# 13-я МУЛЬТИКОНФЕРЕНЦИЯ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ

**6–8 октября 2020 г.**
**ГНЦ РФ АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР»**
**Санкт-Петербург**

МУЛЬТИКОНФЕРЕНЦИЯ ВКЛЮЧАЕТ В СЕБЯ ПЯТЬ КОНФЕРЕНЦИЙ, ОБЪЕДИНЕННЫХ ОДНОЙ ИДЕЕЙ:

- XXXII КОНФЕРЕНЦИЯ ПАМЯТИ ВЫДАЮЩЕГОСЯ КОНСТРУКТОРА ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ Н.Н.ОСТРЯКОВА
- «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В УПРАВЛЕНИИ» (ИТУ-2020)
- «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ» (МТУиП-2020)
- «УПРАВЛЕНИЕ В АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ» (УАКС-2020) ИМЕНИ АКАДЕМИКА Е.А.МИКРИНА
- «УПРАВЛЕНИЕ В МОРСКИХ СИСТЕМАХ» (УМС-2020)

# МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ» (МТУиП-2020)

## 7–8 ОКТЯБРЯ

Санкт-Петербург
2020

УДК 681.51

Материалы конференции «Математическая теория управления и ее приложения». СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2020. 380 с.

В настоящий сборник вошли тексты докладов, состоявшихся на конференции "Математическая теория управления и ее приложения" (МТУиП-2020). Доклады секции 6 и ряд докладов XXXII конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова были объединены в приглашенную секцию "Наблюдатели и фильтры", которая прошла как совместное заседание этих конференций. Тексты докладов секции "Наблюдатели и фильтры" размещены в сборнике XXXII конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова.

Тексты публикуются в авторской редакции.

ISBN 978-5-91995-074-5

© Государственный научный центр Российской Федерации
АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2020

**ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ**

- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ТЕРРИТОРИАЛЬНАЯ ГРУППА РОССИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО КОМИТЕТА ПО АВТОМАТИЧЕСКОМУ УПРАВЛЕНИЮ
- ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РФ АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР»
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ РАН
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМЕНИ В.И.УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
- УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ
- ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ РАН
- ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А.ТРАПЕЗНИКОВА РАН
- ВОЕННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР ВМФ «ВОЕННО-МОРСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ АДМИРАЛА ФЛОТА СОВЕТСКОГО СОЮЗА Н.Г.КУЗНЕЦОВА»
- ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ АВИАЦИОННЫХ СИСТЕМ («ГОСНИИАС»)
- РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ КОРПОРАЦИЯ «ЭНЕРГИЯ» ИМЕНИ С.П.КОРОЛЁВА
- АО «НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ»

**ПРИ ПОДДЕРЖКЕ:**

- ОТДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИКИ, МАШИНОСТРОЕНИЯ, МЕХАНИКИ И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ РАН
- МЕЖДУНАРОДНОЙ ОБЩЕСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ «АКАДЕМИЯ НАВИГАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ»
- РОССИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО КОМИТЕТА ПО АВТОМАТИЧЕСКОМУ УПРАВЛЕНИЮ
- ЖУРНАЛА «ГИРОСКОПИЯ И НАВИГАЦИЯ»
- ЖУРНАЛА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ»

## ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ПРЕЗИДИУМА

13-Й МУЛЬТИКОНФЕРЕНЦИИ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР»
АКАДЕМИК РАН **В.Г.ПЕШЕХОНОВ**

## XXXII КОНФЕРЕНЦИЯ ПАМЯТИ Н.Н.ОСТРЯКОВА

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА
АКАДЕМИК РАН **В.Г. ПЕШЕХОНОВ**

ЗАМЕСТИТЕЛИ ПРЕДСЕДАТЕЛЯ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **О.А. СТЕПАНОВ**
К.Т.Н. **А.В. СОКОЛОВ**

## КОНФЕРЕНЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ» (МТУиП-2020)

СОПРЕДСЕДАТЕЛИ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **Д.А. НОВИКОВ**
Д.Ф.-М.Н., ПРОФ. **Н.В. КУЗНЕЦОВ**

## КОНФЕРЕНЦИЯ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В УПРАВЛЕНИИ» (ИТУ-2020)

СОПРЕДСЕДАТЕЛИ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **В.Н. ВАСИЛЬЕВ**
Д.Т.Н., ПРОФ. **В.Н. ШЕЛУДЬКО**
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **Р.М. ЮСУПОВ**

## КОНФЕРЕНЦИЯ «УПРАВЛЕНИЕ В АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ» (УАКС–2020)

СОПРЕДСЕДАТЕЛИ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:
АКАДЕМИК РАН **С.Ю. ЖЕЛТОВ**
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **В.А. СОЛОВЬЕВ**
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **М.В. СИЛЬНИКОВ**

## КОНФЕРЕНЦИЯ «УПРАВЛЕНИЕ В МОРСКИХ СИСТЕМАХ» (УМС-2020)

СОПРЕДСЕДАТЕЛИ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:
АКАДЕМИК РАН **Е.И. ЯКУШЕНКО**
АКАДЕМИК РАН **С.Н. ВАСИЛЬЕВ**
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **А.Ф. ЩЕРБАТЮК**

СОДЕРЖАНИЕ

## КОНФЕРЕНЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ» (МТУиП-2020)

Секция 1
АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

**М.В. Хлебников, Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков**
Построение разреженной обратной связи в линейных системах управления ... 11

**Б.Ы. Аширбаев**
Решение задачи аналитического конструирования регулятора для стационарной дискретной системы с малым шагом ... 16

**Д. Добриборщ, С.А. Колюбин, А.А. Бобцов**
Управление параметрически неопределенными линейными системами по дискретным измерениям выходной переменной использованием наблюдателя с высоким коэффициентом усиления ... 20

**С .И. Гулюкина, В.А. Уткин**
Задача слежения с учетом ограничений на фазовые переменные управления. Метод расширения пространства состояний ... 24

**Р.О. Оморов**
Топологическая грубость и бифуркации синергетических систем ... 28

**А.А. Галяев, П.В. Лысенко, В.П. Яхно**
Об оптимальных траекториях подвижного объекта с неравномерной индикатрисой излучения ... 31

**С.М. Хрящев**
Один подход к нахождению моментов переключений управлений для одного класса полисистем в дискретном времени ... 35

**Е.Л. Еремин, Л.В. Никифорова, Е.А. Шеленок**
Комбинированная система для неопределенного неаффинного объекта с запаздыванием по управлению на множестве состояний функционирования ... 38

**А.Н. Кириллов, А.С. Иванова**
Периодическое управление вольтерровской системой, сохраняющее ее структуру ... 42

**О.Д. Суздалев, А.В. Пашенко, Д.Н. Герасимов, В.О. Никифоров**
Управление по выходу параметрически неопределенным нелинейным объектом с нарушением условий согласования ... 46

**Е.И. Веремей**
О синтезе стабилизирующих управлений на базе принципа оптимального демпфирования ... 50

**И.Н. Барабанов, В.Н. Тхай**
Связи-управления для стабилизации колебания в механических системах ... 53

**Е.А. Крупенников**
К решению задач динамической реконструкции с помощью вспомогательных задач вариационного исчисления ... 56

**Е.А. Сердечная**
Синтез модального управления в следящих системах с дифференцирующим наблюдателем ... 60

**Е.А. Сердечная**
Решение проблемы Брокетта на основе робастной стабилизации ... 63

**В.А. Бойченко**
Спектральный метод анализа линейных дискретных систем управления ... 67

**А.В. Таволжанский**
Обеспечение точности модального управления в системах с многокомпонентными воздействиями ... 71

**В.Н. Буков, А.В. Данеев, В.Н. Сизых**
Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов по неклассическим функционалам качества ... 74

**Р.А. Севостьянов**
Визуальное позиционирование мобильного робота с учетом запаздывания ... 77

**Б.Г. Ильясов, Г.А. Саитова, А.В. Елизарова**
Исследование устойчивости цифровой многосвязной системы автоматического управления ... 80

**Т.А. Алексеева, Т.Н. Мокаев, Ю.А. Польщикова**
Новокейнсианская модель в непрерывном времени: оптимальное управление при различных режимах взаимодействия фискальной и монетарной политик ... 83

**В.А. Глазунов, Г.С. Филиппов, Ю.В. Родионов, А.Н. Сухоставский**
Тренды развития структурных элементов подводных роботизированных мультиагентных комплексов ... 87

**А.Я. Красинский, А.В. Ни, А.А. Юлдашев**
Об одном методе моделирования динамики манипуляторов параллельным соединением звеньев как систем геометрическими связями ... 91

Секция 2
ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ, СЕТЕВОЕ, ГРУППОВОЕ И КООПЕРАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

**Д.Ю. Максимов**
Управление группой роботов с помощью резидуальной логики ... 95

**И.В. Бычков, А.Л. Казаков, М.Л. Жарков**
Система моделирования работы железнодорожных станций на основе сетей массового обслуживания ... 99

**И.В. Бычков, А.Г. Феоктистов, Р.О. Костромин, С.А. Горский**
Алгоритм перераспределения облачных ресурсов на основе кооперативного поведения агентов ... 102

**И.В. Бычков, А.Ю. Юрин**
Метод и средства протитипирования компонентов интеллектных систем на основе трансформаций ... 105

**М.Ю. Кензин, И.В. Бычков, Н.Н. Максимкин**
Стратегии экстренного оповещения для распределенных групп мобильных роботов при выполнении поисково-обследовательских миссий ... 108

**А.Ю. Исхаков, М.В. Мамченко**
Исследование уязвимостей и точек отказа в сценариях группового управления беспилотными транспортными средствами ... 112

**И.В. Бычков, С.А. Ульянов, Н.В. Нагул, А.В. Давыдов, М.Ю. Кензин, Н.Н. Максимкин**
Событийная система управления группой роботов для реализации динамических многоцелевых миссий ... 117

**Д.Н. Федянин**
Обмен информацией автономными мобильными агентами при поиске в условиях ограниченной дальности связи ... 121

**В.А. Батурин**, **В.Н. Сизых**
Приближенные методы решения задачи оптимального управления на сети операторов ... 124

**А.А. Толстихин**
Роевой подход к решению задачи обследования нестационарного физического поля группой автономных роботов ... 127

**А.Н. Сергеенко**
Алгоритм отслеживания распределенной сетью мобильных сенсоров траекторий множества объектов ... 130

**Э.В. Мельник**, **А.Б. Клименко**, **В.В. Коробкин**
Организация отказоустойчивого управления в группах мобильных устройств ... 133

**О.В. Блинова**
Моделирование и исследование взаимодействия мобильных узлов связи с ограниченным количеством подвижных точек доступа ... 136

**А.В. Давыдов, А.А. Ларионов, Н.В. Нагул**
Применение исчисления позитивно-образованных формул для решения задачи неблокирующего супервизорного управления дискретно-событийными системами ... 139

**Р.П. Агаев**
Асимптотическое поведение многоагентных систем второго порядка ... 143

Секция 3
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЙ ПРИРОДЫ

**А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов**, **А.Н. Сесекин**
Оптимальная маршрутизация в задаче с ограничениями и функциями затрат, зависящими от списка заданий ..... 147

**В.Д. Секерин, А.Е. Горохова**, **И.А. Зайцев**, **Т.С. Зайцева**
Метод оценки инновационной деятельности предприятия в условиях цифровой экономики ..... 151

**А.А. Чечина, Н.Г. Чурбанова , М.А. Трапезникова**
Модель транспортных потоков на основе теории клеточных автоматов для решения задач управления движением на городских дорожных сетях ..... 154

**Д.А. Губанов, А.Г. Чхартишвили**
О понятии информационного сообщества в социальной сети ..... 158

**Н.Н. Унанян**
Разработка бионического протеза кисти руки с интеллектуальным управлением ..... 162

**М.Г. Широбоков**
Методы обучения с подкреплением в задачах управления движением космических аппаратов ..... 165

**Д.Г. Арсеньев, Д.Е. Баскаков, В.П. Шкодырев**
Иерархическая кластеризация: алгоритмы и результаты ..... 167

**Н.А. Бабушкина**
Эффективные стратегии управления введением противоопухолевых вакцин: математическое моделирование ..... 172

**А.А. Кузьменко**
Использование форсированного скользящего режима для управления синхронным двигателем с постоянными магнитами ..... 176

**Е.Н. Обухова**
Управление электропневматической системой противодавлением с применением аналитического конструирования агрегированных регуляторов ..... 182

**А.А. Широкий, А.С. Исаков, В.В. Новочадов**
Модель управления аридными растительными сообществами ..... 186

**Г.Л. Эпштейн**
Задачи автоматического управления ветроэлектрическими установками и ветроэлектростанциями ..... 190

**Ф.Т. Алескеров, А.Н. Резяпова, В.И. Якуба**
Влияние стран в международной миграции ..... 195

**С.А. Дубовик**
Синтез «второй сигнальной системы» регулятора на основе принципа больших уклонений ..... 198

**И.П. Болодурина, Л.С. Забродина**
Сравнительный анализ алгоритмов оптимизации нейросетевого решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями ..... 202

**В.С. Кулабухов**
Математическая теория анализа и синтеза систем управления на основе общего принципа изоморфизма ..... 206

**В.А. Тайницкий, Е.А. Губар, Д.Н. Федянин, И.В. Петров**
Оптимальное управление в мультивирусной модели с учетом влияния информации ..... 211

Секция 4
ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

**Р.В. Мещеряков**, **В.К. Сарьян**
Индивидуализированная услуга по управления спасением абонентов информационно-управляющей системы при возникновении чрезвычайных ситуаций как пример управления системой междисциплинарной природ ..... 214

**В.Н. Подопригора, Д.Е. Селиверстов, В.В. Завадский**, **К.Д. Русаков**
Разработка архитектуры цифровой платформы тарифного регулирования федеральной антимонопольной службы российской федерации с использованием современных средств интеллектуализации управления ..... 218

**А.А. Лазарев, Н.А. Правдивец, Е.М. Гришин, С.А. Галахов**
Генерация примеров задачи теории расписаний для одного прибора,оценка их сложности и мера неразрешимости ..... 221

**А.А. Лазарев, Д.В. Лемтюжникова**
Полиномы Лагранжа и Чебышева для задач теории расписаний ..... 224

**А.А. Балабанов, В.В. Кунев**
Криптографическая защита цифровой информации в частотной и спектральной областях на основе алгоритмов форматного анализа (Ч.1. Основы теории) ..... 228

**А.А. Кулинич**
Подход поддержки принятия решений на основе извлечения информации из интернета ..... 234

**К.С. Ульянов, Ю.С. Федосенко, А.В. Шеянов**
Управление двухстадийным обслуживанием потока объектов ..... 237

**Г.А. Зверкина**
Об одном обобщении марковски модулированных пуассоновских процессов ..... 241

**Э.К. Калимулина**
Управление отказами в некоторых классах сетей массового обслуживания ..... 244

**В.С. Выхованец**
Понятийные модели представления и обработки знаний ..... 246

## Секция 5
## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

**М.И. Гераськин, Е.П. Ростова**
Оптимизация тарифов страхования и утилизации загрязнений при управлении промышленными рисками ..... 249

**М.И. Гераськин**
Моделирование равновесий олигополии при нелинейных функциях спроса и издержек агентов нефтяного рынка России ..... 252

**Д.А. Новиков**
Принцип декомпозиции в задачах управления организационно-техническими системами ..... 256

**Е.Я. Рубинович**
Дифференциальная игра поочередного преследования трех целей двумя преследователями с критерием типа «Время» ..... 260

**Д.А. Косян, Л.А. Петросян**
Характеристическая функция для кооперативных игр на гиперграфе ..... 263

**Е.З. Мохонько**
Оптимум по салейтеру в многокритериальной дифференциальной задаче принятия решений при неопределенности ..... 265

**И.М. Орлов, С.Ш. Кумачева**
Иерархическая модель коррупции: теоретико-игровой подход ..... 269

**А.Л. Гриних, Л.А. Петросян**
Вектор Шепли для стохастической дилеммы заключённого n-лиц ..... 272

## Секция 6
## НАБЛЮДАТЕЛИ И ФИЛЬТРЫ

Совместное заседание XXXII конференции памяти
выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н.Острякова
конференции «Математическая теория управления и ее приложения»
(МТУиП-2020)

Секция 7 (приглашенная)
НАУЧНЫЕ ШКОЛЫ В.А. ЯКУБОВИЧА И Г.А. ЛЕОНОВА:
50 ЛЕТ КАФЕДРЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

**Б.Р. Андриевский**, **Ю.С. Зайцева**
Оптимизация контура управления пилотируемого летательного аппарата по тангажу ..... 276

**М.М. Аникушин**
Квадратичные функционалы Ляпунова в теории устойчивости, теории колебаний и теории инерциальных многообразий ..... 280

**И.М. Буркин**, **Н.В. Кузнецов, Т.Н. Мокаев**
Метод «перехода в пространство производных»: анализ, синтез и управление колебаниями ..... 284

**Н.В. Кузнецов, М.Ю. Лобачев, М.В. Юлдашев, Р.В. Юлдашев**
Анализ границ глобальной устойчивости в системах фазовой автоподстройки частоты типа 2 ..... 287

**Т.А. Алексеева**, **И. Зелинка**, **Т.Н. Мокаев**, **Ю.А. Польщикова**
Прогнозирование и управление в модели перекрывающихся поколений ..... 289

**Н.В. Кузнецов, М.В. Юлдашев, Р.В. Юлдашев, М.Ю. Лобачев**, **С.И. Вольский, Д.А. Сорокин**
Автоподстройка инверторов в электрических сетях: диапазон захвата и проскальзывание циклов ..... 293

**Е.Д. Акимова, Н.В. Кузнецов, Р.Н. Мокаев**, **И.М. Бойко**
Анализ глобальной устойчивости и колебаний в разрывных системах Лурье: частотные методы устойчивости, гармонический баланс, годограф Цыпкина ..... 296

**В.Б. Смирнова**, **А.В. Проскурников**, **Н.В. Утина**
Развитие прямого метода Ляпунова в применении к системам синхронизации ..... 300

**А.Н. Чурилов, Э.Р. Салахова**
Колебания в нейроэндокринной системе: модель регуляции, основанная на использовании событий ..... 303

**А.Л. Фрадков**
К пятидесятилетию кафедры теоретической кибернетики СПбГУ ..... 305

**Н.В. Кузнецов**
Геннадий Алексеевич Леонов и его научная школа ..... 313

**М.М. Шумафов**
Метод Леонова нестационарной стабилизации в теории линейных систем управления ..... 316

**О.Н. Граничин**
Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация: научные школы В.Н. Фомина и А.Е. Барабанова ..... 320

**А.С. Матвеев**, **А.Ю. Погромский**
Теория управления при ограничениях на битовую скорость передачи данных: краткий обзор ..... 323

Секция 8
УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

**К.Д. Во, А.А. Бобцов**
Алгоритм управления линейным нестационарным объектом на базе методов параметрической идентификации ..... 325

**С.И. Колесникова**
Два алгоритма нелинейной адаптации в условиях неопределенности ..... 329

**Р.О. Оморов**
Робастность интервальных динамических систем ..... 333

**Д.Х. Имаев, Р.И. Смирнов, М.Ю. Шестопалов, С.В. Квашнин**
Оптимальное размещение компонентов систем управления в поле интенсивных физических воздействий ..... 336

**А.Ю. Кустов, В.Н. Тимин, А.В. Юрченков**
Условие ограниченности анизотропийной нормы стационарной системы с мультипликативными шумами ..... 340

**А.И. Маликов**
Оценивание состояния и стабилизация непрерывно-дискретных систем с неопределенными возмущениями ..... 343

**А.А. Замышляева, Е.В. Бычков, О.Н. Цыпленкова, Г.А. Свиридюк**
Об одной математической модели измерительного устройства второго порядка ..... 347

**К.В. Васючкова, О.В. Гаврилова, Н.А. Манакова, Г.А. Свиридюк**
Задача оптимального измерения для полулинейной дескрипторной системы с условием Шоултера – Сидорова ..... 350

**А.И. Глущенко, В.А. Петров, К.А. Ласточкин**
О влиянии коэффициента скорости адаптации на сходимость в градиентных схемах идентификации ..... 353

**С.А. Загребина, Н.Н. Соловьёва, Н.С. Гончаров**
Описание математической модели измерительного устройства методами квазинормированных пространств ..... 357

**А.Н. Жирабок, А.В. Зуев**
Идентификация дефектов в датчиках нелинейных технических систем ..... 361

**А.Л. Шестаков, А.В. Келлер**
Метод оптимального динамического измерения с использованием цифрового фильтра скользящей средней ..... 365

**А.В. Келлер, М. А. Сагадеева**
Сходимость сплайн-метода решения задачи оптимального динамического измерения ..... 369

**А.А. Галяев, А.С. Самохин, М.А. Самохина**
О задаче оптимальной расстановки обнаружителей на плоскости ..... 372

**А.Л. Шестаков, С.А. Загребина, М.А. Сагадеева**
Метод построения численных приближений оптимального динамического измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства ..... 376

**Секция 1**

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

М.В. ХЛЕБНИКОВ, Б.Т. ПОЛЯК
(ФГБУН Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва),

П.С. ЩЕРБАКОВ
(ФГБУН Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва)

# ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

*Рассматривается классическая задача синтеза стабилизирующей статической линейной обратной связи в линейной системе управления при нестандартном ограничении, состоящим в том, чтобы вектор управления имел возможно большее число нулевых компонент. Предлагается простой подход к приближенному решению такого рода невыпуклых задач путем их овыпукления; при этом задача сводится к минимизации специальных матричных норм при ограничениях, имеющих вид линейных матричных неравенств. Подход распространим на многочисленные задачи робастного и оптимального управления, допускающие «разреженную» переформулировку. Новым является не только решение, но и сама постановка задачи.*

**Введение.** Идеи разреженности широко используются в обработке сигналов и изображений, распознавании образов и многих других областях. Одной из первых областей применения концепции разреженности является $\ell_1$-оптимизация, восходящая к работе [1] и в дальнейшем успешно развиваемая в различных направлениях, таких как compressed sensing, $\ell_1$-фильтрация и др. (см., например, [2, 3, 4]). Математически задача сводится к минимизации числа ненулевых компонент вектора, определяемого так называемой $\ell_0$-(квази)нормой, при выпуклых ограничениях. Вместо этой трудной задачи обычно рассматривается результат ее овыпукления, получаемый при минимизации $\ell_1$-нормы. При этом, как правило, строгие оценки точности получающегося решения отсутствуют, однако его качество обычно достаточно высоко. Однако, насколько можно судить, идеи разреженности не нашли широкого применения в управлении; среди немногочисленных публикаций по построению разреженной обратной связи можно упомянуть [5, 6], в которых разреженная структура оговорена заранее; особое внимание в этих работах уделено оптимизационным алгоритмам.

Прозрачная мотивация использования идей разреженности при синтезе управления предлагается так называемой $C^3$-парадигмой. Она включает в себя триаду Control, Communication, Computation, компоненты которой анализируются с единой точки зрения [7, 8, 9]. В рамках этого подхода уменьшение числа задействуемых при построении управления

состояний системы естественно трактовать как число сенсоров или измеряющих устройств, число используемых управлений связано с числом необходимых управляющих устройств, а уменьшение числа требуемых выходов системы эквивалентно минимизации количества информации, передаваемой по каналу управления.

Важно отметить, что предлагаемый подход отличается простотой: исходные задачи сводятся к решению маломерных задач полуопределенного программирования (Semi-Definite Programming, SDP), а для их численного решения могут быть использованы стандартные вычислительные средства. Начало этой линии исследований было положено в публикации [10].

**Постановка задачи.** Пусть $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$; введем в рассмотрение следующие специальные матричные нормы:

$$\| X \|_{r_1} = \sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le p} |x_{ij}|, \quad \| X \|_{c_1} = \sum_{j=1}^{p} \max_{1\le i\le n} |x_{ij}|.$$

Первая из них иногда называется rx-нормой или $\ell_{1,\infty}$-нормой; ее основное применение – восстановление строчно-разреженных решений матричных уравнений [11, 12]; аналогично, $c_1$-норма восстанавливает столбцово-разреженные решения.

Итак, обсудим специфику обсуждаемого подхода, который позволяет регулярным образом строить разреженные регуляторы. Рассмотрим линейную систему в непрерывном времени

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

с фазовым состоянием $x \in \mathbb{R}^n$ и управлением $u \in \mathbb{R}^m$, так что $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, и пара $(A, B)$ управляема. Задача состоит в синтезе разреженного стабилизирующего управления $u = Kx$, под которым понимается наличие у вектора управления нулевых компонент. Эта задача эквивалентна нахождению строчно-разреженной матрицы стабилизирующего регулятора $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, т. е. имеющей некоторое количество нулевых строк.

Понятно, что за исключением вырожденных случаев управляемую систему всегда можно стабилизировать скалярным управлением. Соответственно, оптимальное решение может быть найдено обнулением всех строк матриц регулятора $K$, кроме одного. Это означает, что надо перебрать лишь $m$ строк матрицы, а не их всевозможные комбинации. С другой стороны, подобный метод «грубой силы» потребует полного комбинаторного перебора, тогда как обсуждаемый подход гораздо более прост и весьма эффективен.

**Основные результаты.** Формулировки нижеследующих утверждений типичны для задач разреженной оптимизации, когда какая-либо количественная оценка затруднена или принципиально невозможна.

**Утверждение 1.** *Решение $\hat{P}$ и $\hat{Y}$ задачи SDP*

$$\min \|Y\|_{r_1} \quad \text{при ограничениях} \quad AP + PA^T + BY + Y^T B^T \prec 0, \quad P \succ 0,$$

*относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ определяет строчно-разреженный стабилизирующий регулятор $K_{sp} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ для системы (1).*

Утверждение 1 позволяет определить управления, стабилизирующие систему; эти управления определяются номерами ненулевых строк матрицы $K_{sp}$. При этом, вообще говоря, нельзя гарантировать, что получившееся решение обязательно окажется разреженным, однако наличие разреженности можно ожидать.

Рассмотрим задачу синтеза линейной обратной связи $u = Kx$ для системы

$$\dot{x} = Ax + u \tag{2}$$

по неполному вектору состояния $x$, т. е. использующей минимальное число компонент вектора состояния. Легко видеть, что столбцово-разреженная структура матрицы регулятора приводит к «исключению» компонент вектора состояния. Таким образом, требуется синтезировать столбцово-разреженный стабилизирующий регулятор $K$, т. е. имеющий некоторое количество нулевых столбцов.

**Утверждение 2.** *Решение $\hat{Q}$ и $\hat{Y}$ задачи SDP*

$$\min \| Y \|_{c_1} \quad \text{при ограничениях} \quad A^T Q + QA + Y + Y^T \prec 0, \quad Q \succ 0,$$

*относительно матричных переменных $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ определяет столбцово-разреженный регулятор $K_{sp} = \hat{Q}^{-1}\hat{Y}$, реализующий стабилизирующую статическую обратную связь $u = K_{sp}x$ по неполному вектору состояния системы (2).*

Иными словами, определены состояния, достаточные для построения обратной связи; они соответствуют номерам ненулевых столбцов матрицы $K_{sp}$.

Заметим, что иногда некоторые компоненты вектора $x$ трудны для измерения. В этом случае вместо $c_1$-нормы можно воспользоваться взвешенной $c_1$-нормой

$$\| X \|_{c_1,w} = \sum_{j=1}^{n} w_j \max_{1\le i\le m} |x_{ij}|, \quad w_j \ge 0,$$

где большие веса соответствуют «дорогим» компонентам вектора состояния.

В качестве обобщения полученного результата рассмотрим задачу построения статической линейной обратной связи по выходу для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + u, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{3}$$

где $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, а пара $(A, C)$ управляема. Как известно, для системы (3) существует стабилизирующая обратная связь по выходу, т. е. найдется регулятор $K$ такой, что матрица $A + KC$ устойчива. Задача состоит в нахождении стабилизирующей статической линейной обратной связи по неполному вектору выхода.

**Утверждение 3.** *Решение $\hat{Q}$ и $\hat{Y}$ задачи SDP*

$$\min \| Y \|_{c_1} \quad \text{при ограничениях} \quad A^T Q + QA + YC + C^T Y^T \prec 0, \quad Q \succ 0,$$

*относительно матричных переменных $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$ определяет столбцово-разреженный регулятор $K_{sp} = \hat{Q}^{-1}\hat{Y}$,реализующий обратную связь $u = K_{sp}y$ по неполному вектору выхода системы (3).*

В рассмотренных задачах структура системы была фиксирована, т. е. матрицы $A$, $B$ и $C$ заданы. Предположим теперь, что нам доступно точное измерение всего вектора состояния $x$ и задача состоит в конструировании линейного маломерного выхода $y = Cx$ и построении для него линейной обратной связи $u = Ky$. Чтобы решить эту задачу, рассмотрим структуру матрицы стабилизирующего регулятора по состоянию $K_{sp} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ для системы (1). Ясно, что, изменив $r_1$-норму в задании целевой функции в утверждении 1 на $c_1$-норму, естественно ожидать появления нулевых столбцов в матрице $\hat{Y}$:

$$u = \hat{Y}\hat{P}^{-1}x = \begin{pmatrix} \times & 0 & \times & 0 & \times \\ \times & 0 & \times & 0 & \times \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \times & 0 & \times & 0 & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix} x.$$

Сформируем матрицу $\tilde{K}$, состоящую из ненулевых столбцов матрицы $\hat{Y}$, и матрицу $\tilde{C}$, состоящую из строк матрицы $\hat{P}^{-1}$ с теми же номерами; при этом имеем $u = Kx = \tilde{K}\tilde{C}x = \tilde{K}y$. В результате, приходим к следующему утверждению.

**Утверждение 4.** *Пусть $\hat{P}$ и $\hat{Y}$ – решение задачи SDP*

$$\min \| Y \|_{c_1} \quad \text{при ограничениях} \quad AP + PA^T + BY + Y^T B^T \prec 0, \quad P \succ 0,$$

*относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$.*

*Обозначим через $\tilde{K}$ матрицу, состоящую из ненулевых столбцов матрицы $\tilde{Y}$, а через $\tilde{C}$ – матрицу, состоящую из строк $\tilde{P}^{-1}$ с теми же номерами. Тогда стабилизирующей обратной связью по маломерному выходу $y = \tilde{C}x$ системы (1) служит $u = \tilde{K}y$.*

Далее, используя полученные результаты, нетрудно организовать нулевые строки в регуляторе $\tilde{K}$ по построенному выходу системы. Это достигается при помощи соответствующей задачи $r_1$-оптимизации и позволяет уменьшить число управлений,

достаточное для стабилизации системы. Наконец, в работе [13] развитая техника обобщается на нахождение разреженного решения задачи линейно-квадратичного управления. В отличие от задач стабилизации, чтобы получить разреженное решение линейно-квадратичной задачи методом «грубой силы», понадобилось бы решить ее для всевозможных строчно-разреженных структур матрицы регулятора и выбрать лучшее по критерию качества; иными словами, комбинаторного перебора избежать бы не удалось. Оказывается, что предложенная процедура приводит к сильно разреженным регуляторам при небольших потерях по критерию качества.

**Практические приложения.** Публикация [10] к настоящему времени имеет более 100 цитирований (по версии Google Scholar) в приложениях к различным областям теории систем и управления, в том числе – к задачам синхронизации сетей [14], задачам «hands-off control» [15], распределенного [16] и децентрализованного [17] управления, к задачам оптимального размещения актуаторов [18] и др.

**Заключение.** К дальнейшим направлениям исследований, прежде всего, следует отнести иные задачи оптимального управления, такие как $H_\infty$-оптимизация; они также могут быть поставлены и решены в рамках «разреженного» подхода. Эта же техника (с небольшими модификациями) применима к задачам фильтрации, подавления ограниченных внешних возмущений и другим классическим задачам теории управления. Кроме того, на основе использования дискретного неравенства Ляпунова аналогично может быть исследован случай дискретного времени. Наконец, полученные утверждения распространимы и на робастные версии задач, в частности, для системы вида $\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu$ с матричной неопределенностью $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$, ограниченной в спектральной норме, и заданными матрицами $F$ и $H$ соответствующих размерностей.

*Работа проводилась при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 18-08-00140.*

ЛИТЕРАТУРА


1. **Barabanov A.E., Granichin O.N.** Optimal Controller for Linear Plant with Bounded Noise. *Autom. Remote Control*. 1984. Vol. 45. No. 5. P. 578–584.
2. **Tibshirani R.** Regression Shrinkage and Selection via the Lasso. *J. Royal Statist. Soc.* 1996. Vol. 58. No. 1. P. 267–288.
3. **Donoho D.L.** Compressed Sensing. *IEEE Transaction. Inform. Theory*. 2006. Vol. 52. P. 1289-1306.
4. **Kim S.-J., Koh K., Boyd S., Gorinevsky D.** $l_1$-Trend Filtering. *SIAM Rev.* 2009. Vol. 51. No. 2. P. 339–360.
5. **Lin F., Fardad M., Jovanovic M.** Sparse Feedback Synthesis via the Alternating Direction Method of Multipliers. *Proc. Amer. Control Conf*. 2012. P. 4765–4770.
6. **Lin F., Fardad M., Jovanovic M.** Augmented Lagrangian Approach to Design of Structured Optimal State Feedback Gains. *IEEE Transaction. Automat. Control*. 2011. Vol. 56. No. 12. P. 2923–2929.
7. **Fradkov A.L.** Cybernetical Physics: From Control of Chaos to Quantum Control. Springer, 2007.
8. **Graham S., Kumar P.R.** The Convergence of Control, Communication, and Computation. *Personal Wireless Communications*. 2003. Vol. 2775 of Lecture Notes in Computer Science. P. 458–475.
9. **Matveev A.S., Savkin A.V.** Estimation and Control over Communication Networks. Birkhauzer, Boston, 2008.
10. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. An LMI Approach to Structured Sparse Feedback Design in Linear Control Systems. *Proc. 12th Europ. Control Conf.* 2013. P. 833–838.
11. **Tropp J.A.** Algorithms for Simultaneous Sparse Approximation. Part II: Convex Relaxation. *Signal Proc.* 2006. Vol. 86. P. 589–602.
12. **Quattoni A., Carreras X., Collins M., Darrell T.** An Efficient Projection for $l_{1,\infty}$ Regularization. *Proc. 26th Int. Conf. Machine Learning*. 2009. P. 857–864.
13. **Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.** Разреженная обратная связь в линейных системах управления. *Автоматика и телемеханика.* 2014. № 12. С. 13–27.
14. **Wua X., Jovanovićb M.R.** Sparsity-Promoting Optimal Control of Systems with Symmetries, Consensus and Synchronization Networks. *Systems & Control Letters*, 2017. Vol. 103. P. 1–8.
15. **Nagahara M., Chatterjee D., Challapalli N., Vidyasagar M.** CLOT Norm Minimization for Continuous Hands-Off Control, *Automatica,* 2020, Vol. 113, P. 108679.
16. **Furieri L., Zheng Y., Papachristodoulou A., Kamgarpour M.** On Separable Quadratic Lyapunov Functions for Convex Design of Distributed Controllers, *Proc. 2019 18th European Control Conference*. 2019. P. 42–49.
17. **Wang Y., Lopez J.A., Sznaier M.** Convex Optimization Approaches to Information Structured Decentralized Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018. Vol. 63. No. 10. P. 3393–3403.

18. **Romao L., Margellos K., Papachristodoulou A.** Distributed Actuator Selection: Achieving Optimality via a Primal-Dual Algorithm, *IEEE Control Systems Letters*. 2018. Vol. 2. No. 4. P. 779–784.

---

**M.V. Khlebnikov, B.T. Polyak** (Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Moscow), **P.S. Shcherbakov** (Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Federal Research Center «Informatics and Control» RAS, Moscow). **Sparse Feedback Construction in Linear Control Systems**

*Abstract.* We consider a classical problem of linear static state feedback design in the linear system subject to a nonstandard constraint that the control vector has as many zero components as possible. A simple approach to approximate solutions of such kind of nonconvex problems is proposed, which is based on convexification. The problem reduces to the minimization of special matrix norms subject to the constraints in the form of linear matrix inequalities. The approach can be generalized to numerous problems of robust and optimal control that admit a «sparse» reformulation. To the best of our knowledge, both the solution and the problem formulation are new.

Б. Ы. АШИРБАЕВ
(Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, г. Бишкек, Кыргызская Республика)

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С МАЛЫМ ШАГОМ

*В данной работе исследуется задача конструирование линейного регулятора для стационарной дискретной системы с малым шагом. Методом интегральных многообразий дискретная задача оптимального управления с малым шагом подразделяется на две подзадачи, решения которых находится независимо друг от друга. Алгоритмы аналитических решений подзадач построены на основе второго метода Ляпунова.*

**Введение.** Одним из современных методов проектирование оптимальных систем управления, который находит широкое практическое применение, является методы построения решений задач синтеза линейного регулятора. Подробный анализ работ посвященным исследованию по данной проблеме приведен в [1], среди которых можно выделить работы [2,3], который рассмотрены задача конструирование регулятора для дискретной управляемой системы с малым шагом.

Данная работа является продолжением исследований указанных работ, В работе методом интегральных многообразий [4] дискретная задача оптимального управления с малым шагом подразделены на две подзадачи, решения которых находится независимо друг от друга.

