отсутствие движущихся частей позволяет также обеспечить высокую стойкость к ударам. Упомянутая БИНС Vega V5 (IXBlue, France) сохраняет работоспособность при воздействии ударов с ускорением до 40 g при длительности ударного воздействия 10 мс [4].

Естественно, ВОГ обладают и рядом недостатков по сравнению с гироскопами других типов. Интерферометрические ВОГ с открытой схемой обработки имеют нелинейную выходную характеристику и ограниченный диапазон измеряемых угловых скоростей, который зависит от длины оптического контура. При этом ВОГ с замкнутой схемой обработки обладают высокой линейностью и очень большим динамическим диапазоном и требуют высокочастотной фазовой модуляции и высокоскоростных вычислений для замыкания обратной связи на собственной частоте контура.

В силу высокой чувствительности оптического контура к внешним воздействиям все ВОГ имеют высокую чувствительность смещения нуля и масштабного коэффициента к изменению температуры, возрастающую при увеличении длины используемого волоконного контура и снижении его диаметра. Среди причин возникновения погрешности ВОГ можно отметить термооптический эффект, эффект Фарадея, эффект Керра, обратные отражения, поляризационные невзаимности в волоконном контуре и др. Соответственно на борьбу с влиянием этих эффектов направлены основные усилия разработчиков.

#### IV. ОСНОВНЫЕ СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ, производители и точностные характеристики ВОГ

Всего в мире более двух десятков компаний занимаются разработкой и производством ВОГ. В табл. 1 приведены сводные данные по ВОГ, которые они производят. Основной акцент сделан на отечественные компании [4, 19–30].

TABLE I.	ПРОИЗВОДИТЕЛИ ВОГ И ДОСТИГНУТЫЕ ТОЧНОСТИ
----------	------------------------------------------

Компании	Скоростной 1 - 100 °/ч	Тактический 0.01 – 1 °/ч	Стратегический 0.0001 - 0.01 °/ч
АО «Физоптика», Россия	$\checkmark$	$\checkmark$	
ООО «Оптолинк», Россия		$\checkmark$	$\checkmark$
ПАО ПНППК, Россия		$\checkmark$	$\checkmark$
АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» Россия		$\checkmark$	$\checkmark$
НИИ ПМ(ЦЭНКИ), Россия		$\checkmark$	$\checkmark$
IXBlue, Франция		$\checkmark$	$\checkmark$
Honeywell, США		$\checkmark$	$\checkmark$
Northrop Grumman, США		$\checkmark$	$\checkmark$
КVН, США	$\checkmark$	$\checkmark$	
Al CIELO, Израиль		$\checkmark$	$\checkmark$
CASC, Китай		$\checkmark$	$\checkmark$
ERICCO, Китай	$\checkmark$	$\checkmark$	
StarNeto, Китай	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$

Французская компания IXBLUE в настоящее время определенно является лидером в высокоточной волоконно-оптической навигации. Причем производимые ей системы покрывают широкий диапазон применений (морское, наземное, космическое): БИНС Marins M11, Vega V5, Astrix 200 (IXBlue, France) [4]. Внешний вид указанных БИНС показан на рис. 5.



Рис. 5. Внешний вид БИНС Marins M11, Vega V5, Astrix 200 (IXBlue)

Оценка, приведенная на рис. 2, была сделана в 2018 г. и касалась серийно выпускаемых ИВОГ. При этом возможности оптических гироскопов еще не исчерпаны, и в ближайшем будущем возможно начало промышленного выпуска ВОГ резонансного типа и микрооптических гироскопов [8–11].

## V. Заключение

В качестве завершения можно привести прогноз развития гироскопов от компании Yole до 2025 г. [1]. ВОГ не исчерпали своего потенциала. Они будут развиваться, заполнять новые ниши. Скорее всего, получат распространение и подойдут к серийному изготовлению микрооптические резонансные ВОГ.

ВОГ будут развиваться в сторону поглощения рынка ЛГ по мере повышения стабильности характеристик.

Основные конкуренты ВОГ – ММГ и ТВГ. ММГ могут в будущем поглотить рынок дешевых низкоточных приложений, если аналогичные характеристики будут достигнуты по более низкой цене (из-за серийного производства). ТВГ (HRG) могут поглотить рынок систем средней точности, если будет разработан сравнительно дешевый и распространенный способ производства высокоточных резонаторов, которые пока получены только несколькими производителями.

