

А. А. МАСЛОВ, Д. А. МАСЛОВ, И. В. МЕРКУРЬЕВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ДИНАМИКЕ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА С ПЛОСКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Рассматривается волновой твердотельный гироскоп с плоскими электродами, применяемый в контуре управления и навигации подвижных объектов. В целях повышения его точности поставлена задача построения новой математической модели, учитывающей нелинейные свойства электромеханической системы управления колебаниями полусферического резонатора. Математическая модель динамики резонатора строится на основе дифференциальных уравнений Лагранжа–Максвелла. Полученная нелинейная модель исследовалась с помощью асимптотического метода осреднения Крылова–Боголюбова. Продемонстрировано, что опорное напряжение на плоских электродах управления гироскопа вызывает систематический уход и изменение резонансной частоты. Приведен пример, показывающий влияние опорного напряжения на дрейф гироскопа и на уменьшение частоты колебаний резонатора.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, полусферический резонатор, плоские электроды, опорное напряжение, дрейф, нелинейный эффект.

Введение

Одним из наиболее перспективных гироскопов для инерциальных навигационных систем является волновой твердотельный (ВТГ). Анализ публикаций [1–4] показывает: объем исследований и разработок ВТГ в ближайшее время будет расширяться, что будет способствовать повышению их точности. Благодаря своим характеристикам и возможности повышения точности ВТГ становится наиболее перспективным типом гироскопа для навигационных систем различных сфер применения [5–9].

Принцип функционирования ВТГ основан на эффекте инертности упругих волн колебаний полусферического резонатора, который изготавливается из кварцевого стекла, обладающего высокими изотропными свойствами и добротностью. ВТГ с полусферическим резонатором относится к классу устройств высоких и средних точностей. Достижение высокой точности для ВТГ возможно в случае, если полусферический резонатор характеризуется высокой добротностью ($Q \sim 10^7$) [8], а также качественным изготовлением и точной балансировкой, которые значительно снижают влияние анизотропии свойств резонатора на качество получаемых измерений.

Маслов Александр Анатольевич. Кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, НИУ «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ») (Москва).

Маслов Дмитрий Александрович. Кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, НИУ «МЭИ».

Меркурьев Игорь Владимирович. Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, НИУ «МЭИ». Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

К недостаткам ВТГ относят сложность производства кварцевого полусферического резонатора и его высокую стоимость, обусловленную рядом прецизионных технологических операций [10]. По этой причине в последнее время проводятся работы по совершенствованию конструкции ВТГ, которые связаны с уменьшением габаритных размеров конструкции, упрощением технологии размещения силовых и измерительных электродов. Известно, что кромка полусферического резонатора при колебаниях перемещается не только перпендикулярно оси резонатора, но и параллельно ей. Это обстоятельство позволяет расположить все электроды на плоском электродном узле, если установить его параллельно торцевой кромке полусферической оболочки резонатора. В новом варианте конструкции ВТГ металлическое покрытие наносится только на торцевую кромку полусферы, что значительно уменьшает внутреннее трение в резонаторе и упрощает технологию его изготовления. Металлическое покрытие кромки полусферы вместе с электродами основания образуют электростатические датчики управления и съема информации. В этой конструкции значительно проще обеспечить равномерность плоского зазора между торцевой поверхностью резонатора и плоским электродным узлом [10]. Используя эту конструктивную схему, французская компания Safran Electronics&Defence разработала и наладила производство высокоточного ВТГ [8] с кварцевым полусферическим резонатором диаметром 20 мм.

Управление колебаниями резонатора осуществляется путем подачи напряжения на плоские электроды, образующие с резонатором систему электрических конденсаторов. Математическая модель ВТГ с электродами на сферической поверхности резонатора, описывающая линейные электрические и механические колебания во взаимосвязанной форме, в том числе и при наличии опорного напряжения, получена в [11, 12]. Линейная математическая модель ВТГ с плоскими электродами представлена в [13]. В работах [14–16] учитывается влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику ВТГ с кольцевым и цилиндрическим резонатором. В [17–19] показано, что опорное напряжение вызывает дрейф ВТГ при учете нелинейных слагаемых в уравнениях динамики. В настоящей статье исследуется динамика полусферического резонатора ВТГ с плоскими электродами с учетом нелинейности, обусловленной электрическими процессами в контуре управления гироскопа.

Уравнения малых вынужденных колебаний резонатора

Рассмотрим тонкий упругий полусферический резонатор 1 (рис. 1), металлизированная кромка 3 которого вместе с плоскими электродами 4 , расположенными на основании 2 , образует датчики управления и съема информации. Резонатор ВТГ изготавливается из плавленного кварцевого стекла. Предполагается, что упругие свойства этого материала изотропны, производственные погрешности не учитываются.

С основанием прибора свяжем ортогональную систему координат $Oxuz$ (рис. 2), ось z направим по оси симметрии резонатора. Пусть полусферическая оболочка вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью Ω , которую в дальнейшем будем считать малой по сравнению с частотой собственных колебаний ω , т. е. $\Omega/\omega \ll 1$.