Алгоритмы приближенных решений подзадач построены на основе второго метода Ляпунова [5].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу оптимального управления: требуется найти оптимальное управление $u^* = u^*(t)$, которое минимизирует критерий качества

$$J = \sum_{k=0}^{\infty}[y'(kT)Ly(kT) + u'(kT)u(kT)] \to min \tag{1}$$

при ограничениях

$$y(t+T) = Ay(t) + Bu(t), \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$
$$f(t) = Cy(t) + Du(t),$$

где $y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, $x, z \in R^n$, $L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0 -$ симметрические постоянные матрицы, $u = u(t) - r$-мерный вектор управления, $t = kT$, $k = 0, 1, \cdots \infty$, $T -$ малый шаг, $0 < T \leq 1$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, $A_i\ (i = \overline{1,4}) - (n \times n)$, $B_1$, $B_2 - (n \times r) -$ постоянные матрицы, $f(t) - r$-мерный вектор выходных сигналов, $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, $C_i\ (i = \overline{1,4}) - (n \times n) -$матрица выхода, $D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$, $D_1$, $D_2 - (n \times r) -$матрица прямого управления, штрих обозначает транспонирование.

Потребуем выполнения следующих условий:

I. Матрицы $A_i\ (i = \overline{1,4})$ являются матрицами простой структуры и они не имеют нулевого собственного значения $\lambda_i\ (i = \overline{1,n})$.

II. Все собственные значения $\lambda_i$ матрицы $A_i$ удовлетворяют неравенствам:

$$|\lambda_i| < q_0 < 1, \quad \lambda_i + \lambda_j \neq 0, \quad i \geq 1,\ j \leq n.$$

III. Система (2) вполне управляема и наблюдаема [5].

Как показано в [6] при выполнении условии I, II систему (2) можно заменить эквивалентной системой:

$$\tilde{x}(t+T) = \tilde{A}_1\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1u(t), \tag{3}$$

$$\tilde{z}(t+T) = \tilde{A}_4\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2u(t),$$

где $\tilde{A}_1 = A_1 + A_2H$, $\tilde{A}_4 = A_4 - HA_2$, $\tilde{B}_1 = B_1 + N\tilde{B}_2$, $\tilde{B}_2 = -HB_1 + B_2$, матрицы $H$ и $N$ удовлетворяют матричным уравнениям Риккати и Ляпунова соответственно:

$$-HA_1 + A_4H - HA_2H + A_3 = 0, \quad (4)$$

$$-\tilde{A}_1N + N\tilde{A}_4 + A_2 = 0. \quad 5)$$

Начальные условия системы (3) принимают вид:

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \quad (6)$$

где $\tilde{x}_0 = x_0 + N\tilde{z}_0$, $\tilde{z}_0 = z_0 - Hx_0$.

**Решение задачи.** Известно, что при выполнении условий II системы (3) имеют интегральные многообразия [4]:

$$z = H\tilde{x}, \quad x = -N\tilde{z}. \quad (7)$$

Представим интегральные многообразия (7) в виде:

$$\theta_v = \{(\tilde{x}', H\tilde{x}) |\, \tilde{x} = x \in R^n, z = H\tilde{x}, z \in R^n\}, \quad (8)$$

$$\theta_\sigma = \{((-N\tilde{z})', \tilde{z}) |\, x = -N\tilde{z} \in R^n, \quad z \in R^n\}.$$

Определим из столбцов матрицы $B_1$ и $B_2$ следующие векторы:

$$b_j^{(1)} = \left(b_{1i}^{(1)}\ b_{2i}^{(1)}\ \cdots\ b_{ni}^{(1)}\right)', \ b_j^{(2)} = \left(b_{1i}^{(2)}\ b_{2i}^{(2)}\ \cdots\ b_{ni}^{(2)}\right)',$$

$j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,r}$, где $b_j^{(1)},\ b_j^{(2)}$ – элементы матриц $B_1$ и $B_2$.

Пусть выполняются условия

$$\left(\tilde{b}_j^{(1)'}, H\tilde{b}_j^{(1)}\right) \in \theta_v, \quad \left(\left(-N\tilde{b}_j^{(2)}\right)', \tilde{b}_j^{(2)}\right) \in \theta_\sigma, \quad (9)$$

где $\tilde{b}_j^{(1)} = b_j^{(1)} + N\tilde{b}_j^{(2)} \quad \tilde{b}_j^{(2)} = b_j^{(2)} - Hb_j^{(1)}$,

$$\tilde{b}_j^{(1)} = \left(\tilde{b}_{1i}^{(1)}\ \tilde{b}_{2i}^{(1)}\ \cdots\ \tilde{b}_{ni}^{(1)}\right)', \ \tilde{b}_j^{(2)} = \left(\tilde{b}_{1i}^{(2)}\ \tilde{b}_{2i}^{(2)}\ \cdots\ \tilde{b}_{ni}^{(2)}\right)'.$$

Тогда исходная задача сводится к независимому синтезу регуляторов в системах (3). При этом управление $u(t)$ можно определить в форме

$$u(t) = \begin{cases} -\tilde{B}_1'K_v\tilde{x}(t), \ \tilde{x} \in R^n, \\ -\tilde{B}_2'K_\sigma\tilde{z}(t), \ \tilde{z} \in R^n, \end{cases} \quad (10)$$

где $K_v,\ K_\sigma - (n \times n)$ матрицы усиления, которые подлежат определению.

Теперь задачу (1), (2) представим в виде следующих две подзадач, решения которых находится независимо друг от друга:

$$J_v = \sum_{k=0}^{\infty}[u'(kT)u(kT) + \tilde{x}'(kT)L_v\tilde{x}(kT)] \to min, \quad (11)$$

$$\tilde{x}(t+T) = \tilde{A}_1\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1u(t), \ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \ z = H\tilde{x}, \ \tilde{x} = x, \quad (12)$$

где $L_v = L_1 + H'L_2H$ и

$$J_\sigma = \sum_{k=0}^{\infty}[u'(kT)u(kT) + \tilde{z}'(kT)L_\sigma\tilde{z}(kT)] \to min, \quad (13)$$

$$\tilde{z}(t+T) = \tilde{A}_4\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2u(t), \ \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \ x = -N\tilde{z}, \ \tilde{z} = z, \quad (14)$$

где $L_\sigma = N'L_1N + (E_n - HN)'L_2(E_n - HN)$.

При построении решений задач (11) - (14) используем метод Ляпунова [7]. Для данных задач функции Ляпунова представим виде:

$$F(\tilde{x}, t) = \tilde{x}'(t)P\tilde{x}(t), \quad G(\tilde{z}, t) = \tilde{z}'(t)Q\tilde{z}(t), \quad (15)$$

где $P$ и $Q$ −положительно определенные матрицы. Тогда первые разности функции (15) соответственно можно записать виде:

$$\Delta F(\tilde{x},t) = F[\tilde{x}(t+T)] - F[\tilde{x}(t)], \tag{16}$$

$$\Delta G(\tilde{z},t) = G[\tilde{z}(t+T)] - G[\tilde{z}(t)]. \tag{17}$$

Сначала рассмотрим задачу (11), (12). Согласно методу Ляпунова первая разность функции Ляпунова должна быть отрицательна определенной. Объединив условие отрицательной определенности первой разности функции Ляпунова (16) с функционалом (11) полагаем

$$\tilde{x}'(t+T)P\tilde{x}(t+T)P - \tilde{x}'(t)P\tilde{x}(t) = -[u'(t)u(t) + \tilde{x}'(t)L_\nu\tilde{x}(t)]. \tag{18}$$

С учетом (10), (12) из (18) имеем

$$\tilde{x}'(t)\left[\tilde{A}_1'P\tilde{A}_1 - \tilde{A}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu - K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{A}_1 + K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu - P\right]\tilde{x}(t) =$$

$$= -\tilde{x}'(t)[K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu + L_\nu]\tilde{x}(t). \tag{19}$$

При любом $\tilde{x}(t)$ из (19) получаем

$$P = \tilde{A}_1'P\tilde{A}_1 - \tilde{A}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu - K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{A}_1 + K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu, \tag{20}$$

$$K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu + L_\nu = 0. \tag{21}$$

Аналогично для задачи (13), (14) из условия

$$\tilde{z}'(t+T)Q\tilde{z}(t+T)Q - \tilde{z}'(t)Q\tilde{z}(t) = -[u'(t)u(t) + \tilde{z}'(t)L_\sigma\tilde{z}(t)] \tag{22}$$

с учетом (10), (14) из (22) получаем

$$\tilde{z}'(t)\left[\tilde{A}_4'Q\tilde{A}_4 - \tilde{A}_4'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma - K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{A}_4 + K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma - Q\right]\tilde{z}(t) =$$

$$= -\tilde{z}'(t)[K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma + L_\sigma]\tilde{z}(t). \tag{23}$$

При любом $\tilde{z}(t)$ из (23) имеем

$$Q = \tilde{A}_4'Q\tilde{A}_4 - \tilde{A}_4'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma - K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{A}_4 + K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma, \tag{24}$$

$$K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma + L_\sigma = 0. \tag{25}$$

***Теорема***. *Пусть выполняются условия II,III, (9), (18) и (22). Тогда в интегральных многообразиях (8) существуют единственная управляющая функция (10) для системы (12) и (14), которые соответственно минимизируют функционалы (11), (13) и их минимальные значения имеют вид:*

$$minJ_\nu = \tilde{x}'(0)P\tilde{x}(0), \tag{26}$$

$$minJ_\sigma = \tilde{z}'(0)Q\tilde{z}(0). \tag{27}$$

*При этом оптимальные управления задачи (11), (12) и (13), (14) определяются соответственно функциями:*

$$u_\nu(t) = -\tilde{B}_1'K_\nu\tilde{x}(t), \tag{28}$$

$$u_\sigma(t) = -\tilde{B}_2'K_\sigma\tilde{z}(t). \tag{29}$$

*Оптимальные управления $u_\nu(t)$ и $u_\sigma(t)$ обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутых систем:*

$$\tilde{x}(t+T) = \left(\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu\right)\tilde{x}(t),\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \tag{30}$$

$$\tilde{z}(t+T) = \left(\tilde{A}_4 - \tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma\right)\tilde{z}(t),\ \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \tag{31}$$

**Заключение.** Решение задачи аналитического конструирование регулятора для стационарной дискретной системы с малым шагом построен на основе метода разделения переменных состояния системы. В результате для управляемой стационарной дискретной системы с малым

шагом сконструирован линейный регулятор, состоящий из двух подрегуляторов, которые под их действием отдельно регулируется движения системы меньшей размерности.

Полученные результаты могут быть применены для синтеза оптимального линейного цифрового регулятора.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. Итоги науки и техники. Москва: ВИНИТИ, 1982. Сер. матем анализ. т. 20. С. 3 – 77.
2. **Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.** Решение некоторых задач аналитического конструирование регулятора методом погракничного слоя. Дифференц. уравнения и их приложения. Днепропетровск, 1975, 3. С. 63 – 70.
3. **Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.** Асимптотика решения некоторых задач оптимального управления с малым шагом.. Дифференц. уравнения, 1979, 15, №9. С. 1681 – 1691.
4. **Стрыгин В. В., Соболев В. А.** Разделение движений методом интегральных многообразий. Москва: Наука, 1988. 256 с.
5. **Куо Б.** Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ. - Москва: Машинострение, 1986. 448 с.
6. **Аширбаев Б.Ы.** Декомпозиция и алгоритм решения задач оптимального управления с малым шагом // Известия КГТУ им. И.Раззакова. 2016. №3 (39). С. 25-31.
7. **Андреев Ю.Н.** Управление конечномерными линейными объектами. М: Наука, 1976. 424 с.


---

**B. Ashirbayev (**Kyrgyz State Technical University. I. Razzakova, Bishkek, Republic of Kyrgyzstan). **Solution of the problem of analytical design of the regulator for a stationary discrete system with a small step**

*Abstract.* In this paper, we investigate the problem of designing a linear controller for a stationary discrete system with a small step. By the method of integral manifolds, the discrete optimal control problem with a small step is subdivided into two subproblems, the solutions of which are found independently of each other. Algorithms for analytical solutions to subproblems are based on the second Lyapunov method.

Д. ДОБРИБОРЩ, С.А. КОЛЮБИН, А.А. БОБЦОВ
(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

# УПРАВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО ДИСКРЕТНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ ВЫХОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НАБЛЮДАТЕЛЯ С ВЫСОКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ УСИЛЕНИЯ

*Объект управления представляет собой линейную параметрически неопределенную одноканальную систему произвольной относительной степени. Рассматривается задача слежения за задающим воздействием при доступных прямому измерению только в дискретные моменты времени значениям выходной переменной. В качестве базового подхода выбран метод «последовательный компенсатор». Доказана экспоненциальная сходимость ошибки слежения в ограниченную область, ширина которой зависит от интервала дискретизации.*

**Введение.** Системы автоматического управления являются неотъемлемой частью многих современных технических систем. Они нашли широкое применение в промышленной робототехнике, управлении транспортными системами, медицине, исследовании космоса, океана и других областях. Почти во всех этих приложениях наблюдается активное использование современных цифровых контроллеров, цифровых датчиков, устройств кодирования и передачи информации. Это приводит к необходимости совершенствования известных подходов к управлению в условиях дискретности и квантования сигналов.

Предлагаемый доклад посвящен разработке следящего алгоритма управления по выходу параметрически неопределенным линейным объектом с учетом дискретных измерений выходной переменной, основанный на принципе сильной обратной связи. Разработанный закон управления обеспечивает сходимость ошибки слежения в ограниченную область, величина которой зависит от интервала дискретизации.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача управления по выходу линейными параметрически неопределенными системами в условиях дискретности измерений. Динамика объекта управления является непрерывной и описывается в форме "вход-выход" уравнением:

$$\boldsymbol{a(p)y(t) = b(p)u(t)}, \tag{1}$$

где: $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; $a(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$ и $b(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots b_1 p + b_0$ – полиномы степени $n$ и $m$ соответственно; $y(t)$ и $u(t)$ – выходной и управляющий сигналы соответственно; Коэффициенты $a_i$, $b_j$, $i = 0, \dots n$, $j = 0, \dots, m$ и порядки $n$ и $m$ полиномов $a(p)$ и $b(p)$ принимаются неизвестными.

Рассмотрим эталонную модель, которая описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\boldsymbol{a_m(p)y_m(t) = b_m r(t)}, \tag{2}$$

где: $a_m(p), b_m(p) -$ линейные операторы с известными коэффициентами, $y_m(t) -$ выход эталонного объекта, $\mathrm{r(t)} -$ кусочно-гладкое входное воздействие.

Ставится задача синтеза закона управления, который обеспечит выполнение следующего целевого условия:

$$\lim_{t\to\infty} |\boldsymbol{y(t) - y_m(t)}| = \boldsymbol{\Delta_y}, \tag{3}$$

где: $\Delta_y -$ точность слежения.

Данную задачу будем решать при следующих предположениях:

1. Полином $b(p)$ является гурвицевым.
2. Известна относительная степень системы $\rho = n - m$.

3. Коэффициенты полиномов $a(p)$ и $b(p)$ $a_i, i = 0, \dots n$ и $b_j, j = 0, \dots m$ принадлежат ограниченному множеству.

Общая структурная схема замкнутой системы управления представлена на рис. 1. Отметим, что измерению доступны только значения выходной переменной в дискретные моменты времени $y(t_k)$ с фиксированным ограниченным интервалом дискретизации $h = (t_k - t_{k-1}) > 0$, где
$k = 1, 2, \dots$.

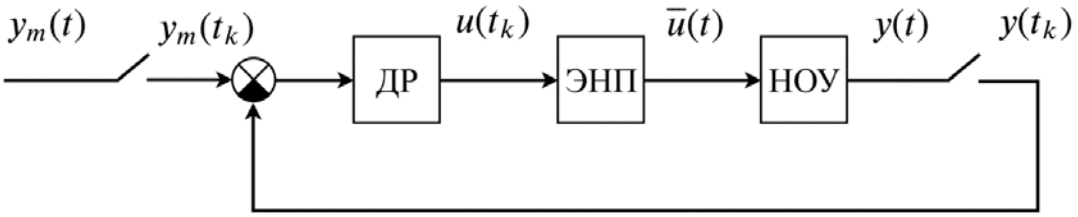



Рис.1. Структурная схема замкнутой системы управления

**Основной результат.** В основе разрабатываемых алгоритмов лежит метод управления по выходу параметрически неопределенными системами произвольной относительной степени «последовательный компенсатор», представленный, например, в работах [1,2], и основывающийся в свою очередь на принципе пассификации систем, изложенном, например, в работе [3].

Предлагается использовать следующий дискретный регулятор по выходу, полученный на основе дискретизации методом Эйлера [4]

$$u(t_k) = -(\alpha + \beta)\big[\alpha_0\xi_1(t_k) + \alpha_1\sigma\xi_2(t_k) + \cdots + \alpha_{\rho-2}\sigma^{\rho-2}\xi_{\rho-1}(t_k) + \sigma^{\rho-1}\Big(-k_1\xi_1(t_k) - k_2\xi_2(t_k) - \cdots - k_{\rho-1}\xi_{\rho-1}(t_k) + k_1 e(t_k)\Big)\big], \quad (4)$$

$$\begin{cases} \xi_1(t_{k+1}) = \xi_1(t_k) + h\sigma\xi_2(t_k) \\ \xi_2(t_{k+1}) = \xi_2(t_k) + h\sigma\xi_3(t_k), \\ \cdots \\ \xi_{\rho-1}(t_{k+1}) = \sigma(-k_1\xi_1(t_k) - k_2\xi_2(t_k) - \cdots - k_{\rho-1}\xi_{\rho-1}(t_k) + k_1 e(t_k) \end{cases} \quad (5)$$

где $\hat{e}(t)$ -- оценка ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$, полученная путем применения наблюдателя с высоким коэффициентом усиления (5), достаточно большой параметр $\alpha > \alpha_0 > 0$ и параметры полинома $\alpha(p) = p^{\rho-1} + \alpha_{\rho-2}p^{\rho-2} + \cdots + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0$ степени $\rho - 1$ выбираются из соображений гурвицевости характеристического полинома замкнутой системы, коэффициент $\beta > 0$, коэффициент усиления наблюдателя (5) выбирается как $\sigma > \alpha + \beta$, а коэффициенты $k_i$ рассчитываются из соображений асимптотической устойчивости системы (5) при $e(t) = 0$, обеспечивают для систем вида (1) при выполнении допущений (1) – (4) и измеримости выходной переменной $y(t)$, как непрерывного сигнала, $L_\infty$ – устойчивость модели ошибки слежения и ее экспоненциальную устойчивость.

Согласно Лемме, приведенной в работе [5] можно установить соотношение между непрерывной версией регулятора и дискретной и, соответственно, выполнить доказательство, применив аппарат метода функций Ляпунова, по аналогии с результатами приведенными в работах [6,7].

Рассмотрим функцию Ляпунова:

$$\boldsymbol{V(t) = x_e^T(t)P_1x_e(t) + \eta^T(t)P_2\eta(t)}, \quad (5)$$

где: $P_1, P_2$ - решения уравнений Ляпунова $A_d^T P_1 + P_1 A_d = -Q_1$, $\Gamma^T P_2 + P_2\Gamma = -Q_2, Q_1$ и $Q_2$- положительно определенные симметричные матрицы.

Опустив некоторые промежуточные вычисления, в виду ограниченного объема доклада, получим, производную функции (6):

$$\boldsymbol{\dot{V} \le -x_e^T R_1 x_e - \eta^T R_2 \eta + \theta}, \quad (6)$$

где: где $\alpha, \beta, \sigma$, выбраны таким образом, чтобы $R_1, R_2$ оказались положительно определенными матрицами, а параметр $\theta$ зависит от периода дискретизации $h$, $\theta = \frac{2}{\beta} y_m^2 + \frac{h^2}{\beta} \psi^T \psi$, где $\psi(\xi(t), t) = (\alpha + \beta) L^T \Psi(\xi(t), t)$, при $L = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$.

После ряда преобразований, получим, что ошибка слежения выхода объекта управления за выходом номинальной модели экспоненциально сходится в ограниченную область

$$|\boldsymbol{e}| \leq \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda_{min}(P_1)}} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\zeta}}}, \tag{7}$$

где: $\zeta = \frac{\lambda_{min}(R_1)}{\lambda_{max}(P_1)}$.

**Моделирование.** Проведем моделирование замкнутой системы с предложенным регулятором.

В качестве объекта управления рассмотрим двигатель постоянного тока, динамика которого описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\mathbf{1.5 \cdot 10^{-3} \dddot{y} + 0.0207 \ddot{y} + \dot{y} - y = 20u}. \tag{8}$$

Тогда дискретный закон управления (4-5) примет вид

$$\mathbf{u(t_k) = -\kappa\left(\alpha_0 \xi_1(t_k) + \alpha_1 \sigma \xi_2(t_k)\right)}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi_1(t_{k+1}) = \xi_1(t_k) + h\sigma \xi_2(t_k)}, \\ \boldsymbol{\xi_2(t_{k+1}) = \sigma\left(-k_1 \xi_1(t_k) - k_2 \xi_2(t_k) + k_1 e(t_k)\right)}, \end{cases} \tag{10}$$

где параметры регулятора $\alpha = 2{,}5, \beta = 2, \sigma = 35, \kappa = 1{,}25,\ \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 3, k_1 = 1,\ k_2 = 2$

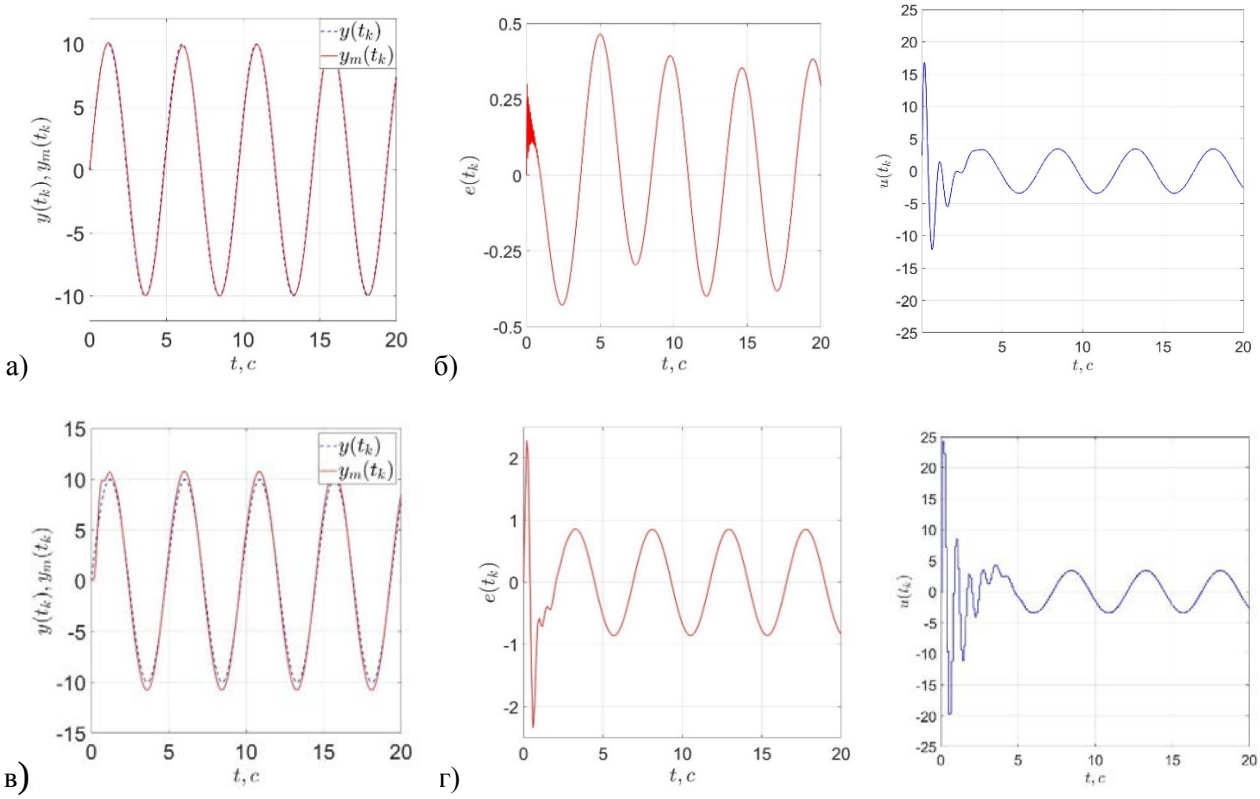



Рис.2. Результаты численного моделирования: а) ,б) при $h = 0.01\ c$; б,в) при $h = 0.1\ c$

**Заключение.** В работе представлен робастный алгоритм управления по выходу линейными параметрически неопределенными системами произвольной относительной степени в условиях дискретности измерений выходной переменной. В качестве базового подхода выбран метод «последовательный компенсатор». Доказана экспоненциальная сходимость ошибки слежения в ограниченную область, ширина которой зависит от интервала дискретизации. Представлены результаты численного моделирования на примере модели двигателя постоянного тока.

*Работа проводилась при поддержке Министерства Науки и Высшего образования Российской Федерации, ГОСЗАДАНИЕ №2019-0898*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бобцов А.А.** Адаптивное и робастное управления неопределенными системами по выходу. СПб.: Наука, 2011. С. 174.
2. **Бобцов, А.А., Николаев, Н.А.** Синтез управления нелинейными системами с функциональными и параметрическими неопределенностями на основе теоремы Фрадкова. Автоматика и Телемеханика. 2005. № 1. С. 108–118.
3. **Фрадков А.Л.** Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта. Автоматика и Телемеханика. 1974. №12. С. 96–103.
4. **AströmK.J., Wittenmark B.** Computer-Controlled Systems: theory and design. *Prentice Hall.* 1997. P. 557.
5. **Furtat I.B., Fradkov A.L., Liberzon D.** Compensation of disturbances for MIMO systems with quantized output. Automatica. 2015. Vol.60.p.239–244.
6. **Бобцов А.А.** Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонным сигналом. Автоматика и Телемеханика. 2003. №6. С. 104–113.
7. **Dobriborsci D., Margun A., Kolyubin S.** Theoretical and experimental research of the discrete output robust controller for uncertain plant//European Control Conference, ECC 2018, 2018, pp. 533–538.

---

**D.Dobriborsch, S.A. Kolyubin, A.A. Bobtsov**,(ITMO University, St. Petersburg),**Control of parametrically uncertain linear systems by discrete measurement of the output variable using a high gain observer**

*Abstract.* The plant is a linear parametrically uncertain SISO system of an arbitrary relative degree. Consideration is given to the problem of tracking the reference signal under sampled output. The “consecutive compensator” method was chosen as the basic approach. The exponential convergence of the tracking error to a bounded area is proved, the width of which depends on the sampling time.

С. И. ГУЛЮКИНА, В. А. УТКИН
(ИПУ РАН им. В.А. Трапезникова, Москва)

# ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И УПРАВЛЕНИЯ. МЕТОД РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

*В работе предлагается метод синтеза инвариантных относительно выходной переменной нелинейных систем в условиях параметрических и внешних возмущений с учетом ограничений на фазовые переменные и управление. Для решения поставленной задачи применяется идеология блочного метода с использованием в качестве локальных обратных связей sat-функций и наблюдатель возмущений на скользящих режимах.*

**Введение.** В настоящее время проблемы синтеза систем управления с учетом ограничений на компоненты вектора состояния и управлений изучены недостаточно. В основном учет сигнальных ограничений ведется в частных случаях с помощью косвенных методов [1-4]. Предлагаемый доклад посвящен общему подходу к решению подобных задач на основе введения в модель объекта управления заданных ограничений за счет нелинейной замены переменных в виде линейных функций с насыщением (sat-функций) [5,6].

**Постановка задачи.** Рассматривается задача стабилизации выходной переменной система вида

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \eta_i(x^i, t),\ i = \overline{1, n-1},\ \dot{x}_n = u + \eta_n(x^n, t), \tag{1}$$

где вектор состояния $x^T = (x_1, ..., x_n)$ доступен для измерения, $x_1$ – выходная (управляемая) переменная, $(x^i) = (x_1, ..., x_i),\ i = \overline{1, n}$.

Управление и компоненты вектора состояния (начиная со второй) полагаются ограниченными

$$|x_i| < X_i, i = \overline{2, n-1},\ |u| < U,\ i = \overline{1, n},\ X_i, N_i, U = \text{const}. \tag{2}$$

Возмущения $\eta_i(.)$ включают в себя как неизвестные нелинейности модели, так и собственно внешние возмущения, недоступны для измерения и ограничены вместе со своими производными соответствующего порядка

$$\left|\eta_i^{(n-j+1)}\right| < N_i^{n-j+1} = \text{const},\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{i, n+1}. \tag{3}$$

Ставится задача синтеза обратной связи, обеспечивающей инвариантность выходной переменной по отношению к внешним возмущениям с заданной точностью

$$\left|x_1(t)\right| \le \Delta_1 = \text{const}, \forall t > T_1 > 0 \tag{4}$$

с выполнением ограничений (2).

**Синтез обратной связи. Комбинированное управление.** Представим решение поставленной задачи в рамках блочного подхода с использованием комбинированных обратных связей.

Введем невырожденную замену переменных

$$s_1 = x_1, s_i = x_i + M_{i-1}\text{sat}(\bar{s}_{i-1}),\ i = \overline{2, n} \tag{5}$$

и сформируем управление в виде

$$u = -M_n \text{sat}(\bar{s}_n), \tag{6}$$

где переменные $\bar{s}_i,\ i = \overline{1, n}$ выбираются позже.

По определению: $M\text{sat}(s) = \min\left(M, |s|\right)\text{sign}(s),\ M > 0$.

Идея состоит в следующем. Если обеспечить выполнение соотношений $|s_i| \le \Delta_i = \text{const} > 0,\ i = \overline{2,n}$ в преобразовании (5), то выбор амплитуд в виде $M_{i-1} = X_i - \Delta_i$ вместе с требованием $u \le M_n \le U$ приводит к выполнению заданных ограничений $|x_i| \le \Delta_i + M_{i-1} = X_i,\ i = \overline{2,n},\ |u| \le M_n \le U$.

Запишем замкнутую систему (1),(6) в переменных (5)

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = -M_1\text{sat}(\bar{s}_1) + s_2 + \eta_1, \dot{s}_i = -M_i\text{sat}(\bar{s}_i) + s_3 + \eta_2 + \dfrac{d}{dt}M_1\text{sat}(\bar{s}_1), \dots, \\ \dot{s}_n = -M_n\text{sat}(\bar{s}_n) + \eta_n + \dfrac{d}{dt}M_{n\text{-}1}\text{sat}(\bar{s}_{n-1}), \end{cases} \tag{7}$$

где $\dfrac{d}{dt}M_i\text{sat}(\bar{s}_i) = \begin{cases} 0, |\bar{s}_i| \ge M_i \\ \dot{\bar{s}}_i, |\bar{s}_i| < M_i, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}.$

В линейных зонах по всем переменным (7) примет вид виде

$$\dot{s}_1 = -\bar{s}_1 + s_2 + \eta_1,\ \dot{s}_i = -\bar{s}_i + s_{i+1} + \eta_i + \dot{\bar{s}}_{i-1}, i = \overline{2,n-1},\ \dot{s}_n = -\bar{s}_n + \eta_n + \dot{\bar{s}}_{n-1}, \tag{8}$$

где $|\bar{s}_i| \le M_i$.

Выберем переменные $\bar{s}_i$ в виде

$$\bar{s}_i = k_i s_i + \bar{\eta}_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

где

$$\bar{\eta}_1 = \eta_1, \bar{\eta}_2 = \eta_2 + \dot{\bar{\eta}}_1,\ \bar{\eta}_3 = \eta_3 + \dot{\bar{\eta}}_2, \dots, \bar{\eta}_n = \eta_n + \dot{\bar{\eta}}_{n-1}. \tag{10}$$

Отметим, что по известным ограничениям (3) можно пересчитать ограничения на переменные (10)

$$|\bar{\eta}_i| < \bar{N}_i, |\dot{\bar{\eta}}_{i-1}| \le \bar{N}_{i-1}^{(1)},\ i = \overline{2,n},\ \bar{N}_i, \bar{N}_{i-1}^{(1)} = \text{const} > 0 \tag{11}$$

и запишем систему (7) при функционировании ее в линейных зонах по всем переменным, начиная сверху вниз:

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + s_2, \dots, s_i = -k_i s_i + s_{i+1} + k_{i-1}\dot{s}_{i-1}, \dots, \dot{s}_n = -k_n s_n + k_{n-1}\dot{s}_{n-1}, \tag{12}$$

Система (12) не зависит от внешних возмущений и нелинейностей и выбором коэффициентов $k_i > 0$ решается задача ее стабилизации.

На втором этапе после выбора коэффициентов, для обеспечения попадания в линейные зоны по всем переменным требуется определить амплитуды sat-функций $M_i > 0$. Для этого запишем систему (7) относительно переменных (9)

$$\begin{cases} \dot{\bar{s}}_1 = k_1[-M_1\text{sat}(\bar{s}_1) + s_2 + \eta_1] + \dot{\bar{\eta}}_1, \dots, \\ \dot{\bar{s}}_i = k_i[-M_i\text{sat}(\bar{s}_i) + s_{i+1} + \eta_i + \dfrac{d}{dt}M_{i-1}\text{sat}(\bar{s}_{i\text{-}1})] + \dot{\bar{\eta}}_i, \dots, \\ \dot{\bar{s}}_n = k_n[-M_n\text{sat}(\bar{s}_n) + \eta_n + \dfrac{d}{dt}M_{n-1}\text{sat}(\bar{s}_{n-1})] + \dot{\bar{\eta}}_n. \end{cases} \tag{13}$$

С учетом (5) имеем $s_i = x_i + M_{i-1}\text{sat}(\bar{s}_{i-1}) \Rightarrow |s_i| \le 2X_i$, выбор амплитуд осуществляется сверху вниз согласно следующим формулам:

$$1.\ M_1 > 2X_2 + N_1 + \frac{1}{k_1}\overline{N}_1^{(1)},\ \left|\dot{\bar{s}}_1\right| \le k_1(M_1 + 2X_2 + N_1) + \overline{N}_1^1;\ldots;$$

$$i.\ M_i > 2X_{i+1} + N_i + k_{i-1}\left|\dot{\bar{s}}_{i-1}\right| + \overline{N}_{i-1}^{(1)} + \frac{1}{k_i}\overline{N}_i^{(1)},\ \left|\dot{\bar{s}}_i\right| \le k_i(M_i + 2X_{i+1} + N_i + \left|\dot{\bar{s}}_{i-1}\right|) + \overline{N}_i^{(1)},$$

$$i = \overline{2, n-2};\ldots;$$

$$n\text{-}1.\ M_{n-1} > 2U + N_{n-1} + k_{n-2}\left|\dot{\bar{s}}_{n-2}\right| + \overline{N}_{n-2}^{(1)} + \frac{1}{k_{n-1}}\overline{N}_{n-1}^{(1)},$$

$$\left|\dot{\bar{s}}_{n-1}\right| \le k_{n-1}(M_{i-1} + 2U + N_{n-1} + \left|\dot{\bar{s}}_{n-2}\right|) + \overline{N}_{n-1}^{(1)};$$

$$n.\ M_n > N_n + k_{n-1}\left|\dot{\bar{s}}_{n-1}\right| + \overline{N}_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{k_n}\overline{N}_{n-1}^{(1)},\ \left|\dot{\bar{s}}_n\right| \le k_n(M_n + N_i + \left|\dot{\bar{s}}_{n-1}\right|) + \overline{N}_n^{(1)}.$$

Здесь не обсуждается оптимизационная задача выбора коэффициентов усиления в sat-функциях с целью минимизировать их амплитуды. Приведены лишь достаточные условия решения задачи с целью доказать ее разрешимость.

В следующем разделе решается задача оценивания переменных (10), используемых в законе управления.

**Наблюдатель возмущений.** Синтезируем на основе системы (1) наблюдатель возмущений (10). Легко видеть, что для получения оценок переменных (10) достаточно привести систему (1) к каноническому виду

$$\dot{\bar{x}}_i = \bar{x}_{i+1},\ i = \overline{1, n-1},\ \ \dot{\bar{x}}_n = u + \overline{\eta}_n, \tag{14}$$

где $\bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = x_2 + \overline{\eta}_1,\ \bar{x}_3 = x_3 + \overline{\eta}_2, ..., \bar{x}_{n-1} = x_{n-1} + \overline{\eta}_{n-1}$.

В системе (14) для измерения доступна переменная $\bar{x}_1 = x_1$. Следовательно, решив задачу получения оценок переменных $\bar{x}_i$ можно найти оценки переменных

$$\overline{\eta}_i = \bar{x}_{i+1} - x_{i+1},\ \ i = \overline{1, n-1}, \tag{15}$$

Построим наблюдатель применительно к системе (14) вида

$$\dot{z}_1 = z_2 + v_1, ..., \dot{z}_{n-1} = z_n + v_{n-1},\ \dot{z}_n = u + v_n, \tag{16}$$

где корректирующие воздействия $v_i, i = \overline{1, n}$ выбираются далее. Запишем уравнения относительно невязок $e_i = \bar{x}_i - z_i, i = \overline{1, n}$ согласно (14) и (16):

$$\dot{e}_1 = e_2 - v_1, ..., \dot{e}_{n-1} = e_n - v_{n-1},\ \dot{e}_n = \overline{\eta}_n - v_n. \tag{17}$$

Выберем последовательно корректирующие воздействия $v_i, i = \overline{1, n-1}$ следующим образом: $v_i = L_i \text{sign}(e_i), L_i = \text{const} > 0$. После подстановки в (17) $i$-е уравнение системы (14) примет вид $\dot{e}_i = e_{i+1} - L_i \text{sign}(e_i)$. Выбор амплитуды $L_i > 0$, обеспечивающей скользящий режим по прямой $e_i = 0$, определяется на основе второго метода Ляпунова: $V = 0.5e_i^2$.