#### Литература

- High End Inertial Sensors for Defense, Aerospace & Industrial Applications 2020. Sample. <u>www.yole.fr</u>. 2020.
- [2] Пешехонов В.Г. Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. 2020. Том 28. №2 (109). С. 3-10.
- [3] Y.Foloppe, Y.Lenoir. HRG CrystalTM DUAL CORE: Rebooting the INS revolution. Inertial Sensors and Systems 2018, Braunschweig, Germany.
- [4] IxBlue Company. https://www.ixblue.com.
- [5] Robertson, H.P. Postulate versus observation in the special theory of relativity. Rev. Mod. Phys 1949, 21, 378-382, doi:10.1103/RevModPhys.21.378.
- [6] Page, L.; Adams N. Electrodynamics, 1sted.; D. Van Nostrand Company: NewYork, USA, 1940.
- [7] Lefevre H.C. The Fiber Optic Gyroscope. Norwood: Artech House Publishers, 2014. 440 c.
- [8] L. Liu, H. Li, J. Tu, Y. Lin, W. Qian, and H. Ma. Angular Random Walk Improvement of Resonant Fiber Optic Gyroscopes, in 14th Pacific Rim Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO PR 2020), OSA Technical Digest (Optica Publishing Group, 2020), paper C7D\_2.
- [9] Dunzhu Xia, Bing Zhang, Hao Wu and Tao Wu. Optimization and Fabrication of an MOEMS Gyroscope Based on a WGM Resonator. Sensors 2020, 20, 7264; doi:10.3390/s20247264.
- [10] Beibei Wu, Yu Yu, Jiabi Xiong & Xinliang Zhang. Silicon Integrated Interferometric Optical Gyroscope. Scientific Reports, 2018, 8:8766, DOI:10.1038/s41598-018-27077-x.
- [11] Design and development of fiber optic gyroscopes / Eric Udd and Michel Digonnet, SPIE P.O. Box 10 Bellingham, Washington 98227-0010 USA.
- [12] iXblue: Inertial Navigation Solutions for navies. https://www.ixblue.com/defense/naval-navigation/inertial-navigationsolutions-for-navies.
- [13] The fiber-optic gyroscope: Challenges to become the ultimate rotation-sensing technology. Hervé C. Lefèvre. Optical Fiber Technology Volume 19, Issue 6, Part B, December 2013, Pages 828-832
- [14] Paturel, Y., Honthaas, J., Lefèvre, H. et al. One nautical mile per month fog-based strapdown inertial navigation system: A dream already within reach?. Gyroscopy and Navigation. 5, 1–8 (2014). <u>https://doi.org/10.1134/S207510871401009X</u>.
- [15] Лефевр Э.К. Волоконно-оптический гироскоп: достижения и перспективы // Гироскопия и навигация. 2012. №4 (79). С. 3-9.
- [16] АО "Физоптика". Группа BГ091A. <u>https://www.fizoptika.ru/catalog/gruppa-vg-091a</u>.

- [17] Ericco Inertial System. Low Cost FOG Rate Gyroscope ER-FOG-25 <u>https://www.ericcointernational.com/gyroscope/fiber-optic-gyroscope/low-cost-fog-rate-gyroscope.html.</u>
- [18] Sébastien Ferrand; Maxime Rattier; Cédric Moluçon; Kevin Gautier; Pierrick Cheiney; Emmanuelle Peter; Marco Mancini. UmiX series: How to miniaturize FOG technology. 2022 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL), Avignon, France, 2022, pp. 1-4, doi: 10.1109/INERTIAL53425.2022.9787535.
- [19] АО "Физоптика". <u>https://www.fizoptika.ru</u>.
- [20] ООО НПК "Оптолинк". <u>http://www.optolink.ru</u>.
- [21] ПАО ПНППК. <u>https://pnppk.ru</u>.
- [22] АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор. <u>http://www.elektropribor.spb.ru</u>.
- [23] Филиал АО "ЦЭНКИ" "НИИ ПМ им. академика В.И. Кузнецова". <u>https://www.russian.space/filialy/nii-pm.html</u>.
- [24] Honeywell International Inc. https://www.honeywell.com.
- [25] Northrop Grumman Corporation. https://www.northropgrumman.com
- [26] KVH Industries, Inc. https://www.kvh.com
- [27] Cielo inertial Solutions Ltd. https://www.cielo-inertial.com.

- [28] China Aerospace Science and Technology Corporation, CASC. <u>http://english.spacechina.com/n16421/index.html</u>.
- [29] Ericco Inertial System. https://www.ericcointernational.com.
- [30] BeiJing StarNeto Technology Commany Ltd. http://www.starneto.com.
- [31] Венедиктов В. Ю., Филатов Ю. В., Шалымов Е. В. Современное состояние оптических резонаторных гироскопов // Гироскопия и навигация. Том 31. №1 (120), 2023. С. 45-57. EDN: ERALEW
- [32] Кондаков А.А., Салгаева У.О., Мушинский С.С. и др. Проблемы реализации интегрально-оптического гироскопа. Прикладная фотоника 2017. Т. 4, № 2
- [33] M. Smiciklas, G. Sanders, L. Strandjord, W. Williams, E. Benser, S. Ayotte, F. Costin Development of a Silicon Photonics-based Light Source for Compact Resonator Fiber Optic Gyroscopes // Inertial Sensors and Systems 2019 Braunschweig, Germany 978-1-7281-1935-9/19/\$31.00 ©2019 IEEE
- [34] Vittorio M. N. Passaro, Antonello Cuccovillo, Lorenzo Vaiani, Martino De Carlo and Carlo Edoardo Campanella / Gyroscope Technology and Applications: A Review in the Industrial Perspective // Sensors 2017, 17, 2284; doi:10.3390/s17102284.