Для описания деформаций резонатора введем ортогональную систему координат $\xi\eta\zeta$, жестко связанную со срединной поверхностью резонатора. Пусть $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ – вектор упругого смещения произвольной точки срединной поверхности оболочки в осях $\xi\eta\zeta$.

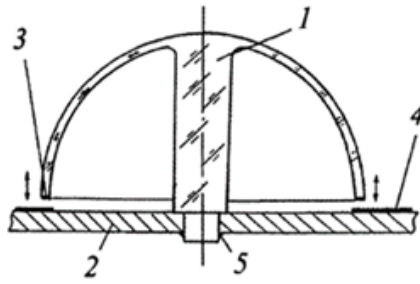


Рис. 1. ВТГ с плоским узлом электродов: 1 – резонатор; 2 – основание гироскопа; 3 – металлизированная поверхность резонатора; 4 – электрод; 5 – место соединения резонатора с основанием

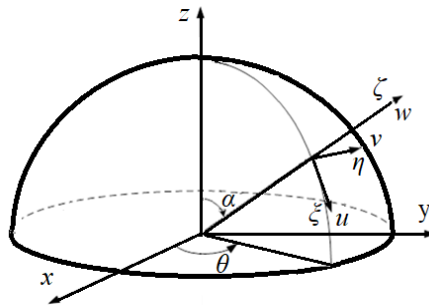


Рис. 2. Расчетная схема ВТГ

Воспользуемся приближением Релея для представления колебаний оболочки по основной второй форме [20, 21]:

$$\begin{aligned} u &= U_2(f_* \cos 2\theta + g_* \sin 2\theta), \\ v &= V_2(f_* \sin 2\theta - g_* \cos 2\theta), \\ w &= W_2(f_* \cos 2\theta + g_* \sin 2\theta), \end{aligned} \quad (1)$$

где $U_2 = \sin \alpha \cdot tg^2 \frac{\alpha}{2}$; $V_2 = \sin \alpha \cdot tg^2 \frac{\alpha}{2}$; $W_2 = -(2 + \cos \alpha) \cdot tg^2 \frac{\alpha}{2}$ – функции Релея, определяющие колебания второй собственной формы колебаний нерастяжимой оболочки.

Смещение точки резонатора с угловыми координатами α и θ определяется вектором с компонентами u, v, w . При этом α отсчитывается по меридиану от оси резонатора, θ – по параллели. Компонента u представляет собой смещение вдоль касательной к меридиану, v – вдоль касательной к параллели и w – по нормали к поверхности резонатора.

Подставляя $\alpha = \pi/2$ в (1), получим компоненты вектора смещения на торцевой поверхности резонатора:

$$u = f_* \cos 2\theta + g_* \sin 2\theta, \quad v = f_* \sin 2\theta - g_* \cos 2\theta, \quad w = -2(f_* \cos 2\theta + g_* \sin 2\theta), \quad (2)$$

где f_* и g_* – обобщенные координаты основной второй формы колебаний, равные смещению в направлении оси ВТГ в двух фиксированных точках торцевой поверхности резонатора, отстоящих друг от друга под углом $\pi/4$. Обобщенные координаты являются функциями времени.

Из (2) следует, что смещение u , параллельное оси гироскопа, вдвое меньше радиального смещения w , т.е. $u = -w/2$.

При использовании электрической модели ВТГ пренебрежем перекрестными связями между электродами. Вычислим энергию n конденсаторов, образованных управляющими электродами и резонатором. Потенциальная энергия электрического поля, локализованного между обкладками заряженных конденсаторов, определяется выражением [12]

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{C_i}, \quad (3)$$

где q_i – заряд i -го конденсатора, образованного резонатором и i -м электродом, центр которого расположен под углом $\theta_i = 2\pi(i-1)/n$ к оси Ox , $i=1\dots n$; C_i – емкость i -го конденсатора.

Для вычисления емкости конденсатора, образованного неподвижным плоским электродом и металлизированной поверхностью резонатора, используем следующее выражение:

$$C_i = \epsilon_0 S / (d - u_i) = C_0 / (1 - u_i / d), \quad (4)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $C_0 = \epsilon_0 S / d$ – емкость конденсатора при недеформированном резонаторе; S – площадь электрода; d – зазор между недеформированным резонатором и электродами; $u_i = f_* \cos 2\theta_i + g_* \sin 2\theta_i$ – смещение вдоль касательной к меридиану i -го электрода.

Подставляя (4) в (3), получаем выражение для потенциальной энергии электрического поля:

$$P = \frac{1}{2C_0} \sum_{i=1}^n q_i^2 \left(1 - \frac{1}{d} (f_* \cos 2\theta_i + g_*(t) \sin 2\theta_i) \right). \quad (5)$$

В дальнейших исследованиях будем применять динамическую модель основной формы колебаний электромеханической системы, представляющей собой резонатор с n электродами управления.

Кинетическая энергия резонатора имеет вид [13]:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_D \rho \mathbf{V}^2 d\tilde{v}, \quad (6)$$

здесь ρ – плотность материала резонатора, \mathbf{V} – вектор абсолютной скорости произвольной точки срединной поверхности резонатора, $d\tilde{v} = \tilde{r}^2 \sin \alpha d\alpha d\theta d\tilde{r}$ – элементарный объем, D – область интегрирования, которая задается неравенствами $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $R - h/2 \leq \tilde{r} \leq R + h/2$, h – толщина резонатора.