Производная функции Ляпунова имеет вид: $\dot{V} = e_i\dot{e}_i \le \left|e_i\right|(\left|e_{i+1}\right| - L_i) < 0$, откуда следует неравенство, определяющее выбор амплитуды $L_i > \left|e_{i+1}\right|$. При выполнении условия $L_i > \left|e_{i+1}\right|$ возникает скользящий режим по прямой $e_i = 0$, таким образом, $\bar{x}_i \to z_i$. Выполняется $\dot{e}_i = 0$, откуда получаем среднее значение разрывного сигнала $v_{(i)eq} = e_{i+1}$.

На последнем шаге выбирается корректирующее воздействие $v_n = L_n \text{sign}(v_{(n-1)eq}) = L_n \text{sign}(e_n)$. Потребуем выполнение соотношения на выбор амплитуды, которое следует из второго метода Ляпунова: $L_n > \left|\overline{\eta}_n\right|$. При выполнении этого соотношения

обеспечивается скользящий режим по прямой $e_n = 0 \Rightarrow v_{(n)eq} = \overline{\eta}_n$.

Отметим, что соответствующие эквивалентные значения корректирующих воздействий наблюдателя можно получить на выходе низкочастотного фильтра первого порядка $\mu_i \dot{\tau}_i = \tau_i + v_i, \mu_i > 0, i = \overline{1,4}$, $v_{(\mathrm{i})\mathrm{eq}} = \tau_i$.

Таким образом, решена задача получения оценок компонент вектора состояния системы (14) $z_{\mathrm{i}} \approx \overline{x}_i, i = \overline{1,n}$ и оценка возмущения $\overline{\eta}_n$ из (10). Согласно формуле (15) получены оценки переменных $\overline{\eta}_i$, $i = \overline{1,n-1}$, таким образом, поставленная задача решена.

**Заключение**. В работе предложен метод решения задачи управления по выходу для нелинейной системы с одним входом и одним выходом (SISO-system) в робастной постановке и при воздействии внешних возмущений при заданных ограничениях на вектор состояния и управление. В отличие от асимптотического подхода [7], где используются глубокие обратные связи, в данной работе используются комбинированные обратные связи за счет получения оценок возмущений (с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах), задача решается при сколь угодно малых коэффициентах усиления.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №18-01-00846 А и 20-01-00363 А)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhu Z, Xia YQ and Fu MY. Adaptive sliding mode control for attitude stabilization with actuator saturation. *IEEE Trans Ind Electr*. 2011. 58(10). P. 4898–4907.
2. Yang J, Li SH and Yu XH. Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer. *IEEE Trans Ind Electr*. 2013. 60(1). P. 160–169.
3. Ding SH, Mei KQ and Li SH. A new second-order sliding mode and its application to nonlinear constrained systems. *IEEE Trans Automat Control. Epub ahead of print.* August 2018. DOI: 10.1109/TAC.2018.2867163.
4. Yang J, Ding ZT, Li SH, et al. Continuous finite-time output regulation of nonlinear systems with unmatched time-varying disturbances, *IEEE Contr Syst Lett*. 2018. 2(1). P. 97–102.
5. Khalil H.K., Praly L. High-gain observers in nonlinear feedback control, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*. 2014. Vol. 24. № 6. P. 993–1015.
6. **Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.** Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // Автоматика и телемеханика, 2017, № 12. С. 26–53.
7. S. Gulyukina and V. Utkin, Tracking problem with consideration of physical restrictions on phase variables and controls, *2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB)*. Moscow. Russia. 2020.P. 1–4. DOI: 10.1109/STAB49150.2020.9140655.

---

**S.I. Gulyukina, V.A. Utkin** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (ICS RAS), Moscow).**Tracking problem with consideration of restrictions on phase variables and controls. State space extension method.**

*Abstract.* In this paper, we propose a method for synthesizing nonlinear systems that are invariant with respect to the output variable under parametric and external perturbations, taking into account restrictions on phase variables and control. To solve this problem, the block method ideology, using sat functions and a disturbance observer in sliding modes as local feedbacks, is applied.

Р.О. ОМОРОВ
(Институт физики Национальной академии наук Кыргызской Республики, г. Бишкек)

# ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУБОСТЬ И БИФУРКАЦИИ СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*В работе рассматриваются результаты исследований грубости и бифуркаций синергетических систем и хаоса различной физической природы, полученные на основе использования оригинального метода топологической грубости динамических систем. Приложения метода апробированы для исследований многих синергетических систем, таких как аттракторы Лоренца, систем Белоусова-Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», бифуркации Хопфа и др.*

**Введение.** Проблемам исследования грубости динамических систем и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [1–3]. В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксото или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову–Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε – близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [1, 2, 4]. В работе [5] на базе понятия грубости по Андронову–Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость (робастность) и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем, а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [6–13]. В данной работе рассматриваются приложения метода к некоторым синергетическим системам.

**Синергетика.** В современной науке возрастает интерес к ее объединяющим направлениям, рассматривающим явления природы и общества, живой и неживой природы с единых точек зрения в зависимости от проявляемых ими свойств и характеристик. К одному из таких направлений науки относится синергетика, которая занимается самоорганизующимися процессами, явлениями и системами [14–16].

При исследовании и управлении синергетическими системами важнейшее значение имеют вопросы грубости и бифуркаций. Одним из методов в изучении свойств грубости и бифуркаций синергетических систем, а также управления этими свойствами служит «метод топологической грубости», основы которого изложены в работах [5–13].

Далее в работе возможности метода проиллюстрированы на двух примерах широко известных синергетических систем - Белоусова-Жаботинского и Чуа.

**Приложения метода к синергетическим системам.**

*Система Белоусова-Жаботинского [17].* Эта система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1 a y + k_2 a x - k_3 x y - 2k_4 x^2, \\ \dot{y} &= -k_1 a y - k_3 x y + 1/2\, f k_5 b z, \\ \dot{z} &= 2k_2 a x - k_5 b z, \end{aligned} \tag{1}$$

где $k_1 = 1.28;\ k_2 = 8.0;\ k_3 = 8.0 \cdot 10^5;\ k_4 = 2.0 \cdot 10^3;\ k_5 = 1.0;\ a = 0.06;\ b = 0.020;\ 0.5 < f < 2.4$ .

Система Белоусова-Жаботинского – это химическая реакция, где возникают колебания концентрации веществ и представляет собой каталитическое окисление малоновой кислоты $CH_2(COOH)_2$. Реакция происходит в водном растворе при простом смещении следующих реагентов:

$$[H^+] = 2.0 \text{ моль};\ [CH_2(COOH)_2] = 0.28 \text{ моль};$$

$$[BrO_3^-] = 6.3 \cdot 10^{-2} \text{ моль};\ [Ce^{4+}] = 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ моль}.$$

Реакция наблюдается по изменению окраски раствора, вызванного изменениями концентрации $Ce^{4+}$ от бесцветной до желтой.

В системе (1) в зависимости от $f$ две или три особых точек (ОТ), одна из которых начало координат. Особые точки $OT_i$ $(x_0, y_0, z_0)$ определяются соотношениями:

$$x_0 = [\, 6\cdot10^{-5}\,(1-f\,) - 0.48\cdot10^{-7}\,] \pm \{\, [\, 6\cdot10^{-5}(1+f\,) - 0.48\cdot10^{-7}\,]^2 - 0.1152\cdot10^{-10}(1+f\,)\,\}^{½},$$

$$y_0=0.48\cdot f\cdot x_0/(0.078+8\cdot10^5 x_0),$$

$$z_0= 0.48\, x_0\,.$$

Результаты исследований системы (1) с использованием показателя грубости *C{M}* показаны на рис.1.

В реакции Белоусова-Жаботинского обнаружены разнообразные колебания, включая хаотические [17]. Последние происходят при $0.9208 < f < 1.0808$, бифуркации при $f = 0.9208$, $f = 1.0808$. При этом, максимальная грубость колебаний наблюдается при $f \approx 2.0$ .

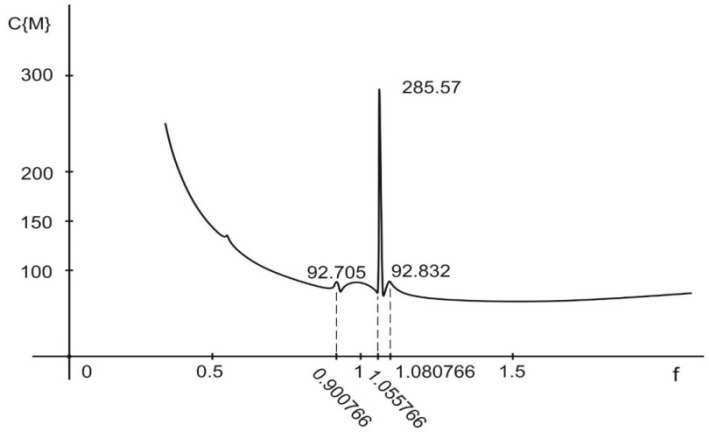



Рис.1. Зависимость показателя грубости *C{M}* от параметра *f* системы Белоусова–Жаботинского

*Система (цепь) Чуа [18].* Как известно, система Чуа представляет собой электронную цепь с одним нелинейным элементом, которая способна генерировать разнообразные, в частности, хаотические колебания.

Система Чуа описывается уравнениями:

$$\dot{x} = p\,(y - f(x)\,)\,, \quad \dot{y} = x - y + z\,, \quad \dot{z} = -\,q\,y\,, \tag{2}$$

где $f\,(x) = M_1\,x + 0.5\,(M_1 - M_0)(\,|\,x + 1\,|\,-\,|\,x - 1\,|\,)$ .

При $p = 9$, $q = 14.3$, $M_1 = -\,6 / 7$, $M_0 = 5 / 7$, в системе (2) наблюдаются хаотические колебания.

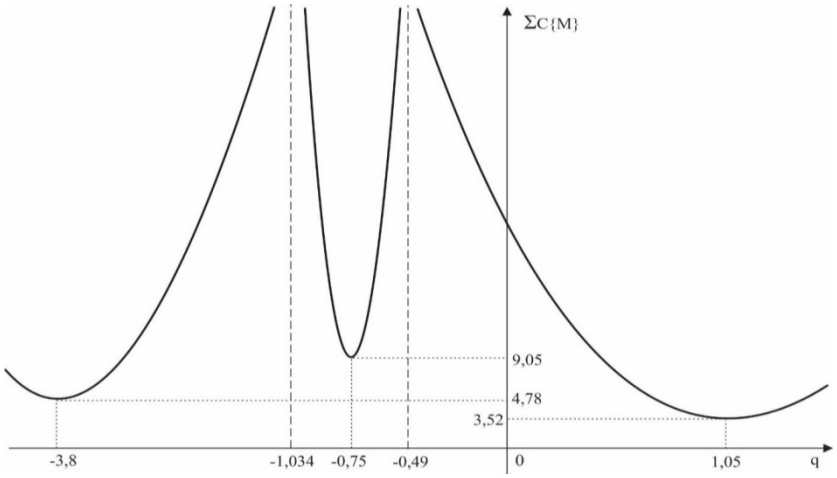



Рис.2. Зависимость *C{M}* от параметра *q* в системе Чуа

В данном случае три особые точки (ОТ): $OT_1$ (0,0,0); $OT_{2,3}(\pm 11 / 6,\, 0,\, 11 / 6\,)$ .

Исследованиями установлены [18] , что хаотические движения обнаруживаются и при значениях $q$: $-1.034 < q < -0.49$ , а при $q = -3.8$ и $q = 1.05$ наблюдается максимальная грубость движений в системе (2) ( min на рис.2).

**Заключение.** Метод топологической грубости, разработанный автором на базе понятия грубости по Андронову-Понтрягину является методом количественного исследования грубости и бифуркаций динамических систем самого широкого класса и различной физической природы. Возможности метода для исследований грубости и бифуркаций систем показаны на примерах синергетических систем Белоусова-Жаботинского и Чуа, но в работах автора [12, 16, 19] и др. апробированы для исследований синергетических систем Лоренца, Рёсслера, «хищник-жертва», динамо Рикитаке, отображения Хенона, бифуркаций Хопфа, моделях экономических систем типа Шумпетера, Калдора и др. При этом результаты метода, полученные на вышеперечисленных системах согласуются с известными результатами других исследователей этих систем. Отметим, что метод может быть использован для исследований как других синергетических систем различной природы, так и для исследований динамических систем более широкого класса, в частности, при исследований колебательных систем, и бифуркаций Хопфа, а также аттракторов дискретных отображений [12, 14–16].

ЛИТЕРАТУРА


1. **Андронов А.А., Понтрягин Л.С.** Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т.14. №5. С. 247–250.
2. **Аносов Д.В.** Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды .МИАН СССР.Т.169). М.: Наука, 1985. С. 59–93.
3. **Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.** Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 3–31.
4. **Peixoto M.M.** On structural stability // Ann. Math. 1959. Vol. 69. No. 1. P. 199–222.
5. **Оморов Р.О.** Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36–45;
6. **Omorov R.O.** Maximal coarseness of dinamical systems // Automation and Remote Control. 1992. V. 52. No 8 pt 1. P. 1061–1068.
7. **Оморов Р.О.** Оценка грубости управляемых динамических систем. // Изв. вузов. Электромеханика. 1990. №7. С. 81–87.
8. **Оморов Р.О., Ушаков А.В**. Оценки робастности в задачах управления и наблюдения // Изв. вузов. Электромеханика. 1991. №1. С. 78–85.
9. **Оморов Р. О.** Мера грубости динамических систем и критерии возникновения хаотических колебаний и бифуркаций в синергетических системах // Синтез алгоритмов стабилизации систем: Межведомств. сб.: Вып.8. Таганрогю 1992. С. 128–134.
10. **Оморов Р. О.** Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Дисс. докт. техн. наук. Санкт-Петербург: СПб ИТМО, 1992. 188 с.
11. **Оморов Р.О.** Метод топологической грубости: Теория и приложения. I. Теория // Изв. НАН КР, 2009. № 3. С. 144–148.
12. **Оморов Р.О**. Теория топологической грубости систем. Бишкек: Илим, 2019. 287 с.
13. **Оморов Р.О.** Метод топологической грубости динамических систем: Приложения к синергетическим системам // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 2. С. 257–262.
14. **Хакен Г.** Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 423 с.
15. Haken H. Synergetics: Introduction and advanced Topics. London: Springer. 2004. 356 p.
16. Omorov Roman. Theory of Topological Roughness of Systems. Beau Bassin: LAP LAMBERT, 2019. 213 p.
17. **Пригожин И., Кондепуди Д.** Современная термодинамика: От тепловых двигателей до диссипативных структур / Пер. с англ. М.: Мир, 2002. 461 с.
18. **Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.** Управление хаосом: Методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003, № 5. С. 3–45.
19. **Оморов Р.О.** Топологическая грубость синергетических систем // Проблемы управления и информатики. 2012. № 2. С. 5-12;
20. **Omorov R.O.** Topological Roughness of Synergetic Systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2012. V. 44. P. 61–70.


---

**R.O. Omorov** (Institute of Physics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek). **Topological Roughness and Bifurcations of Synergetic Systems**

*Abstract.* The paper examines the results of studies of roughness and bifurcations of synergetic systems and chaos of various physical nature, obtained using the original method of topological roughness of dynamic systems. Applications of the method have been tested for research on many synergetic systems, such as Lorenz attractors, Belousov-Zhabotinsky, Chua, predator-prey, Hopf bifurcations, etc.

А. А. ГАЛЯЕВ, П. В. ЛЫСЕНКО, В. П. ЯХНО
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, Москва)

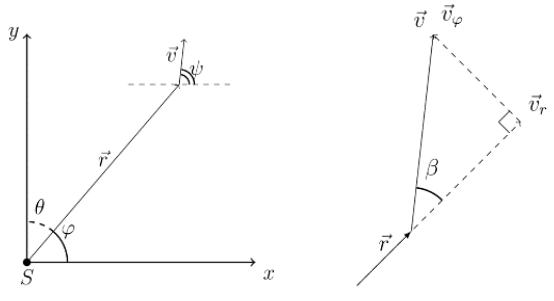
# ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА С НЕРАВНОМЕРНОЙ ИНДИКАТРИСОЙ ИЗЛУЧЕНИЯ

*В работе рассмотрена и решена задача поиска оптимальных траекторий подвижного объекта с неоднородной индикатрисой излучения при уклонении от обнаружения как задача вариационного исчисления. Предложены необходимые и достаточные условия оптимальности траектории движения объекта, обладающего неоднородной индикатрисой излучения сигнала, по которому ведет обнаружение поисковая система, состоящая из единственного сенсора. Получены аналитические выражения для оптимальных траекторий, закона изменения скорости и значения интегрального риска обнаружения на оптимальных траекториях.*

**Введение.** Одна из первых задач построения оптимального маршрута движения беспилотного аппарата в задаче уклонения от обнаружения была рассмотрена в работе [1]. В ней рассматривалась оптимизация интегрального функционала, физический смысл которого заключался в ослаблении волнового фронта распространения энергии, излучаемой объектом, в однородной и бесконечной среде, а именно требовалось минимизировать криволинейный интеграл, зависящий от волнового фронта, по маршруту движения объекта между двумя точками на плоскости. Эта задача может быть рассмотрена при различных дополнительных ограничениях, например, при ограничении на длину траектории. Постановки проблемы уклонения от обнаружения были расширены позднее, в том числе в исследованиях ученых Института проблем управления [2, 3], где помимо оптимальной траектории объекта, нужно было найти еще и закон изменения его скорости. Была предложена конформная замена переменных, которая сводит такую задачу к задаче о геодезической с известной квадратичной формой метрики. В общем случае математические постановки выражаются в терминах задач вариационного исчисления или оптимального управления, а решение этих задач оптимизации опирается на интегрирование уравнений Эйлера-Лагранжа или сопряженных уравнений с учетом условия максимума функции Понтрягина, как в [3, 4]. Одной из первых работ, в которой рассматривалась неоднородная индикатрису рассеяния объекта, является работа [5]. В ней рассматривалась задача планирования оптимального маршрута для беспилотного аппарата при уклонении от радара.

Предлагаемый доклад опирается на работу [6] и посвящен задаче поиска оптимальных траекторий подвижного объекта с неоднородной индикатрисой излучения при уклонении от обнаружения одиночным сенсором. Предложенная постановка охватывает различные типы физических полей, по которым ведется обнаружение объекта, что позволяет решать широкий класс задач поиска-уклонения.

**Постановка задачи.** Подвижный объект движется в поле обнаружения поисковой системы, представляющей собой в простейшем случае одиночный сенсор, расположенный в начале координат. Поставим задачу нахождения оптимальных траекторий объекта как задачу классического вариационного исчисления с интегральным фунционалом риска, зависящим от уровня излучаемого объектом сигнала $S(t)$.




*а*) *б*)

Рис. 1. Расположение объекта на плоскости декартовых координат с сенсором $S$.

Этот уровень сигнала зависит от различных постоянных характеристик подвижного объекта и сенсора, а так же от мгновенного значения скорости объекта и расстояния до сенсора

$$S = \left(\frac{v}{r}\right)^{\mu} G(\varphi)\gamma(r,\varphi)g(\beta), \quad (1)$$

где множитель $G(\varphi)$ отвечает за диаграмму принимающей антенны сенсора, $g(\beta)$ – это индикатриса излучения подвижного объекта, $r$ – текущее расстояние между сенсором и объектом, $v$ – мгновенная скорость объекта, $\gamma(r,\varphi)$ – коэффициент затухания сигнала в среде. Геометрический смысл углов $\psi$ и $\varphi$ пояснен на рис. 1 а. Угол $\psi$ это угол поворота вектора скорости объекта, а $\varphi$ - угол поворота радиус-вектора объекта. Угол $\psi - \varphi = \beta$ это угол в прямоугольном треугольнике, построенном из радиальной $v_{\mathrm{r}}$ и трансверсальной проекций $v_{\varphi}$ скоростей подвижного объекта, т.е. угол между скоростью объекта и ее проекцией на радиус-вектор, как показано на рис. 1 б. Величина $\mu > 1$ характеризует физическое поле, по которому ведётся обнаружение. Это может быть магнитное, тепловое, акустическое или электромагнитное поле.

Таким образом критерий оптимизации задачи – риск $R$ как интегральный функционал сигнала $S$ из (1) имеет вид:

$$R = \int_0^T \left(\frac{v}{r}\right)^{\mu} G(\varphi)\gamma(r,\varphi)g(\beta)dt. \quad (2)$$

Будем считать, что диаграмма принимающей антенны равномерна $G(\varphi) \equiv 1$, и сигнал в среде не затухает, т.е. $\gamma(r,\varphi) = 1$ . Таким образом можно сформулировать постановку задачи нахождения оптимальных траекторий.

***Задача 1.*** *Требуется найти такую траекторию* $(r^*(t), \varphi^*(t))$*, которая минимизирует функционал*

$$R = \int_0^T \left(\frac{v}{r}\right)^{\mu} g(\beta)dt, \quad (3)$$

где $v$ – это скорость объекта, а $r$ – расстояние между сенсором и объектом. Краевые условия фиксированы

$$r(0) = r_A, r(T) = r_B, \varphi(0) = \varphi_A, \varphi(T) = \varphi_B.$$

Время $T$ движения по маршруту от точки $A$ к точке $B$ также фиксировано.

**Необходимые условия оптимальности.**

***Лемма 1.*** *Подстановка переменной* $\rho = \ln r$ *приводит функционал (3) к виду*

$$R(\rho(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_0^T (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} g\left(\arctan\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}\right) dt. \quad (4)$$

Из Леммы 1 следует, что изначальная Задача 1 эквивалентна двухточечной краевой вариационной задаче на минимум функционала (4).

***Задача 2.*** *Требуется найти траекторию* $(\rho^*(t), \varphi^*(t))$*, которая минимизирует функционал*

$$R(\rho(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_0^T S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, t)dt = \int_0^T (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} g\left(\arctan\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}\right) dt \longrightarrow \min_{\rho(\cdot),\varphi(\cdot)}. \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$\rho(0) = \rho_A, \rho(T) = \rho_B, \varphi(0) = \varphi_A, \varphi(T) = \varphi_B.$$

Вследствие вида функционала (5) он обладает рядом первых интегралов. Справедлива следующая лемма.

***Лемма 2.*** *Лагранжиан* $S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, t)$ *имеет постоянное значение* $S^*$ *на экстремальной траектории* $(\rho^*(t), \varphi^*(t))$.

Следующая теорема дает необходимое условие оптимальности траектории, которая может являться решением Задачи 2.

***Теорема 1.*** *Пусть* $0 < g_1 < g(\beta) < g_2$ *для всех* $\beta \in [0,2\pi]$ *- дважды дифференцируемая функция* $\beta$*, где* $g_1$*,* $g_2$ *некоторые константы, и* $\ddot{\rho}(t)$*,* $\ddot{\varphi}(t)$ *существуют и являются непрерывными функциями по* $t$*. Тогда экстремальная траектория Задачи 2 удовлетворяет следующей системе уравнений*

$$\begin{cases} \dot{\rho} = const, \\ \dot{\varphi} = const. \end{cases} \quad (6)$$

***Следствие 1.*** *Из теоремы (1) следует, что экстремальная траектория имеет форму логарифмической спирали.*

$$\begin{cases} r(t) = r_A \exp\left(\frac{t}{T}\ln\frac{r_B}{r_A}\right), \\ \varphi(t) = \varphi_A + \frac{\varphi_B - \varphi_A}{T}t. \end{cases}$$

*Уравнение экстремальной траектории на полярной плоскости записывается как*

$$r(\varphi) = r_A \exp\left(\frac{\varphi - \varphi_A}{\varphi_B - \varphi_A}\ln\frac{r_B}{r_A}\right).$$

*Закон изменения скорости объекта на экстремальной траектории имеет вид*

$$v(t) = \frac{r_A}{T}\exp\left(\frac{t}{T}\ln\frac{r_B}{r_A}\right)\sqrt{\ln^2\frac{r_B}{r_A} + (\varphi_B - \varphi_A)^2}.$$

*Значение функционала (4) на экстремальной траектории равно*

$$R^* = \frac{\left((\rho_B - \rho_A)^2 + (\varphi_B - \varphi_A)^2\right)^{\mu/2}}{T^{\mu-1}} g(\beta^*),$$

*где* $\beta^* = \arctan\frac{\varphi_B - \varphi_A}{\rho_B - \rho_A}$, *и зависит только от краевых условий.*

**Достаточные условия оптимальности.** Теперь найдем условия, при которых полученная экстремальная траектория является оптимальным решением Задачи 2, т. е. доставляет сильный минимум функционалу (4). Для этого обратимся к матрице Гессе.

***Лемма 3.*** *Пусть* $S(\rho, \dot\rho, \varphi, \dot\varphi, t) = (\dot\rho^2 + \dot\varphi^2)^{\mu/2} g(\beta)$, $g(\beta)$ *– трижды непрерывно дифференцируемая функция* $\beta$, *тогда матрица Гессе функции* $\boldsymbol{H}$ *имеет вид*

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

где

$$H_{11} = \frac{\partial^2 S}{\partial \dot\rho^2} = \left(-2\dot\varphi\dot\rho(\mu-1)g'(\beta) + \mu\left(\dot\varphi^2 + \dot\rho^2(\mu-1)\right)g(\beta) + g''(\beta)\dot\varphi^2\right)(\dot\varphi^2 + \dot\rho^2)^{\frac{\mu}{2}-2},$$

$$H_{12} = \frac{\partial^2 S}{\partial \dot\rho \partial \dot\varphi} = \left((\dot\rho^2 - \dot\varphi^2)(\mu-1)g'(\beta) + \dot\rho\dot\varphi\left((\mu^2 - 2\mu)g(\beta) - g''(\beta)\right)\right)(\dot\varphi^2 + \dot\rho^2)^{\frac{\mu}{2}-2},$$

$$H_{21} = \frac{\partial^2 S}{\partial \dot\varphi \partial \dot\rho} = \left((\dot\rho^2 - \dot\varphi^2)(\mu-1)g'(\beta) + \dot\rho\dot\varphi\left((\mu^2 - 2\mu)g(\beta) - g''(\beta)\right)\right)(\dot\varphi^2 + \dot\rho^2)^{\frac{\mu}{2}-2},$$

$$H_{22} = \frac{\partial^2 S}{\partial \dot\varphi^2} = \left(2\dot\varphi\dot\rho(\mu-1)g'(\beta) + \mu\left(\dot\rho^2 + \dot\varphi^2(\mu-1)\right)g(\beta) + g''(\beta)\dot\rho^2\right)(\dot\varphi^2 + \dot\rho^2)^{\frac{\mu}{2}-2},$$

а сам Гессиан

$$\det\mathbf{H} = (\dot\varphi^2 + \dot\rho^2)^{\mu-2}(\mu-1)(g^2(\beta)\mu^2 + g(\beta)g''(\beta)\mu - g'^2(\beta)(\mu-1)).$$

Следующая теорема дает достаточное условие оптимальности траектории, претендующей на решение задачи.

**Теорема 2** *Предположим, что выполнены условия теоремы 1, лемм 2 и 5, и* $det\boldsymbol{H} > 0$ *для всех* $\beta$. *Тогда экстремальная траектория, удовлетворяющая (6), доставляет функционалу (4) сильный минимум.*

Таким образом, положительность детерминанта матрицы Гессе гарантирует оптимальность логарифмической спирали как решения задачи. В случае, когда достаточные условия не выполнены, искомая оптимальная траектория будет иметь более сложный вид и будет составлена из нескольких логарифмических спиралей.

**Заключение.** В работе получены необходимые и достаточные условия оптимальности траектории движения объекта, обладающего неоднородной индикатрисой излучения сигнала, в поле обнаружения одиночного сенсора. Получены аналитические выражения для оптимальных траекторий, закона изменения скорости и значения интегрального риска обнаружения на оптимальных траекториях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P.** Optimal Risk Path Algorithms Cooperative Control and Optimization // Eds. R. Murphey, P. Pardalos. Dordrecht: Kluwer Acad 2002. V. 66. P. 271–303.
2. **Галяев А.А.** О функционале обнаружения при движении объекта в конфликтной среде // Автомат. и телемех. 2010. №4. С. 100–105.

3. **Галяев А.А., Маслов Е.П.** Оптимизация закона уклонения подвижного объекта от обнаружения при наличии ограничений // Автомат. и телемех. 2012. №6. С. 73–88.
4. **Sidhu H., Mercer G., Sexton M.** Optimal trajectories in a threat environment // Journal of Battlefield technology 2006. V. 9 No 3. P. 33–39.
5. **Kabamba, P.; Meerkov, S.; Zeitz, F.** Optimal Path Planning for Unmanned Combat Aerial Vehicles to Defeat Radar Tracking. J. Guid. Control. Dyn. 2006, 29, 279–288.
6. **Galyaev A.A., Dobrovidov A.V., Lysenko P.V., Shaikin M.E., Yakhno V.P.** Path Planning in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // Sensors 2020. 20. 2076.

**A.A. Galyaev, P.V. Lysenko, V.P. Yakhno** (Institute of Control Sciences of the RAS, Moscow, Russian Federation). **About optimal trajectories of the moving object with a non-uniform radiation pattern**

*Abstract.* The problem of optimal trajectory planning of the moving object with a non-uniform radiation pattern is considered and analytically solved as a variational problem. The task is to minimize the risk of detection of the moving object by a static sonar while moving between two given points on a plane. Necessasy and sufficient conditions of the trajectory's optimality are obtained. The optimal trajectory and velocity law of the moving object are found, as well as optimal risk of the detection value.

С. М. ХРЯЩЕВ
(ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург)

# ОДИН ПОДХОД К НАХОЖДЕНИЮ МОМЕНТОВ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛИСИСТЕМ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

*Рассматриваются объекты управления с конечным набором управляющих воздействий, т.е. полисистемы. Проблема управления в дискретном времени приводит к необходимости определения моментов переключения, в которые происходит выбор элементов полисистемы. В этой работе мы предлагаем метод, который позволяет решить проблему нахождения целочисленных моментов переключения для некоторых классов управляемых систем. Этот метод основан на применении математического аппарата теории обобщенных цепных дробей и теории сравнений.*

**Введение и постановка задачи.** В работе рассматриваются конечномерные объекты управления, имеющие конечное множество управляющих параметров, т.е. динамические полисистемы с конечномерным пространством состояний, состоящие из конечного набора динамические систем $\{F_1^t, \dots, F_l^t\}$, называемых элементами. Движение объекта в непрерывном времени $t$ описывается некоторой траекторией $x(t)$ в пространстве состояний. Цель управления состоит в переводе объекта из некоторого начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^m$ в некоторое конечное состояние $x_* \in \mathbb{R}^m$. Процесс управления объектом заключается в переключении элементов полисистемы в некоторые подходящие моменты времени $0 < t_1 < \cdots < t_{l-1}$, где $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Пусть на временном промежутке $(t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, l$ длины $\tau_j = t_j - t_{j-1}$. функционирует некоторый элемент (оператор эволюции) $F_{i_j}^t$. Для нахождения моментов переключения требуется решить некоторое сопутствующее уравнение вида $F(\tau, x_0) = x_*$, где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l) \in \mathbb{R}_+^l$ и

$$F(\tau, x_0) := \left(F_{i_l}^{\tau_l} \circ F_{i_{l-1}}^{\tau_{l-1}} \circ \dots \circ F_{i_1}^{\tau_1}\right)(x_0). \quad (1)$$

Предполагается, что это уравнение разрешимо. Это означает, что число элементов полисистемы достаточно для управления объектом в непрерывном времени.

В предлагаемом докладе будет обсуждаться вопрос, для каких классов систем, объект, управляемый в непрерывном времени, будет также управляем в дискретном времени, т.е. когда числа $\tau_j$ можно"выбрать целыми. Последнее условие может быть выполнено в некотором ослабленном смысле, а именно для заданного $\varepsilon$ выполнено неравенство

$$|F(\tau, x_0) - x_*| \le \varepsilon. \quad (2)$$

**Методы решения поставленной задачи.** По существу, поставленный в работе вопрос сводится к исследованию существования диофантовых (целочисленных) решений для сопутствующего уравнения (1) и к нахождению этих решений. Для решения поставленной задачи имеется значительное число методов. Их можно условно разделить на две группы. Для объектов первой группы предполагается наличие стохастических свойств полисистемы, (см. [1-3]), для объектов второй группы не предполагается наличия стохастических свойств, (см. [4-6]).

Класс объектов первой группы, для которых может быть решена поставленная задача, довольно обширный. На аналитические свойства функций, задающих эти полисистемы, накладывается ограничения лишь общего характера (в частности, накладывается ограничения на скорость роста функций $F(\tau, x_0)$ и их производных и т. п.). При наличии этих свойств, имеются теоремы, которые гарантируют существование целых решений неравенств вида (2) с любым $\varepsilon$. Нахождение решений этих неравенств не представляет вычислительных трудностей. Однако следует иметь ввиду, что величина нормы этих решений обусловлена скоростью сходимости некоторых оценок, гарантируемой предельными теоремами теории вероятностей, которая является достаточно медленной. Следовательно, время управления для случая дискретного времени значительно увеличивается по сравнению со временем управления для случая непрерывного времени. См. работы [1-3] автора по этой теме.

Класс объектов второй группы, для которых может быть решена поставленная задача, достаточно узкий. Это связано с тем, что без наличия стохастических свойств доказательство су-

ществования диофантовых решений и их нахождение является значительно более сложной задачей. В данной работе мы занимаемся именно этой задачей. При этом далее накладываются некоторые ограничения на объекты управления, при которых с помощью определенных алгебраических методов удается найти целочисленные решения сопутствующих уравнений. В основном, это уравнения с вещественными коэффициентами, которые являются линейными или полиномиальными по неизвестным параметрам.

**Авторский метод решения поставленной задачи.** При решении поставленной выше задачи нахождения целочисленных решений сопутствующего уравнения решается вспомогательная задача аппроксимации вещественных коэффициентов этого сопровождающего уравнений рациональными числами. Известно, что для вещественных чисел наилучшими приближениями (в определенном смысле) являются отрезки цепных дробей. Однако, при нахождения диофантовых решений для коэффициентов уравнения требуется иметь рациональные приближения с общим знаменателем. Для этой цели предлагается использовать многокомпонентные цепные дроби в надежде, что если они и не дают наилучших приближений, то всё-таки эти приближения не хуже, чем приближения, даваемые другими известными методами.

***Использование специальной версии многомерных цепных дроби.*** Известно, много версий многомерных цепных дробей, [7]. В работах автора [4,5] предлагается оригинальная концепция многокомпонентных цепных дробей вида

$$z = a_0 + 1/(a_1 + \cdots + 1/(a_{n-1} + 1/(a_n + \cdots))). \quad (3)$$

Основной идеей этой концепции является то, что множество аппроксимируемых элементов $z$ является алгеброй с двумя операциями типа сложения и умножения с некоторыми дополнительными свойствами. Это дает возможность с одной стороны оперировать с элементами алгебры как с некоторыми гиперчислами, а с другой стороны эти объекты можно интерпретировать как элементы некоторого евклидова пространства, т.е. как многокомпонентные вещественные величины. Главной технической сложностью оперирования с данным классом дробей является отсутствие свойства коммутативности по умножению, что приводит к достаточно сложным вычислениям. Полученные условия сходимости рассматриваемого класса цепных дробей – главный математический результат работы.

***Использование теории сравнений.*** Для решения приближенного сопровождающего уравнения применяется теория сравнений, [8]. В основном рассматриваются полиномиальные относительно временных переменных многомерные уравнения. Основное внимание уделяется случаю линейной зависимости по искомым переменным $\tau$.

**Классы систем управления, для которых применяется изложенная теория.** Предлагаемые методы применимы для тех систем управления, которым соответствуют «решаемые» диофантовы уравнения. В частности, они применимы к полисистемам, элементы которых задаются операторами сдвига в некоторой системе координат. Например, этим, свойством обладают линейные полисистемы.

Рассмотрим соотношение (2) при $\varepsilon = 0$, т.е. уравнение $F(\tau, x_0) = x_*$. Обозначим $\tau' = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\tau'' = (\tau_{m+1}, \dots, \tau_l)$. Таким образом, уравнение (2) примет вид $F(\tau', \tau''; x_0) = x_*$. Пусть $rank\ \left(\frac{\partial F}{\partial \tau'}\right) = m$. Тогда это уравнение разрешимо относительно $\tau'$, т. е. $\tau' = \varphi(x_0, x_*, \tau'')$. Предположим, что последнее равенство линеаризуемо в виде

$$\tau' = \theta_0(x_0, x_*) + \theta_1(x_0, x_*)\tau'' \quad (4)$$

при достаточно больших значениях $|\tau''|$ нормы вектора $\tau$. Пусть фиксированы некоторые значения $x_0, x_*$ и пусть $l = m + k$. Аппроксимируем многокомпонентные вещественные величины $\theta_0(x_0, x_*)$ и $\theta_1(x_0, x_*)$ соответственно величинами $r_0 = \frac{p_0}{q}$ и $r_1 = \frac{p_1}{q}$ с рациональными компонентами, где $q -$ натуральное число (общий знаменатель дробей $r_0$, $r_1$), используя отрезки цепных дробей вида (3) для некоторого $n$, обеспечивающего достаточную точность приближения.