# Современное состояние волновых твердотельных гироскопов. Перспективы развития в прикладной гироскопии

С.Е. Переляев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН 119526, Москва, Россия, пр. Вернадского, 101-1 e-mail: ipm@ipmnet.ru

Аннотация—Системы ориентации, стабилизации, навигации и управления для различных областей промышленного применения и спецтехники построены на широком спектре гироскопов: классических механических (МГ), динамически настраиваемых (ДНГ), различных типов поплавковых (ПГ), электростатических (ЭСГ), кольцевых лазерных (КЛГ), волоконно-оптических (ВОГ), микромеханических (ММГ). В конце прошлого века (1982 год) группа специалистов компании «DELKO» (США) под руководством профессора Дэвида Линча разработала и представила мировому сообществу промышленный образец принципиально нового типа гироскопа – hemispherical resonator gyro (HRG). В отличие от всех вышеперечисленных гироскопов, ВТГ основан на принципиально новом физическом явлении – сохранении инерционных свойств стоячими волнами, которые возбуждаются на кромке полусферического резонатора. В зависимости от реализации схемы системы управления механической стоячей волной, прибор может работать в двух режимах: датчик полного угла (интегрирующий гироскоп) и датчик угловой скорости (ДУС). Современный ВТГ представляет собой вакуумный корпус, в котором размещены чувствительный элемент и блок электроники. Чувствительный элемент цельный полусферический резонатор из плавленого кварцевого стекла, жестко закрепленный в вакуумно-плотном основании. Анализ колебаний полусферического резонатора позволяет определять угловые положения корпуса гироскопа относительно инерциального пространства. Отличительные особенности нового инерциального датчика являются: высокая точность, широкий температурный диапазон применения, высокая надежность работы (Р=0,995 в течение не менее 15 лет), меньшая стоимость, благодаря меньшей трудоемкости при промышленном изготовлении данного прибора.

Ключевые слова—классические механические (МГ), динамически настраиваемые (ДНГ), поплавковые (ПГ), электростатические (ЭСГ), кольцевые лазерные (КЛГ), волоконно-оптические (ВОГ), микромеханические (ММГ), волновые твердотельные гироскопы (ВТГ).

#### I. Введение

Современный этап развития гироскопии, пик которого приходится на наше время, — это использование в автономных системах инерциальной навигации волновых твердотельных гироскопов (ВТГ). На их примере можно видеть реальную спираль развития гироскопов, что называется, в натуральном виде: от механического гироскопа через оптико-электронный, снова к механическому, основанному на другом принципе (он описан ниже). Этот принцип был разработан в конце XIX века, создание самих гироскопов стало возможным благодаря переходу на следующий этап развития средств обработки различных материалов, того же особо чистого плавленого кварцевого стекла. Ведь точность обработки резонаторов ВТГ достигает одного микрона. Но и этой точности для работы ВТГ недостаточно. Приходится выполнять дополнительную ионоплазменную балансировку с точностью до десятков ангстрем. Таким образом, к механической обработке резонатора добавилась классическая физическая.

Известно, что изотропный осциллятор с двумя степенями свободы, выполняющий в современных гироскопах роль маятника Фуко [1], может быть реализован в виде одной из форм собственных колебаний упругой среды, обладающей осевой симметрией. При этом, в отличие от классического маятника Фуко, вращение упругой среды вокруг оси симметрии датчика вовлекает реализованную форму собственных колебаний во вращение относительно абсолютного (инерциального) пространства. В соответствующем выбранной форме колебаний собственном подпространстве принципиальные вопросы теории нового датчика инерциальной информации могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко.

По этой причине весь этот класс гироскопов может быть назван новыми инерциальными датчиками семейства «обобщенный» маятник Фуко [2].

В современной практике мировой гироскопии появился целый класс новых гироскопических приборов, в которых фактически реализована идея «обобщенного» маятника Фуко: струнный гироскоп [2], кольцевой гироскоп [3,4], полусферический кварцевый резонатор (волновой твердотельный гироскоп) [4], ВТГ с металлическим цилиндрическим резонатором [2], квапазон [2], сферический кварцевый резонатор [5].

Все указанные выше современные инерциальные датчики ориентации весьма успешно конкурируют с известными классическими гироскопами, однако их теория существенно отличается от фундаментальной теории симметричных и несимметричных механических гироскопов.

#### II. Волновой твердотельный гироскоп

Эффект инертности упругих волн во вращающемся осесимметричном твердом теле был открыт на тридцать лет раньше эффекта Саньяка, но исследования возможности создания гироскопа на этом принципе, начались на двадцать лет позже реализации первого образца КЛГ. С тех пор созданы волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) средней и высокой точности на основе высокодобротного кварцевого полусферического резонатора и низкой точности с использованием цилиндрического металлического резонатора. Разработку и производство ВТГ высокой точности ведут фирмы США и Франции.