Определим вектор абсолютной скорости произвольной точки срединной поверхности резонатора с помощью теоремы о сложении скоростей:

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}), \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\Omega} = (-\Omega \sin \alpha, 0, \Omega \cos \alpha)^T$ – вектор угловой скорости основания гироскопа и $\mathbf{r} = (0, 0, R)^T$ – радиус-вектор точки, расположенной на срединной поверхности. Угловая скорость и радиус-векторы заданы в проекциях на оси $\xi\eta\zeta$, точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Используя формулу (7), найдем координаты вектора абсолютной скорости:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dot{u} - \Omega v \cos \alpha \\ \dot{v} + \Omega[(R + w) \sin \alpha + u \cos \alpha] \\ \dot{w} - \Omega v \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (8)$$

С учетом (6) и (8) выражение кинетической энергии полусферической оболочки принимает вид:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{R-h/2}^{R+h/2} \rho \left((\dot{u} - \Omega v \cos \alpha)^2 + (\dot{v} + u \cos \alpha + \Omega(R + w) \sin \alpha)^2 + (\dot{w} - \Omega v \sin \alpha)^2 \right) \tilde{r}^2 \sin \alpha d\theta d\alpha d\tilde{r}. \quad (9)$$

Последнее соотношение может быть представлено в виде

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2) + \Omega \kappa (\dot{f}_* g_* - \dot{g}_* f_*), \quad (10)$$

где m и κ – приведенная масса резонатора и коэффициент, характеризующий угловую скорость, при основной форме колебаний.

В выражении (10) в связи с малостью угловой скорости основания гироскопа Ω опущены члены, содержащие множитель Ω^2 .

Полученные формулы для вычисления m и κ имеют вид:

$$m = \pi \rho (hR^2 + h^3 / 12) \int_0^{\pi/2} (U_2^2 + V_2^2 + W_2^2) \sin \alpha d\alpha, \quad (11)$$

$$\kappa = 2\pi \rho (hR^2 + h^3 / 12) \int_0^{\pi/2} V_2 (W_2 \sin \alpha + U_2 \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha. \quad (12)$$

В формулах (11) и (12) слагаемыми $h^3 / 12$ можно пренебречь. Это связано с тем, что в резонаторах отношение $h / R < 1 / 14$ и относительная погрешность при отбрасывании второго слагаемого не превышает 0,05 %.

Подставляя функции Релея, определяющие колебания второй собственной формы колебаний нерастяжимой оболочки, в (11), получим формулу для вычисления приведенной массы полусферического резонатора: $m = 4,8\rho hR^2$.

Согласно предположению, что деформация изгиба является единственной формой деформации полусферической оболочки, потенциальная энергия резонатора принимает вид [22]:

$$П = \frac{1}{2} c (f_*^2 + g_*^2), \quad (13)$$

где c – приведенная жесткость резонатора, которую можно рассчитать по формуле $c = m\omega^2$.

Частота свободных колебаний полусферического резонатора равна [20]:

$$\omega = 2,62 \frac{h}{R^2} \sqrt{\frac{E}{3(1 + \sigma)\rho}},$$

где E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона.

Для определения функции Лагранжа L используем выражения кинетической (10), потенциальной энергии резонатора (13) и потенциальной энергии электростатического поля управляющих конденсаторов (5):

$$L = T - \Pi - P = \frac{1}{2} \left(m \left(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2 \right) + 2\Omega k \left(\dot{f}_* g_* - \dot{g}_* f_* \right) - c \left(f_*^2 + g_*^2 \right) \right) - \frac{1}{2C_0} \sum_{i=1}^n q_i^2 \left(1 - \frac{1}{d} \left(f_* \cos 2\theta_i + g_* \sin 2\theta_i \right) \right). \quad (14)$$

Внутренние потери при колебаниях будем описывать моделью Кельвина–Фойгта. Внешними потерями пренебрежем, считая объем корпуса прибора вакуумированным. Введем диссипативную функцию, учитывающую внутреннее трение материала резонатора:

$$\Phi_m = \frac{1}{2} c_* \left(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2 \right), \quad (15)$$

где c_* – коэффициент, характеризующий вязкоупругие свойства материала резонатора.

Введем электрическую диссипативную функцию [23]:

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n R_e \dot{q}_i^2, \quad (16)$$

где R_e – электрическое сопротивление цепи между электродом управления и источником питания.