Пусть компоненты вектора $\tau''$ принимают натуральные значения, т.е. $\tau'' = s \in \mathbb{N}^l$. Тогда для этих $s$ значение правой части равенства (4) принимает приближенное рациональное значение $r = \frac{p_0 + p_1 s}{q}$, которое аппроксимирует значение вещественного вектора $\tau'$.

Предположим, что значение параметра $s$ можно выбрать так, чтобы компоненты вектора $r$ были натуральными числами. Для этого векторная величина $p_0 + p_1 s$ должна покомпонентно делиться на натуральное число $q$. Другими словами, величина $s$ должна удовлетворять векторному уравнению для сравнений вида

$$p_0 + p_1 s \equiv 0 \mod q\,, \tag{5}$$

которое может быть легко решено, см. [5,8]. В итоге получаем целочисленную аппроксимацию: $\tau = (\tau', \tau'') \approx (r', s') =: \rho \in \mathbb{N}^l$, где $s'$ – наименьший элемент из класса вычетов (5) и значение $r' = \frac{p_0 + p_1 s'}{q}$.

**Заключение.** Мы предложили метод нахождения диофантовых решений некоторых классов сопутствующих уравнений, заданных операторами эволюции полисистемы. Этот метод основан на новой версии теории многомерных цепных дробей и теории сравнений. Для некоторых классов цепных дробей получены условия сходимости. Показано применение цепных дробей к системам управления в дискретном времени. Приведены формулы для решений уравнений для сравнений.

Сравнивая результаты этой работы с полученными ранее результатами, можно отметить следующее. Если система имеет одновременно требуемые стохастические свойства и алгебро-геометрические свойства, то управляющие действия, использующие только стохастические свойства, обычно дают более длительное время управления, чем время управления в альтернативном случае. Это показано моделированием. Однако для объектов первого класса условия, накладываемые на систему управления, обычно менее ограничительные, чем для объектов второго класса.

Результаты, полученные в этой работе, могут быть использованы при проектировании систем управления, для которых пространство состояний является определенной областью евклидова пространства. В этом случае для управляемости достаточно, чтобы полисистема имела элементы трех типов. Эти элементы могут быть заданы линейными дифференциальными уравнениями, для которых эволюционные операторы имеют стабильный, неустойчивый и нейтральный спектры соответственно. Используя комбинации этих движений, можно осуществить любое желаемое движение.

ЛИТЕРАТУРА


1. S.M. Khryashchev. Controllability and number-theoretic properties of dynamical polysystems, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, Vol. 16-4, P. 388-396, 2013.
2. Хрящев~С.М. Применение статистических методов теории чисел для управления полисистемами в дискретном времени. *Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления, Россия*, Москва, ИПУ РАН, 2014. С. 917—928.
3. S.M. Khryashchev. Statistic Methods for Control of Dynamical Polysystems, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, Vol.~18-4. P. 489-501, 2015.
4. S.M. Khryashchev. On Finding Switching Instants for Control of Discrete-time Dynamical Polysystems by Using Continued Fractions. Proceedings of 15th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference), STAB 2020. (в печати).
5. S.M. Khryashchev. A Finding of Switching Instants for Dynamical Polysystems by Applying Continued Fractions.Controllability and number-theoretic properties of dynamical polysystems, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2020. (в печати).

A. N. Kvitko. ``A Method for Solving Boundary Value Problems for Nonlinear Systems in Class of Discrete Controlls," Differential equations. vol. 44, no. 11. P. 1499-1509, 2008.

6. S.G. Dani and Arnaldo Nogueira. Continued fractions for complex numbers and values of binary quadratic forms,
7. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 366, no. 7, P. 3553-3583, 2014.
8. **Бухштаб А.А.** Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.


---

**S. M. Khryashchev**,(Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, St. Petersburg). **An Approach to Finding Control Switching Instants for Some Class of Polysystems in Discrete Time.**

*Abstract.* Control objects with a finite set of control actions, i.e. polysystems, are considered. A problem of control in discrete time leads to a need to determine instants of switching when a selection of elements of a polysystem occurs. In this paper, we propose an approach that allows us to solve the problem of finding integer switching instants for some class of controlled systems. This approach use theory of generalized continued fractions and theory of congruences for solving Diophantine equations.

Е.Л. ЕРЕМИН, Л.В. НИКИФОРОВА
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

Е. А. ШЕЛЕНОК
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск)

# КОМБИНИРОВАННАЯ СИСТЕМА ДЛЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО НЕАФФИННОГО ОБЪЕКТА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ НА МНОЖЕСТВЕ СОСТОЯНИЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

*В работе осуществлен синтез комбинированного закона управления для неаффинного объекта с запаздыванием по входной переменной с поэтапно изменяющейся динамикой. Объект функционирует в условиях априорной параметрической и структурной неопределенностей при наличии внешних помех и измерении регулируемой переменной. Структура системы управления включает в себя упредитель-компенсатор и фильтр-корректор.*

**Введение**. В современной теории автоматического управления разработка регуляторов на основе аналитических методов синтеза для систем неаффинных по управлению с запаздыванием и поэтапно изменяющейся динамикой является актуальной задачей, поскольку такая особенность характерна для энергетических, механических, химических объектов. Каждая из систем управления подобными объектами состоит из набора коммутируемых подсистем и закона переключения, определяющего активность подсистемы в определенный промежуток времени [1–4]. В работе получен алгоритм комбинированного управления для неаффинного объекта с запаздыванием по входной переменной, который учитывает переключение параметров неустойчивого объекта, изменение внешних помех, изменение относительной степени объекта, т.е. рассматриваемый объект управления является априорно структурно неопределенным.

**Математическая модель системы управления**. Уравнение объекта, функционирующего в условиях априорной структурно-параметрической неопределенности, описывается составной системой дифференциальных уравнений на $Q$ интервалах времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_Q$

$$\frac{dx^{(q)}(t)}{dt} = A^{(q)}x^{(q)}(t) + B(u^{(q)}(t-h)F^{(q)}(u^{(q)}(t-h)) + \varphi^{(q)}(t)),\ \ y^{(q)}(t) = (L^{(q)})^T x^{(q)}(t), \qquad (1)$$

где $q = 1, \ldots, Q$; $(x^{(q)}(t))^T = (x_1{}^{(q)}(t), x_2{}^{(q)}(t), \ldots, x_n{}^{(q)}(t))$ – составной вектор состояний; $A^{(q)}$ – произвольные матрицы состояния в форме Фробениуса; $B^T = [0, \ldots, 0, 1]$ – вектор порядка $n$; $u^{(q)}(t) \in R$ – составное управление, $h$ – известное постоянное запаздывание, $F^{(q)}$ – гладкие функции; $\varphi^{(q)}(t)$ – постоянные внешние помехи; $L^{(q)}$ – постоянные векторы порядка $m_q$, $y^{(q)}(t) \in R$ – составной измеряемый выход объекта.

Для объекта управления (1) выполнены следующие допущения:

1) Переменные состояния непосредственному измерению не доступны, т.е. напрямую измеряется только составной регулируемый выход объекта $y^{(q)}(t)$, а между составными системами уравнений выполняется стыковка траекторий: $x^{(q+1)}(t_q) = x^{(q)}(t_q)$, $q = 1, 2, \ldots, Q-1$.

2) Априорная параметрическая неопределенность объекта управления (1) заключается в том, что коэффициенты матриц $A^{(q)}$ и векторов $L^{(q)}$ являются неизвестными числами, принадлежащими известному ограниченному множеству.

3) Неизвестные функции $F^{(q)}(u^{(q)}(t-h))$ и $\varphi^{(q)}(t)$ удовлетворяют следующим оценкам:

$$0 \le F^{(q)}(u^{(q)}(t-h)) \le F_{0q} = const > 0,\ |\varphi^{(q)}(t)| \le \varphi_{0q} = const,\ \forall\ t \ge 0;$$

где $F_{0q}$, $\varphi_{0q}$ – неизвестные числа.

4) Априорная структурная неопределенность состоит в том, что размерность векторов $L^{(q)}$ на указанных временных интервалах допускает изменения, т.к. порядок $m_q$ может изменяться на отрезке $[m_0, n-1]$, где $m_0 > 0$, $m_0 = \min\limits_{q \in Q} m_q$. Тогда относительный порядок объекта управления (1) может изменяться $1 \le \rho^{(q)} \le (n - m_0)$.

К выходу объекта управления (1) подключается фильтр-корректор

$$y_f^{(q)}(s)=\left(\frac{T_0 s+1}{T_* s+1}\right)^{(n-m_0-1)} y^{(q)}(s), \qquad (2)$$

где $y_f^{(q)}(s)$ – выход фильтр-корректора, $T_0$, $T_* = const > 0$, $T_*$ – достаточно мало [5, 6].

Последовательное соединение объекта (1) и фильтр-корректора (2) можно представить как последовательное соединение видоизмененного объекта управления (ВОУ) и блока структурного возмущения (БСВ)

$$y_f^{(q)}(s)=W_{BOУ}^{(q)}(s)\cdot W_{БСВ}^{(q)}(s)\tilde{u}^{(q)}(s)=\frac{\tilde{L}^{(q)}(s)}{\tilde{a}^{(q)}(s)}\cdot\frac{1}{(T_* s+1)^{(n-m_q-1)}}\tilde{u}^{(q)}(s), \qquad (3)$$

где $\tilde{a}^{(q)}(s)=a^{(q)}(s)\cdot(T_* s+1)^{(m_q-m_0)}$, $\deg\tilde{a}^{(q)}=n+m_q-m_0$, $a^{(q)}(s)$ – знаменатель передаточной функции объекта управления (1); $\tilde{L}^{(q)}(s)=L^{(q)}(s)(T_0 s+1)^{(n-m_0-1)}$, $\deg\tilde{L}^{(q)}=m_q+n-m_0-1$, $L^{(q)}$ – числитель передаточной функции объекта (1), $\tilde{u}^{(q)}(s)=u^{(q)}(t-h)F^{(q)}(u^{(q)}(t-h))+\varphi^{(q)}(t)$. Тогда относительный порядок $\rho_{BOУ}{}^{(q)} = 1$ на любом интервале функционирования.

Следуя работам [5 – 8], из рассмотрения можно опустить БСВ, тогда в расширенном пространстве состояний ВОУ запишется в виде

$$\frac{d\tilde{x}^{(q)}(t)}{dt}=\tilde{A}^{(q)}\tilde{x}^{(q)}(t)+\tilde{B}(u^{(q)}(t-h)F^{(q)}(u^{(q)}(t-h))+\varphi^{(q)}(t)),\ \tilde{y}^{(q)}(t)=(\tilde{L}^{(q)})^T\tilde{x}^{(q)}(t), \qquad (4)$$

где $(\tilde{x}^{(q)}(t))^T=(\tilde{x}_1^{(q)}(t),...,\tilde{x}_{(m_q+n-m_0)}^{(q)}(t))^T$, $\tilde{y}^{(q)}(t)\in R$ – составной выход.

Предполагается, что желаемая динамика объекта управления задается апериодическим звеном первого порядка. Используя подход [9], пространство состояний эталона можно расширить

$$\tilde{y}_M^{(q)}(s)=\frac{a_{M0}}{s+a_{M0}}r(s)=\frac{a_{M0}\tilde{L}^{(q)}}{(s+a_{M0})\tilde{L}^{(q)}}r(s), \qquad (5)$$

$$\frac{d\tilde{x}_M^{(q)}(t)}{dt}=\tilde{A}_M^{(q)}\tilde{x}_M^{(q)}(t)+\tilde{B}_M r(t),\ \tilde{y}_M^{(q)}(t)=(\tilde{L}^{(q)})^T\tilde{x}_M^{(q)}(t), \qquad (6)$$

где $a_{M0} = const > 0$, $r(t) \in R$ – задающее воздействие, $(\tilde{x}_M^{(q)}(t))^T=(\tilde{x}_{M1}^{(q)}(t),...,\tilde{x}_{M(m_q+n-m_0)}^{(q)}(t))^T$, $\tilde{y}_M^{(q)}(t)\in R$ – желаемый выход.

Для компенсации в системе запаздывания по управлению параллельно объекту (1) подключается упредитель-компенсатор [10, 11], динамику которого зададим математической моделью

$$\frac{d\tilde{x}_K^{(q)}(t)}{dt}=\tilde{A}_M^{(q)}\tilde{x}_K^{(q)}(t)+\tilde{B}_M(u^{(q)}(t)-u^{(q)}(t-h)),\ \tilde{y}_K^{(q)}(t)=(\tilde{L}^{(q)})^T\tilde{x}_K^{(q)}(t), \qquad (7)$$

Требуется для неаффинного объекта (1), функционирующего в условиях априорной параметрической и структурной неопределенностей, синтезировать явный вид закона управления $u^{(q)}(t)$ для системы управления (1), (2), (6), (7) таким образом, чтобы при любых начальных условиях $x^{(1)}(0)$ и ограниченных помехах $\varphi^{(q)}(t)$ обеспечивалось выполнение цели управления

$$\lim_{t\to\infty}\left|\tilde{y}_M^{(q)}(t)-y^{(q)}(t)\right|\le\sigma_0=const>0, \qquad (8)$$

где $q = 1, \ldots, Q$; $\sigma_0$ – достаточно малое число.

**Синтез комбинированного закона управления.** Явный вид закона управления $u^{(q)}(t)$ в работе определялся на основе критерия гиперустойчивости, следуя которому рассматривались сигнал $e^{(q)}(t)=\tilde{x}_M^{(q)}(t)-(\tilde{x}^{(q)}(t)+\tilde{x}_K^{(q)}(t))$ и эквивалентное математическое описание

$$\frac{de^{(q)}(t)}{dt}=\tilde{A}_M^{(q)}e^{(q)}(t)+\tilde{B}_M\mu^{(q)}(t),\ \ \nu^{(q)}(t)=\tilde{y}_M^{(q)}(t)-\tilde{y}^{(q)}(t)-\tilde{y}_K^{(q)}(t),$$
$$\mu^{(q)}(t)=-\left[u^{(q)}(t)-r(t)-\chi_0\tilde{y}^{(q)}(t)+\left(a_{M0}^{-1}F^{(q)}(u^{(q)}(t-h))-1\right)u^{(q)}(t-h)+a_{M0}^{-1}\varphi(t)\right]. \qquad (9)$$

Требование критерия гиперустойчивости относительно строгой положительной определенности вещественной частотной характеристики линейной части системы (9) всегда имеет место, поскольку её передаточная функция, учитывая (5), эквивалентна передаточной функции апериодического звена первого порядка. Для нелинейной части системы (9), следуя критерию гиперустойчивости, должно выполняться интегральное неравенство

$$\eta^{(q)}(0,t)=-\int_0^t \mu^{(q)}(\vartheta)\nu^{(q)}(\vartheta)d\vartheta \geq -\left(\eta_0^{(q)}\right)^2 = const,\ \forall t>0. \tag{10}$$

Задавая явный вид управляющего воздействия, требование справедливости интегрального неравенства (10) в работе было выполнено, а синтезированный закон управления получил вид

$$\begin{aligned} u(t)=r(t)+h_1\tilde{y}^{(q)}(t)\int_0^t \tilde{y}^{(q)}(\vartheta)\nu^{(q)}(\vartheta)d\vartheta+h_2\left(\tilde{y}^{(q)}(t)\right)^2\nu^{(q)}(t)+h_3\int_0^t \nu^{(q)}(\vartheta)\,d\vartheta+ \\ +h_4\nu^{(q)}(t)+h_5u^{(q)}(t-h)\int_0^t u^{(q)}(\vartheta-h)\nu^{(q)}(\vartheta)d\vartheta+h_6\left(u^{(q)}(t-h)\right)^2\nu^{(q)}(t), \end{aligned} \tag{11}$$

где $h_i = const > 0$, $i = 1, \ldots, 5$ – параметры закона управления, значения которых подбираются в процессе имитационного моделирования. За счет выбора малого параметра $T_*$ полученный комбинированный закон управления (11) гарантирует системе (1), (2), (6), (7), (11) свойство $L$-диссипативности, а значит и выполнение цели управления (8).

**Пример имитационного моделирования**. В процессе функционирования объекта управления (1) в некоторые моменты времени ($t_1$ = 120 с, $t_2$ = 270 с) возникают априорно неопределенные структурные и параметрические переключения:

$0 \le t < t_1$: $a^{(1)}(s) = s^3 + s^2 + 5s - 0.3$; $L^{(1)}(s) = 2s + 1$; $F^{(1)}(u^{(1)}(t-1)) = 0.3\mathrm{arctg}^2(1 + |u^{(1)}(t-1)|)$; $\varphi^{(1)}(t) = -0.3\sin^2(0.075t)$; $(x^{(1)}(0))^T = (0.5,0.5,0.5)$.

$t_1 \le t < t_2$: $a^{(2)}(s) = s^3 + 1.7s^2 + 2s - 0.2$; $L^{(2)}(s) = 0.6s^2 + 2s + 0.1$; $F^{(2)}(u^{(2)}(t-1)) = 0.5/(1 + \mathrm{arctg}(1 + + |u^{(2)}(t-1)|))$; $\varphi^{(2)}(t) = 0.1 - 0.15\mathrm{arctg}(0.05t)$; $x^{(2)}(t_1) = x^{(1)}(t_1)$.

$t_2 \le t$: $a^{(3)}(s) = s^3 + 3s^2 + 4s - 0.1$; $L^{(3)}(s) = s + 2$; $F^{(3)}(u^{(3)}(t-1)) = 0.2|u^{(3)}(t-1)|^{1/4} + 2/(1 + |u^{(3)}(t - - 1)|^{1/4})$; $\varphi^{(3)}(t) = 0.15\cos(0.1t)$; $x^{(3)}(t_2) = x^{(2)}(t_2)$.

$r(t) = 0.4\sin(0.04t) - 0.3\sin(0.08t) - 0.4\sin(0.1t)$; $a_{M0} = 1$; $T_0 = 0.1$; $T_* = 0.0075$.

В ходе имитационного моделирования были подобраны параметры закона управления (11): $h_1 = 200$, $h_2 = 1000$, $h_3 = 2000$, $h_4 = 1000$, $h_5 = 5$, $h_6 = 2$, результаты представлены на рисунке.

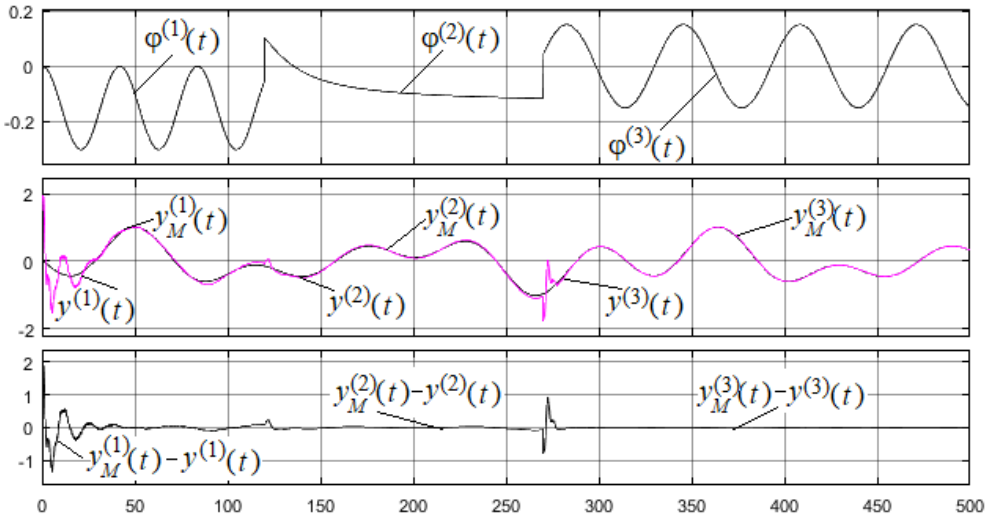



Рис 1. Динамические процессы в исследуемой системе

**Заключение.** В работе на основе критерия гиперустойчивости синтезирован комбинированный закон управления для неаффинного объекта с запаздыванием по управлению с поэтапно изменяемой динамикой, функционирующего в условиях априорной параметрической и струк-

турной неопределенностей и влияния внешних неконтролируемых возмущений. В процессе моделирования значение ошибки слежения в установившемся режиме не превышало 2%, что говорит о хорошем качестве функционирования полученной системы управления.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ № 20-08-00712*

ЛИТЕРАТУРА

1. Decarlo R.A., Branicky M.S., Pettersson S., Lennartson B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proc. IEEE*. 2000. Vol. 88. № 7. P. 1069–1082.
2. **Варайя П, Куржанский А.Б.** Задачи динамики и управления в гибридных системах. Тр. междунар. семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби”. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та. 2005. Т.1. С. 10–16.
3. **Еремин Е.Л.** Комбинированная система с неявным эталоном для класса априорно неопределенных одноканальных объектов неаффинных по управлению на множестве состояний функционирования. Информатика и системы управления. 2018. №3(57). С.93–103.
4. **Цыкунов А.М.** Робастное управление линейными объектами с переключениями. Проблемы управления. 2017. № 4. С.2–7.
5. **Еремин Е.Л.** L-диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурном возмущении. III. Информатика и системы управления. 2007. № 2(14). С.153–165.
6. **Еремин Е.Л.** L-диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурном возмущении. IV. Информатика и системы управления. 2013. № 2(36). С.100–106.
7. **Еремин Е.Л.** Адаптивная система управления с неявным эталоном и блоком быстродействующей коррекции. Информатика и системы управления. 2012. № 1(31). С.183–194.
8. **Еремин Е.Л.** Адаптивное управление объектами с запаздываниями по состоянию в системах с динамическим корректором. Информатика и системы управления. 2012. № 3(33). С.169–178.
9. **Еремин Е.Л.** Алгоритмы адаптивной системы управления с явно-неявной эталонной моделью для строго минимально-фазового объекта. Информатика и системы управления. 2004. № 2(8). С.157–166.
10. **Еремин Е.Л., Чепак Л.В.** Комбинированный регулятор для неаффинного объекта с запаздыванием по управлению.Автометрия. 2019. №6(55). С.11–20.
11. **Еремин Е.Л., Никифорова Л.В., Пикуль З.Д., Теличенко Д.А.** Комбинированный регулятор для структурно и параметрически неопределенного объекта с запаздыванием по управлению. Датчики и системы. 2019. №10(240). С.20–26.

---

**E.L.Eremin, L.V.Nikiforova** (Amur State University, Blagoveshchensk), **E.A.Shelenok** (Pacific National University, Khabarovsk). **Combined system for uncertain plant non-affine plant with control delay on state set of functioning**

Present research deals with synthesis of the combined control law for non-affine plant with the input variable lag and step by step changing dynamics. The plant operates in the parametric and structural priory uncertainty conditions as well as in the presence of permanent external noise and measuring only output variable. Structure of the control system includes the predictor-compensator and filter-corrector.

А. Н. КИРИЛЛОВ, А. С. ИВАНОВА
(Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск)

# ПЕРИОДИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВОЛЬТЕРРОВСКОЙ СИСТЕМОЙ, СОХРАНЯЮЩЕЕ ЕЕ СТРУКТУРУ

*Предлагается система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменной структурой. Формулируется задача выживаемости для данной системы. Решение задачи строится в виде периодического кусочно постоянного управления, сохраняющего структуру системы. Доказаны теоремы о периодичности решения системы при построенном управлении.*

**Введение.** В работе решается задача выживаемости, которая заключается в построении такого управления, при котором траектории системы ДУ (дифференциальных уравнений) принадлежат некоторому подмножеству фазового пространства, не покидая его. Строится периодическое кусочно постоянное управление, сохраняющее структуру системы. Доказана периодичность решений системы ДУ при построенных управлениях. Следует отметить, что в [1] доказана периодичность решения системы Лотки-Вольтерра при непрерывно дифференцируемом управлении, причем система двумерна. В данной работе доказана периодичность решения трехмерной системы при кусочно постоянном управлении. В этом состоит новизна работы. Предлагаемый доклад посвящен решению задачи выживаемости для модели «хищник-жертва» с миграцией [2].

**Периодическое кусочно постоянное управление, сохраняющее структуру системы.** Приведем в общем случае систему ДУ с переменной структурой [2], которая описывает динамику популяций, входящих в некоторое биосообщество. Рассмотрим участок, биосообщество которого состоит из $n$ популяций. Численность -ой популяции на данном участке в момент времени $t$ обозначим через $x_i = x_i(t)$, где $i = 1, \dots, n$. Следуя Ю.Одуму [3], в правую часть ДУ относительно $x_i$ вводятся положительные, отрицательные и нулевые члены в зависимости от воздействия, оказываемого популяциями биосообщества на $i$-ую популяцию, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, ДУ роста $i$-ой популяции примет вид

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Время жизни популяции на участке связано со структурной переменной [2], которая определяется выражением вида

$$n_i = n_i(t) = \Lambda_i + \int_0^t h_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\, d\tau, \quad (2)$$

где $0 < \Lambda_i$ – пороговая постоянная, $h_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – мгновенная скорость изменения $n_i$, $i = 1, \dots, n$. Равенство (2) эквивалентно ДУ

$$\dot{n}_i = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3)$$

Вектор структуры системы, далее, структура системы, имеет вид $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_n)$, где $\gamma_i = 1$, если -ый вид присутствует на участке, $\gamma_i = 0$, если – отсутствует, где $i = 1, \dots, n$. Изменение структуры системы описывают $n_i$. За счет интеграла в выражении для $n_i$ (2), решение об уходе, т.е. об изменении структуры, принимается с учетом предыстории.

Если $n_i > \Lambda_i$, то -ая популяция присутствует на участке и динамика сообщества задается уравнениями (1), (3). Если $n_i < \Lambda_i$, то – мигрирует из участка и динамика задается уравнениями

$$\dot{x}_i = g_i(x_i),\ \dot{n}_i = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где функция $g_i(x_i)$ описывает миграцию -го вида, причем $g_i(x_i) < 0$ при $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Далее, если $n_i < \Lambda_i, 0 < x_i \leq r(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, то

$$\dot{x}_i = -c_i,\ \dot{n}_i = 0,$$

где $0 < c_i$ – постоянные, $r(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ – заданная положительная вне нуля функция, причем $r(0, \dots, 0) = 0$. Если $n_i < \Lambda_i, x_i = 0$, то

$$\dot{x}_i = 0,\ \dot{n}_i = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

если $n_i = \Lambda_i, x_i \leq r(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, то

$$\dot{x}_i = c_i,\ \dot{n}_i = 0.$$

В качестве примера системы с переменной структурой рассмотрим модель «хищник-жертва» с миграцией популяции хищников [2], учитывающую изъятие особей жертв и хищников с интенсивностями $u_1, u_2 \geq 0$, соответственно:

если $\tilde{n} \geq \Lambda$, то

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2 - u_1), \quad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u_2), \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \tag{4}$$

если $\tilde{n} < \Lambda, x_2 > \varepsilon^*(x_1)$, то

$$\dot{x}_1 = ax_1, \quad \dot{x}_2 = x_2(-m - m_1), \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \tag{5}$$

если $\tilde{n} < \Lambda, 0 < x_2 \leq \varepsilon^*(x_1)$, то

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = -d, \quad \dot{\tilde{n}} = 0, \tag{6}$$

если $\tilde{n} < \Lambda, x_2 = 0$, то

$$\dot{x}_1 = ax_1, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \tag{7}$$

если $\tilde{n} = \Lambda, x_2 < \varepsilon^*(x_1)$, то

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = d, \quad \dot{\tilde{n}} = 0, \tag{8}$$

где $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$ – численности популяций жертв и хищников, соответственно; $\tilde{n} = \tilde{n}(t)$ – структурная переменная, далее, пищевая привлекательность участка; $a, b, k, m, m_1, \lambda, \Lambda, d$ – положительные постоянные ($k < 1$); $\varepsilon^*(x_1)$ имеет вид

$$\varepsilon^*(x_1) = \begin{cases} x_1/\lambda\,, 0 \leq x_1 < \varepsilon\lambda, \\ \varepsilon, x_1 \geq \varepsilon\lambda, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon$ – постоянная. Система (4) описывает взаимодействие хищников и жертв, (5) – миграцию хищников, (6) – исчезновение хищников из сообщества, (7) – динамику жертв в отсутствии хищников, (8) – появление хищников в сообществе. Переход от одной системы к другой происходит в зависимости от выполнения условий, предшествующих системам (4)-(8). Структура системы принимает два значения: $\gamma = (1\ 0)$, если хищники отсутствуют на участке обитания жертв; $\gamma = (1\ 1)$, если происходит миграция хищников или их взаимодействие с жертвами.

Допустимым управлением будем называть кусочно постоянные функции времени $u_1\colon \mathbb{R} \to [0, a)$, $u_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Решение системы (4), соответствующее $u_1, u_2$, обозначим через

$$r(t, M_0, u_1, u_2) = \big(x_1(t, M_0, u_1, u_2), x_2(t, M_0, u_1, u_2), \tilde{n}(t, M_0, u_1, u_2)\big),$$

где $r(0, M_0, u_1, u_2) = M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$.

**Задача (выживаемости).** Найти допустимое управление $u_1, u_2$ такое, что неравенство

$$\tilde{n}(t, M_0, u_1, u_2) \geq \Lambda \tag{9}$$

выполняется для любого $t \geq 0$. Очевидно, что решение этой задачи позволит сохранить структуру $\gamma = (1\ 1)$. Для простоты реализации предлагается чередовать изъятие особей с неизъятием.

В [4] построено периодическое кусочно постоянное допустимое управление $u_1, u_2$, сохраняющее структуру $\gamma = (1\ 1)$, для $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda) \in \Pi$, где $\Pi = \left\{(x_1, x_2, \Lambda)\colon x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \frac{m}{bk}, \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{a}{b}\right\}$. Доказано, что при построенном управлении неравенство (9) выполнено для $\forall\, t \geq 0$ и $r(t, M_0, u_1, u_2)$ периодично.

Построим управление, сохраняющее структуру $\gamma = (1\ 1)$, для $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda) \in K_1$, где $K_1 = \left\{(x_1, x_2, \Lambda)\colon x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \frac{m}{bk}, x_2 > \frac{a}{b}\right\}$. Введем обозначения: длина начального временного промежутка управления $\tau = N_0\tilde{T}(M_0)$, где $N_0 \in \mathbb{N}$, $\tilde{T}(M_0)$ – период решения системы Лотки-Вольтерра при $(u_1, u_2) \neq (0,0)$; $N_s + 1$ – количество полных оборотов, которое совершит точка траектории системы (4) до попадания на плоскость $\tilde{n} = \Lambda$ после $s$ изъятий и $(s-1)$-го неизъятия, где $s = 1,2, \ldots$, $N_s = \left[\frac{\tilde{n}_{s-1} - \Lambda + H + \int_\tau^{\tau+t_2}(x_1(t) - \lambda x_2(t))\,dt}{|\Delta|}\right]$, где $\Delta = \frac{aT(M_0)}{b}\left(\frac{m}{ak} - \lambda\right)$, $T(M_0)$ – период решения системы Лотки-Вольтерра при $u_1 = u_2 = 0$; $\tilde{n}_s = \tilde{n}(s\tau + \sum_{i=1}^{s}(N_i + 1)T(M_0))$, $\tilde{n}_0 = \Lambda, H = N_0\tilde{\Delta}$; $\tilde{\Delta} = \frac{(a-u_1)\tilde{T}(M_0)}{b}\left(\frac{(m+u_2)}{(a-u_1)k} - \lambda\right)$; $\square = \int_0^{T(M_0)+t_1-t_2}\big(x_1(t) - \lambda x_2(t)\big)\,dt$, где $t_1 = \min \mathbf{F} - \tau$, $t_2 = \max \mathbf{F} - \tau$ ($\mathbf{F} = \{t\colon t \in [\tau, \tau + T(M_0)\big), x_1(t) - \lambda x_2(t) = 0\}$), причем в выражении для $h$ $\big(x_1(0), x_2(0)\big)$ – точка пересечения прямой $\{(x_1, x_2, \Lambda)\colon x_1 - \lambda x_2 = 0\}$ и траектории системы Лотки-Вольтерра при $u_1 = u_2 = 0$, имеющая меньшие координаты. Будем считать, что $\sum_{i=1}^{s-1}(N_i + 1)T(M_0) = 0$, если $s = 1$.

**Теорема 1.** Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}, K_1 \ni M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$. Положим

$$u_1 = 0, \quad u_2 = kbx_{10} - m + x_{10}(bx_{20} - a)/(\lambda x_{20})$$

при $(s-1)\tau + \sum_{i=1}^{s-1}(N_i+1)T(M_0) \le t \le s\tau + \sum_{i=1}^{s-1}(N_i+1)T(M_0)$;

$$u_1 = u_2 = 0$$

при $s\tau + \sum_{i=1}^{s-1}(N_i+1)T(M_0) < t < s\tau + \sum_{i=1}^{s}(N_i+1)T(M_0)$, где $s = 1,2,3,\dots$. Тогда

$$\Lambda \le \tilde{n}(t, M_0, u_1, u_2) < \Lambda + |\Delta| + \square + N_0\tilde{\Delta}, \forall\, t \ge 0.$$

Естественно возникает вопрос о существовании периодического решения для $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda) \in K_1$ при построенном управлении. Далее, $|\Delta|$ обозначим через $\Delta$. Пусть $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, f(x) = x + N_0\tilde{\Delta}$, где $x \in [h, h+\Delta)$. Функция $f$ соответствует промежутку времени, на котором $u_1 = 0, \ u_2 = kbx_{10} - m + x_{10}(bx_{20} - a)/(\lambda x_{20})$. Положим $h = 0$ (можно сделать сдвиг $x \to x - h$). Тогда $f\big([0,\Delta)\big) = \big[N_0\tilde{\Delta}, \Delta + N_0\tilde{\Delta}\big)$. Поскольку длина последнего промежутка равна $\Delta$, то существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $p\Delta \in [N_0\tilde{\Delta}, \Delta + N_0, \tilde{\Delta})$, где $p = \left[\frac{\Delta + N_0\tilde{\Delta}}{\Delta}\right] = 1 + \left[\frac{N_0\tilde{\Delta}}{\Delta}\right]$, где $[\cdot]$ – символ целой части числа. Пусть $c = f^{-1}(p\Delta) = p\Delta - N_0\tilde{\Delta} \in [0,\Delta)$. Рассмотрим функцию $g: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$,

$$g(y) = \begin{cases} y - (p-1)\Delta, \text{если } f^{-1}(y) < c, \\ y - p\Delta, \qquad \text{если } f^{-1}(y) \ge c. \end{cases}$$

Функция $g$ соответствует промежутку времени, на котором $u_1 = u_2 = 0$. Введем отображение $G: [0,\Delta) \to [0,\Delta)$,

$$G(x) = g\big(f(x)\big) = \begin{cases} f(x) - (p-1)\Delta, \text{если } x < c, \\ f(x) - p\Delta, \qquad \text{если } x \ge c. \end{cases}$$

Далее, учитывая, что $f(x) = x + N_0\tilde{\Delta}$, получаем

$$G(x) = \begin{cases} x + \mu, \qquad \text{если } x < c, \\ x + \mu - \Delta, \text{если } x \ge c, \end{cases} \tag{10}$$

где $\mu = \big(N_0\alpha - (p-1)\big)\Delta, \alpha = \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta}$. $G$ определяет гомеоморфизм $\tilde{G}$ окружности $S^1 = \mathbb{R}/\Delta\mathbb{Z}$, $\tilde{G}: S^1 \to S^1$. Таким образом, управление, построенное для $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda) \in K_1$, порождает дискретную динамическую систему, задаваемую отображением $\tilde{G}: S^1 \to S^1$.

**Утверждение 1.** Гомеоморфизм $\tilde{G}: S^1 \to S^1$, определяемый отображением $G$ (10), является поворотом точек окружности $S^1$ на угол $\beta = \frac{2\pi N_0\tilde{\Delta}}{\Delta}$.

Пусть $\big\{\tilde{G}^n(x), n \in \mathbb{Z}, x \in S^1\big\} = \tilde{r}(x)$ – траектория точки $x \in S^1$, порожденная $\tilde{G}$.

**Теорема 2.** Если $\tilde{\Delta}/\Delta \in \mathbb{Q}$, то $\tilde{r}(x)$ периодична для $\forall x \in S^1$. Если $\tilde{\Delta}/\Delta \notin \mathbb{Q}$, то $\tilde{r}(x)$ плотна в $S^1$.

Теорема 2 является развитием результата, полученного в [1], поскольку в [1] доказана периодичность решения двумерной системы при непрерывно дифференцируемом управлении, а в данной работе доказана периодичность решения трехмерной системы при кусочно постоянном управлении.