Первый высокоточный ВТГ был создан фирмой «Northrop Grumman» (США) для космических применений [5]. Сочетание высоких точностных и уникальных эксплуатационных характеристик прибора ВТГ-130Р является неоспоримым преимуществом ВТГ, однако высокая стоимость пока ограничивает его массовое применение. Вероятно поэтому не получила развития попытка использования этого гироскопа в гироинклинометрах, обеспечивающих буровые работы. Важным достижением разработчиков ВТГ стало обеспечение способа автокалибровки дрейфа нуля и масштабного коэффициента в процессе эксплуатации гироскопа [4]. Сенсацией последних лет стало создание высокоточного ВТГ французской фирмой «Safran Electronics&Defence» Точностные параметры прибора «Ragys-20», [5]. нашедшего применение в инерциальной навигационной системе космического применения «Space Naute», пока уступают параметрам прибора 130Р (см. табл. 1), но уже заявлены значительно более высокие точностные характеристики [6].

По принципу действия и применению в различного рода гироскопических системах волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) подразделяются на ВТГ, работающие в режиме ДУС – датчика угловой скорости (ВТГ-ДУС), и ВТГ, функционирующего в режиме ИГ – интегрирующего гироскопа (ВТГ-ИГ). Современные ВТГ-ДУС обладают относительно невысокой точностью (случайная составляющая ухода на уровне не выше 0.1 град/ч). ВТГ-ИГ имеют сравнительно высокую точность (случайная составляющая скорости ухода достигнута на уровне 0.001 град/ч).

По этой причине высокоточные ВТГ-ИГ являются весьма перспективными базовыми чувствительными элементами для применения в бескарданных (бесплатформенных) инерциальных навигационных системах (БИНС) различного назначения. Первые попытки создания ВТГ-ДУС относятся к 1960 годам прошлого столетия. К началу 1980-х гг. прошлого столетия благодаря развитию современных технологий и микроэлектроники появилась возможность создания первого макетного (предпромышленного) образца ВТГ-ИГ [1]. В публикации [2] представлен принципиально новый гироскоп американской фирмы «DELKO Electronics» (США), разработчикам которого благодаря выбору для изготовления полусферического резонатора высокодобротного материала из высококачественного плавленого кварца и замены позиционного возбуждения параметрическим удалось создать интегрирующий ВТГ навигационного класса точности. Разработчики интегрирующего гироскопа ошибочно сослались на использовании в приборе эффекта Дж. Брайана, хотя и привели эксперимент Линча-Скотта [3], согласно которому при повороте вибрирующего резонатора на фиксированный угол 90 градусов, происходил поворот стоячей волны на 30 град. Без какихлибо изменений формы механической стоячей волны.

Более подробно эффект Брайана и известный эксперимент Линча-Скотта изложены в монографии [1]. Функционирование интегрирующего волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) основано на использовании уникальных свойств инерции механических стоячих волн, возбуждённых в подвижной осесимметричной оболочке. Эффект прецессии упругих волн при постоянной угловой скорости подвижного основания был открыт английским учёным-механиком Г.Х. Брайаном в 1890 г. и подтверждён экспериментально. Долгое время эффект Брайана не находил своего применения и лишь к середине 80-х прошлого века годов благодаря развитию новых технологий и электроники появилась возможность создания инерциального датчика в режиме свободной волны. В 1982 г. американская фирма «Delco Electronics»(США) впервые опубликовала в открытой печати сведения о создании предпромышленного образца интегрирующего ВТГ навигационного класса точности, в котором был использован высокодобротный кварцевый полусферический резонатор и применено параметрическое поддержание колебаний в режиме свободной волны. Фирма «Delco Electronics» вошла позднее в состав известной навигационной фирмы «Litton» и концерн «Нортроп Грумман» (США).

В настоящее время основные производители ВТГ расширяют область применения этого гироскопа. Уже разработаны БИНС на ВТГ для сухопутных и морских применений. Сообщается [16] о подтверждении достижимости дрейфа нуля на уровне 10–4 град/ч. Подобная БИНС безусловно выигрывает по сравнению с БИНС на ВОГ по критерию известному критерию SWaP, но остается открытым вопрос о соотношении стоимости. Утверждение известных французских разработчиков высокоточных ВТГ о готовности заменить ИНС на электростатическом гироскопе пока на наш взгляд выглядит преждевременным.

# III. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ВТГ

В основе работы волновых твердотельных гироскопов лежит использование механических колебаний стенок сосудов, которые используются как резонаторы колебания. Хотя идея волнового твердотельного гироскопа зародилась в конце XIX века и была высказана английским ученым Дж. Х. Брайаном еще в 1892 году, реальные работы над интегрирующим ВТГ начались в 80-е годы XX века.