Кроме функции Лагранжа L введем диссипативную функцию электромеханической системы, равную сумме электрической и механической диссипативных функций:

$$\Phi = \Phi_m + \Phi_e = \frac{1}{2} c_* \left(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n R_e \dot{q}_j^2. \quad (17)$$

Предположим, что обобщенные неконсервативные силы механической природы отсутствуют, и обозначим через U_j напряжение, подаваемое на j -й электрод. Уравнения Лагранжа–Максвелла электромеханической системы будут иметь вид [23]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}_*} \right) - \frac{\partial L}{\partial f_*} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{f}_*} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}_*} \right) - \frac{\partial L}{\partial g_*} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{g}_*} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} &= U_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (13) и (16) в (17), получим систему уравнений, описывающую динамику резонатора:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_* + \gamma_* \dot{f}_* + \omega^2 f_* + \nu_* \dot{g}_* - \frac{1}{2mC_0 d} \sum_{i=1}^n q_i^2 \cos 2\theta_i &= 0, \\ \ddot{g}_* + \gamma_* \dot{g}_* + \omega^2 g_* - \nu_* \dot{f}_* - \frac{1}{2mC_0 d} \sum_{i=1}^n q_i^2 \sin 2\theta_i &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$R_e \dot{q}_i + \frac{q_i}{C_i} = U_i, \quad i = 1 \dots n,$$

где $\gamma_* = c_*/m$ – коэффициент демпфирования; $\nu_* = 2\kappa\Omega/m$ – параметр, характеризующий угловую скорость; $\omega^2 = c/m$ – квадрат частоты собственных колебаний.

Запишем выражение для емкости следующим образом:

$$C_i = \frac{C_0}{1 - \frac{f_*}{d} \cos 2\theta_i - \frac{g_*}{d} \sin 2\theta_i}. \quad (20)$$

Используя формулу (20) и переходя в уравнениях (18) к нормализованным обобщенным координатам f и g , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + \gamma_* \dot{f} + \omega^2 f + \nu_* \dot{g} - \frac{1}{2md^2 C_0} \sum_{i=1}^n q_i^2 \cos 2\theta_i &= 0, \\ \ddot{g} + \gamma_* \dot{g} + \omega^2 g - \nu_* \dot{f} - \frac{1}{2md^2 C_0} \sum_{i=1}^n q_i^2 \sin 2\theta_i &= 0, \\ R_e C_0 \dot{q}_i + q_i (1 - f \cos 2\theta_i - g \sin 2\theta_i) &= U_i C_0, \quad i = 1 \dots n. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем начальные условия для системы (21):

$$f(t_0) = f^0, \quad \dot{f}(t_0) = \dot{f}^0, \quad g(t_0) = g^0, \quad \dot{g}(t_0) = \dot{g}^0, \quad q_j(t_0) = q_j^0, \quad j = 1 \dots n. \quad (22)$$

Перейдя к безразмерным обобщенным координатам $f = f_*/d$, $g = g_*/d$, безразмерному времени $\tau = \omega t$ и поставив начальные условия, мы получим из (21), (22) задачу Коши для системы дифференциальных уравнений тихоновского типа, т.е. содержащей дифференциальные уравнения для медленных переменных и с малым параметром при производных для быстрых переменных:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \tau), \quad (23)$$

$$\tilde{\varepsilon} \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \tau), \quad (24)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0, \quad (25)$$

где $\mathbf{x} = \left(f, \frac{df}{d\tau}, g, \frac{dg}{d\tau} \right)^T$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$, $\tilde{\varepsilon} = R_e C_0 \omega$ – безразмерный малый параметр (например, $\tilde{\varepsilon} \sim 10^{-6}$, $R_e \approx 1$ Ом, $C_0 \approx 10^{-12}$ Ф, $\omega \approx 10^5$ с⁻¹), а уравнение (24) является сингулярно возмущенным. Для задачи (23)–(25) справедливы условия теоремы Тихонова о предельном переходе [24], поэтому можно записать:

$$q_i = \frac{U_i C_0}{1 - f \cos 2\theta_i - g \sin 2\theta_i}, \quad i = 1 \dots n. \quad (26)$$

Подставляя (26) в первые два уравнения (21), получим систему уравнений динамики ВТГ с плоскими электродами:

$$\ddot{f} + \gamma_* \dot{f} + \omega^2 f + v_* \dot{g} - \frac{C_0}{2md^2} \sum_{i=1}^n \frac{U_i^2 \cos 2\theta_i}{(1 - f \cos 2\theta_i - g \sin 2\theta_i)^2} = 0, \quad (27)$$

$$\ddot{g} + \gamma_* \dot{g} + \omega^2 g - v_* \dot{f} - \frac{C_0}{2md^2} \sum_{i=1}^n \frac{U_i^2 \sin 2\theta_i}{(1 - f \cos 2\theta_i - g \sin 2\theta_i)^2} = 0, \quad (28)$$

$$f(t_0) = f^0, \quad \dot{f}(t_0) = \dot{f}^0, \quad g(t_0) = g^0, \quad \dot{g}(t_0) = \dot{g}^0.$$

В режиме вынужденных колебаний с помощью электродов управления создается переменное во времени силовое поле, неизменно ориентированное относительно основания гироскопа.

Пусть центр i -го электрода расположен под углом $\theta = \pi(i - 1)/8$ ($i = 1, 2, \dots, 16$). Для возбуждения второй основной формы колебаний резонатора используем четыре управляющих электрода ($i = 1, 5, 9, 13$). Разность потенциалов U_i между резонатором и управляющими электродами зададим следующим образом:

$$U_1 = U_9 = U_0(1 + u_0 \cos \omega_0 t), \quad U_5 = U_{13} = U_0(1 - u_0 \cos \omega_0 t), \quad (29)$$

где U_0 – постоянное опорное напряжение; u_0 – безразмерная амплитуда переменного напряжения; ω_0 – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора. На остальных электродах разность потенциалов задается равной опорному напряжению U_0 .