**Заключение.** В работе решается задача выживаемости. Решение задачи построено в виде периодического кусочно постоянного управления, сохраняющего структуру системы. Доказаны теоремы о периодичности решения системы с построенным управлением. В дальнейшем возможно развитие работы по следующим направлениям: введение межвидовой конкуренции; рассмотрение системы с коэффициентами, зависящими от времени; изменение условий ухода хищников из участка, т.е. изменение правой части ДУ относительно пищевой привлекательности.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 18-01-00249а.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hausrath A., Manasevich R.** Periodic solutions of periodically harvested Lotka-Volterra systems. Revista Colombiana de Matematicas. 1987. Vol. 21. P. 337–346.
2. **Кириллов А.Н.** Экологические системы с переменной размерностью. Обозрение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6. № 2. С. 318–336.

3. **Одум Ю.** Основы экологии. М.: Мир, 1975. 746 с.
4. **Кириллов А.Н., Иванова А.С.** Периодический и квазипериодический процессы управления в задаче сохранения видового состава биосообщества. Труды КарНЦ РАН. 2015. № 10. С. 99–106.

**A.N. Kirillov, A.S. Ivanova** (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk). **Periodic control of the Volterra system that preserves its structure**

*Abstract.* A system of ordinary differential equations with variable structure is proposed. The problem of survival for this system is formulated. The solution to the problem is constructed in the form of a periodic piecewise constant control that preserves the structure of the system. Theorems on the periodicity of the solution for the system under the constructed control are proved.

О.Д. СУЗДАЛЕВ, А.В. ПАШЕНКО, Д.Н. ГЕРАСИМОВ, В.О. НИКИФОРОВ
(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

# УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ С НАРУШЕНИЕМ УСЛОВИЙ СОГЛАСОВАНИЯ

*Рассматривается задача адаптивного управления нелинейным объектом, представленном в параметризованной форме, с неизвестными параметрами и неизмеримым вектором состояния. Условия согласования управления с неопределенностями полагаются нарушенными. Решение основано на использовании специальной процедуры адаптивного бэкстеппинга, виртуальное управление в которой зависит от старших производных настраиваемых параметров (СПНП), и алгоритме адаптации с улучшенной параметрической сходимостью, позволяющем производить расчет СПНП.*

**Введение.** Задача адаптивного управления при нарушении условий согласования впервые была решена в 1991 году при помощи адаптивного бэкстеппинга с избыточной параметризацией [1]. Дальнейшее развитие процедуры бэкстеппинга без избыточной параметризации приведено в [2]-[3] и основано на использования функций настройки и модульных идентификаторов, причем в рассмотрение вводится и случай управления при неизмеримом векторе состояния. Альтернативное развитие адаптивного бэкстеппинга было предложено в статье [4] и основано на идее использования СПНП, для расчета которых использовалась схема Морза [5].

Предлагаемый доклад посвящен разработке адаптивного регулятора для управления по выходу нелинейным объектом с нарушением условий согласования. Решение основано на модификации процедуры, приведённой в статье [4], путём расчёта СПНП при помощи схемы «Расширения Памяти Регрессора», предложенной в [6] и развитой в [7]-[9], что обеспечивает улучшенную параметрическую сходимость.

**Постановка задачи.** В рамках данной задачи введем в рассмотрение следующую модель:

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \phi_i^T(y)\theta, i = \overline{1, n-1}, \quad (1)$$

$$\dot{x}_n = \beta(x)u + \alpha(x) + \phi_n^T(y)\theta, \quad (2)$$

$$y = x_1, \quad (3)$$

где $u \in \mathbb{R}$ – управление; $y \in \mathbb{R}$ – выходная (регулируемая) величина; $x = \mathrm{col}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, не доступный к прямому измерению; $\theta \in \mathbb{R}^q$ – вектор неизвестных параметров; $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \phi_i \in \mathbb{R}^q$ – непрерывные нелинейные функции ($\beta(x) \geq b_{min} > 0$);

Формальное математическое представление данной задачи имеет вид

$$\lim_{t\to\infty} \|\varepsilon(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|y_m(t) - y(t)\| = 0, \quad (4)$$

где $y_m$ – ограниченный задающий сигнал с известными производными; $\varepsilon$ – ошибка управления.

Решение задачи осуществляется в три шага: на первом шаге осуществляется параметризация неизмеримого вектора состояния; на втором шаге формируется адаптивный регулятор; на третьем шаге на основе специальной схемы расширения ошибки управления [2] и схеме расширения [5]-[6] строится алгоритм адаптации с улучшенной параметрической сходимостью.

**Шаг 1: Параметризация состояния.** Присутствие в (1)-(3) параметрических неопределенностей $\theta$ мотивирует к параметризации вектора состояний в виде (глава 7 [3])

$$x = \xi_0 + \xi_1\theta + \sigma, \quad (5)$$

где $\xi_0$ и $\xi_1$ – выходы фильтров

$$\dot{\xi}_0 = \bar{A}\xi_0 + My + b_0(\alpha(x) + \beta(x)u), \quad (6)$$

$$\dot{\xi}_1 = \bar{A}\xi_1 + \Phi, \quad (7)$$

$M \in \mathbb{R}^n$ – вектор констант $m_i \in \mathbb{R}_+$ $(i = \overline{1, n})$, выбранных из условия гурвицевости блочной матрицы $\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} -M & \begin{matrix} I_{n-1\times n-1} \\ O_{1\times n-1} \end{matrix} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times q}$.

*Замечание 1*. Экспоненциально затухающий член $\sigma$ может оказать влияние на устойчивость замкнутой системы управления нелинейным объектом, в связи с чем им нельзя пренебречь.

**Шаг 2: Синтез адаптивного регулятора.** Синтез регулятора выполняется методом адаптивного бэкстеппинга с использованием модульных идентификаторов [3]. Итеративно, на каждом шаге формируются виртуальные управления $U_i$

$$U_1 = (k_1 + F_1)z_1 - \bar{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{\theta} + \dot{y}_m, \tag{8}$$

$$U_i = z_{i-1} + (k_i + F_i)z_i + \sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\partial U_{i-1}}{\partial \xi_{1j}}\left(-m_j\xi_{11} + \xi_{1(j+1)} + \phi_j\right) + \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y_m^{(j-1)}}y_m^{(j)}\right] +$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{\partial U_{i-1}}{\partial \xi_{0j}}\left(m_j(y-\xi_{01}) + \xi_{0(j+1)}\right) + \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \hat{\theta}^{(j-1)}}\hat{\theta}^{(j)}\right] - m_i(y-\xi_{01}) + \omega_i\xi_{02} + \omega_i\bar{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{\theta}, \tag{9}$$

где $\xi_{0i}$ и $\xi_{1i}$ – элементы векторов $\xi_0 = \mathrm{col}(\xi_{01}, \xi_{02}, \dots, \xi_{0n})$ и $\xi_1 = \mathrm{col}(\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{1n})$ соответственно; $k_i \in \mathbb{R}_+ \ (i = \overline{1,n})$ – константы; $F_1 = g_1(\|\bar{\omega}\|^2 + 1)$ и $F_i = g_i\omega_i^2(\|\bar{\omega}\|^2 + 1)$ – демпфирующие члены с константами $g_i \in \mathbb{R}_+$; $\bar{\omega} = \xi_{12} + \phi_i$; $\omega_i = \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y}$; $\hat{\theta}$ – оценка вектора $\theta$; $z_i$ – компоненты вектора состояния модели ошибки $z = \mathrm{col}(z_1, z_2, \dots, z_n)$, задаваемые как

$$z_1 = \varepsilon = y_m - y, \tag{10}$$

$$z_i = U_{i-1} - \xi_{0i}, i = \overline{2,n}. \tag{11}$$

На последнем n-ом шаге фактическое управление формируется в виде:

$$u = \frac{1}{\beta}(U_n - \alpha). \tag{12}$$

*Лемма 1*. Применение к объекту (1)-(3) законов управления (8)-(12) позволяет свести задачу управления к модели ошибки замкнутой системы:

$$\dot{z} = A_z(z, y, \xi_0, \xi_1, \bar{y}_m, \bar{\theta})z + W(z, y, \xi_0, \xi_1, \bar{y}_m, \bar{\theta})\tilde{\theta} + Q(z, y, \xi_0, \xi_1, \bar{y}_m, \bar{\theta})\sigma_2, \tag{13}$$

где

$$A_z = \begin{bmatrix} -k_1 - F_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -k_2 - F_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n - F_n \end{bmatrix};$$

$W = [\bar{\omega}^T \otimes Q] \in \mathbb{R}^{n\times q}$ – регрессор; $Q = \mathrm{col}(-1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)$; $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ – вектор ошибок оценок параметров; $\sigma_2 = c_2^{\mathrm{T}}\sigma$ при $c_2 = \mathrm{col}(0,1,0,\dots,0)$; $\bar{\theta}, \bar{y}_m$ – вектора, включающий в себя все необходимые старшие производные настраиваемых параметров и выхода эталонной модели соответственно; $\otimes$ - кронекеровское произведение.

**Шаг 3: Синтез алгоритма адаптации.** С помощью следующей леммы представим динамическую форму модели ошибки (13) в статической форме линейной регрессии.

*Лемма 2*. Расширенная ошибка $\bar{z}$, определенная при помощи вспомогательных фильтров

$$\dot{\zeta} = A_z\zeta + W\hat{\theta}, \tag{14}$$

$$\dot{\bar{W}} = A_z\bar{W} + W, \tag{15}$$

как

$$\bar{z} = z + \zeta, \tag{16}$$

может быть представлена в виде

$$\bar{z} = \bar{W}\theta + \epsilon. \tag{17}$$

Регрессия (17) позволяет синтезировать алгоритм адаптации с улучшенной параметрической сходимостью. С этой целью производится расширение регрессора в соответствии со специальной модификацией схемы Крейссельмейера, изначально предложенной в [6] и развитой в [7]-[9], при помощи линейного фильтра $\mathcal{H}(s) = \frac{1}{d(s)}$ с Гурвицевым полиномом $d(s) = s^\rho + d_{\rho-1}s^{\rho-1} + \cdots + d_0$ порядка $\rho \geq (n-2)$ с постоянными коэффициентами.

Новая регрессия, полученная на основании (17), имеет вид:

$$Z = \Omega\theta + \bar{\epsilon}, \tag{18}$$

где $Z = \mathcal{H}(s)[\bar{W}^T\bar{z}]$; $\Omega = \mathcal{H}(s)[\bar{W}^T\bar{W}]$ – расширенный регрессор ($\Omega = \Omega^T \geq 0$); $\bar{\epsilon} = \mathcal{H}(s)[\bar{W}^T\epsilon]$.

Регрессия (18) мотивирует синтез алгоритма адаптации

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma(Z - \Omega\hat{\theta}), \tag{19}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}_+$ – коэффициент адаптации.

*Замечание 2.* Структура $\mathcal{H}(s)$ и алгоритма адаптации (19) позволяют рассчитывать старшие производные $\hat{\theta}$ путём прямого дифференцирования выражения (19).

*Утверждение 1.* Закон управления (6)-(12), фильтры (14)-(15), расширенная ошибка (16) и алгоритм адаптации (19) совместно обеспечивают следующие свойства для объекта (1)-(3), замкнутого адаптивным регулятором:

1. Ограниченность всех сигналов в замкнутой системе и асимптотическая сходимость ошибки управления $\varepsilon$ к нулю.
2. Если $\lambda(t) \notin L_1$, где $\lambda(t)$ – минимальное собственное число матрицы $\Omega$, $\|\tilde{\theta}\|$ сходится к 0 асимптотически, скорость может быть повышена увеличением $\gamma$;
3. Если $\lambda(t) \geq \lambda_0 > 0$, $\|\tilde{\theta}\|$ сходится к 0 экспоненциально, скорость может быть повышена увеличением $\gamma$.

Так достижение цели управления обеспечивается Свойством 1. Свойства 2 и 3 в свою очередь позволяют утверждать о достижении улучшенной параметрической сходимости.

**Моделирование.** Рассмотрим объект 3-го порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \phi_1^T(y)\theta, \tag{20}$$
$$\dot{x}_2 = x_3, \tag{21}$$
$$\dot{x}_3 = u, \tag{22}$$
$$y = x_1, \tag{23}$$

где $\phi_1(y) = \mathrm{col}(y^2, \sin(y))$; $\theta = \mathrm{col}(4,5)$; $x(0) = \mathrm{col}(-5,0,0)$.

Задающий эталонный сигнал имеет вид:

$$y_m(t) = (s+1)^{-3}[r(t)], \tag{24}$$

где $r(t) = \sin(t) + 3$.

Параметры регулятора: $k_i = 1$; $g_i = 10^{-6}$ $(i = \overline{1,3})$; $m_1 = 1, m_2 = m_3 = 3$;

$$\mathcal{H}(s) = (s+0.5)^{-1}. \tag{25}$$

Результаты моделирования для системы (20)-(23), замкнутой разработанным адаптивным регулятором, приведены на рисунках 1 и 2 для разных $\gamma$.

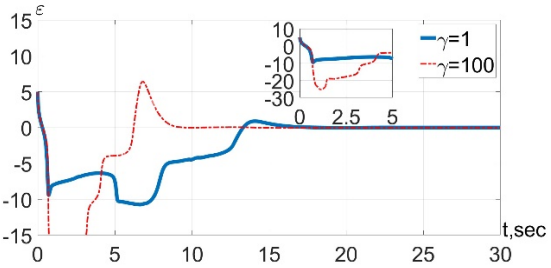



Рис.1. Ошибки управления в адаптивной системе при различных коэффициентах адаптации $\gamma = 1$ (непрерывная линия) и $\gamma = 100$ (прерывистая линия).

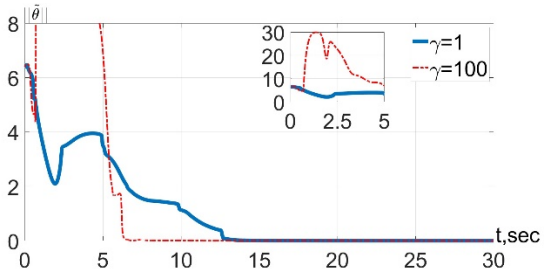



Рис.2. Нормы параметрических ошибок при различных коэффициентах адаптации $\gamma = 1$ (непрерывная линия) и $\gamma = 100$ (прерывистая линия).

**Заключение.** В рамках данной работы был разработан и представлен адаптивный регулятор, способный обеспечить управление нелинейным объектом по выходу, тем самым разрешая проблему нарушения условий согласования, и обеспечить улучшенную параметрическую сходимость. Представленное решение состоит из виртуальных управлений (8)-(9), фактического управления (12), фильтров (6)-(7) и (14)-(15) и закона адаптации (19).

ЛИТЕРАТУРА


1. **Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V., Morse A. S.** Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems //1991 American Control Conference. – IEEE, 1991. – С. 649-654.
2. **Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.** Adaptive nonlinear control without overparametrization // Systems & Control Letters. – 1992 – .Т. 19, No 3 . – С. 177-185.
3. **Krstic M., Kokotovic P. V., Kanellakopoulos I.** Nonlinear and adaptive control design. – John Wiley & Sons, Inc., 1995.
4. **Nikiforov V. O., Voronov K. V.** Adaptive backstepping with a high-order tuner //Automatica. – 2001. – Т. 37. – №. 12. – С. 1953-1960.
5. **Morse A. S.** High-order parameter tuners for the adaptive control of linear and nonlinear systems //Systems, models and feedback: Theory and Applications. – Birkhäuser, Boston, MA, 1992. С. 339–364.
6. **Kreisselmeier G.** Adaptive observers with exponential rate of convergence //IEEE transactions on automatic control. – 1977. – Т. 22. – №. 1. – С. 2-8.
7. **Gerasimov D. N., Nikiforov V. O.,** On key properties of the Lion's and Kreisselmeier's adaptation algorithms //IFAC-PapersOnLine. – 2020. (принята)
8. **Gerasimov D. N., Belyaev M. E., Nikiforov V. O.** Performance improvement of discrete MRAC by dynamic and memory regressor extension //2019 18th European Control Conference (ECC). – IEEE, 2019. – С. 2950-2956.
9. **Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.** On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes //Annual Reviews in Control. – 2020.
10. **Ioannou P. A., Sun J.** Robust adaptive control. – Prentice-Hall, 1996.


---

**O.D.Suzdalev, A.V.Pashenko, D.N.Gerasimov, V.O.Nikiforov,** (ITMO University, St-Petersburg). **Output control of a parametrically indeterminate nonlinear object with non-matching conditions**

*Abstract.* This paper considers the problem of adaptive control of a nonlinear object presented in the parameterized form with unknown parameters and immeasurable state vector. The matching conditions with uncertainties are assumed to be violated. The solution is based on the use of a special adaptive backstepping procedure, of which the virtual control depends on the higher-order derivatives of configurable parameters (HODCP), and an adaptive algorithm with improved parametric convergence, which allows calculating the HODCP.

Е. И. ВЕРЕМЕЙ
(Санкт-Петербургский государственный университет)

# О СИНТЕЗЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ НА БАЗЕ ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

*В докладе представлены новые идеи, связанные с синтезом нелинейных стабилизирующих законов управления в рамках оптимизационного подхода. При этом учитывается существенная связь между желаемыми свойствами замкнутой системы и функционалом, подлежащим минимизации. В центре внимания находится принцип оптимального демпфирования, предложенный В.И. Зубовым в начале 60-х годов. Акцент сделан на учете особенностей этого инструмента, позволяющих формировать новые методы практического синтеза систем управления с желаемыми динамическими свойствами.*

**Введение.** Одним из наиболее значимых вариантов функционирования систем автоматического управления нелинейными динамическими объектами служит режим стабилизации нулевого положения равновесия. Основным требованием при этом является обеспечение его асимптотической устойчивости, а дополнительным – гарантирование желаемого качества процессов управления. Выполнение этих требований осуществляется с помощью обратных связей, чаще всего, формируемых с привлечением оптимизационного подхода. Широко используются такие инструменты, как: принцип оптимальности Беллмана, принцип максимума Понтрягина, техника управления с прогнозом (MPC) и другие.

В данной работе центральное внимание уделяется теории оптимального демпфирования переходных процессов, разработанной В. И. Зубовым в начале 60-х годов прошлого столетия. Очевидным преимуществом этого подхода служит идейная простота формирования стабилизирующей обратной связи. Возможности компьютерных технологий позволяют в настоящее время ставить вопрос о широком практическом применении подхода для повышения эффективности и качества систем автоматического управления.

Предлагаемый доклад посвящен учету особенностей идеологии оптимального демпфирования для разработки новых методов обеспечения ее практической применимости при синтезе стабилизирующих управлений с желаемыми динамическими свойствами.

**Существо принципа оптимального демпфирования.** Рассмотрим задачу стабилизации нелинейного динамического объекта с математической моделью

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}),\ t \in [0,\infty), \tag{1}$$

где векторы $\mathbf{x} \in E^n$ и $\mathbf{u} \in E^m$ представляют состояние и управление соответственно, а непрерывно дифференцируемая в пространстве $E^{n+m}$ функция $\mathbf{f} : E^{n+m} \to E^n$ удовлетворяет условию $\mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, т.е. объект (1) имеет нулевое положение равновесия.

Существо задачи состоит в построении обратной связи

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной функцией $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, сохраняющей нулевое положение равновесия для замкнутой системы (1), (2), и обеспечивающей его асимптотическую устойчивость при условии $\mathbf{u} \in U \subset E^m$, где допустимое множество $U$ является метрическим компактом.

В дополнение к этим условиям в практических приложениях вводятся требования, предъявляемые к качеству процессов управления. Чаще всего, эти требования задаются в виде

$$\mathbf{x}(t,\mathbf{x}^0,\mathbf{u}(\cdot)) \in X,\ \forall t \geq 0,\ \forall \mathbf{x}^0 \in B_r,\ \forall \mathbf{u} \in U, \tag{3}$$

где векторная функция $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}^0,\mathbf{u}(\cdot))$ представляет движение замкнутой системы (1), (2) с начальными условиями $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, множество $X$ определяет ограничения на это движение, множество $B_r$ является $r$-окрестностью начала координат.

В различных практических приложениях сформулированная задача обычно сводится к оптимизационному варианту. Рассмотрим два возможных подхода к такому сведению. Первый из них связан с заданием на движениях замкнутой системы интегрального функционала

$$J = J(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^\infty F_0(\mathbf{x},\mathbf{u})\,dt \tag{4}$$

с положительно определенной функцией $F_0 \ge 0$, $\forall \mathbf{x} \in B_r$, $\forall \mathbf{u} \in U$, которая обращается в ноль только в точке $(\mathbf{0},\mathbf{0})$. При этом задача о минимизации интегрального функционала (МИФ)

$$J = J(\mathbf{u}(\cdot)) \to \inf_{\mathbf{u}\in U_c},\ \ \mathbf{u}_{c0}(\mathbf{x}) = \arg\inf_{\mathbf{u}\in U_c} J(\mathbf{u}(\cdot)),\ \ J_0 := J(\mathbf{u}_{c0}(\cdot)) \tag{5}$$

на множестве $U_c$ стабилизирующих управлений дает МИФ регулятор $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{c0}(\mathbf{x})$ вида (2).

Второй подход базируется на теории *оптимального демпфирования* (ОД) *переходных процессов*, предложенной В.И. Зубовым [1 – 3]. Здесь вводится вспомогательный функционал

$$L = L(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) = V(\mathbf{x}) + \int_0^t F(\mathbf{x},\mathbf{u})\,d\tau \tag{6}$$

с заданной непрерывно дифференцируемой функцией $V$ и функцией $F$, имеющей такие же свойства, как и функция $F_0$.

Задача оптимального демпфирования по отношению к функционалу (6) имеет вид

$$W = W(\mathbf{x},\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u}\in U},\ \ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d(\mathbf{x}) := \arg\min_{\mathbf{u}\in U} W(\mathbf{x},\mathbf{u}), \tag{7}$$

где функция $W$ определяет скорость изменения функционала $L$ на движениях объекта (1):

$$W(\mathbf{x},\mathbf{u}) := (dL/dt)\big|_{(1)} = (\partial V(\mathbf{x})/d\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + F(\mathbf{x},\mathbf{u}).$$

Согласно принципу оптимального демпфирования, процесс управления тем лучше, чем быстрее убывает функционал (6) на движениях замкнутой системы. Этот принцип реализуется использованием обратной связи $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d(\mathbf{x})$ (ОД регулятора).

Особо отметим, что численное решение задачи (7) выполняется гораздо проще, чем решение задачи (5). В этом состоит основное преимущество второго подхода.

***Особенности оптимальных демпфирующих управлений.*** По отношению к задаче ОД справедливы следующие основные утверждения:

1. Если непрерывно дифференцируемая функция $V$ в функционале (6) $\forall \mathbf{x} \in B_r$ удовлетворяет условию $\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \le V(\mathbf{x}) \le \alpha_2(\|\mathbf{x}\|)$, и при этом справедливо $W(\mathbf{x},\mathbf{u}_d(\mathbf{x})) \le -\alpha_3(\|\mathbf{x}\|)$, где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – функции сравнения Хана из класса $\mathbf{K}$ ([4]), то функция $V(\mathbf{x})$ является *управляющей функцией Ляпунова* (CLF) ([4]) для объекта (1), а управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d(\mathbf{x})$ обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия замкнутой системы.

2. Если задана непрерывно дифференцируемая функция $V$, удовлетворяющая условию $\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \le V(\mathbf{x}) \le \alpha_2(\|\mathbf{x}\|)$ $\forall \mathbf{x} \in B_r$, которая является CLF для объекта (1), то найдется такая функция $F(\mathbf{x},\mathbf{u}) \ge 0$, $\forall \mathbf{x} \in B_r$, $\forall \mathbf{u} \in U$ в (7), что соответствующий ОД регулятор $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d(\mathbf{x})$ обеспечивает асимптотическую устойчивость указанного положения равновесия.

3. Пусть задача МИФ (5) имеет единственное решение. Пусть также управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d(\mathbf{x})$ служит ОД регулятором для функционала (6), где $F \equiv F_0$, а функция $V(\mathbf{x})$ является *функцией значений* (решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана) для задачи МИФ. Тогда ОД регулятор будет одновременно решением задачи (5), т.е. $\mathbf{u}_{c0}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}_d(\mathbf{x})$. В случае неединственности любой из ОД регуляторов можно принять в качестве решения МИФ задачи.

4. Пусть правая часть уравнения (1) допускает разложение $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ в степенной ряд в окрестности точки $(\mathbf{0},\mathbf{0})$, где $\lim_{\|\mathbf{x},\mathbf{u}\|\to 0}[\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{u})/\|\mathbf{x},\mathbf{u}\|] = \mathbf{0}$, со стабилизируемой парой $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$. Произвольно зададим симметрические матрицы $\mathbf{Q} \ge \mathbf{0}$ и $\mathbf{R} > \mathbf{0}$ размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно и найдем решение $\mathbf{S}$ уравнения Риккати $\mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} = -\mathbf{Q}$, которое будет симметрической положительно определенной матрицей. При этом квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x}$ является CLF для объекта (1), что позволяет ее использовать в рамках предшествующих утверждений.

***Практическое применение принципа ОД.*** Указанные особенности ОД регуляторов позволяют определить следующие пути практического использования оптимального демпфирования.

а) В рамках утверждений 1 и 2 оптимальная демпфирующая обратная связь $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d(\mathbf{x})$ допускает непосредственное применение в режиме реального времени. Это делается наиболее просто, если функция $\mathbf{u}_d(\mathbf{x})$ найдена аналитически. В противном случае поиск ее значений для текущего состояния $\mathbf{x}$ можно выполнять численно: в частности, если размерность $m$ вектора $\mathbf{u}$ не высока, приближение к решению задачи (7) можно искать на конечной сетке $U_{ns} \subset U$.

б) Если МИФ задача (5) имеет определенное самостоятельное значение по отношению к требованиям (3), то ОД задача (7) может быть использована для поиска приближенно оптимального МИФ регулятора. Такой подход имеет смысл, если прямое решение задачи (5) либо слишком сложно, либо если регулятор $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{c0}(\mathbf{x})$ не удобен для практической реализации.

в) ОД задача (7), без прямой связи с каким либо интегральным функционалом (4) и МИФ задачей (5), может быть непосредственно использована для формирования методов обеспечения устойчивости и требований (3), предъявляемые к качеству процессов управления. Эти методы базируются на определенном выборе варьируемых функций $V$ и $F$ в (6).

Конкретная реализация указанных путей осуществляется с помощью новых методов синтеза. Их основу составляет указанный выше выбор функции $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x}$ с введением параметризации матриц $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ и функции $F$ с заданной структурой с помощью вектора параметров $\mathbf{h} \in E^p$. Далее используется оптимизационный подход для настройки варьируемых параметров.

**Заключение.** В докладе рассмотрены особенности обратных связей, синтезированных на базе принципа оптимального демпфирования. Предложены основные пути использования этих особенностей для решения практических задач с нелинейными объектами. Указаны возможные подходы для реализации указанных путей в виде новых методов синтеза.

Результаты проведенных исследований могут быть развиты и расширены с учетом формирования управления по измеряемому выходу, с учетом транспортного запаздывания по управлению и выходу, с обеспечением желаемой меры робастности замкнутой системы. Особую роль играет адаптация представленного подхода для решения практических задач по управлению морскими подвижными объектами.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 20-07-00531.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зубов В.И.** Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз, 1962. 630 с.
2. **Зубов В.И.** Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л.: Судпромгиз, 1966. 352 с.
3. **Зубов В.И.** Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
4. **Khalil H.** Nonlinear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2002. 766 p.

---

**E.I. Veremey** (Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg). **On Stabilizing Control Synthesis Based on Optimal Damping Concept**

*Abstract.* This work presents some new ideas connected to nonlinear control laws design in the range of an optimization approach. It noted that there is an essential connection between desirable practical demands and the functionals to be minimized. This connection is at the center of the presented material. Main attention is focused on the optimal damping concept first proposed by V.I. Zubov in the early 1960's. Various modern aspects of the optimal damping theory's practical implementation are discussed. Emphasis is given to the specific choice of the functional to be damped to provide the desirable stability and performance features of a closed-loop connection.

И. Н. БАРАБАНОВ, В. Н. ТХАЙ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва)

# СВЯЗИ-УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

*Исследуются механические системы, каждая из которых допускает семейство, содержащее невырожденные одночастотные колебания. Решается задача нахождения связей-управлений между системами, обеспечивающих существование, орбитальную асимптотическую устойчивость и стабилизацию колебания модели, содержащей связанные механические системы. При этом осуществляется естественная стабилизация колебания модели без привлечения иных управлений, а также происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе.*

**Введение.** В настоящее время связанные системы стали предметом многочисленных исследований в различных областях знаний. При исследовании модели, содержащей связанные подсистемы (МССП), в [1] предложено выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и стабилизацию колебаний связанной системы. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации решается естественным образом, т.е. без привлечения иных управлений. Идея, предложенная в [1], развивается ниже для МССП, содержащей консервативные системы с одной степенью свободы. Находятся структура и вид связей, не зависящих явно от времени, обеспечивающих существование, орбитальную асимптотическую устойчивость и стабилизацию колебания модели.

**Постановка задачи.** Рассматриваются $n$ консервативных систем с одной степенью свободы

$$\ddot{x}_s + f_s(x_s) = 0, \quad s = 1,\ldots,n. \tag{1}$$

Предполагается, что каждая система допускает семейство симметричных периодических движений (СПД)

$$x_s = \varphi_s(h_s, t + \gamma_s), \quad s = 1,\ldots,n$$

по параметрам $h_s$ и $\gamma_s$; нулевым значениям сдвига начальной точки по траектории $\gamma_s$ отвечает СПД несвязанной системы, состоящей из подсистем (1). Рассматриваются невырожденные семейства СПД.

*Определение* 1. *Семейство периодических движений по параметру $h$ называется невырожденным, если на нем производная от периода $T(h)$ по постоянной энергии отлична от нуля.*

Заметим, что в силу этого определения колебания линейного осциллятора вырожденные, а семейство колебаний математического маятника – невырожденное.

Модель, включающая системы (1), обычно является приближением полной модели, в которой учитываются слабые связи между системами, и в правые части (1) добавлены функции $\varepsilon u_s(x, \dot{x})$ ($\varepsilon$ – малое число). Поэтому исследованию подвергается слабо связанная МССП. Слабые связи могут при $\varepsilon > 0$ качественно изменить динамику МССП. При анализе одночастотных колебаний МССП выделяются два случая. В одном из них системы (1) допускают изолированное колебание; колебания МССП исследовались в [2,3].

В настоящей работе находятся связи, обеспечивающие существование семейства СПД в МССП. Показывается, как при изменении связей рождается орбитально асимптотически устойчивый цикл МССП, при этом проводится естественная, без использования других управлений, стабилизация цикла.

**Основной результат.** Задача существования СПД связанной системы решается использованием связей $p_s(x)$, зависящих только от координат $x_1,\ldots,x_n$. Тогда получается слабо связанная обратимая механическая система, в которой семейства невырожденных СПД подсистем становятся (см. [4]) одним невырожденным семейством СПД МССП, в котором $h_s = h_s(\theta)$,

$s=1,\ldots,n$, а $\gamma_1=\ldots=\gamma_n$. Тогда, без ограничения общности, этот единственный сдвиг можно считать равным нулю.

Найденные связи $p_s$ не обеспечивают существование цикла. Поэтому добавляются связи-управления $v_s(x,\dot{x})$. Задача о цикле решается в [4] амплитудным уравнением

$$I(\theta)\equiv\int_0^{T^*}\sum_{s=1}^{n}u_s(\varphi(\theta,t),\dot{\varphi}(\theta,t))\psi_s(\theta,t)dt=0. \tag{2}$$

Здесь $\psi_s$ – решение сопряженной линейной системы, для консервативной системы с одной степенью свободы $\psi_s=\dot{x}_s$ [1]; число $T^*=T\left(\theta^*\right)$ отвечает периоду цикла.

Уравнение (2) доставляет необходимые условия существования $T^*$-периодического решения связанной системы и существования этого решения с точностью до $\varepsilon$. Достаточное условие сводится к неравенству [4]

$$\frac{dI\left(\theta^*\right)}{d\theta}\neq 0. \tag{3}$$

Управление находится в виде двух слагаемых

$$u(x,\dot{x})=p(x)+v(x,\dot{x}). \tag{4}$$

Второе слагаемое $v(x,\dot{x})$ выбирается как диссипация типа Ван дер Поля. Такое универсальное управление предлагается в [5]. В применении к исследуемой системе получается

$$v_s=\left(1-K(\theta)\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)\sum_{j=1}^{n}l_{sj}\dot{x}_j,\quad s=1,\ldots,n, \tag{5}$$

где числовая матрица $L=\left\|l_{sj}\right\|$ выбирается из требования стабилизируемости цикла. Положительная функция $K(\theta)$ дается формулой

$$K(\theta)=\frac{\int_0^{T(\theta)}\sigma(\theta,t)dt}{\int_0^{T(\theta)}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\theta,t)^2)\sigma(\theta,t)dt},\quad \sigma=\sum_{s,j=1}^{n}l_{sj}\dot{\varphi}_j(\theta,t)\psi_s(\theta,t), \tag{6}$$

она гарантирует выполнение амплитудного уравнения при всех $\theta$. Поэтому для СПД с коэффициентом $K\left(\theta^*\right)$ амплитудное уравнение допускает корень $\theta=\theta^*$.

*Определение* 2. *Точку* $h$, *в которой* $\frac{dK(h)}{dh}=0$ *назовем критической точкой семейства СПД по функции* $K\left(h\right)$.

*Теорема. Функции* (4) *с связями-управлениями* (5) *и характеристикой* $K(\theta)$ *в виде* (6) *в каждой некритической точке семейства СПД гарантируют существование цикла связанной механической системы. При этом выбором матрицы* $L=\left\|l_{sj}\right\|$ *обеспечивается орбитальная асимптотическая устойчивость цикла.*

Матрица $L$ вычисляется из условий орбитальной асимптотической устойчивости цикла.

**Заключение.** В настоящее время связанные системы интенсивно исследуются. В них связями отражается действие подсистемы на соседние подсистемы. В этом смысле связи управляют динамикой как подсистем, так и всей связанной системы. В задаче о колебаниях механической связанной системы с подсистемами – системами с одной степенью свободы связующие управления находятся в виде диссипации в каждой текущей точке траектории; связи-управления

обеспечивают существование колебания и его естественную стабилизацию, а также синхронизацию колебаний по частоте и фазе.

*Работа проводилась при частичной поддержке гранта РФФИ 19-01-00146а*

ЛИТЕРАТУРА

1. Тхай В.Н. Стабилизация колебаний автономной системы. *Автоматика и телемеханика.* 2016. № 6. С.38-46.
2. Тхай В.Н. Колебания автономной модели, содержащей связанные подсистемы. *Автоматика и телемеханика.* 2015. № 1. С. 81-90.
3. Тхай В.Н. Колебания автономной модели, содержащей связанные подсистемы. *Автоматика и телемеханика.* 2017. № 4. С. 21-36.
4. Тхай В.Н. Периодические движения возмущенной обратимой механической системы. *Прикладная математика и механика.* 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 181-195.
5. Тхай В.Н. Стабилизация колебания управляемой механической системы с *N* степенями свободы. *Автоматика и телемеханика.* 2020. № 9. С. 93-104.

**I. N. Barabanov, V. N. Tkhai** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow).
**Coupling controls for stabilization of oscillations in mechanical systems**

*Abstract.* We study mechanical systems, each of which admits a family containing non-degenerate single-frequency oscillations. We find coupling controls between systems that ensure the existence, orbital asymptotic stability and stabilization of the oscillation of a model containing coupled mechanical systems. At the same time, the oscillation is naturally stabilized without involving other controls, and the oscillations of mechanical systems are synchronized in frequency and phase.

Е.А. КРУПЕННИКОВ
(Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург,
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург)

# К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

*Доклад посвящен задачам динамической реконструкции управлений по неточным замерам реализованной траектории для динамических управляемых детерминированных систем. Рассматривается подход к их решению, основанный на вспомогательных задачах вариационного исчисления. Представлены результаты численной реализации обсуждаемого метода в применении к модельным примерам из области механики. Результаты указывают на перспективность дальнейшей разработки нового подхода.*

**Введение.** Предлагаемый доклад посвящен обратным задачам теории управления, а именно – задаче динамической реконструкции управлений (входа) по известным неточным замерам реализованной траектории (выхода) для динамических управляемых детерминированных систем. Реконструкция производится в реальном времени по ходу поступления дискретных замеров. Подобные задачи актуальны в робототехнике [1] и других прикладных областях, в которых используется аппарат теории управления.

Один из наиболее известных подходов к решению задач реконструкции был предложен Ю.С. Осиповым и А.В. Кряжимским [2]. Этот подход (далее – подход ОК) опирается на процедуру экстремального прицеливания [3] на вспомогательную модельную систему.

В докладе обсуждается новый подход (далее – подход СКТ), предложенный Субботиной Н.Н., Крупенниковым Е.А. и Токманцевым Т.Б. в работах [4,5,6]. Этот подход опирается на вспомогательные вариационные задачи. Его особенностью является использование выпукло-вогнутого интегрального функционала невязки, что позволяет получить стабильный колебательный характер решений. Общим для подходов ОК и СКТ является использование регуляризации по Тихонову [7].

В докладе представлены результаты численной реализации подхода СКТ. Их можно сравнить с результатами реализации метода ОК, опубликованными в [2].