Брайан обратил внимание на то, что, если щелкнуть по бокалу, сделанному из хорошего хрусталя, он достаточно долго звенит и если его в это время поворачивать, то звон пульсирует. Наблюдая в микроскоп за краем бокала, он увидел, что при этом возникают изгибные колебания края бокала, которые представляют собой стоячую волну, и что при вращении бокала эта волна тоже вращается, но с меньшей скоростью. Брайан доказал, что вращение бокала относительно основания с постоянной угловой скоростью приводит к тому, что узлы колебаний на краю оболочки движутся с угловой скоростью (или скоростью прецессии), меньшей, чем скорость самой оболочки. Это явление по своим физическим основаниям сродни прецессии оси волчка.

Из экспериментального наблюдения макетного образца резонатора ВТГ физик Д. Линч (США) и высказал идею реализации нового гироскопа.

Принципиальная теория этого нового открытия была разработана к концу XIX столетия, тем не менее должно было пройти еще много времени, прежде чем специалисты исследовательской компании «Delco» заново открыли работу Брайана. В результате их разработок был
создан современный ВТГ, который затем нашел практическое применение. Важную роль в разработке фундаментальной теории ВТГ сыграли ученые-механики Института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН – Д.М. Климов, В.Ф. Журавлев.

ВТГ представляет собой инерциальный датчик, работа которого основана на следующих принципах:

- резонатор имеет идеальную осесимметричность для обеспечения высоких характеристик по балансировке, изотропности собственной частоты и демпфирования. На практике резонатор требует точной настройки для улучшения балансировки;
- резонатор связан с основанием посредством виброузла, обеспечивающего оптимальную развязку между резонатором и внешней средой;
- управление упругой стоячей волной осуществляется за счет электростатических сил, формируемых электродами, которые находятся в непосредственной близости от резонатора;
- управление упругой стоячей волной происходит в режиме полного угла с целью минимизации требуемой энергии. В таком режиме удается минимизировать погрешности, связанные с электроникой, не идеальностью датчиков и исполнительных устройств. Кроме того, этот режим обеспечивает очень хорошие характеристики масштабного коэффициента (на основе коэффициента Брайана) и широкий диапазон измерений.

Резонатор ВТГ имеет оптимизированные рабочие характеристики:

- резонатор выполнен в форме полусферы; при такой конструкции каждый грамм материала резонатора наиболее эффективно участвует в сохранении энергии изгибных колебаний.
- к полюсу полусферы присоединена ножка, с помощью которой резонатор крепится к основанию прибора;
- резонатор изготавливается из аморфного плавленого кварца, что обеспечивает оптимальную изотропию (отсутствие кристаллографической оси) и минимальное рассеяние энергии (низкое внутреннее трение);
- металлическое покрытие электрода резонатора должно быть как можно тоньше для минимизации рассеяния энергии внутри металла.

В результате выполненной оптимизации были получены выдающиеся рабочие характеристики ВТГ, которые, самое удивительное, не зависят от размеров резонатора. Они связаны с качеством резонатора, показателем которого является добротность (или время затухания), а также с качеством управления волновой картиной, то есть с характеристиками управляющей электроники.

Главным недостатком классического ВТГ является высокая стоимость, обусловленная в основном чрезвычайно высокой точностью изготовления и сборки электродного узла, который должен точно соответствовать геометрии полусферической оболочки резонатора для формирования однородного полусферического зазора между этими двумя частями [5,7]. Корпорации «Safran» удалось найти инновационное конструктивное решение для устранения данного недостатка [3], а именно - электроды располагаются на горизонтальной плоскости и электростатические силы формируются в экваториальной плоскости резонатора. В этом случае сборка полусферической оболочки и плоского узла-съема с электродами превращается в простую двумерную операцию, в результате которой формируется постоянный зазор между обеими плоскостями. Оригинальная конструкция малогабаритного ВТГ фирмы «Safran» позволяет снизить стоимость изготовления гироскопа, что делает его вполне доступным для массового производства.

### IV. ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ В ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПАХ

Базовый конструктивный элемент современного двухдетального ВТГ, имеет кварцевый полусферический резонатор из высококачественного и высокодобротного плавленого кварца [8]. Рабочая поверхность резонатора напыляется тонким слоем золота или платины. Такое тонкое покрытие позволяет контролировать форму упругой деформации кромки резонатора с помощью специальной системы емкостных датчиков и управлять формой (модой) упругих рабочих колебаний, изменяя электрические потенциалы на управляющих электродах.

Необходимое для функционирования ВТГ движение (колебания резонатора в пределах упругих деформаций кромки полусферы) не связано ни с износом, ни с деградацией материала, поэтому практически не ограничивает долговечности самого прибора [9].

Такой уникальный физический принцип работы ВТГ дает новому гироскопу целый ряд основных преимуществ: полное отсутствие вращающихся частей, малое время готовности, малые габаритно-массовые характеристики, весьма длительный рабочий ресурс прибора; высокая температурная стабильность основного конструкционного материала полусферы (чистого плавленого кварца); высокая приборная точность и малая случайная погрешность; устойчивость к условиям окружающей среды (температура, удары, вибрации, гамма излучение и сильные магнитные поля); весьма небольшая потребляемая мощность датчика; сохранение инерциальной информации при полном кратковременном отключении бортового электропитания.