Будем считать достаточно малым значение амплитуды переменного напряжения $u_0 \leq 0,1$, поэтому в дальнейшем пренебрежем в выражениях (27) слагаемым, содержащим u_0^2 .

Подставляя (29) в (27) и опуская слагаемые со степенями для f и g выше третьей, получим уравнения колебаний резонатора ВТГ с плоскими электродами:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + f &= \varepsilon \left[-\gamma \dot{f} + v \dot{g} + 2f + 3(f^2 + g^2)f + 3f^2 u_0 \cos \mu t + u_0 \cos \mu t \right], \\ \ddot{g} + g &= \varepsilon \left[-\gamma \dot{g} - v \dot{f} + 2g + 3(f^2 + g^2)g \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где $\varepsilon = \frac{4U_0^2 C_0}{md^2 \omega^2}$ – безразмерный коэффициент, характеризующий малость электрических сил, действующих на резонатор; $v = -v_*/(\varepsilon \omega)$ – безразмерная угловая скорость основания гироскопа; $\gamma = \gamma_*/(\varepsilon \omega)$ – безразмерный коэффициент демпфирования колебаний. В уравнениях (30) и далее точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega t$.

Динамика системы при наличии постоянного опорного напряжения на управляющих электродах

Уравнения свободных колебаний резонатора на подвижном основании при подаче на управляющие электроды только опорного напряжения ($U_0 \neq 0, u_0 = 0$) принимают вид:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + f &= \varepsilon \left[-\gamma \dot{f} + v \dot{g} + 2f + 3(f^2 + g^2)f \right], \\ \ddot{g} + g &= \varepsilon \left[-\gamma \dot{g} - v \dot{f} + 2g + 3(f^2 + g^2)g \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Из уравнений (31) следует, что опорное напряжение вызывает снижение частоты собственных колебаний. Эти выводы согласуются с результатом, полученным в [12]. Систему (31) будем исследовать методом осреднения Крылова–Боголюбова. Для этого приведем ее к стандартному виду посредством перехода от переменных f, g, \dot{f}, \dot{g} , называемых в механике элементами орбиты, к медленно изменяющимся переменным r, k, ϑ, χ [25]:

$$\begin{aligned} f &= r \cos(\tau + \chi) \cos 2\vartheta - k \sin(\tau + \chi) \sin 2\vartheta, \\ g &= r \cos(\tau + \chi) \sin 2\vartheta + k \sin(\tau + \chi) \cos 2\vartheta, \\ \dot{f} &= -r \sin(\tau + \chi) \cos 2\vartheta - k \cos(\tau + \chi) \sin 2\vartheta, \\ \dot{g} &= -r \sin(\tau + \chi) \sin 2\vartheta + k \cos(\tau + \chi) \cos 2\vartheta. \end{aligned}$$

Отметим, что схема осреднения Крылова–Боголюбова физически реализуется в электронном контуре гироскопа. Измеряемые с помощью емкостной системы электродов высокочастотные функции времени f, g представляются в виде двух нормальных форм колебаний с амплитудами r и k . Ориентация волновой картины колебаний на плоскости f, g определяется углом прецессии ϑ , изменение фаз колебаний двух нормальных форм зависит от медленной переменной χ .

При равенстве амплитуд основной и квадратурной волны колебаний ($r = k$) угол прецессии не определен, поэтому этот режим в дальнейшем не рассматривается.

Уравнения движения в медленных переменных r, k, ϑ, χ в первом приближении метода осреднения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{2} \varepsilon \gamma r, & \dot{k} &= -\frac{1}{2} \varepsilon \gamma k, \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{1}{4} \varepsilon \nu + \frac{3}{8} \varepsilon k r, & \dot{\chi} &= -\frac{9}{8} \varepsilon (k^2 + r^2) - \varepsilon. \end{aligned} \tag{32}$$

Первые два уравнения системы (32) указывают на то, что амплитуда колебаний уменьшается в результате демпфирования. Угол прецессии ϑ при неподвижном основании ВТГ ($\Omega = 0$) меняется, как это следует из третьей формулы (32), со скоростью, прямо пропорциональной емкости конденсатора, квадрату опорного напряжения, амплитудам колебаний r, k и обратно пропорциональной приведенной массе и квадрату рабочего зазора. Четвертое уравнение системы (32) указывает на незначительное изменение частоты колебаний.