**Основная часть.** Рассматриваются динамические системы вида

$$\dot{x}(t) = G\big(t,x(t)\big)u(t) + f\big(t,x(t)\big), \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m, \quad t \in [0,T], \qquad (1)$$

$$G(t,x)\colon [0,T]\times R^n \to R^{n\times m}, \quad f(t,x)\colon [0,T]\times R^n \to R^n,$$

где $u(t)$ – вектор управлений, а $x(t)$ – вектор фазовых переменных. Допустимые управления – измеримые функции, удовлетворяющие ограничению

$$u(t) \in U, \qquad t \in [0,T],$$

где $U \in R^m$ – компактное выпуклое множество.

***Входные данные задачи.*** Предполагается, что в реальном времени наблюдается т.н. базовая траектория $x^*(\cdot)\colon [0,T] \to R^n$, порождаемая неизвестным допустимым управлением. Дискретные замеры базовой траектории

$$\left\{ y_i^\delta \in R^n, \quad \left\| x^*(t_i) - y_i^\delta \right\| \le \delta > 0, \quad i = 0,\dots,N, \quad t_i = i\,\square, \quad \square = \frac{T}{N} \right\} \qquad (2)$$

поступают с постоянным шагом измерения h.

***Предположение 1.*** Существует такой компакт $D_0 \subset R^n$ и такие числа $\delta_0 > 0$, $h_0 > 0$, что

$$\forall \delta \le \delta_0, \quad \forall h \le h_0 \quad y_i^\delta \subset D_0, \quad i = 0,\dots,N, \qquad (4)$$

причем элементы $G(t,x)$ и $f(t,x)$ из (1) дважды непрерывно дифференцируемы по всем аргументам на $[0,T]\times D_0$, и ранг матрицы $G(t,x)$ равен $\min\{n,m\}$ на $[0,T]\times D_0$.

***Постановка задачи.*** Показано [6], что для входных данных, удовлетворяющих Предположению 1, существует единственное нормальное допустимое управление $u^*(\cdot)\colon [0,T] \to R^m$, порождающее траекторию $x^*(\cdot)$ и имеющее минимальную норму в пространстве $L^2[0,T]$. Задача динамической реконструкции состоит в построении для заданного набора замеров с погрешно-

стью $\delta \le \delta_0$ и шагом $h = h(\delta) \le h_0$ такого допустимого управления $u^\delta(\cdot)\colon [0,T] \to R^m$, что выполняются условия

**У1.** $\left\|x^\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\right\|_{C[0,T]} \xrightarrow{\delta\to 0} 0$, где $x^\delta(\cdot)\colon [0,T] \to R^n$ – траектория, порождаемая $u^\delta(\cdot)$;

**У2.** $u^\delta(\cdot) \xrightarrow{w^*} u^*(\cdot)$ при $\delta \to 0$, где символ $\xrightarrow{w^*}$ обозначает *-слабую сходимость в пространстве $\mathrm{C}([0,T], R^n)$.

Предполагается, что функция $u^\delta(\cdot)$ достраивается в реальном времени по мере поступления замеров.

***Предлагаемый алгоритм решения.*** Построение решения ведется пошагово по мере поступления замеров. На каждом *i*-ом шаге достраивается гладкая интерполяция $y^\delta(\cdot)$ поступающих дискретных замеров. Затем вводится вспомогательная задача вариационного исчисления (ВЗВИ) на множестве непрерывно дифференцируемых функций
$x_i(\cdot), u_i(\cdot)$, удовлетворяющих уравнениям динамики (1) и краевым условиям

$$x_0(0) = y_0^\delta, \dot{x}_0(0) = \dot{y}^\delta(0), i = 0, \qquad x_i(\mathrm{t_i}) = y_\mathrm{i}^\delta, \dot{x}_i(\mathrm{t_i}) = \dot{x}_{i-1}(\mathrm{t_i}), i = 1, \dots, N-1.$$

ВЗВИ состоит в минимизации функционала

$$I\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} -\frac{\left\|x(t) - y^\delta(t)\right\|^2}{2} + \alpha^2 \frac{\|u(t)\|^2}{2} dt \to min, \tag{5}$$

где $\alpha$ – малый регуляризирующий параметр [7].

Необходимые условия оптимальности для ВЗВИ находятся в форме Лагранжа. Они имеют вид гамильтоновой системы уравнений. Рассматривается линеаризация этой системы, получаемая путем «заморозки» значений $G\big(t_i, y_i^\delta\big)$ и $f\big(t_i, y_i^\delta\big)$. Пусть $\left\{\hat{x}_i^{\delta,\alpha}(\cdot), \hat{u}_i^{\delta,\alpha}(\cdot)\right\}$ - решение линеаризованной системы. Предлагается рассматривать на этом (*i*-ом) шаге в качестве решений задачи **У1-У2** функции-срезки

$$u_i^{\delta,\alpha}(t) = \begin{cases} \hat{u}_i^{\delta,\alpha}(t), & \hat{u}_i^{\delta,\alpha}(t) \in U, \\ \hat{u} \in R^m\colon \left\|\hat{u}_i^{\delta,\alpha}(t) - \hat{u}\right\| = \min\limits_{u\in U}\left\|\hat{u}_i^{\delta,\alpha}(t) - u\right\|, & u_i^{\delta,\alpha}(t) \notin U. \end{cases} \tag{6}$$

Процедура построения решения подробно описана, например, в [5,6]. В работах [4,5,6] приводится обоснование сходимость метода.

***Пример 1.*** Рассмотрим модель плоского двухзвенного манипулятора, описанную в [1, с.223-225]. Для простоты будем считать, что влияние сил тяжести устранено системами разгрузки. Тогда динамика звеньев описывается системой

$$\ddot{q}(t) = G\big(q(t)\big)u(t), \qquad q(t) \in R^2, \qquad u(t) \in R^2, \qquad |u_1(t)| \le 1, |u_2(t)| \le 1, \qquad t \in [0{,}25],$$

$$G(t,q) = \begin{pmatrix} I_1 + I_2 + m_1(l_1')^2 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l_2' \cos(q_1 - q_2) \\ m_2 l_1 l_2' \cos(q_1 - q_2) & m_2 (l_2')^2 + I_2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$l_1 = l_2 = 1\text{м}, m_1 = 20\text{кг}, m_2 = 10\text{кг}, l_1' = 0.5\text{м}, l_2' = 0.3\text{м}, I_1 = 1.67\text{кг}\cdot\text{м}^2, I_2 = 1.67\text{кг}\cdot\text{м}^2,$$

где $q(t)$ – вектор обобщенных координат (углов поворота звеньев), а $u(t)$ – вектор управлений (моментов, подаваемых на шарниры). Система (7) приводится к виду (1) путем введения новых переменных-скоростей $w_1(t) = \dot{q}_1(t), w_2(t) = \dot{q}_2(t)$.

Ставится задача **У1-У2** для базовой траектории, порождаемой кусочно-заданными управлениями

$$u_1^*(t) = \left\{{}^t\!/_{25}, t \in [0{,}8]; \quad 0.33, t \in [8{,}25]\right\}, \quad u_2^*(t) = \{0.2, t \in [0{,}8]; \quad -0.1, t \in [8{,}25]\}.$$

Эти управления взяты для эмуляции входных данных задачи **У1-У2** – в самой задаче предполагается, что они неизвестны. В качестве замеров берутся точки заранее построенных численно траекторий, на которые наложены случайные возмущения в пределах $[-\delta, \delta] = [-0.01{,}0.01]$. Число замеров $N = {}^T\!/_h = 100$.

Результаты численной реконструкции управлений с помощью подхода СКТ представлены на рис. 1. Красным цветом обозначены графики исходных управлений (подлежащих реконструкции), а их построенные аппроксимации $u^{\delta,\alpha}(t)$ – черным.

В роли критерия качества аппроксимации выбран показатель $Q = Q\left(u^{\delta,\alpha}(\cdot)\right) = \left\|u^{\delta,\alpha}(\cdot) - u^*(\cdot)\right\|_{L^2[0,T]}$ – невязка управлений в пространстве $L^2$. Регуляризирующий параметр $\alpha$

в обеих имплементациях выбирался из соображений оптимизации $Q$. В данном случае $\alpha = 0.01, Q \approx 0.25$.

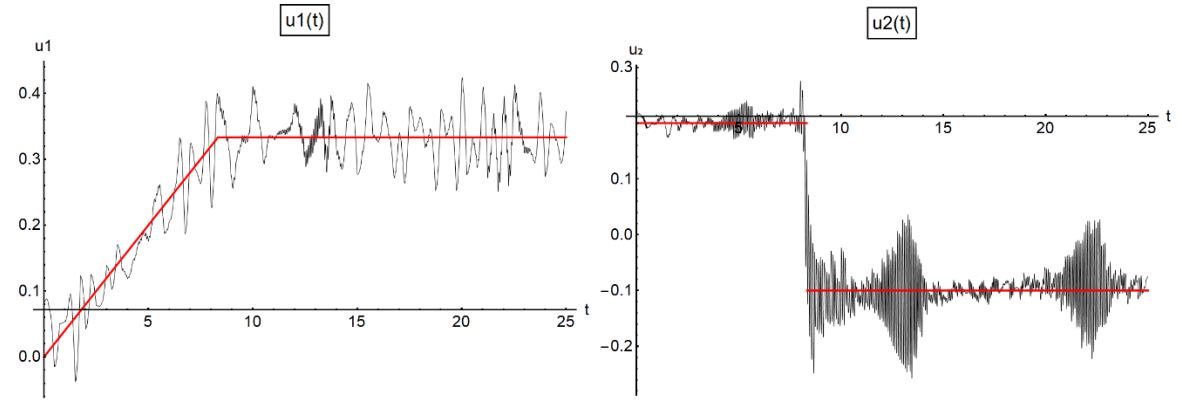



*Рис. 1. Пример 1. Аппроксимации, построенные с помощью подхода СКТ.*

***Пример 2.*** Рассмотрим колебательное звено

$$\dot{x}_1(\mathrm{t}) = x_2(\mathrm{t}), \quad \dot{x}_2(\mathrm{t}) = -x_1(\mathrm{t}) - 0.4x_2(\mathrm{t}) + u(t), \quad |u(t)| \le 2, \quad \mathrm{t} \in [0,10].$$

Исходные данные взяты из [1]: управление, подлежащее восстановлению, имеет вид $u(t) = \sin(1+t)$. Регуляризирующий параметр $\alpha = 0.2$. Результаты численной реализации метода СКТ для этих входных данных представлены на рис. 2. Пунктирной линией обозначено исходное управление, сплошной линией - восстановленное. Показатель качества аппроксимации $Q \approx 0.63$ (для $\delta_0 = 10^{-1}$) и $Q \approx 0.11$ (для $\delta_0 = 10^{-2}$).

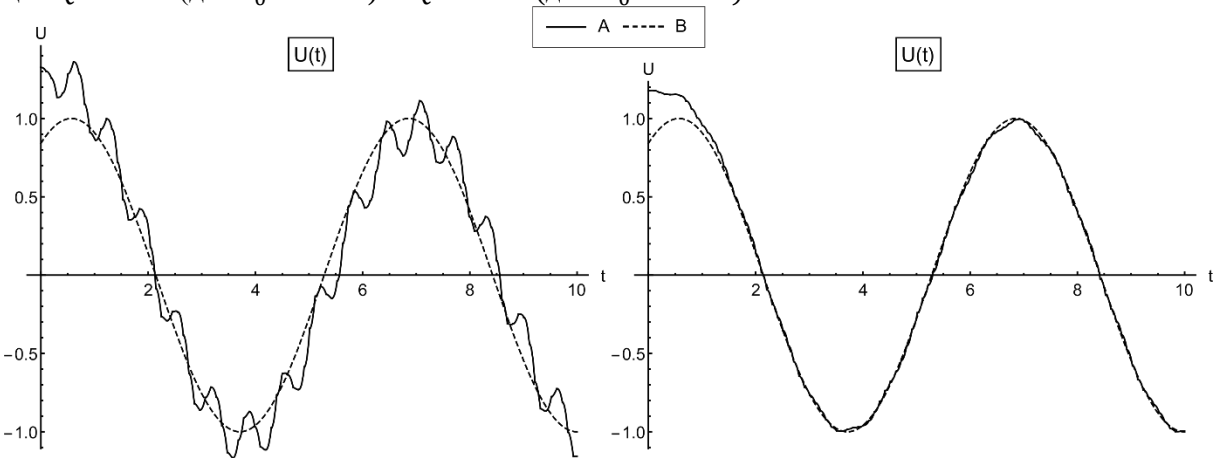



*Рис. 2. Пример 2. Аппроксимации, построенные с помощью подхода СКТ.*

Анализ полученных результатов при сравнении с результатами, опубликованными в [2], указывает на перспективность дальнейшего развития методов, основанных на подходе СКТ.

**Заключение.** Приведены результаты численной реализации обсуждаемого подхода СКТ на примерах модельных механических систем. Их можно сравнить с результатами реализации другого известного подхода [2]. Сравнение показало, что подход СКТ перспективен для дальнейшей разработки. Приоритетным направлением дальнейших исследований является оптимизация численных алгоритмов, базирующихся на предлагаемом подходе.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 20-01-00362.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зенкевич С. Л., Ющенко А.С.** Управление роботами. Основы управления манипуляционными роботами. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана Москва, 2000. 400 с.
2. **Осипов Ю.С., Кряжимский А. В., Максимов В. И.,** Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов, Тр. ИММ УрО РАН, 2011, том 17, номер 1, 129–161.

3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.:Наука, 1968.
4. **Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б., Крупенников Е.А.** К решению обратных задач динамики линейно управляемых систем методом отрицательной невязки. Оптимальное управление, Сборник статей. Тр. МИАН, 291. Москва: МАИК, 2015. С.~266--275.
5. **Subbotina N.N.** Calculus of Variations in Solutions of Dynamic Reconstruction Problems. In: Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Cham. 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42831-0_33.
6. **Subbotina N.N., Krupennikov E.A.** Hamiltonian Systems for Dynamic Control Reconstruction Problems. Minimax Theory and its Applications 05 (2020), No. 2, pp.439-454.
7. **Тихонов А.Н.** Об устойчивости обратных задач. ДАН СССР, Т.39, №4. С. 195–198. 1943.

---

**E.A. Krupennikov** (IMM UrB RAS, UrFU, Ekaterinburg). **To solving dynamic reconstruction problems by using auxiliary variational problems.**

*Abstract.* The report is devoted to the problems of dynamic reconstruction of controls based on imprecise measurements of the realized trajectory for dynamic controlled deterministic systems. An approach to their solution based on auxiliary problems of the calculus of variations is considered. The results of the numerical implementation of the method under discussion are presented in application to model examples from the field of mechanics. The results indicate the expediency of further development of the new approach.

Е.А. СЕРДЕЧНАЯ
(Воронежский государственный технический университет, Воронеж)

# СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМАХ С ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ НАБЛЮДАТЕЛЕМ

*Предложен метод синтеза модального управления в следящих системах с дифференцирующим наблюдателем задающего воздействия. Показано, что при совместном проектировании модального регулятора и наблюдателя возникает неопределённость задачи синтеза, приводящая к колебательности регулируемой величины при ступенчатых задающих воздействиях. Для устранения указанной неопределённости осуществлён переход к оптимизационной задаче синтеза управления. Представлен числовой пример постановки и решения этой задачи, подтверждающий эффективность предложенного метода.*

**Введение.** В настоящее время проблема повышения точности следящих систем решается на основе использования моделей задающих воздействий [1]. Известны способы построения таких моделей с помощью наблюдателя сигнала задания и его производных [1,2]. Вместе с тем остаётся актуальной задача совместного обеспечения не только точности отработки сигнала задания, но и показателей качества переходного процесса, в частности, при ступенчатых задающих воздействиях [2-4]. Предлагаемая работа посвящена решению указанной задачи средствами модального управления, применение которого эффективно в слабо-демпфированных и структурно-неустойчивых системах.

**Постановка задачи.** Рассмотрим объект:

$$y^{(n)} + ... + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + ... + b_1\dot{u} + b_0 u; \quad m < n, \tag{1}$$

где: $u$– управляющее воздействие, $y$ – регулируемая величина, $a_0$ ,…, $a_{n-1}$, $b_0$,…, $b_m$ – постоянные коэффициенты.

В результате построения модального регулятора уравнение замкнутой системы примет вид:

$$y^{(n)} + ... + a_{1,м}\dot{y} + a_{0,м} y = b_m u^{(m)} + ... + b_1\dot{u} + b_0 u, \tag{2}$$

в котором коэффициенты $a_{0,м}$ ,…, $a_{n-1,м}$ определяют собою желаемое расположение $n$ корней характеристического полинома системы. В общем случае можно принять, что некоторая часть $S_1$ этих корней формирует требуемый характер переходного процесса и время регулирования, другая часть $S_2$ используется для компенсации доминирующих нулей полинома $b_m u^{(m)} + ... + b_1\dot{u} + b_0 u$, а оставшиеся $|S|$ свободных корней ($|S| = n-|S_1|-|S_2|$) могут быть расположены на достаточном удалении от $S_1$ и $S_2$ так, чтобы корни $S$ не оказывали существенного влияния на показатели качества переходного процесса.

Допустим теперь, что в системе реализован наблюдатель первой производной задающего воздействия, т.е. в правой части уравнения (2) появляется множитель $c_1 s + c_0 = a_{1,м} s + a_{0,м}$. Если нуль ($-c_0/c_1$) окажется доминирующим по отношению к полюсам замкнутой системы, то при отработке ступенчатого входного воздействия будет возникать колебательность регулируемой величины $y(t)$. Для устранения колебательности необходимо скомпенсировать нуль ($-c_0/c_1$), т.е. ввести дополнительный полюс $s_3=(-c_0/c_1)$ в желаемый полином системы.

При этом возникает неопределённость задачи синтеза следящей системы: для построения модального регулятора нужно знать параметры канала задания $c_1$ и $c_0$, а для построения канала задания нужно знать характеристический полином замкнутой системы: в данном примере – два младших коэффициента $a_{1,м}$ и $a_{0,м}$, то есть знать параметры регулятора.

Требуется найти метод разрешения указанной неопределенности.

**Предлагаемый метод решения.** Используя то обстоятельство, что показатели качества системы определяются только доминирующими корнями характеристического полинома, и часть $S$ корней являются свободными, сформулируем оптимизационную задачу такого совместного размещения нулей и полюсов замкнутой системы, которое бы обеспечило, как показатели точности, так и требуемый характер переходного процесса:

$$F(S)=\left[s_3-\left(-\frac{a_{0,\text{м}}}{a_{1,\text{м}}}\right)\right]\to\min;$$
$$s_3\in S;\quad |S_1|+|S_2|+|S|=n. \tag{3}$$

Критерий (3) обеспечит близость значений нуля $(-c_0/c_1)=(-a_{0,\text{м}}/a_{1,\text{м}})$ и полюса $s_3$ в передаточной функции замкнутой системы после ввода в неё наблюдателя задающего воздействия. В результате перерегулирование будет устранено и переходный процесс примет желаемый характер с сохранением показателей точности.

Таким образом, построение модального регулятора удалось свести к оптимизационной задаче.

**Проверка работоспособности метода.** Проверим работоспособность метода на примере объекта пятого порядка (электропривод с упругой связью):

$$\dot{x}=Bx+Nu;$$
$$y=Ax, \tag{4}$$
$$B=\begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 & 0 & 0\\ 25000 & -25000 & -50000 & 1800 & 0\\ -22 & 22 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -200 & 0 & -1600 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -660 \end{bmatrix};$$
$$A=\begin{bmatrix}0{,}019 & \mathbf{0}\end{bmatrix};\quad d=\begin{bmatrix}0{,}019 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix};\quad N=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 26000\end{bmatrix},$$

где: $d$ – матрица датчиков; $x=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^{\mathrm{T}}$ – координаты состояния.

Введём в систему модальный регулятор $R=[r_1\ r_2\ r_3\ r_4\ r_5]$. Характеристический полином системы $P(s,R)$ будет иметь вид:

$$P(s,R)=|sE-B+NRd|=s^5+a_{4,\text{м}}(R)s^4+\ldots+a_{1,\text{м}}(R)s+a_{0,\text{м}}(R), \tag{5}$$

коэффициенты $a_{i,\text{м}}$ которого зависят от коэффициентов регулятора $R$: $a_{4,\text{м}}=27337{,}3+26666{,}6\cdot r_5$; $a_{3,\text{м}}=6{,}09\cdot10^7+1{,}4\cdot10^8\cdot r_4+7{,}1\cdot10^8\cdot r_5$; … .

Для желаемого характеристического полинома известны корни: $s_1=-114{,}3$ – из требования ко времени регулирования, $t_\text{р}=0{,}07$ с; $s_2=-43{,}7$– полюс для компенсации нуля объекта. Корни $s_3$, $s_4$, $s_5$ – свободные. При указанных условиях желаемый полином получает вид:

$$T(s,s_3,s_4,s_5)=s^5+(157.9+s_3+s_4+s_5)s^4+\ldots+4991{,}7s_3s_4s_5. \tag{6}$$

Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях $s$ полиномов $P(s,R)$ и $T(s,s_3,s_4,s_5)$, получим систему четырёх уравнений с восемью неизвестными $\{r_1,..,r_5,s_3,s_4,s_5\}$ и критерием (3):

$$F(s_3,s_4,s_5)=\left[s_3-\left(-\frac{a_{0,\text{м}}}{a_{1,\text{м}}}\right)\right]\to\min;$$
$$27337{,}3+26666{,}6\ r_5=157.9+s_3+s_4+s_5;$$
$$\ldots \tag{7}$$
$$4{,}3\cdot10^{10}+9{,}09\cdot10^{11}r_1+4{,}7\cdot10^{13}r_2+1{,}7\cdot10^{12}r_5+=4991{,}7s_3s_4s_5;$$
$$s_4\le5s_1;\quad s_5\le5s_1;\quad s_3\ge-1,$$

где неравенства $s_4\le5s_1$; $s_5\le5s_1$ отражают требование удалённости полюсов $s_4$ и $s_5$ от доминирующего корня $s_1$, а условие $s_3\ge-1$ локализует область поиска экстремума (3).

Получено решение: $s_3=-0{,}99$; $s_4=-3{,}05\cdot10^6$; $s_5=-3{,}05\cdot10^6$; $a_{0,м}=4{,}6\cdot10^{16}$; $a_{1,м}=4{,}8\cdot10^{16}$. Нуль наблюдателя $(-a_{0,\text{м}}/a_{1,\text{м}})=-0{,}96$. Корень $s_3=-0{,}99$ близок к нулю наблюдателя и выполняет функцию компенсации.

На рис. 1 показаны переходные процессы в системе, синтезированной с выполнением условия компенсации и без этого условия.

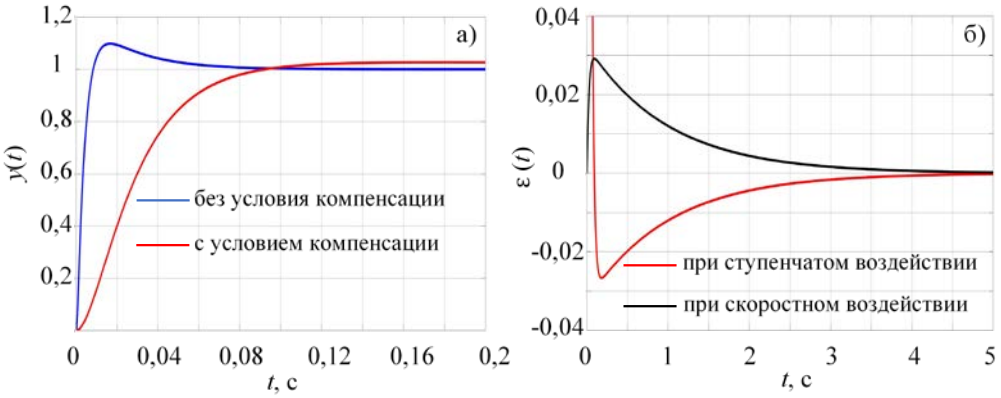



Рис. 1. Переходные процессы: а) при ступенчатом задающем воздействии, б) при скоростном воздействии

**Обсуждение результатов.** Анализ переходных процессов, представленных на рис. 1а, показывает, что в результате применения предложенного метода синтеза происходит частичная компенсация нуля наблюдателя корнем замкнутой части системы и, вследствие этого, колебательность в системе при отработке ступенчатого задающего воздействия снижается в четыре раза (с 10% до 2,5%). Вместе с этим обеспечиваются показатели качества переходного процесса: требуемое время регулирования (рис. 1а) и нулевые установившиеся ошибки при постоянных и линейно нарастающих входных сигналах (рис. 1б), т.е. в системе реализован второй порядок астатизма без использования интеграторов. Полученные результаты подтверждают эффективность предложенного метода.

**Заключение.** Синтез модального управления в следящих системах с высоким порядком астатизма относительно задающего воздействия сталкивается с проблемой колебательности переходного процесса, обусловленной использованием в таких системах производных сигнала задания. Предложен способ решения этой проблемы на основе совместного размещения нулей и полюсов системы путём постановки и решения оптимизационной задачи синтеза модального регулятора по критерию близости фактического размещения корней системы к их желаемому расположению.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Никифоров В.О., Лукьянова Г.В.** Следящая система комбинированного управления // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2011. №6 (76). С. 39-43.
2. **Ермоленко А.И., Коршунов А.И.** Повышение динамической точности цифровых следящих систем АСУТП с помощью комбинированного управления. Ч. 1. Низкий темп вычисления рассогласования // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 4. С. 309-316.
3. **Коршунов А.И.** Коррекция свойств системы автоматического управления путём преобразования задающего воздействия // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, №10. С.813-821.
4. **Ryadchikov I., Aranovskiy S., Nikulchev E., Wang J., Sokolov D.** Differentiator-based velocity observer with sensor bias estimation: an inverted pendulum case study. *IFAC-PapersOnLine*. 2019. Vol. 52, № 16. P. 436-441.

---

**E.A. Serdechnaya** (Voronezh state technical university). **Synthesis of modal control in servo systems with a differentiating observer**

*Abstract.* A method for synthesizing modal control in tracking systems with a differentiating observer of the setting effect is proposed. It is shown that when the modal controller and the controller are designed together, there is an uncertainty of the synthesis problem, which leads to fluctuations of the controlled value under step-by-step setting effects. To eliminate this uncertainty, the transition to the optimization problem of control synthesis is performed. A numerical example of setting and solving this problem is presented, which confirms the effectiveness of the proposed method.

Е. А. СЕРДЕЧНАЯ
(Воронежский государственный технический университет)

# РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ БРОКЕТТА НА ОСНОВЕ РОБАСТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

*Предложен метод решения проблемы Брокетта, основанный на синтезе робастного модального управления, не требующего алгоритмов адаптации. Показан переход к задаче синтеза регулятора по некоторому критерию оптимальности. Представлен числовой пример постановки и решения этой задачи, подтверждающий эффективность предложенного метода.*

**Введение**. При эксплуатации систем управления с нестационарными параметрами возникает проблема сохранения устойчивости, известная в теоретическом плане как общая проблема Брокетта [1]. Известны подходы к решению этой проблемы на основе введения переменной матрицы регулятора $R(t)$ и использования приёмов классической адаптации [2-5]. В предлагаемой работе ставится задача решения проблемы Брокетта путём синтеза робастного модального управления.

**Теоретические предпосылки обеспечения робастности.** Анализ теоретических предпосылок обеспечения робастности методами модального управления проведём на примере объекта $y^{(n)} + ... + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y = k \cdot u,$ с характеристической матрицей, представленной в форме Фробениуса:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ -a_0 & \vdots & -a_1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

матрицей управления $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & k \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ и матрицей выхода $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + Nu; \\ y &= Ax. \end{aligned} \qquad (2)$$

После введения в обратную связь модального регулятора $R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_n \end{bmatrix}$ характеристическая матрица системы примет вид:

$$B - N \cdot R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -a_0 - k \cdot r_1 & -a_1 - k \cdot r_2 & \vdots & -a_{n-1} - k \cdot r_n \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Анализ матрицы (3) показывает, что подобрав коэффициенты регулятора таким образом, чтобы выполнялось условие*:* $k \cdot r_{i+1} >> a_i$, можно обеспечить робастность системы к изменению параметров $a_0,\ a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Изложенные теоретические предпосылки свидетельствуют лишь о принципиальной возможности обеспечения робастности системы, но не указывают на способ реализации этой возможности, который не является очевидным. Действительно, типовое определение $n$ коэффициентов регулятора осуществляется в результате приравнивания $n$ коэффициентов характеристического полинома $\left| s \cdot E - B + N \cdot R \right|$ к $n$ коэффициентам желаемого полинома. Решение получающейся системы уравнений единственное и не предполагает выполнение условия $k \cdot r_{i+1} >> a_i$. В результате, обеспечение свойства робастности системы оказывается невозможным из-за отсутствия свободных переменных.

**Способ практической реализации робастного модального управления.** Для введения в задачу синтеза свободных переменных воспользуемся тем обстоятельством, что показатели качества системы обеспечиваются небольшим количеством доминирующих корней, и нет необходимости формировать точное размещение всех $n$ корней характеристического полинома. То

есть можно задаться желаемым расположением только части корней: $S_1^*, S_2^* \ldots S_m^*, (m < n)$, а положение оставшихся *n - m* корней будет определяться мерой их удалённости *b* от желаемых корней в виде неравенства: $S_j \le b \cdot S_p^*, \left(p = \overline{1,m}; j = \overline{m+1,n}\right)$. Тогда полная система условий реализации робастного модального управления примет вид:

$$\begin{aligned} & c_i = d_i; \\ & S_j < b \cdot S_p^*; \\ & k \cdot r_i > q \cdot a_{i-1}; \\ & i = \overline{1,n};\ p = \overline{1,m};\ j = \overline{m+1,n}, \end{aligned} \tag{4}$$

где: $c_i$ – коэффициенты полинома замкнутой системы $|s \cdot E - B + N \cdot R|$, ($s$ – оператор Лапласа); $d_i$ – коэффициенты полинома (5):

$$\left(s - S_1^*\right) \cdot \left(s - S_2^*\right) \cdot \ldots \cdot \left(s - S_m^*\right) \cdot \left(s - S_{m+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(s - S_n\right), \tag{5}$$

$S_j$ – свободные корни характеристического полинома (5); *q*—коэффициент, определяющий степень (глубину) робастности.

Система (4) содержит *n* уравнений и *n+(n-m)* неизвестных. Поскольку $m<n$, то $2n-m>n$, то число неизвестных больше числа уравнений, и появляется возможность выполнить условия (4) не единственным образом. Поэтому необходимо ввести некоторый критерий решения задачи (4), обеспечивающий его единственность.

Воспользуемся критерием:

$$F(r_1, r_2 \ldots r_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(r_i - \sqrt[n]{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n}\right)^2 \to \min, \tag{6}$$

обеспечивающим близкие значения коэффициентов регулятора.

Таким образом, построение робастного регулятора удалось свести к задаче математического программирования.

**Проведение эксперимента.** Проверим работоспособность метода на примере объекта третьего порядка со следующими матрицами *B*, *N* и *A*:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Характеристический полином объекта в изображениях по Лапласу: $s^3+5 \cdot s^2+3 \cdot s+1$, или, в матричном виде: $|s \cdot E - B|$, где *E*-единичная матрица.

Введём в систему регулятор $R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$, тогда характеристический полином *PS*(*s*) системы получит вид:

$$PS(s) = |s \cdot E - B + N \cdot R| = s^3 + (r_3+5) \cdot s^2 + (r_2+3) \cdot s + r_1 + 1. \tag{8}$$

Зададимся желаемым полиномом с двумя известными корнями $S_1 = S_2 = -3$ и с одним неизвестным корнем $S_3$: $PG(s)=(s+3)^2 \cdot (s-S_3)$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *s* полиномов *PS*(*s*) и *PG*(*s*):

$$s^3 + (r_3+5) \cdot s^2 + (r_2+3) \cdot s + r_1 + 1 = s^3 + (6-S_3) \cdot s^2 + (9-6 \cdot S_3) \cdot s - 9 \cdot S_3. \tag{9}$$

Примем $b = 5$; $q = 10$. В результате система уравнений (4) с критерием (6) получит вид:

$$\begin{cases} F(r_1, r_2, r_3) = \sum_{i=1}^{3} \left( r_i - \sqrt[3]{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \right)^2 \to \min; \\ r_1 + 1 = -9 \cdot S_3; \\ r_2 + 3 = 9 - 6 \cdot S_3; \\ r_3 + 5 = 6 - S_3 \\ k \cdot r_1 \geq 10 \cdot a_0; \\ k \cdot r_2 \geq 10 \cdot a_1; \\ k \cdot r_3 \geq 10 \cdot a_2; \\ S_3 \leq 5 \cdot S_1. \end{cases} \quad (10)$$

Найденное решение для (10): $S_3$ = -49, $r_1$ = 440, $r_2$ = 300, $r_3$ = 50.

**Обсуждение результатов.** Проведем анализ робастности синтезированной системы управления.

Построим корневой годограф для двух систем: системы, синтезирванной с условием робастности и без него. С этой целью изменялся параметр: $a_2$=[2…14].

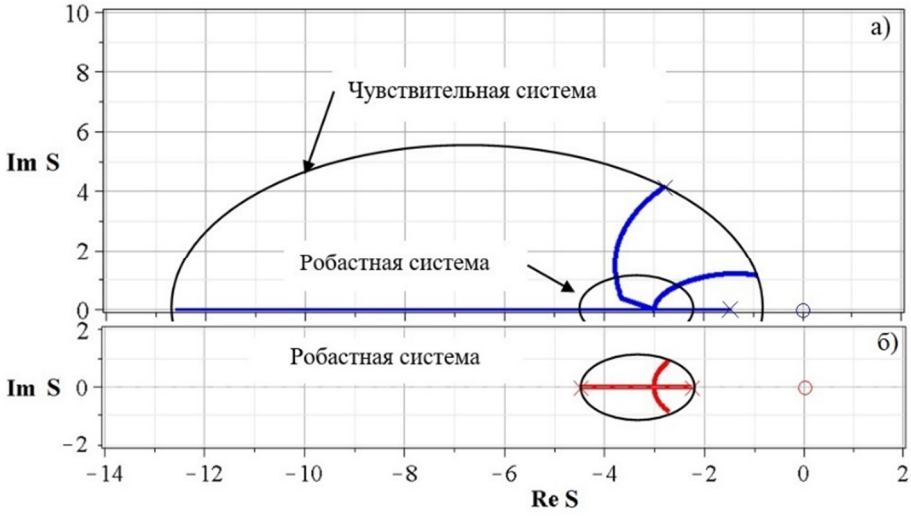



Рис. 1. Корневые годографы: а) чувствительная система, б) робастная система

Из рис. 1 видно, что область локализации значимых корней робастной системы значительно меньше области локализации корневого годографа неробастной системы, то есть робастность системы достигнута. При этом корни $S_1$ и $S_2$ в робастной систем сохраняют своё доминирующее значение (корень $S_3$ локализуется отрезком [-43, -54]), и в системе обеспечивается заданное время регулирования и желаемый монотонный характер переходного процесса.

**Заключение.** Рассмотрен подход к решению проблемы Брокетта на основе робастного модального управления. Предложен способ построения робастного модального регулятора, основанный на отказе от априорного назначения полного спектра собственных чисел характеристической матрицы и последующем решении задачи синтеза регулятора как задачи поиска экстремума специального функционала с ограничениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Brocket R.A.** Stabilization problem. *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Springer. London. 1999. P. 75-78.
2. **Леонов Г.А.** Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. №4. С. 134-155.

3. **Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыркин А.А., Слита О.В., Ушаков А.В.** Методы адаптивного и робастного управления нелинейными объектами в приборостроении. СПб: НИУ ИТМО, 2013. – 277 с.
4. **Yue X.** Adaptive control for attitude coordination of leader-following rigid spacecraft systems with inertia parameter uncertainties. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2019. V. 32, no 3. P. 688-700.
5. **Wong H.** Robust control of the adaptive immune system. *Seminars in Immunology*. 2018. V. 36. P. 17-27.

---

**E.A. Serdechnaya** (Voronezh state technical university). **Solving the Brockett problem based on robust stabilization**

*Abstract.* A method for solving the Brockett problem based on the synthesis of robust modal control that does not require cumbersome adaptation algorithms is proposed. The transition to the task of synthesizing a regulator by a certain optimality criterion is shown. A numerical example of setting and solving this problem is presented, which confirms the effectiveness of the proposed method.

В.А. БОЙЧЕНКО
(Институт проблем управления, Москва)

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

*В статье рассматривается спектральный метод анализа линейных стационарных систем управления с дискретным временем. В рамках этого подхода получены формулы для вычисления σ-энтропийной нормы системы в частотной области.*

**Введение**. Реальные динамические системы функционируют в условиях различных помех и под влиянием неизвестных внешних воздействий, измеряемые значения сигналов содержат случайные ошибки, а управляющие воздействия могут отрабатываться со случайными погрешностями. Поэтому проблема подавления неизвестных возмущений неизбежно возникает при проектировании современных систем управления техническими объектами и является чрезвычайно важным разделом теории управления.