Все перечисленные выше преимущества переводят ВТГ в класс одних из наиболее перспективных гироскопов [9]. Для высоко динамичных объектов авиационнокосмического назначения реализована новая конструкция ВТГ на базе двух детального промышленного инерциального датчика (ИД) нового поколения с полусферическим кварцевым 30-мм беззубцовым резонатором и полусферическими электродами разработки «НПП «Медикон». Гироскоп функционирует в интегрирующем режиме свободной волны.

Новая функциональная электроника имеет многоканальную цифровую «пушпульную» схему управления по специальному алгоритму [10] съема, детектирования первичных сигналов инерциального датчика и определения параметров стоячей волны. Данный алгоритм разработан и реализован сотрудниками «Лаборатории Механики Систем» В.Ф. Журавлевым и С.Е. Переляевым (Института Проблем Механики им. А.Ю. Ишлинского РАН). Авторами синтезирована многоканальная система прямого цифрового управления.

Аппаратная часть цифровой системы реализована на базе нового модуля контроллеров гироскопа (МКГ), включающего трехпроцессорную структуру обработки первичных синусных и косинусных сигналов одновременно трех гироскопов в одной системе на кристалле (FPGA/ПЛИС) на базе нового поколения ПЛИС серии «Xilinx-7». Встроенные ПЛИС (FPGA) седьмой серии, созданные на основе современной высокопроизводительной и низкоэнергетической 28-нм технологии обеспечивают беспрецедентное увеличение производительности системы, при этом потребляя на 50% меньше энергии. По сравнению с одноядерной структурой, работающей даже с большей тактовой частотой, классическая реализация алгоритма имеет меньшую скорость выполнения команд из-за необходимости чаще обрарегистрам щаться к медленным периферийных устройств самого процессора.

Разработанный модуль МКГ-2 позволяет реализовать новую «пушпульную» схему управления гироскопом на основе двумерного осциллятора Ван-дер-Поля. Обработка первичных сигналов и оценка вектора состояния ВТГ производится цифровыми методами с помощью высокоскоростного сбора данных.

Данная задача решена с помощью быстродействующего 16-разрядного АЦП с частотой сэмплирования не менее 3 млн. выборок в секунду. Аппаратная часть электронного модуля управления содержит процессор обработки сигналов, буферы аналого-цифровых преобразователей (АЦП), синтезатор частот, асинхронный микроконтроллер последовательного интерфейса [8]. Цифровой процессор по специальным алгоритмам обработки определяет углы ориентации волны, полную энергию и квадратурную составляющую колебаний кромки кварцевого резонатора и, используя эту информацию, вычисляет соответствующие весовые коэффициенты для эфективного управления стоячей волной прибора.

Аппаратно-программная реализация бортового машинного алгоритма обработки информационных и формирования управляющих сигналов производится параллельно в отдельном процессоре современной программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС) нового поколения. Каждый из каналов формирователей сигналов управления содержит ряд цифроаналоговых преобразователей (ЦАП), на вход которых в цифровом виде поступает информация о весовых коэффициентах управления, и как опорные, сигналы синусов и косинусов и их производные с электродов информационных сигналов ИД, т.е. с выходов малогабаритных быстродействующих аналогоцифровых преобразователей (АЦП).

Алгоритм управления и приема данных от каждого АЦП реализован в ПЛИС (FPGA) типа "Kintex-7" с помощью отдельного «конечного автомата» (finite state machine) [8,9]. Результаты преобразования каждого входного АЦП преобразуются «конечным автоматом» в параллельный 16-битный код, сопровождаемый признаком готовности. Данная информация поступает на входы быстродействующего цифрового процессора (ЦП) реального времени. В этом машинном реализованном на кристалле ЦП по специальному синтезированному алгоритму формируются законы прямого цифрового многоканального управления, которые в виде напряжений с выходов ЦАП подаются на управляющие электроды ИД, расположенные на плате кварцевого узла возбуждения, съема и управления (ВСУ) прибора. Новый полностью цифровой модуль электроники - модуль контроллеров гироскопов (МКГ-2) включает трехпроцессорную структуру обработки выходных аналоговых сигналов трех инерциальных датчиков (гироскопов). Модуль МКГ-2 реализован на базе современной программируемой системы на кристалле (FPGA) типа "Kintex-7" с встроенными контроллерами, последовательным интерфейсом и главным 64-битным цифровым процессором [8, 9]. Программа, реализующая алгоритм обработки информационных и формирования управляющих сигналов каждого из трех каналов, выполняется параллельно в отдельном процессоре ("Micro-Blaze"). Малогабаритный модуль МКГ-2 обработки сигналов трех гироскопов с реализованными аппаратно на одном кристалле (система на кристалле – SoC) с встроенными контроллерами, последовательным интерфейсом и главным 64-битным процессором обеспечивает заданную точность вычислений, а также формирования коэффициентов управления и фазы сигнала, на уровне необходимом для получения нестабильности дрейфа нуля нового ВТГ не более 0.003 град/ч.