Числовой пример. Вычислим скорость прецессии волны $\dot{\vartheta}$, обусловленной нелинейностью колебаний в электрическом контуре гироскопа, полусферический резонатор которого имеет следующие размеры [8, 13]: средний радиус $R = 10$ мм, толщина $h = 0,7$ мм. Плотность материала резонатора $\rho = 2200$ кг/м³, модуль Юнга $E = 7,67 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\sigma = 0,17$. Пусть емкость $C_0 = 1,5 \cdot 10^{-12}$ Ф (площадь пластины 2,5 мм², расстояние между пластинами $d = 15$ мкм), а опорное напряжение $U_0 = 10$ В. Примем относительные амплитуды основной и квадратурной волны колебаний r и k равными 0,04 и 0,0004 (0,6 мкм и 0,006 мкм) соответственно. Частота колебаний полусферического резонатора равна $\omega = 57\,800$ с⁻¹ (9199 Гц) и отличается от рассчитанной в [13] на сотые доли процента. Безразмерный коэффициент, характеризующий малость электрических сил, составляет $\varepsilon = 1,06 \cdot 10^{-6}$.

Абсолютная величина скорости прецессии волны $\dot{\vartheta}$ при неподвижном основании равна $0,076$ °/час. Эта погрешность присуща всем без исключения гироскопам, реализующим идею маятника Фуко [11]. Для устранения погрешности, вызываемой нелинейностью, в гироскопах данного класса одну из амплитуд колебаний, например r , поддерживают постоянной, а другую $-k$ стремятся уменьшить до нуля [11]. Отметим, что опорное напряжение уменьшает частоту колебаний резонатора на $\varepsilon\omega$ или на $0,0614$ с⁻¹ ($0,00976$ Гц). Учет нелинейности колебаний приводит к незначительному уменьшению частоты свободных колебаний резонатора на величину $\frac{9}{8}\varepsilon(k^2 + r^2)\omega$ или на $1,10 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹ ($1,75 \cdot 10^{-5}$ Гц).

Вынужденные нелинейные колебания резонатора

Для того чтобы в дальнейшем не учитывать слагаемые $2\varepsilon f$ и $2\varepsilon g$ в системе уравнений (31), указывающие на незначительное изменение частоты колебаний резонатора, изменим безразмерное время в $\sqrt{1-2\varepsilon}$ раз. В первом приближении относительно ε получим систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую колебания резонатора по основной моде:

$$\ddot{f} + f = -\gamma\dot{f} + \nu\dot{g} + \varepsilon[3(f^2 + g^2)f + 3f^2u_0 \cos \mu\tau + u_0 \cos \mu\tau]. \quad (33)$$

В случае мягкого резонансного возбуждения колебаний имеем $\mu = \omega_0/\omega = 1 + \lambda$, λ – частотная настройка.

Значения малых параметров ε , ν , γ и λ составляют 10^{-4} – 10^{-7} . Это обеспечивает высокую точность приближенных результатов, полученных с помощью метода усреднения Крылова–Боголюбова.

Приведем систему уравнений (33) к стандартному виду посредством перехода от переменных f, g, \dot{f}, \dot{g} к осциллирующим переменным A, B, φ, ψ по формулам

$$\begin{aligned} f &= A \sin(\mu\tau + \varphi), \dot{f} = \mu A \cos(\mu\tau + \varphi), \\ g &= B \sin(\mu\tau + \psi), \dot{g} = \mu B \cos(\mu\tau + \psi). \end{aligned} \quad (34)$$

Уравнения движения в медленных переменных A, B, φ, ψ в первом приближении метода осреднения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \left[-4A\gamma + (3A^2 + 4)\varepsilon u_0 \cos \varphi + 2B \cos(\varphi - \psi)(2\nu - 3\varepsilon AB \sin(\varphi - \psi)) \right] / 8, \\ \dot{B} &= \left[-4B\gamma - 4A\nu \cos(\varphi - \psi) + 3\varepsilon A^2 B \sin 2(\varphi - \psi) \right] / 8, \\ \dot{\varphi} &= -(9\varepsilon A^3 + 6\varepsilon AB^2 + 8A\lambda + 3\varepsilon AB^2 \cos 2(\varphi - \psi) + \\ &+ (9A^2 + 4)\varepsilon u_0 \sin \varphi + 4B\nu \sin(\varphi - \psi)) / (8A), \\ \dot{\psi} &= -(\varepsilon B(6A^2 + 9B^2 + 3A^2 \cos 2(\varphi - \psi)) - 8\lambda - 4A\nu \sin(\varphi - \psi)) / (8B). \end{aligned} \quad (35)$$

Одним из стационарных режимов колебаний является режим с нулевой амплитудой $B = 0$ (при этом значение фазы ψ не определено), а значения амплитуды A и фазы колебаний φ находятся из уравнений

$$-4A\tilde{\gamma} + (3A^2 + 4)u_0 \cos \varphi = 0, \quad A(8\tilde{\lambda} + 9A^2) + (9A^2 + 4)u_0 \sin \varphi = 0, \quad (36)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda / \varepsilon$ и $\tilde{\gamma} = \gamma / \varepsilon$ – нормализованные частотная настройка и коэффициент демпфирования.