Задачу подавления возмущений можно сформулировать как задачу минимизации влияния этих возмущений на качество работы системы управления. Выбор критерия качества диктуется различными предположениями о характере возмущений, действующих на систему. Одним из ярких результатов 60-х годов XX века в теории автоматического управления явилась теория построения регуляторов для линейных систем с квадратичным критерием качества (Р. Калман [1], А.М. Летов [2]. Задача синтеза линейно-квадратичного регулятора – линейного регулятора, минимизирующего квадратичный по состоянию и управлению функционал качества – была одной из первых решённых задач оптимального управления по принципу обратной связи. При синтезе линейно-квадратичного гауссовского (*LQG*) регулятора предполагается, что внешнее возмущение является гауссовским белым шумом. В реальных условиях *LQG* регуляторы эффективно работали, если аддитивная помеха была гауссовским белым шумом или слегка от него отличалась. Однако, если входное возмущение было сильно коррелированным, то качество работы системы резко падало и не удовлетворяло требованиям, предъявляемым к замкнутым этими регуляторами системам управления.

Попытки преодолеть недостатки теории с квадратичным критерием качества привели к возрождению частотного подхода в форме теории $H_\infty$ оптимизации. В 1981 г. вышла работа Д. Зеймса [3], в которой он предложил использовать другой критерий качества – $H_\infty$ норму замкнутой системы. Для $H_\infty$ оптимального подхода не требуется знание статистического характера внешнего возмущения, предполагается лишь, что внешнее возмущение представляет собой сигнал, интегрируемый с квадратом. Эта работа заложила основы теории $H_\infty$ субоптимального управления, которая с тех пор составляет центральное ядро современной теории управления. Однако $H_\infty$ оптимальные регуляторы, являясь минимаксными, то есть рассчитанными на наихудший случай входных возмущений, имели свои естественные недостатки – для реализации минимума критерия качества затраты на управление порой становился чрезмерно большими и такие регуляторы были трудно реализуемы. Таким образом, оказалось, что $H_2$ и $H_\infty$ регуляторы являются эффективными лишь при достаточно точном выполнении гипотез о природе внешних возмущений. *LQG* или $H_2$ регулятор может стать неработоспособным в том случае, если внешнее возмущение представляет собой сильно коррелированный шум, в то время как $H_\infty$ регулятор, проектируемый для наихудшего случая детерминированного возмущения, проявляет излишний консерватизм и требует избыточных энергетических затрат на управление, если внешнее возмущение представляет собой некоррелированный или слабо коррелированный случайный сигнал.

Сходство алгоритмов синтеза $H_2$ и $H_\infty$ оптимальных регуляторов наводило на мысль, что должен существовать универсальный подход к управлению динамическими системами со стохастическими возмущениями, в котором задачи $H_2$ и $H_\infty$ оптимизации были бы частными случаями общей теории. К такому подходу относятся работы И.Г. Владимирова, А.П. Курдюкова и А.В. Семёнова, которые в середине 1990-х годов создали теорию, обобщающую подходы $H_2$ и $H_\infty$ управления и получившую название анизотропийной теории стохастического робастного

управления [4, 5]. В рамках этого подхода робастность в стохастическом управлении достигается с помощью явного включения различных сценариев распределения шума в единый показатель качества, подлежащий оптимизации: статистическая неопределённость определяется в терминах энтропии, а показатель робастного качества выбирается так, чтобы количественно охарактеризовать возможности системы по подавлению наихудшего внешнего возмущения. В контексте стохастического робастного управления, направленного на подавление потенциально неблагоприятного воздействия статистической неопределённости, анизотропийная теория предлагает важную альтернативу методам синтеза оптимального управления, основанным на точном знании закона распределения случайного внешнего возмущения. Минимизация критерия качества в форме анизотропийной нормы замкнутой системы приводит к стабилизирующему регулятору по выходу, который проявляет меньший консерватизм управления по сравнению с $H_\infty$ регулятором и является более эффективным при подавлении коррелированных возмущений, чем $H_2$ регулятор. Анизотропийная теория управления является эффективной и активно развивающейся теорией, у которой есть одно *но*: эта теория работает только со стохастическими сигналами в дискретном времени, поэтому построение подобной теории в дискретном времени для детерминированных сигналов является актуальной задачей. Предлагаемый доклад посвящён разработке метода σ-энтропийного анализа стационарной дискретной системы управления для детерминированных сигналов.

**Метод σ-энтропийного анализа стационарной системы управления.** Рассмотрим объект, который описывается линейной дискретной стационарной системой с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, x_0 = 0 \\ z_k = Cx_k + Dw_k, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $z_k \in \mathbb{R}^p$ – целевой выход, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение. Предполагается, что матрица $A$ является асимптотически устойчивой, система управляема и наблюдаема. На вход этой системы поступает детерминированная последовательность $\{w_k\}$ либо с конечной $l_2$ нормой $\|w\|_2$

$$\|w\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |w_k|^2 < \infty, \quad (2)$$

либо с конечной мощностной нормой $\|w\|_{\mathcal{P}}$

$$\|w\|_{\mathcal{P}}^2 = \lim_{N\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} |w_k|^2 \right\} < \infty, \quad (3)$$

здесь и далее $|\cdot|$ – евклидова норма вектора в $\mathbb{R}^m$.

Безусловно, анализ системы (1) с входным сигналом (2) или (3) – это две разные задачи, но между ними очень много общего, и чтобы продемонстрировать эту общность, следуя работе [6], унифицируем описание входных сигналов и введём $\mathfrak{N}$ норму сигнала в следующем виде:

$$\|w\|_{\mathfrak{N}}^2 = \mathfrak{N}\left(w_k^{\mathrm{T}} w_k\right), \quad (4)$$

где оператор $\mathfrak{N}$ – это линейный оператор, который трансформирует евклидову норму $|w_k|^2 = w_k^{\mathrm{T}} w_k$ вектора $w_k$ в $l_2$ или мощностную норму последовательности $\{w_k\}$, т.е. действует следующим образом:

$$\mathfrak{N}\left(w_k^{\mathrm{T}} w_k\right) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_k^{\mathrm{T}} w_k & \text{для } l_2 \text{ нормы,} \\ \lim_{N\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} w_k^{\mathrm{T}} w_k \right\} & \text{для } \mathcal{P} \text{ нормы.} \end{cases} \quad (5)$$

Оператор $\mathfrak{N}$ позволяет определить корреляционную свёртку входного сигнала $\{w_k\}$ следующим образом:

$$K(l) = \mathfrak{N}\left(w_{k+l} w_k^{\mathrm{T}}\right). \quad (6)$$

Выполним Фурье преобразование корреляционной свёртки:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} K(l) e^{-i\omega l} \quad (7)$$

Матрица $S(\omega)$ – это матрица спектральной плотности последовательности $\{w_k\}$ и обратное преобразование Фурье позволяет стандартным способом выразить корреляционную свёртку $K(l)$ через матрицу спектральной плотности $S(\omega)$:

$$K(l) = \int_{-\pi}^{+\pi} S(\omega)\, e^{i\omega l}\, d\omega. \quad (8)$$

Следовательно, $\mathfrak{N}$ норму последовательности $\{w_k\}$ можно выразить через матрицу спектральной плотности $S(\omega)$:

$$\|w\|_{\mathfrak{N}}^2 = \operatorname{tr} K(0) = \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega. \quad (9)$$

Аналогично, $\mathfrak{N}$ норма выходной последовательности $\{z_k\}$ равна

$$\|z\|_{\mathfrak{N}}^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S_z(\omega)\, d\omega, \quad (10)$$

где $S_z(\omega)$ – спектральная плотность выходной последовательности, которая выражается через передаточную матрицу $F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ системы (1) и спектральную плотность $S(\omega)$ входного сигнала следующим образом [7]:

$$S_z(\omega) = F(i\omega)\, S(\omega)\, F^*(i\omega). \quad (11)$$

Следовательно, $\mathfrak{N}$ норма выхода $\{z_k\}$ равна

$$\|z\|_{\mathfrak{N}}^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} [F(i\omega)\, S(\omega) F^*(i\omega)]\, d\omega. \quad (12)$$

Определим коэффициент усиления $\Theta$ для системы (1) и входной последовательности $\{w_k\}$, которая удовлетворяет либо условию (2), либо условию (3), как отношение $\mathfrak{N}$ нормы выходной последовательности $\{z_k\}$ к $\mathfrak{N}$ норме входной последовательности $\{w_k\}$:

$$\Theta^2 = \frac{\|z\|_{\mathfrak{N}}^2}{\|w\|_{\mathfrak{N}}^2} = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} [\Lambda(\omega)\, S(\omega)]\, d\omega}{\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega}, \quad (13)$$

здесь $\Lambda(\omega) = F^*(i\omega)\, F(i\omega)$.

Теперь, следуя работе [6], введём интегральную характеристику входного сигнала – σ-энтропию:

$$\mathfrak{S}(S) = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln\det\,(I + S(\omega))d\omega, \quad (14)$$

где $I$ – единичная матрица.

Определим σ-энтропийную норму $|||F|||_s$ системы (1) как максимум коэффициента усиления (13) по всем входным сигналам, σ-энтропия (14) которых не превышает заданного значения $s$:

$$|||F|||_s^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S)\le s} \Theta^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S)\le s} \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} [\Lambda(\omega)\, S(\omega)]\, d\omega}{\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega} \quad (15)$$

*Теорема 1*. Для любого $s \ge 0$ σ-энтропийная норма (15) системы (1), на вход которой поступает дискретный сигнал с конечной $\mathfrak{N}$ нормой, вычисляется по формуле:

$$|||F|||_s^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S)\le s} \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} \{\Lambda(\omega)[I-\gamma(I-q\Lambda(\omega))^{-1}]\}\, d\omega}{\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} [I-\gamma(I-q\Lambda(\omega))^{-1}]\, d\omega}, \quad (16)$$

где $\gamma = \frac{1+2\pi m}{\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} [I-q\Lambda(\omega)]^{-1}\, d\omega}$, а параметр $q \in [0,\ F_\infty^{-2})$ является единственным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln\det \frac{(1+2\pi m)\,[I-q\Lambda(\omega)]^{-1}}{\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} [I-q\Lambda(\omega')]^{-1}\, d\omega'} d\omega = s.$$

**Заключение.** В статье предложен σ-энтропийный метод анализа линейных дискретных систем управления: корреляционная свертка позволяет согласовать определение нормы сигнала с определением матрицы спектральной плотности; все различия, которые являются следствием выбора $l_2$ или мощностной нормы входного сигнала, инкапсулированы в матрице спектральной плотности; инкапсуляция различий в выборе нормы входного сигнала позволяет инвариантным (т.е. независимым от нормы) способом определить σ-энтропию входного сигнала и σ-энтропийную норму системы; инвариантность σ-энтропийной нормы системы позволяет получить инвариантные результаты σ-энтропийного анализа.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Калман Р.Э.** Об общей теории систем управления. Труды Международного конгресса ИФАК. М.: АН СССР. 1961. Т. 2. С. 521–547.
2. **Летов А.М.** Аналитическое конструирование регуляторов I–IV. Автоматика и Телемеханика. 1960. Т. 21. № 4. С. 436–441. 1960. Т. 21. № 5. С. 561–568. 1960. Т. 21. № 6. С. 661–665. 1961. Т. 22. № 4. С. 425–435.
3. **Zames G.** Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. IEEE Trans. on Automatic Control. 1981. Vol. 26. № 2. P. 301–320.
4. **Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.** Stochastic approach to $H_\infty$-optimization. Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Florida (USA). 1994. P. 2249–2250.
5. **Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Максимов Е.А., Тимин В.Н.** Анизотропийная теория управления – новый подход к стохастической теории робастного управления. Тр. IV Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'05. М.: ИПУ РАН. 2005. С. 29–94.

6. **Kurdyukov A.P., Boichenko V.A**. A spectral method of the analysis of linear control systems. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2019. Vol. 29. №. 4. P. 667–679.
7. **Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J.** Mixed $H_2$ and $H_\infty$ performance objectives I: robust performance analysis. IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 39. P. 1564-1574.

---

**V.A. Boichenko** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the RAS, Moscow). **Spectral method for analysis of linear discrete control systems**

*Abstract.* The article considers the spectral method for analysis of discrete-time linear stationary control systems. Within the framework of this approach, formulas are obtained for calculating the σ-entropy norm of the system in the frequency domain.

А. В. ТАВОЛЖАНСКИЙ
Воронежский государственный технический университет, Воронеж

# ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С МНОГОКОМПОНЕНТНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

*Рассматривается проблема обеспечения точности по постоянному и гармоническому входным воздействиям в системах с модальным управлением. Предложен аналитический метод совместного формирования как точности управления, так и характера переходного процесса. На числовом примере показывается эффективность предлагаемого метода решения проблемы.*

**Введение.** Проблема выполнения требований к показателям точности систем модального управления в настоящее время выделилась в самостоятельную задачу в силу того, что собственно модальный регулятор не обладает средствами для формирования этих показателей [1-3].

В связи с этим, основным способом построения высокоточных систем с модальным управлением является введение в систему наблюдателя задающего воздействия в виде внутренней модели, использующей, в частности, производные входного сигнала [4].

Однако независимый синтез модального регулятора и внутренней модели входного сигнала зачастую приводит к нежелательным изменениям в переходных режимах системы. В частности, в системе может возникнуть колебательность при отработке ступенчатых воздействий [5].

В предлагаемой работе решается задача совместного обеспечения точности регулирования и качества переходного процесса путём формирования в системе дополнительной обратной связи по выходу с последующим введением в структуру свободных параметров, необходимых для физической реализации указанного условия совместности.

**Постановка задачи и способ её решения.** Ставится задача синтеза системы модального управления с заданным характером переходного процесса и показателями точности, определяемыми: расположением собственных чисел характеристической матрицы; астатизмом первого порядка относительно задающего воздействия с добротностью $D_v$ по скорости; максимальными допустимыми относительными ошибками $\delta_1$ и $\delta_2$ воспроизведения амплитуды гармонических воздействий на частотах $\omega_{1,g}$, $\omega_{2,g}$.

Для решения поставленной задачи формируется система со структурой, показанной на рис.1.

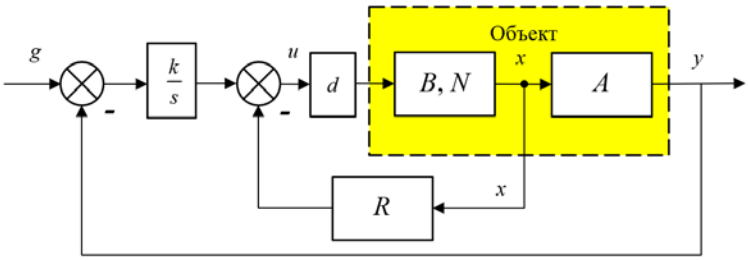



Рис. 1. Структурная схема синтезируемой системы

где: $B$ – характеристическая матрица, $N$, $A$ – матрицы управления и выхода, $R$ – регулятор, $x$ – вектор координат состояния, $u$ – управление, $y$ – выходная координата, $d$ и $k$ дополнительные параметры, $g$ – задающее воздействие.

Для представленный структуры уравнения движения в изображениях по Лапласу выглядят следующим образом:

$$y(s) = A \cdot \left( s \cdot E - B + N \cdot d \cdot R + N \cdot d \cdot A \cdot \frac{k}{s} \right)^{-1} \cdot N \cdot d \cdot \frac{k}{s} \cdot g(s) \qquad (1)$$

Характеристический полином для (1) получим в виде:

$$\left| s \cdot E - B + N \cdot d \cdot R + N \cdot A \cdot \frac{k}{s} \right| = s^n + s^{n-1} \cdot (a_{n-2} + d \cdot r_{n-1}) + \cdots + s \cdot (a_0 + d \cdot r_1) + k \cdot d. \qquad (2)$$

Корни полинома (2) зависят от переменных $r_1,..,r_n$, $k$, $d$: $s_1(r_1,\cdots,r_n,k,d),\cdots,s_n(r_1,\cdots,r_n,k,d)$.

Составим неравенства, отражающие требования к точности для различных входных воздействий и характеру переходного процесса.

Найдем $n$ неравенств исходя из требований ко времени регулирования:

$$\begin{cases} s_1(r_1,\cdots,r_n,k,d) < -\Omega; \\ \cdots \\ s_n(r_1,\cdots,r_n,k,d) < -\Omega, \end{cases} \qquad (3)$$

где: $\Omega$– желаемый среднегеометрический корень, определяемый заданным временем регулирования; $n$– порядок системы.

Для воспроизведения задающего воздействия на частоте $\omega_{z,g}$ с заданным значением статической ошибки $\delta_z$ введём неравенства:

$$\delta_z > 1 - W(\omega_{z,g}), \qquad (4)$$

где: $z$ – порядковый номер воздействия; $W(\omega_{z,g})$ – модуль частотной функции $W(j\omega)$ на частоте $\omega_{z,g}$.

Объединив (3) и (4) получим систему неравенств, решение которой даст нам искомые значения $r_1$, …, $r_n$, $k$, $d$, обеспечивающие требуемые показатели качества синтезируемой системы управления.

Таким образом, решение задачи обеспечения точности по гармоническому и монотонному задающим воздействиям с одновременным выполнением требований к характеру переходного процесса и времени регулирования удалось свести к выполнению системы ограничений. При этом допускается получение множества приемлемых решений, из которых может быть сделан последующий выбор.

**Пример применения метода.** Рассмотрим объект:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Для $g(t)$=const – необходимо обеспечить астатизм первого порядка с добротностью $D_\varphi \geq 10^{-1}$ по скорости; гармонический сигнал $g(t) = 0{,}5\sin(3t)$ требуется отработать со статической ошибкой $\delta_1$=0,01; $g(t)$=0,5sin(10$t$) – со статической ошибкой $\delta_2$=0,1. Для времени регулирования $t_\text{р} = 0{,}25$ с среднегеометрический корень $\Omega$ определим как:

$$\Omega = \frac{T}{t_\text{р}} = \frac{4{,}8}{0{,}25} = 9{,}6\ , \qquad (6)$$

где: $T$ – постоянная, зависящая от порядка желаемого полинома.

К искомой системе неравенств добавим требование к добротности по скорости, выражение для которой получим из (2):

$$D_v = \frac{k \cdot d}{d \cdot r_1 + 2}. \qquad (7)$$

С учётом (3), (4) и (7) система неравенств для $z$ = 1,2 примет вид:

$$\begin{cases} s_1 \leq -\Omega; \\ s_2 \leq -\Omega; \\ s_3 \leq -\Omega; \\ D_v \geq 10; \\ \delta_z \geq 1 - W(\omega_{z,g}). \end{cases} \qquad (8)$$

Для решения системы неравенств (8) зададимся начальными значениями:

$$R = \begin{bmatrix} 500 & 10 \end{bmatrix};\ k = 7000;\ d = 10. \quad (9)$$

Результат решения:

$$R = \begin{bmatrix} 491{,}887 & 11{,}641 \end{bmatrix};\ k = 6379{,}49;\ d = 11{,}005. \quad (10)$$

Заданные и фактические показатели качества системы управления приведены в таблице 1.

Таблица 1

**Сравнение показателей качества**

| Значение | Показатель качества | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $t_p$, с | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $D_v$, $с^{-1}$ |
| Заданное | 0,25 | 0,01 | 0,1 | 10 |
| Фактическое | 0,17 | 0,01 | 0,1 | 13 |

Требования к показателям качества синтезированной системы выполнены, что подтверждает эффективность предложенного метода. Наличие астатизма иллюстрируется также на рис. 2.

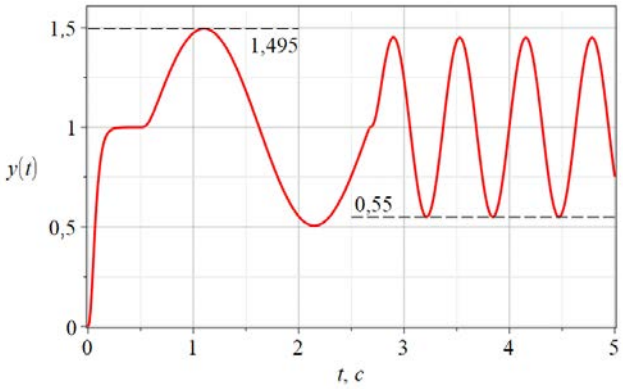



Рис. 2. Переходные процессы при различных задающих воздействиях

**Заключение.** Для системы с модальным управлением предложен аналитический метод обеспечения точности отработки задающего воздействия, использующий структуру с дополнительной обратной связью по выходу. При этом входной сигнал может содержать как монотонные, так и гармонические составляющие.

Отличительной особенностью метода является согласованность - совместимость требований к точности регулирования и к характеру переходного процесса. Указанная совместимость достигается общим решением системы алгебраических неравенств, отражающих перечисленные требования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А.Г**. Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. I. Минимально-фазовые одномерные объекты // Автоматика и телемеханика. 2015. №5. С. 27-42.
2. **Stein G.L., Konigorski U.** Design of Modal Filters Exact on Maximal Spaces of Functions. *IFAC Proceedings Volumes*. 2012. V. 45. I. 2. P. 130-135.
3. **Тютиков В.В., Тарарыкин С.В., Варков Е.А.** Синтез дискретных систем модального управления заданной статической точности // Известия ЮФУ. Технические науки. 2003. №3. С. 136-144.
4. **Никифоров В.О., Лукьянова Г.В.** Следящая система комбинированного управления // научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий. механики и оптики. 2011. №6(76). С.39-43.
5. **Ермоленко А.И., Коршунов А.И**. Повышение динамической точности цифровых следящих систем АСУТП с помощью комбинированного управления. Ч.1. Низкий темп выявления рассогласования. / Известия вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, N.4. С.309-316.

**A.V. Tavolzhanskij** (Voronezh state technical university). **Ensuring the accuracy of modal control in systems with multicomponent actions**

*Abstract.* The problem of ensuring accuracy for constant and harmonic input effects in systems with modal control is considered. The analytical method of combined formation of both the control accuracy and the type of transition process is proposed. A numerical example shows the effectiveness of the proposed method for solving the problem.

В.Н. БУКОВ
(НИИ авиационного оборудования, Жуковский Московской обл.)

А.В. ДАНЕЕВ, В.Н. СИЗЫХ
(Иркутский государственный университет путей сообщения)

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО НЕКЛАССИЧЕСКИМ ФУНКЦИОНАЛАМ КАЧЕСТВА В ВЫРОЖДЕННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

*Рассматривается задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов в наиболее общей формулировке для нелинейных объектов с аффинно (линейно и аддитивно) входящими состояниями и/или управлениями. На основе нового подхода к приближенно-оптимальному синтезу управления развивается обобщенная теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР). Сформулированы основные теоремы, получены новые конкретные формы неклассических функционалов качества.*

**Введение.** На протяжении многих лет учениками школы А.А. Красовского было разработано высокоэффективное алгоритмическое обеспечение синтеза оптимальных управлений (см., например, работы [1,2]) для сложных (нелинейных и многомерных) процессов, ориентированное, в том числе и на создание перспективных интегрированных комплексов управления с развитыми функциями адаптации, самонастройки и самоорганизации [3-5]. Широкий круг экспериментальных исследований и конкретных проектов подтвердил, в целом, высокие характеристики алгоритмов. В то же время все еще остаются прикладные задачи, в которых названные алгоритмы или принимают излишне громоздкий вид, или эффективны в весьма узких диапазонах условий применения.

В работах [6-10] нами впервые математически строго обоснован функционал обобщенной работы А.А. Красовского, показана его роль и значение в развитии СТАУ. В качестве развития метода, связанного с минимизацией функционала обобщенной работы, предлагается преобразовать исходную задачу в вырожденную задачу и осуществлять поиск решения на основе выбора подходящей стратегии управления. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности для вырожденной задачи аналитического конструирования, позволяющие выделить класс объектов без сингулярных особенностей при минимизации функционала обобщенной работы. Приведены иллюстрирующие примеры управления колебательным процессом.

***Принцип минимума обобщенной работы А.А. Красовского в вырожденной постановке.*** Вопрос о существовании опорного функционала со свойствами функции Беллмана-Кротова остается открытым по причине неединственности решения определяющей его задачи Коши. Однако в 60-х годах А.А. Красовским было предложено использовать имеющее энергетический смысл изопериметрическое условие, благодаря которому опорный функционал приобретает свойства функции Ляпунова в ее классическом определении. Это интегральное равенство гарантирует единственность решения задачи Коши вне зависимости от размерности вектора состояния системы и имеет смысл обобщенной работы управлений в оптимальной системе. Доопределенный таким образом критерий получил название функционала обобщенной работы (ФОР). ФОР в общем виде известен как неклассический функционал качества [2].

Для задачи оптимизации приведем наиболее общую формулировку принципа минимума обобщенной работы. Оставаясь в рамках развиваемой теории приближенно – оптимального нелинейного синтеза, поставим перед собой цель выяснить, при каких предположениях вместо достаточных условий оптимальности Беллмана – Кротова возможно использовать более простые достаточные условия в форме нелинейного уравнения первого порядка – уравнения Ляпунова

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f_1+Q=0,\qquad V(t_к,x_{оп}(t_к))=V_з(x_{оп}(t_к)) \tag{1}$$

Здесь $f_1(t,x_{оп}),Q(t,x_{оп})$ - некоторые векторная и скалярная функции, $V(t,x_{оп})$ - скалярная функция Ляпунова $x_{оп}=x_0$. Решение задачи Коши (1) в силу того, что градиент $\frac{\partial V}{\partial x}$ в урав-

нение Ляпунова входит линейно, всегда единственным образом определяет вектор оптимального управления и не зависит от размерности уравнений, описывающих дифференциальную систему. Пусть $\bar{I}_*$ – опорный функционал со свойствами функции Ляпунова. Тогда для решения исходной задачи приближенно-оптимального синтеза требуется его доопределение до опорного функционала $I_*$ со свойствами функции Беллмана – Кротова. Это можно сделать неединственным образом, следуя схемам слабого и сильного улучшения и аналогу схемы решения задач вариационного исчисления [11, 12]:

1) для схемы дифференциального динамического программирования

$$I_* = \bar{I}_* + J_4(u_0),\ J_4(u_0) > 0, \tag{2}$$

2) для схемы приближений в пространстве политик

$$I_* = \bar{I}_* + J_5(x_0),\ J_5(x_0) > 0, \tag{3}$$

3) для аналога вариационной схемы

$$I_* = \bar{I}_* + J_4(u_0) + J_5(x_0), \tag{4}$$

где $J_4(u_0),\ J_5(x_0)$ – некоторые положительно определенные функционалы, имеющие смысл изопериметрических условий: $J_4(u_0) = C_1,\ J_5(x_0) = C_2,\ C_1, C_2$ – константы, соответствующие смещению экстремума функционала на постоянную величину.

**Определение 1.** Неклассическим функционалом качества будем называть функционал вида

$$I = V_з(t_0, x(t_0), t_к, x(t_к)) + \int_{t_0}^{t_к} Q(t, x(t))dt + \int_{t_0}^{t_к} L(t, x(t), x_{оп}(t), u(t), u_{оп}(t))dt,\ I \in R^1, \tag{5}$$

где $Q$ – заданная неотрицательная функция, $L$ – заданная функция указанных аргументов такие, что

$$f_0(t, x(t), u(t)) - [Q(t, x(t)) + L(t, x(t), x_{оп}(t), u(t), u_{оп}(t))] = \begin{cases} 0 \text{ при } \forall x = x_{оп}(t),\ u = u_{оп}(t) \\ > 0 \text{ при } \forall\ x \neq x_{оп}(t),\ u \neq u_{оп}(t) \end{cases} \tag{6}$$

для аналога общей схемы решения вариационных задач,

$$f_0(t, x_{оп}(t), u(t)) - [Q(t, x_{оп}(t)) + L_1(t, u(t), u_{оп}(t))] = \begin{cases} 0 \text{ при } \forall\ u = u_{оп}(t) \\ > 0 \text{ при } \forall\ u \neq u_{оп}(t) \end{cases} \tag{7}$$

$$L = L_1(t, u(t), u_{оп}(t))$$

для схемы дифференциального динамического программирования,

$$f_0(t, x(t), u_{оп}(t)) - [Q(t, x(t)) + L_2(t, x(t), x_{оп}(t))] = \begin{cases} 0 \text{ при } \forall\ x = x_{оп}(t) \\ > 0 \text{ при } \forall\ x \neq x_{оп}(t) \end{cases} \tag{8}$$

$$L = L_2(t, x(t), x_{оп}(t))$$

для схемы приближений в пространстве политик.

При выполнении условий (6) – (8) из неклассического функционала (5) всегда можно выделить опорный функционал со свойствами функции Ляпунова

$$\bar{I}_* = V_з(t_0, x(t_0), t_к, x(t_к)) + \int_{t_0}^{t_к} Q(t, x(t))dt,\ \bar{I}_* \in R^1, \tag{9}$$

удовлетворяющий исходной формулировке задачи оптимизации при конкретной форме представления правых частей дифференциальной связи. Этот функционал носит название главной части ФОР (5): $I_г = \bar{I}_*$. При этом $V_з(t_0, x(t_0), t_к, x(t_к)) = V_з(t_к, x(t_к)) = V_з(x(t_к))$.

В частном случае по схеме дифференциального динамического программирования основная теорема принципа минимума обобщенной работы соответствует следующему утверждению.

**Теорема 1.** Оптимальное управление, в локальном смысле минимизирующее ФОР (5) с функцией затрат на управление $L_1(t, u(t), u_{оп}(t)$ для дифференциальной системы

$$\dot{x} = f_1(t, x) + \varphi_1(t, x)u \tag{10}$$

при условии

$$L_1(t, u(t), u_{оп}(t)) - \pi_1^{\mathrm{T}}(t, u_{оп})u = \begin{cases} 0 \text{ при } \forall\ u = u_{оп}(t) \\ > 0 \text{ при } \forall\ u \neq u_{оп}(t) \end{cases}$$

определяется выражением

$$\pi_1(t,u_{\text{оп}}) = -\varphi_1^{\mathrm{T}}(t,x_{\text{оп}})\frac{\partial V^{\mathrm{T}}(t,x_{\text{оп}})}{\partial x} \tag{12}$$

при любом допустимом векторе $u$, в том числе и при $u = u_{\text{оп}}$. Здесь функция $V(t,x_{\text{оп}})$ – решение уравнения Ляпунова (1).

Таким образом, имеет место следующая конструкция неклассического функционала качества

$$I = V_{\text{з}}(x(t_{\text{к}})) + \int_{t_0}^{t_{\text{к}}} [Q(t,x(t)) + \pi_1^{\mathrm{T}}(t,u_{\text{оп}}(t))u(t)]dt\,, \tag{13}$$

которая при отсутствии ограничений на управления $(U = R^m)$ в дифференциальной связи (10) соответствует вырожденной формулировке задачи синтеза ОУ.

**Заключение.** Таким образом, вырожденность постановки задачи синтеза по схеме дифференциального динамического программирования проявляется в том, что управление $u$ в функционал $I$ и в дифференциальную связь входят линейно, и условие стационарности выполняется тривиально ($u_{\text{оп}}$ не зависит от вектор-функции $u$ ), что позволяет по постановке задачи выбрать подходящую стратегию управления. Функционал (13) нами назван критерием взвешенной обобщенной работы (КВОР) [6]. Аналогичные утверждения в работе сформулированы для схемы приближения в пространстве политик и аналога вариационной схемы.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Буков В.Н.** Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 230 с.
2. **Красовский А.А.** Избранные труды. Теоретическая и прикладная теория управления. М.: Мысль, 2001. 389 с.
3. **Красовский А.А., Сизых В.Н.** Алгоритмическое обеспечение пассивных интерферометрических комплексов радиолокации // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000, №2. С. 109–119.
4. **Сизых В.Н Данеев А.В., Диль В.Ф.** Оптимизация процессов управления пространственным движением воздушного судна на основе уравнений нелинейной динамики // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 1-1. С. 195-200.
5. **Сизых В.Н. Диль В.Ф.** Синтез оптимального управления воздушным судном на основе уравнений нелинейной динамики // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. – М.: Изд-во МГТУ ГА, 2017. Т. 20. № 3. С. 139-148.
6. **Буков В.Н., Сизых В.Н**. Приближенный синтез оптимального управления в вырожденной задаче аналитического конструирования // А и Т. 1999, №12. С. 16-32.
7. **Сизых В.Н.** Итерационно-релаксационный метод приближенно-оптимального синтеза регуляторов // Докл. РАН. 2000. Т.371. №5. С. 571-574.
8. **Буков В.Н., Сизых В.Н.** Условия оптимальности в вырожденной задаче аналитического конструирования регуляторов // А и Т. 2001, №7. С.19-34.
9. **Буков В.Н., Сизых В.Н**. Метод и алгоритмы решения сингулярно-вырожденных задач аналитического конструирования регуляторов // Изв. АН. Теория и системы управления. 2001, №5. С.43-61.
10. **Сизых В.Н.** Итерационно - релаксационный метод нелинейного синтеза регуляторов // А и Т. 2005, №6. С.108-119.
11. **Сизых В.Н., Данеев А.В.** Квазилинеаризация и достаточные условия оптимальности в задаче улучшения и локализации // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18. № 4 (6). С. 1250-1260.
12. **Sizykh V.N., Daneev A.V., Dambaev J.G.** Methodology of Approximately Optimal Synthesis of Fuzzy Controllers for Circuit of Improvement and Localization // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 101. No. 3. Pp. 487-506.


---

**V.N. Bukov** (Research Institute of Aviation Equipment, Zhukovsky, Moscow Region), **A.V. Daneev, V.N. Sizykh** (Irkutsk State Railway University, Irkutsk). **Analytical design of optimal regulators for non-classic quality functionals in a degenerate formulation**

*Abstract.* We consider the problem of analytical design of optimal controllers in the most general formulation for nonlinear plants with affinely (linearly and additively) input states and / or controls. On the basis of a new approach to approximately optimal control synthesis, a generalized theory of analytical design of optimal controllers (ACOR) is being developed. The main theorems are formulated; new concrete forms of non-classical quality functionals are obtained.

Р. А. СЕВОСТЬЯНОВ
(Санкт-Петербургский государственный университет)

# ВИЗУАЛЬНОЕ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЕ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

*В работе рассматривается задача автоматического позиционирования мобильного робота относительно визуального маркера в случае присутствия транспортного запаздывания в канале управления. Предлагаемый базовый регулятор без учета запаздывания основан на совместном использовании подхода visual servoing с особой многоцелевой структурой управления. Для компенсации запаздывания используется модификация базового регулятора, позволяющая сохранить передаточную матрицу. Эффективность рассматриваемого подхода демонстрируется на примере экспериментов с компьютерной моделью.*

**Введение.** В области современного автоматического управления можно выделить несколько основных направлений. Это использование алгоритмов компьютерного зрения, усиление требований к динамике подвижного объекта в различных режимах движения и удаленное управление через некоторую сеть. В области компьютерного зрения можно отметить подход visual servoing [1], который использует визуальную информацию напрямую в обратной связи. Для одновременного учета ряда требований к системе управления предназначены особые регулятора, получившие название многоцелевой структуры управления [2].

Удаленное управление приводит к проблеме запаздывания управляющего сигнала. Однако присутствие запаздывания неизбежно в современных системах управления, поскольку их реализация осуществляется на цифровых вычислительных устройствах. Как правило, запаздывание оказывает негативный эффект на качество управления, зачастую приводя к неустойчивости. Одним из наиболее эффективных способов учета запаздывания является метод компенсации, основанный на вычислении оценки будущего состояния системы [3].

Предлагаемый доклад посвящен решению задачи визуального позиционирования мобильного робота с учетом ряда требований к динамике управляемого движения, а также в условиях наличия транспортного запаздывания, на основе подхода, комбинирующего упомянутые выше методы.

**Предлагаемый подход.** В качестве объекта управления выступает мобильный робот унициклического типа, управляемый скоростями двух ведущих колес по принципу танкового шасси. Математическая модель динамики робота описывается уравнениями [4]

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\nu}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\nu}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau}(t-h) + \boldsymbol{\tau}_e(t-h), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\upsilon, \omega)^T$ – вектор скоростей; $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_\upsilon, \boldsymbol{\tau}_\omega)^T$ – вектор управляющих воздействий; $\boldsymbol{\eta} = (x, y, \varphi)^T$ – положение центра масс и курсовой угол робота; $\boldsymbol{\tau}_e$ – вектор внешних возмущений; $\boldsymbol{A}$ – диагональная матрица коэффициентов трения; $\boldsymbol{B}$ – диагональная матрица коэффициентов при управляющих воздействиях; $h$ – постоянное запаздывание. Нелинейная часть системы (1) определяется как

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

На роботе жестко закреплена видеокамера, направленная по курсовому углу. В поле обзора камеры всегда находится визуальный маркер, описываемый в виде набор точек на изображении $\boldsymbol{\sigma} = (x_i, y_i), i = \overline{1, N}$, которые являются проекциями угловых точек физического маркера $(X_i, Y_i, Z_i), i = \overline{1, N}$ в системе координат камеры. Рассмотрим задачу позиционирования робота относительно описанного маркера, которую можно формализовать как задачу минимизации разности $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_d$ между фактической и желаемой проекцией $\boldsymbol{\sigma}_d$ углов маркера. Движение должно быть астатическим, т.е. указанная разность должна сходиться к нулю даже в условиях

постоянного внешнего возмущения. Также необходимо осуществить компенсацию запаздывания.