# V. Перспективы развития в прикладной теории современной гироскопии

На основе современной технологии HRG-Crystal холдинг Safran Electronics & Defense разработал «двухъядерный» инерциальный измерительный модуль (ИИМ) нового поколения под названием HRG-Crystal<sup>TM</sup> / DUAL CORE, который включает две ортогональные триады высокоточных одноосных гироскопов ВТГ-20. Новый конструктив позволяет достигать прецизионных (более высоких на два порядка по отношению к ранее достигнутым) выходных точностных характеристик. Аналогичные точности в настоящее время достигнуты с помощью наукоемких и сложнейших промышленных технологий производства современных электростатических гироскопов ЭСГ (ESG). Такие прецизионные ЭСГ весьма успешно применяются в системах автономной навигации стратегических атомных подводных лодок [25]. Действительно, благодаря новым технологиям HRG-Crystal<sup>TM</sup> для гироскопов высокого навигационного класса точности (СКО=0,005 град/ч), объединение и интеграция высокоточных датчиков ВТГ /ПРГ в одно «ядро», состоящее из шести одноосных гироскопов ПРГ-20/HRG-Crystal<sup>TM</sup> (вместо трех одноосных ПРГ-20 для классической конструкции ИИМ) позволяет получить прецизионные точности. Принцип двухядерных блоков (DUAL CORE), запатентованный Safran Electronics & Defense основан на возможности высокоточных ВТГ/ПРГ гироскопов самостоятельно по специальной программе выполнять «автокалибровку» в стандартном автономном навигационном режиме функционирования системы.

Таким образом, в новой двухъядерной инерциальной системе, когда первая – основная триада ВТГ/ПРГгироскопов функционирует в основном автономном режиме инерциальных измерений и определения ориентации подвижного объекта, вторая приборная триада одноосных ВТГ/ПРГ-гироскопов автоматически самокалибруется по уникальной закрытой технологии, что повышает точность автономной БИНС минимум на один-два порядка [25]. Таким образом, новая прорывная технология HRG Crystal<sup>TM</sup> DUAL CORE, реализованная холдингом Safran Electronics & Defense, позволяет решать самые сложные практические задачи в области автономной навигации с помощью совершенно новых «революционных» инерциальных датчиков.

Например, для военно-морских применений холдинг Safran Electronics & Defense запустил программу «Euronaval-2018» на основе Black-Onyx и DUAL CORE создания новых ИНС для автономной навигации стратегических атомных подводных лодок. Данные перспективные ИНС предлагают современному рынку недостижимые ранее характеристики на базе ВТГ-20/ HRG-Сrystal<sup>™</sup> DUAL-Core: не более 0,5 морских миль/ 120 ч (пять суток) автономного плавания.

При этом нет никаких сомнений в том, что в самом ближайшем будущем другие известные области применения, такие как авиационная, космическая и наземная, будут также широко охвачены весьма перспективными инерциальными технологиями HRG Crystal<sup>TM</sup> DUAL CORE, поскольку потребность в расширенных характеристиках с улучшенными на несколько порядков выходными точностными данными становится все более востребованной.

#### VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современное состояние прикладной гироскопии характеризуется постепенным переходом от ранее созданных механических и оптических гиродатчиков к технологии ВТГ, на базе которых построены БИНС для авиационных, морских, космических и наземных применений. В этом классе гироскопов освоен диапазон точностей  $10^{-1}\dots10^{-3}$ град/ч и завершаются работы по созданию ВТГ высокого класса точности  $10^{-4}$ град/ч. Конкуренцию известным оптическим гироскопам может составить волновой твердотельный гироскоп, широко используемый в космической технике США и Франции. Разработана высокоточная БИНС-ВТГ морского применения. Высокоточный ВТГ (10<sup>-3</sup> град/ч) имеет безусловное преимущество перед оптическими гироскопами по массогабаритным характеристикам, но пока имеет более высокую технологическую стоимость при промышленном производстве. Безусловным преимуществом ВТГ гироскопа является устойчивость к сильным магнитным полям и различным механическим воздействиям.

#### Литература

- Foucault L. Demonstration physique du mouvement de la Terre au moyen du pendule // C.r. Acad. sci. Paris, 1851. V. 32. P.135-138.
- [2] Kamerlingh Onnes H. Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde. Ph.D.disertation. Groningen, Netherlands, 1879.
- [3] Quick W. H. Theory of vibrating string as an angular motion sensor// Trans. ASME. Ser.E. J. Appl. Mech. 1964. V. 31, № 3. P. 523-534.
- [4] Stiles J.C. Vibrating ring gyro//U.S. Patent. 1975. № 3. 924,475-Dec, 9.
- [5] Loper E.J., Lynch D.D. Sonic Gyro Fabrication and Testing, Delco Electronics Division, report R77-64, August 1977.
- [6] Loper E.J., Lynch D.D. Sonic Vibration Bell Gyro // Patent. no. 4157041, USA, 1979.
- [7] Loper E.J., Lynch D.D. The HRG: a new low-noise inertial rotation sensor // Proc. 16th Jt. Services Data Exchange for Inertial Systems. Los Angeles. CA. 1982.