Избавляясь от тригонометрических функций в уравнениях (36), получим неявное выражение для резонансной кривой:

$$\left(4A\tilde{\gamma}(9A^2 + 4)\right)^2 + \left(A(8\tilde{\lambda} + 9A^2)(3A^2 + 4)\right)^2 = \left(u_0(9A^2 + 4)(3A^2 + 4)\right)^2. \quad (37)$$

Учет только кубической нелинейности приводит к уравнению

$$(A\tilde{\gamma})^2 + (2A\tilde{\lambda} + 9A^3 / 4)^2 = u_0^2. \quad (38)$$

Без учета нелинейностей амплитуда колебаний имеет вид

$$A = \frac{u_0}{\sqrt{\tilde{\gamma}^2 + 4\tilde{\lambda}^2}}. \quad (39)$$

Числовой пример. Построим амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) колебаний полусферического резонатора ВТГ с плоскими электродами. Данные возьмем из предыдущего числового примера: частота колебаний полусферического резонатора равна $\omega = 57\,800\text{ c}^{-1}$ (9199 Гц), безразмерный коэффициент составляет $\varepsilon = 1,06 \cdot 10^{-6}$, опорное напряжение $U_0 = 10\text{ В}$. Примем относительную амплитуду переменного напряжения $u_0 = 0,04$. Пусть добротность резонатора $Q = 10^7$ [8], тогда нормализованный коэффициент демпфирования $\tilde{\gamma} = 1 / (\varepsilon Q)$ равен 0,0943. Расчеты произведем по трем формулам – (39), (38), (37), соответствующим трем математическим моделям: линейной; нелинейной, учитывающей только кубическую нелинейность; нелинейной, учитывающей не только кубическую нелинейность, но и квадратичную нелинейность при управлении. По вертикальной оси откладывается относительная амплитуда колебаний A , равная отношению амплитуды колебаний к рабочему зазору d (рис. 3). По горизонтальной оси – безразмерная частотная настройка $\tilde{\lambda} = (\omega_0 - \omega) / (\varepsilon\omega)$.

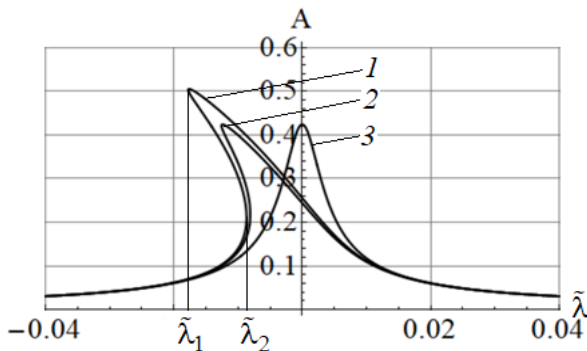


Рис. 3. Расчетная АЧХ при учете кубической и квадратичной нелинейностей (кривая 1), при учете только кубической нелинейности (кривая 2), без учета нелинейностей (кривая 3)

АЧХ в малой окрестности резонанса при линейных колебаниях симметрична относительно $\tilde{\lambda} = 0$ (кривая 3 на рис. 3). При амплитуде переменного напряжения $u_0 = 0,04$ (0,4 В) на резонансной частоте, равной $\omega = 57\,800\text{ с}^{-1}$, т. е. при $\tilde{\lambda} = 0$, нормализованная амплитуда колебаний A составляет 0,42 (в размерном виде – 6,3 мкм). АЧХ, рассчитанная по формуле (38) и полученная при учете только кубической нелинейности, имеет сдвиг резонансного пика, максимальная амплитуда при этом не изменяется (кривая 2 на рис. 3). Учет квадратичной нелинейности при управлении показывает увеличение амплитуды колебаний и еще больший сдвиг резонансной частоты (кривая 1 на рис. 3), чем при учете только кубической нелинейности (кривая 2 на рис. 3). На оси частотной настройки появляется зона между бифуркационными значениями $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ (кривая 1 на рис. 3), внутри которой возможны три значения амплитуд. Устойчивым колебаниям соответствуют наибольшие и наименьшие значения. Это означает, что при изменении частотной настройки в точках $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ происходит скачкообразное изменение амплитуды колебаний. Аналогичные значения частотной настройки, в которых происходит скачкообразное изменение амплитуды колебаний, существуют и на АЧХ, полученной при учете только кубической нелинейности.

Расчеты показали, что в ВТГ с плоскими электродами можно без использования высокого напряжения получить те же амплитуды колебаний и смещения частоты, которые достигаются в ВТГ со сферическими и цилиндрическими электродами с его применением [14, 21]. В этом заключается еще одно из преимуществ данного гироскопа наряду со значительным упрощением его конструкции.

Заключение

Построенная математическая модель ВТГ описывает конечные (нелинейные) колебания полусферического резонатора, вызванные нелинейными характеристиками плоских электростатических датчиков управления. Показано, что нелинейные эффекты в динамике ВТГ приводят к срыву колебаний резонатора и к дополнительным погрешностям гироскопа. Продемонстрировано также, что наличие опорного напряжения на плоских электродах вызывает не только уменьшение частоты резонатора, но и уход гироскопа, который необходимо учитывать. Дрейф гироскопа пропорционален произведению амплитуд основной и квадратурной волн колебаний и квадрата величины опорного напряжения. Полученная формула для определения погрешности гироскопа и приведенный пример иллюстрируют необходимость учета в ВТГ нелинейных электрических процессов.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда
№ 23-21-00546.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пешехонов В. Г.** Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. 2020. Том 28. № 2 (109). С. 3–10. DOI 10.17285/0869-7035.0028.
2. **Маслов А. А., Маслов Д. А., Ниналалов И. Г., Меркурьев И. В.** Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций // Гироскопия и навигация. 2023. Том 31. № 1 (120). С. 3–25. EDN: BJLSLM. DOI: 10.1134/S2075108723010054.

3. **Переляев С. Е.** Современное состояние и научно-технический прогноз перспектив применения зарубежных волновых твердотельных гироскопов (аналитический обзор по зарубежным материалам) // *Новости навигации*. 2020. № 3. С. 14–28.
4. **Переляев С. Е.** Современное состояние волновых твердотельных гироскопов. Перспективы развития в прикладной гироскопии // Юбилейная XXX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 2023. С. 413–418.
5. **Матвеев В. А., Лунин Б. С., Басараб М. А.** Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. М.: Физматлит, 2008. 239 с.
6. **Бодунов Б. П., Бодунов С. Б., Лопатин В. М., Чупров В. П.** Разработка и испытание волнового твердотельного гироскопа для использования в инклинометрической системе // *Гироскопия и навигация*. 2001. № 3 (34). С. 74–82.
7. **Delhaye, F.** SpaceNaute® the HRG Based Inertial Reference System of Ariane 6 European space launcher, *Gyroscopy and Navigation*, 2019., vol. 10, no. 1, pp. 1–6. DOI 10.1134/S2075108719010036.
8. **Jeanroy, A., Bouvet, A., Remillieux G.**, HRG marine application, *Gyroscopy and navigation*, 2014, no. 5, pp. 67–74.
9. **Распопов В. Я., Лихошерст В. В.** Волновые твердотельные гироскопы с металлическим резонатором // *Гироскопия и навигация*. 2023. Том 31. № 1 (120). С. 25–44. EDN: BQEDWV.
10. **Лунин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А.** Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М.: Радиотехника, 2014. 176 с.
11. **Климов Д. М., Журавлев В. Ф., Жбанов Ю. К.** Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во «Ким Л. А», 2017. 194 с.
12. **Журавлев В. Ф., Линч Д. Д.** Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // *Изв. РАН. МТТ*. 1995. № 5. С. 12–24.
13. **Wei, Z., Yi, G., Huo, Y., Qi, Z., Xu, Z.**, The Synthesis Model of Flat-Electrode Hemispherical Resonator Gyro, *Sensors*, 2019, 19, 1690, doi 10.3390/s19071690.
14. **Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В.** Нелинейные эффекты в динамике цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электростатической системой управления // *Гироскопия и навигация*. 2015. № 2 (88). С. 71–80. DOI 10.1134/S2075108715030104.
15. **Маслов Д. А., Меркурьев И. В.** Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // *Изв. РАН. МТТ*. 2021. № 6. С. 88–110. DOI: 10.3103/S002565442106011X.
16. **Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В., Подалков В. В.** Методы устранения нелинейности электростатических датчиков управления волнового твердотельного гироскопа // Юбилейная XXV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 2018. С. 201–203.
17. **Денисов Р. А., Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В., Подалков В. В.** Влияние опорного напряжения электромагнитных датчиков управления на дрейф волнового твердотельного гироскопа // *Гироскопия и навигация*. 2016. Т. 24. № 1 (92). С. 60–71. DOI: 10.17285/0869-7035.2016.24.1.060-071.
18. **Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В., Михайлов Д. В.** Об уходе волнового твердотельного гироскопа при наличии опорного напряжения на управляющих электродах // *Вестник МЭИ*. 2013. № 2. С. 11–14.
19. **Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В.** Влияние опорного напряжения на дрейф волнового твердотельного гироскопа с плоскими электродами // Юбилейная XXX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 2023. С. 258–262.
20. **Стретт Дж. В. (лорд Релей).** Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 1. 484 с.
21. **Матвеев В. А., Липатников В. И., Алехин А. В.** Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 168 с.
22. **Филин А. П.** Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1987. 384 с.
23. **Маргтыненко Ю. Г.** Аналитическая динамика электромеханических систем. М.: МЭИ, 1984. 64 с.
24. **Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.** Дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с.
25. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Maslov, A.A., Maslov, D.A., and Merkurjev, I.V. (Moscow Power Engineering Institute, Russia).

Nonlinear Effects in the Dynamics of a HRG with Flat Electrodes, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2023, vol. 31, no. 4 (123), pp. 64–77.

Abstract. The paper addresses a hemispherical resonator gyroscope (HRG) with flat electrodes applied in the vehicle control and navigation loop. In order to enhance the gyro accuracy, we formulate the problem of constructing a new mathematical model describing the nonlinearities of the electromechanical system controlling the hemispherical resonator oscillations. The mathematical model of the resonator dynamics is based on Lagrange-Maxwell differential equations. The obtained nonlinear model is studied with the asymptotic Krylov-Bogolyubov averaging method. The reference voltage on flat control electrodes is shown to arouse systematic drift and changes in the resonance frequency. The provided example demonstrates the influence of reference voltage on the gyro drift and reduction in the resonator oscillation frequency.

Key words: hemispherical resonator gyroscope, hemispherical resonator, flat electrodes, reference voltage, drift, nonlinear effect.

Материал поступил 07.09.2023