- [8] Loper E.J., Lynch D.D. Vibratory rotational sensor. Patent EU, no. 0141621 A2, 1984.
- [9] Lynch D.D. Vibrating gyro analysis by method of averaging // 2nd Saint-Petersburg Interv. Conf. On Gyroscopic Technology and Navigation. Saint-Petersburg, 1995. P. 26–34.
- [10] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 128 с.
- [11] Lynch, D.D., Vibration-induced drift in the hemispherical resonator gyro, Proc. of the Annual Meeting of the Institute of Navigation 23– 25 June 1987, p. 34.
- [12] Мейер Д., Розелле Д. Инерциальная навигационная система на основе миниатюрного волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2012. №3 (78). С. 45–54.
- [13] Trusov A.A., et all., Continuously self-calibrating CVG system using hemispherical resonator gyroscopes, 2015 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (ISISS) Proceedings, Hapuna Beach, HI, USA, 23–26 March 2015. DOI: 10.1109/ISISS.2015.7102362.
- [14] Делэйе Ф. Бортовая инерциальная система координат SpaceNaute® для европейской ракеты-носителя «Ариан-6» на основе волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2018. №4 (103). С. 13.
- [15] Delhaye F., HRG by Safran. The Game-changing Technology, 2018 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL), 26–29 March 2018, Moltrasio, Italy, DOI:10.1109/ISISS.2018.8358163.
- [16] Kramer, D., DARPA Looks Beyond GPS for Positioning, Navigation and Timing, Physics Today, vol. 67, № 10, doi: 10.1063/PT.3.2543.
- [17] V.F. Zhuravlev. On the Formation of Feedbacks in the Spatial Oscillator of Van der Pol., Mechanics of Solids, vol.55, p.926-931 (2020).
- [18] Журавлёв В.Ф. Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля с внешним управлением // Нелинейная динамика. 2016. Т.12. №2. С.211–222.
- [19] V.F. Zhuravlev. On the Formation of Feedbacks in the Spatial Oscillator of Van der Pol. // Прикладная математика и механика. 2020, том 84, № 2, с. 151–157.
- [20] Журавлёв В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа. // Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela, No. 3, р. 6–19 .[Mech. Solids (Engl. Transl.1993.)].
- [21] A.Matthews. The Operation and Mechanization of the Hemispherical Resonator Gyroscope, IEEE, pp. 7–14.
- [22] S.E. Perelyaev, V.P. Zhuravlev, S.B. Bodunov, B.P. Bodunov. New Gyroscopes of the "Generalized Foucault Pendulum" Family: Some Fundamental Issues of Theory and Applied Aspects of Its Implementation in the Engineering Practice of Modern Gyroscopy, 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, IEEE, Publication Year: 2020
- [23] V.Ph. Zhuravlev. A Strapdown Inertial System of Minimum Dimension (A 3D Oscillator as a Complete Inertial Sensor), Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela, No.5, 5–10 (2005) [Mech. Solids (Engl. Transl.) 40 (5), 1–5 (2005)].
- [24] A.Yu. Ishlinskii, Orientation, Gyroscopes, and Inertial Navigation (Nauka, Moscow, 1976, 670.P.) [in Russian].
- [25] K.Magnus, Kreisel: Theorie und Anwendungen, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971, 527 P.
- [26] Журавлёв В.Ф. Бесплатформенная инерциальная система маятникового типа (БИНС МТ) // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 6–17.
- [27] V.Zhuravlev, S.Perelyaev, D.Borodulin. Strapdown Inertial Navigation System of Minimum Dimension (3D oscillator as a complete inertial sensor), DGON Inertial Sensors and Systems Symposium. IEEE. Publication Year: 2018, Page(s): 1–12.
- [28] В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука. 1988. 325с.
- [29] D.M. Klimov, V.Ph. Zhuravlev, Y.K. Zhbanov, «Quartz hemispherical resonator (wave solid-state gyroscope)», Moscow. 2017. pp. 40–45.
- [30] V. Zhuravlev, S. Perelyaev. The Generalized Foucault Pendulum is a 3D Integrating Gyroscopes Using the Three-Dimensional Precession of Standing Waves in a Rotating Spherically Symmetric Elastic Solid. DGON Inertial Sensors and Systems Symposium. IEEE. Publication Year: 2019, Page(s): 1 – 12.
- [31] Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Пространственный эффект инертности упругих волн на сфере // Изв. РАН. МТТ. 2021. №3. С. 3-6.

## XXX ЮБИЛЕЙНАЯ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ, 2023

Верстка Е.А. Дубровская

Государственный научный центр Российской Федерации АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» 197046, С.-Петербург, ул. Малая Посадская, 30. Тел. (812) 499-82-93, факс (812) 232 33 76, e-mail: editor@eprib.ru http://www. elektropribor.spb.ru