Помимо динамики робота введем в рассмотрение динамику невязок проекций для дальнейшего использования при синтезе регулятора:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{Z})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{d}_{\mathbf{c}}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{d}_{\mathbf{c}}$ – внешнее возмущение, а компонентами матрицы $\boldsymbol{L}$ для каждой точки $(x_i, y_i)$ являются блоки

$$\boldsymbol{L}(x_i, y_i, Z_i) = \begin{pmatrix} x_i / Z_i & -(1 + x_i^2) \\ y_i / Z_i & x_i y_i \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что для непосредственного измерения доступны величины $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{e}}$ и $Z_i$.

***Многоцелевой компенсирующий регулятор.*** Для минимизации невязок проекций рассмотрим специальную структуру управления, известную как многоцелевой регулятор в виде

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{z}}_v &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{z}_v), \\
\dot{\boldsymbol{z}}_q &= \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Z})\mathbf{z}_{\mathbf{v}} + \boldsymbol{H}_e(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{z}_q), \\
\dot{\boldsymbol{\psi}} &= \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\beta}_v(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{z}_v) + \boldsymbol{\beta}_q(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{z}_q), \\
\boldsymbol{\zeta} &= \boldsymbol{\gamma}\mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}_v(\boldsymbol{v} - \mathbf{z}_v) + \boldsymbol{\mu}_q(\boldsymbol{q} - \mathbf{z}_q), \\
\boldsymbol{\tau} &= -\boldsymbol{K}_q\boldsymbol{z}_q - \boldsymbol{K}_v\boldsymbol{z}_v + \boldsymbol{\zeta}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Первые два уравнения представляют собой асимптотические наблюдатели системы (1) –(2). Их предназначение – оценка состояния системы в случае, если не все компоненты вектора состояния известны; кроме этого, выход наблюдателей служит входом для динамического корректора, описываемого третьим и четвертым уравнениями. Роль корректора заключается в регулировке реакции на внешние возмущения. Наконец, последнее уравнение задает управляющий сигнал, подаваемый на объект управления.

Положительно определенные матрицы наблюдателей $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{H}_q$ влияют на сходимость оценок состояния, и, косвенным образом, на реакцию на внешние возмущения. Матрицы $\boldsymbol{K}_q$ и $\boldsymbol{K}_v$ обеспечивают устойчивость системы управления при условии $\boldsymbol{K}_q = \boldsymbol{L}^T$ и положительной определенности матрицы $\boldsymbol{K}_v$. Матрицы корректора $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}_v$, $\boldsymbol{\beta}_q$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\mu}_v$, $\boldsymbol{\mu}_q$ настраиваются таким образом, чтобы обеспечить астатизм замкнутой системы.

Для учета запаздывания введем в рассмотрение особую трансформацию регулятора (3), обеспечивающую сохранение передаточной матрицы. Основная идея заключается в замене текущего значения вектора $\boldsymbol{v}$ на вычисленную оценку будущего значения. Вспомогательная переменная $\boldsymbol{z}_p$ введена для упрощения вычислений. Таким образом, компенсирующий многоцелевой регулятор описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{z}}_p &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_p + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{e}}, \\
\dot{\boldsymbol{z}}_v &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{z}_v), \\
\dot{\boldsymbol{z}}_\eta &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{z}_p, \\
\dot{\boldsymbol{z}}_q &= \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Z})\mathbf{z}_{\mathbf{v}} + \boldsymbol{H}_q(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{z}_q), \\
\dot{\boldsymbol{\psi}} &= \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\beta}_v(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{z}_v) + \boldsymbol{\beta}_q(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{z}_q), \\
\boldsymbol{\zeta} &= \boldsymbol{\gamma}\mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}_v(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{z}_v) + \boldsymbol{\mu}_q(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{z}_q) \\
\boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{z}_p + e^h(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{z}_p(t - h)), \\
\boldsymbol{\tau} &= -\boldsymbol{K}_q\boldsymbol{z}_q - \boldsymbol{K}_v\boldsymbol{z}_v + \boldsymbol{\zeta}.
\end{aligned} \tag{4}$$

***Результаты экспериментов.*** При компьютерной симуляции движения робота к квадратному маркеру без внешнего возмущения с базовым регулятором (3) при наличии запаздывания $h = 0.5$ наблюдается значительное перерегулирование: робот сначала подъезжает к маркеру

слишком близко, затем отъезжает назад (рис. 1, слева, пунктирной линией отмечено начальное положение маркера). При использовании компенсирующей трансформации (4) перерегулирование исчезает (рис. 2, справа), что идентично динамике системы с базовым регулятором при $h = 0$.

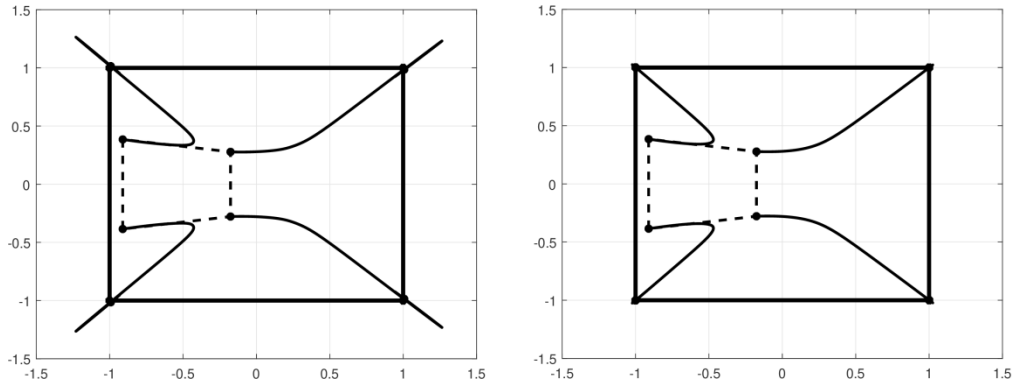



Рис. 1. Динамика системы с базовым регулятором (слева) и компенсирующим (справа).

**Заключение.** В работе представлен многоцелевой компенсирующий регулятор, предназначенный для решения задачи позиционирования мобильного робота относительно визуального маркера с учетом постоянного запаздывания. Эксперименты с компьютерной моделью демонстрируют работоспособность рассматриваемого подхода. В качестве темы ближайших исследований можно выделить задачу настройки параметров регуляторов для компенсации внешних возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chaumette F., Hutchinson S.: Visual Servo Control: Basic Approaches. *IEEE Robot Autom. Mag*. 2006. Vol. 13(4). P. 82–90.
2. Veremey E.I., Sotnikova M.V. Visual Image Based Dynamical Positioning Using Control Laws with Multipurpose Structure. *IFAC Proc*. 2015. Vol. 48(16). P. 184–189.
3. Веремей Е.И. Компенсирующие регуляторы по выходу для LTI систем с запаздыванием по управлению. *Сб. трудов X международной конференции ПМТУКТ-2017*. Воронеж: Новая книга, 2017. С. 106–110.
4. Carona R., Aguiar A.P., Gaspar J. Control of unicycle type robots: tracking, path following and point stabilization. *Proc. of IV Jornadas de Engenharia de Electronica e Telecomunicacoes e de Computadores*. 2008. P. 180–185.

**R. A. Sevostyanov** (Saint-Petersburg state university). **Visual positioning of the mobile robot considering delay**

*Abstract.* This paper considers the task of moving the mobile robot towards the visual marker in case of the transport delay in the control channel. The regulator is based on the mix of visual servoing approach and so-called multipurpose structure of the feedback. In order to compensate the delay the special modification of the base regulator is used, which is capable of keeping the transfer matrix of the basic regulator. Efficiency of the proposed method is shown on the basis of computer modelling.

Б. Г. ИЛЬЯСОВ, Г. А. САИТОВА, А. В. ЕЛИЗАРОВА
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИФРОВОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Предложено исследование устойчивости многосвязной системы автоматического управления, содержащей цифровые звенья, частотным методом. Критерий устойчивости основан на системном описании динамических свойств системы на уровне характеристик подсистем и характеристик связи.*

**Введение.** В различных областях техники широко распространены многосвязные системы автоматического управления (МСАУ). К тому же, в связи с массовым переходом техники управления на цифровую базу появляется возможность реализовать сложные алгоритмы управления, основанные на достижениях современной теории управления. Поэтому исследование устойчивости многосвязных систем управления с цифровыми элементами является актуальным.

В работе рассматриваются многосвязные системы автоматического управления и используется системное описание динамических свойств системы на уровне характеристик подсистем и характеристик связи [1,2].

Критерий устойчивости, предложенный в работе [1] позволяет графически исследовать устойчивость непрерывной многосвязной систем с однотипными подсистемами.

Для устойчивости линейных однотипной МСАУ необходимо и достаточно, чтобы годограф амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) подсистем $\Phi(j\omega)$, $\omega\in(0,+\infty)$, построенный на плоскости корней уравнения связи, не охватывал ни один из его корней [2,3].

Предлагаемый доклад посвящен возможности использования частотного критерия устойчивости МСАУ [2,3] для исследования устойчивости цифровых и гибридных, содержащих непрерывный объект управления и дискретный по времени регулятор, МСАУ.

**Исследование устойчивости цифровой МСАУ.** Пусть передаточная функция цифровой система (рис. 1) с периодом квантования $T_0$ имеет вид

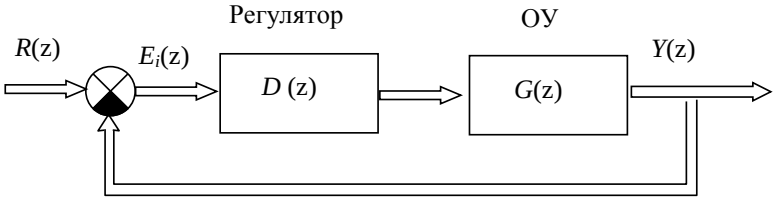



Рис. 1. Структурная схема цифровой МСАУ

$$C_i(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)D(z)}{1+G(z)D(z)}\,. \qquad (1)$$

Характеристическое уравнение системы с голономными связями, т.е. $H_m(s)=h_m$,

$$A(h,z)=1+h_2C^2(z)+h_3C^3(z)+\ldots+h_nC^n(z)=0\,, \qquad (2)$$

Уравнения связи относительно переменной $x$ для цифровой системы запишется

$$A(x)=1+h_2x^2+h_3x^3+\ldots+h_nx^n=0 \qquad (3)$$

и получается из (2) подстановкой $C(z)=x$.

Оценим справедливость предложенного в [2] критерия для оценки устойчивости цифровых многосвязных систем управления.

Опишем процедуру его применения.

1. Построим амплитудно - фазовую характеристику (АФХ) для сепаратных подсистем $C(z)$ представленных в форме z-описания. АФХ можно получить отображением z-плоскости на $s$-плоскость с помощью выражения $z=e^{sT_0}$ [4].

При построении частотных характеристик непрерывных систем в выражении для передаточной функции производится подстановка $s = j\omega$. Для цифровых систем управления соответствующий анализ в частотной области связан с заменой

$$z = e^{j\omega T_0} = e^{j\overline{\omega}} = \cos(\overline{\omega}k) + j\sin(\overline{\omega}k), \quad \overline{\omega} = \omega T_0 \ , \quad (-\pi < \overline{\omega} < \pi)$$

2. Находим корни характеристического уравнения связи $x_i$ (3) и располагаем их на той же комплексной плоскости;

3. Для устойчивости цифровых МСАУ необходимо и достаточно, чтобы годограф амплитудно-фазовой характеристики подсистем C( $e^{j\overline{\omega}}$ ), $\overline{\omega} \in (0,+\pi)$, построенный на плоскости корней уравнения связи (3), не охватывал ни один из его корней $x_i$.

На устойчивость системы влияет период дискретизации $T_0$. Например, годографы непрерывной системы и той же оцифрованной системы с периодами квантования $T_0$=0.025 с. и $T_0$=1 с. представлены на рисунке 2. Годографы непрерывной системе и цифровой с $T_0$=0.025 соответствуют устойчивым системам, а с $T_0$=1 с. неустойчивой, что подтверждают и переходные процессы.

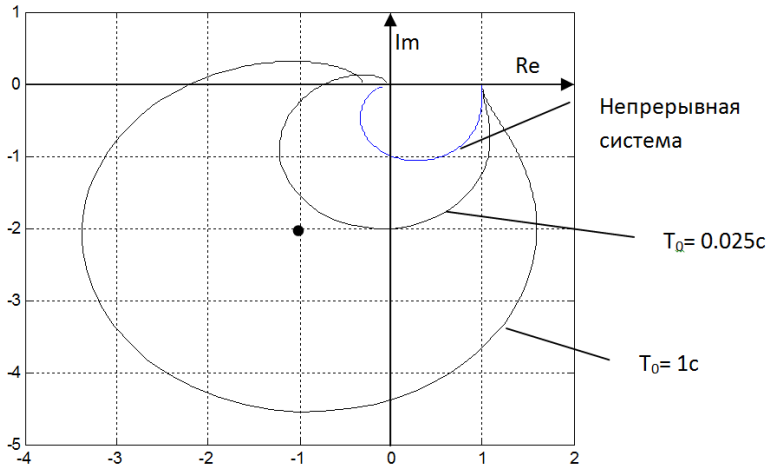



Рис. 2. Годографы непрерывной системы и цифровых системы с периодом квантования 1 с. и 0.025 с.

Можно определить критическое значение $T_0$, когда система находится на границе устойчивости.

**Исследование устойчивости гибридной МСАУ.** Рассмотрим устойчивость гибридных систем. В процессе исследования выявлено, что для устойчивости гибридных многосвязных систем необходимо и достаточно, чтобы годографы устойчивых замкнутых подсистем не охватывал корни уравнения связи. Для устойчивости подсистем необходимо, чтобы каждый цифровой элемент в подсистеме был устойчивым, и частота дискретизации каждого цифрового элемента была не больше граничного значения частоты дискретизации всей системы.

Процесс оценки устойчивой гибридной МСАУ можно описать следующим алгоритмом:

1. Построим АФХ сепаратных подсистем $C(z,s)$ на $s$-плоскости с помощью выражения $z = e^{sT_0}$ . При построении частотных характеристик непрерывной части в выражении для передаточной функции производится подстановка $s = j\omega$, $(0 \le \omega \le \infty)$. Для цифровой части соответствующий анализ в частотной области связан с заменой $z = e^{j\omega T_0}$ .

2. Находим корни характеристического уравнения связи $x_i$ (3) и располагаем их на той же комплексной плоскости;

3. Анализируем устойчивость системы, используя критерий. Для устойчивости гибридной МСАУ необходимо и достаточно, чтобы годограф амплитудно-фазовой характеристики подсистем $C(e^{j\omega T_0}, j\omega)$, $\omega \in (0, \pi/T_0)$, построенный на плоскости корней уравнения связи (3), не охватывал ни один из его корней $x_i$..

Например, на рисунке 3 представлены годографы непрерывной, гибридной (цифровой регулятор) и цифровой системы с $T_0$=0.025 и $T_0$=1 с.

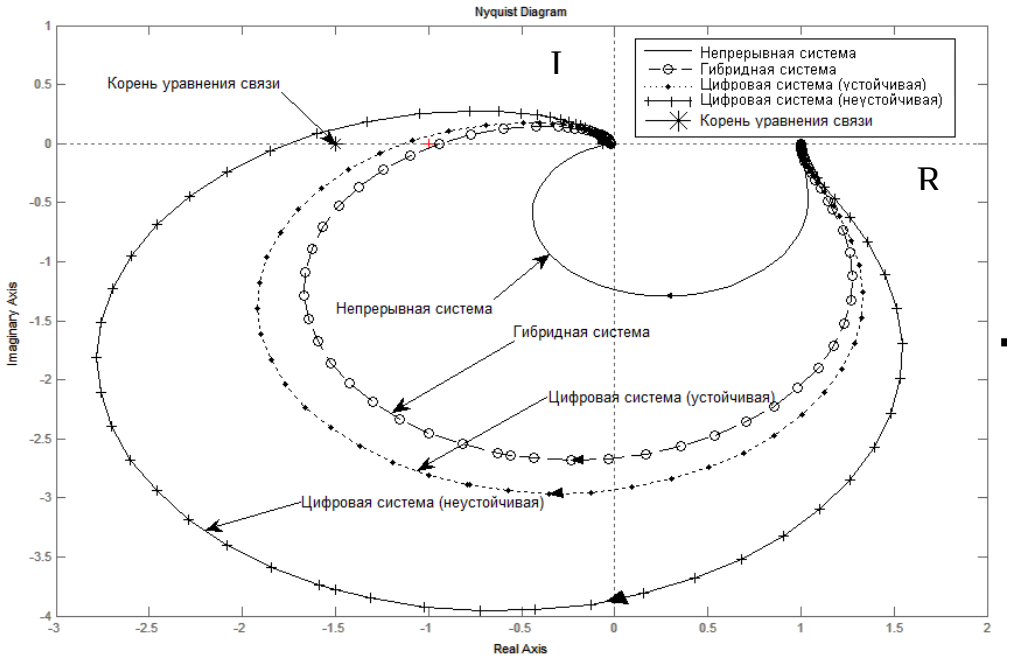



Рис. 3. Годографы сепаратных подсистем: непрерывной, гибридной, цифровой – устойчивой и неустойчивой

**Заключение.** При определении устойчивости цифровых и гибридных МСАУ можно использовать критерий устойчивости, предложенный в работе [1,2]. Устойчивость цифровой и гибридной МСАУ зависит от периода дискретизации и от того, охватываются ли корни уравнения связи годографом сепаратной подсистемы.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 18-08-00702а, 18-08-01299а*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильясов Б.Г., Кабальнов Ю.С**. Исследование устойчивости однотипных многосвязных систем автоматического управления с голономными связями между подсистемами. // Автоматика и телемеханика. – М., РАН, 1995, № 8. – С. 82-90.
2. **Ильясов Б.Г., Саитова Г.А.** Системный подход к исследованию многосвязных систем автоматического управления на основе частотных методов // Автоматика и телемеханика. 2013. № 3. С. 173-191.
3. **Ильясов Б.Г., Саитова Г.А.** Анализ устойчивости динамических систем, представленных в полиномиальной векторно-матричной форме // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2018, № 2. С. 3-10.
4. **Бесекерский В.А., Попов Е.П.,** Теория систем автоматического регулирования: учебное пособие для вузов. Изд. 4-е, перераб. и доп.- СПб. : Профессия, 2007 г.

---

**B.G. Ilyasov, G.A.Saitova, A.V.Elizarova,** (Ufa state aviation technology university). **Stability study of digital multivariable automatic control system**

*Abstract.* A study of the stability of a multiply connected automatic control system containing digital links by the frequency method is proposed. The stability criterion is based on a systematic description of the dynamic properties of a system at the level of subsystem characteristics and communication characteristics.

Т.А. АЛЕКСЕЕВА
(Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург)

Т.Н. МОКАЕВ
(Санкт-Петербургский государственный университет)

Ю.А. ПОЛЬЩИКОВА
(Научно-исследовательский финансовый институт Министерства финансов Российской Федерации,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва)

# НОВОКЕЙНСИАНСКАЯ МОДЕЛЬ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ: ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФИСКАЛЬНОЙ И МОНЕТАРНОЙ ПОЛИТИК

*Мы рассматриваем динамику новокейнсианской модели в непрерывном времени с механизмом ценообразования по Ротембергу под влиянием различных режимов денежно-кредитной и налогово-бюджетной политик в рамках оптимальной задачи управления. Сочетание пассивной денежно-кредитной политики, основанной на правиле обратной связи (правило Тейлора), и активной налогово-бюджетной политики может приводить к нестабильной динамике в экономике. Выявление областей значений коэффициента Тейлора с нарушением локальной определенности позволяет контролировать экономическую систему через управление этим параметром.*

**Введение.** В современной макроэкономике в области анализа влияния денежно-кредитной и налогово-бюджетной политики на экономику основным инструментом являются новокейнсианские (НК) модели бизнес-циклов, которые активно развиваются с 1970-х годов (см., например, [1-3]) и имеют ряд преимуществ. Во-первых, поведение основных макроэкономических агентов выводится в модели с помощью микроэкономических обоснований: решаются динамические оптимизационные задачи агентов с заданными ограничениями. Во-вторых, вводятся вполне реалистичные предпосылки о существовании различных трений на рынке ценообразования, на рынке труда или ограничений в доступе к финансовым благам (например, предположение о существовании издержек при ценообразовании), что делает эффекты от денежно-кредитной политики не нейтральными. В-третьих, выведенная на основании микроэкономических обоснований система уравнений описывает динамику основных макроэкономических переменных (ВВП, потребление, инфляция).

В рамках новокейнсианского подхода рассматриваются модели в дискретном и непрерывном времени. В последнее время исследователи все чаще обращаются к моделям в непрерывном времени в силу их так называемой «аналитической податливости» [4,5], позволяющей применять к ним важные математические результаты и инструменты, в частности математическую теорию управления и теорию стохастических дифференциальных уравнений. Это открывает больше возможностей для анализа динамики НК моделей, в том числе ной - существование периодических, квазипериодических и хаотических решений, в случае локальной неопределённости системы [6-9].

Один из вопросов, решаемых в рамках исследования такой модели, относится к теме взаимодействия налогово-бюджетной и денежно-кредитной политик. В литературе наблюдается некоторая асимметрия: денежно-кредитным аспектам в рамках неокейнсианских моделей уделяется больше внимания, чем налогово-бюджетным. Тем не менее, в ряде работ [10-14] авторы показывают важность учета налогово-бюджетной политики при исследовании денежно-кредитной и наоборот, обнаруживая новые эффекты при их взаимодействии. Сочетание различных режимов взаимодействия денежно-кредитной и налогово-бюджетной политик может приводить к кардинальному изменению поведения экономической системы.

Наше исследование посвящено анализу новокейнсианской модели в непрерывном времени, построенной на базе модели С. Лейса и Л. фон Таддена [11], описывающей равновесие в экономической системе, где агенты живут конечное время (что приводит к восприятию агентами государственного долга как чистого актива). В модели присутствуют 4 макроэкономических

агента (репрезентативный потребитель, производитель, государство и Центральный банк (ЦБ)). Структура их взаимодействия включает денежно-кредитную и налогово-бюджетную политику, анализ режимов которых и их различных сочетаний позволяет выявить области локальной определенности, отвечающей единственности локального решения и, соответственно, локальной неопределенности, когда динамика модели варьируется от длительной непредсказуемости до глобальной неопределенности.

Мы анализируем влияние режимов этих политик на динамику модели и возможность оценить границы управления выбором агентов (потребителей) со стороны ЦБ и государства с помощью правила Тейлора. Мы показываем, что, если монетарная политика направлена на стабилизацию инфляции (активный режим), а фискальная – на стабилизацию государственного долга (пассивный режим), система демонстрирует единственность локального равновесия. В случае, когда обе политики не направлены на стабилизацию (инфляции и долга соответственно), в системе нарушается единственность локального равновесия. При других сочетаниях режимов политик существуют области локальной неопределенности системы, что может приводить к последствиям, которые варьируются от длительной непредсказуемости до глобальной неопределенности.

Моделирование экономической динамики в рамках задачи оптимального управления. Мы берем за основу НК модель экономики, представленную в [11], и вводим в нее механизмы, которые принципиально отличают нашу модель от рассмотренной в [11] в следующих аспектах. Во-первых, в нашей модели применен иной механизм ценообразования - по Ротембергу [15] (каждая фирма сталкивается с корректирующими издержками в процессе установления цены). Во-вторых, в модель вводится предположение о не вечно живущих агентах (домохозяйствах): для домохозяйств оценивается вероятность их смерти. Это позволяет часть государственного долга для агентов в нашей модели рассматривать как чистый актив, и его величина становится переменной, имеющей значение для денежно-кредитной политики, что добавляет дополнительный канал для взаимодействия налогово-бюджетной и денежно-кредитной политик.

Из решения задачи динамической оптимизации для экономических агентов - репрезентативного потребителя и производителя, и заданной динамики государственного долга, мы выводим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{b}_t = \left(r - f^F\right) b_t + f^M \pi_t b_t + g - \tau + f^F b, \\ \dot{C}_t = \left(r - \rho\right) C_t + f^M \pi_t - \xi\left(\xi + \rho\right) b_t, \\ \dot{\pi}_t = \dfrac{\varepsilon - 1}{\theta}\left(1 - R \cdot \dfrac{\varepsilon - 1}{\theta} \cdot C_t^{1+\varphi}\right) + \left(\rho + \xi\left(\xi + \rho\right)\dfrac{b_t}{C_t}\right)\pi_t, \end{cases} \tag{1}$$

где $C_t$ - совокупное потребление в периоде $t$, $b_t$ - сумма облигаций на рынке в периоде $t$; $\pi_t$ - уровень инфляции в периоде $t$, $r$ - целевой уровень процентной ставки, $g$ - фиксированный уровень государственных расходов, $\tau$ - уровень аккордных налогов, $f^M$, $f^F$ – коэффициенты Тейлора, $\rho, \xi, \varepsilon, \theta, \varphi$, $R$ - параметры модели. Модель (1) описывает динамику государственного долга, потребления и инфляции.

ЦБ и государство выступают в качестве агентов, осуществляющих регулирование экономики посредством проведения денежно-кредитной и налогово-бюджетной политик соответственно. В зависимости от выбора режима таких политик ЦБ и государство контролируют поведение экономической системы и единственность локального равновесия.

***Режимы монетарной и фискальной политик и их регулирование.*** Инструментом регулирования экономики для ЦБ является реальная процентная ставка, которая зависит от степени отклонения инфляции от своего целевого значения и подчиняется правилу Тейлора [16]

$$r_t = r + f^M(\pi_t - \pi), \tag{2}$$

где $r$– целевое значение процентной ставки, $\pi$ – целевой уровень инфляции, $f^M$ – коэффициент Тейлора. С помощью управления коэффициентом Тейлора ЦБ принимает решение о проведении активной или пассивной денежно-кредитной политики.

Государство в свою очередь применяет правило Тейлора с аккордным налогом, который зависит от степени отклонения государственного долга от его целевого значения

$$\tau_t = \tau + f^F(b_t - b), \quad (3)$$

где $\tau$ – целевой уровень аккордных налогов, $b$ – целевой уровень государственного долга, $f^F$ – коэффициент Тейлора. Аналогично ЦБ государство осуществляет выбор активной или пассивной налогово-бюджетной политики через управление коэффициентом Тейлора $f^F$.

***Локальная определенность и стабилизация равновесия.*** Локальная динамика равновесия существенно зависит от режима взаимодействия денежно-кредитной и налогово-бюджетной политик. Мы выводим аналитические условия существования области локальной определенности и нарушения ее границ, зависящие от параметров системы и коэффициентов Тейлора в (2) и (3). С одной стороны, единственность локального равновесия достигается, если денежно-кредитная политика направлена на сдерживание инфляции. При этом важно, чтобы сдерживание инфляции усиливалось (коэффициент $f^M$ увеличивался), когда налогово-бюджетная политика будет направлена на стабилизацию долга. С другой стороны, если денежно-кредитная политика пассивная, то для достижения единственности локального равновесия необходимо, чтобы она была не слишком пассивной (коэффициент $f^M$ был не более определенного значения), а налогово-бюджетная политика не сильно активно стабилизировала долг (коэффициент $f^F$ был не более определенного значения). В случае, когда денежно-кредитная политика не направлена на сдерживание инфляции, а налогово-бюджетная на стабилизацию долга, единственность локального равновесия не достигается. Существование областей неопределенности указывает на непредсказуемость выбора агентов и может свидетельствовать о сложной, в том числе хаотической, динамике модели при соответствующих условиях на параметры системы, которая требует отдельного изучения с последующим управлением ею.

Для определенных значений параметров системы (см., например, [14]) мы проверили полученные нами аналитические условия единственности локального равновесия (Рис. 1). В нашей модели единственность локального равновесия достигается при активной денежно-кредитной политике и пассивной налогово-бюджетной и не достигается при пассивной денежно-кредитной политике и активной налогово-бюджетной, что отличает наши результаты от полученных в [14].

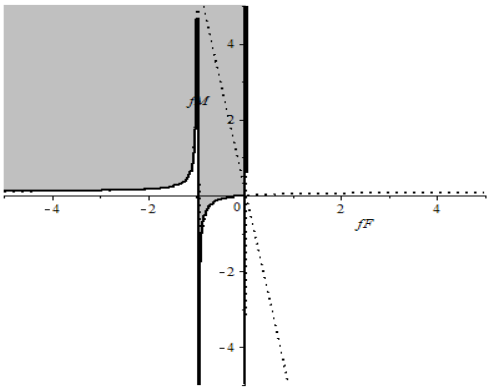



Рис. 1

**Заключение.** Опираясь на подход, представленный в [11], мы предложили модель новокейнсианского типа с другим ценообразованием (по Ротембергу). Мы проанализировали коэффициенты Тейлора в рамках правила Тейлора для денежно-кредитной и налогово-бюджетной политик с точки зрения их влияния на нарушение стабильности экономической системы и определили области значений этих управляющих параметров, при которых сохраняется или нарушается локальная определенность. Выявление областей параметров модели (1) для различных комбинаций режимов этих политик: активного и пассивного, позволяет в дальнейшем исследовать и описать нерегулярную динамику этой макроэкономической модели и предложить подходы к ее стабилизации.

*Работа выполнена при поддержке программы Ведущие научные школы Российской Федерации (НШ-2624.2020.1).*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Blanchard O.** Price asynchronization and price level inertia. In R. Dornbush, M.H. Simonsen. Eds. Inflation debt and indexation. Cambridge. MA: MIT Press, 1983. P. 3-24.
2. Blanchard O. Debt, deficits, and finite horizons, *Journal of Political Economy.* 1985. Vol. 93. №2. P. 223–247.
3. Fischer S. Long-term contracts, rational expectations and the optimal money supply rule. *Journal of Political Economy*. 1977. Vol. 85, №1. P. 191-205.
4. Brunnermeier M.K., Sannikov, Y. A macroeconomic model with a financial sector. *American Economic Review*. 2014. Vol. 104. №2. P. 379–421.
5. Maliar L. Continuous time versus discrete time in the New Keynesian model: closed-form solutions and implications for liquidity trap. CEPR working paper. 2018. DP 13384.
6. Alexeeva T.A., Barnett W.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. Dynamics of the Shapovalov mid-size firm model. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. Vol. 140. 110239.
7. Alexeeva T.A., Barnett W.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. Time-delay control for stabilization of the Shapovalov mid-size firm model. *IFAC-PapersOnLine. 21th IFAC World Congress 2020* (*1st Virtual IFAC World Congress*).
8. Barnett W., Bella G., Ghosh T., Mattana P., Venturi B. Shilnikov chaos, low interest rates, and New Keynesian macroeconomics, *Working paper series in theoretical and applied economics*. 2020. No 202001.
9. Slobodyan S. Indeterminacy and stability in a modified Romer model. *Journal of Macroeconomics.* 2007. Vol. 29. №1. P. 169-177.
10. Gerko E., Sossounov K. Trend inflation and monetary policy rules: determinacy analysis in New Keynesian model with capital accumulation. *The B.E. Journal of Macroeconomics*. 2015. Vol. 15. №1. P. 413–441.
11. Leith C., Von Thadden, L. Monetary and fiscal policy interactions in a New Keynesian model with capital accumulation and non-Ricardian consumers. *Journal of Economic Theory*. 2008. Vol. 140. №1. P. 279-313.
12. Leeper E.M. Equilibria under ‘active’ and ‘passive’ monetary and fiscal policies. *Journal of Monetary Economics.* 1991. Vol. 27. №1. P. 129-147.
13. Tsuzuki E., Shinagawa S., Inoue T. Numerical Analysis of Equilibrium Determinacy in the New Keynesian Model with Monetary and Fiscal Policy Lags. *Journal of Economy and its Applications*. 2016. Vol. 6. №1. P. 1-27.
14. Tsuzuki E. Fiscal policy lag and equilibrium determinacy in a continuous-time New Keynesian model. *International Review of Economics*. 2016. Vol. 63. №3. P. 215-232.
15. Rotemberg J.J. Monopolistic price adjustment and aggregate output. *The Review of Economic Studies*. 1982. Vol. 49. №4. P. 517-531.
16. Taylor J. Discretion versus policy rules in practice. *Conference Series on Public Policy*. 1993. Vol. 39. №1. P. 195–214.

---

**T.A. Alexeeva** (National Research University Higher School of Economics, St.Petersburg), **T.N. Mokaev** (St.Petersburg University), **I.A. Polshchikova** (Financial Research Institute of the Ministry of Finance of the Russian Federation, National Research University Higher School of Economics, Moscow) **The New Keynesian model in continuous time: optimal control for monetary and fiscal interaction.**

*Abstract.* Dynamics of the New Keynesian model in continuous time with the Rotemberg pricing mechanism is considered in a framework of an optimal control problem. Various regimes of monetary and fiscal policy ('active' and 'passive') can lead to unstable dynamics in the economy. The feedback rule based on the Taylor principle establishes in terms of both monetary and fiscal policies parameters conditions for local equilibrium determinacy. Revealing the regions of the Taylor coefficient values in violation of local determinacy allows us to control the economic system through the control of this parameter.

В.А. ГЛАЗУНОВ, Г.С. ФИЛИППОВ, Ю.В. РОДИОНОВ, А.Н. СУХОСТАВСКИЙ
(ФГБУН «Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН», Москва)

# ТРЕНДЫ РАЗВИТИЯ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОДВОДНЫХ РОБОТИЗИРОВАННЫХ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ КОМПЛЕКСОВ

*На основании открытых данных сформулированы гипотезы о трендах развития архитектур роботизированных морских платформ (РМП) для освоения шельфа. В докладе акцентируется внимание на сформировавшемся тренде проектирования подводной инфраструктуры для добычи углеводородов и необходимости мультиагентной РМП для добычи минеральных ресурсов. Предполагается, что для монтажа и устройства подводных сооружений будут эффективны роботы-агенты с жесткими и гибкими звеньями с 6-ю степенями свободы на выходном звене. Предложено использовать конструктивные решения прочного корпуса подводной лодки «Акула» для подводного туннелепроходческого комплекса.*

**Введение. Проблема и тема доклада.** Столкновение цивилизаций как проявление эволюции глобальных социально-экономических систем приводит к ускорению освоения территорий дна мирового океана.

Военное противостояние СССР и США на воде и под водой привело к тому, что интенсивно развивались технологии построения различных боевых подводных систем и инфраструктуры, обеспечивающей это противодействие. С 2000-х годов в России шло проектирование и производство новейших боевых роботов «Посейдон», параллельно появлялись современные подводные робототехнические комплексы гражданского или двойного назначения. В настоящее время активно идет проектирование и устройство подводной инфраструктуры для добычи углеводородов и других минеральных ресурсов.

Большая часть проектно-конструкторских разработок и опытно-конструкторских работ ведутся в закрытых проектных и опытно-производственных организациях, но анализ открытых публикаций позволяет проследить тенденцию к увеличению массогабаритных характеристик технологических, стационарных, подвижных, обитаемых и необитаемых модулей, установок и роботизированных мультиагентных комплексов. С другой стороны, в открытых публикациях о специальных российских системах не встречаются научно-теоретические и прикладные разработки роботизированных систем по подводному монтажу и строительству подводной инфраструктуры, а также слабо представлены разработки по добыче минерального сырья с морского дна.

В настоящем докладе будет представлено перспективное видение о возможных архитектурах подводных робототехнических систем, которые позволят проводить как строительно-монтажные работы, так и активно осваивать подводные месторождения.

**Обзор источников и результаты исследований.** Цивилизации как целеустремленные системы (ЦУС) при стремлении к своим идеалам стремятся к автономности, что возможно только поглощая другие ЦУС и/или расширяя свои ареалы влияния [1, 2]. Самоизоляция, как защита от конфликтных столкновений с другими цивилизациями, не возможна.

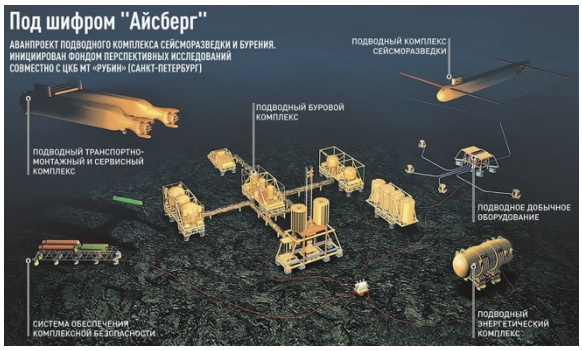



Рис. 1. Архитектура подводного комплекса "Айсберг" для сейсморазведки и бурения

Передовым странам для активной добычи углеводородов и обеспечения энергетической безопасности экономики ЦУС уже недостаточно морских буровых платформ и в них проектируются подводные комплексы, в т.ч. и в России (рис. 1).

Кроме углеводородов на российском арктическом шельфе имеются богатые залежи минерального сырья, без которого невозможно быть автономным в производстве высокотехнологичной продукции, микроэлектронике: медноникелевые руды, олово, платиноиды, агрохимические руды, редкоземельные металлы, крупные запасы золота, алмазов, вольфрама, ртути, черных металлов, оп-

тического сырья и поделочные камни. Основные ресурсы минерального сырья Арктики сосредоточены в северной части Кольской провинции: платиновые металлы, медно-никелевые руды, титан, тантал, ниобий, редкоземельные металлы, железо, фосфор, полиметаллы, флюорит, железо, хром, марганец, золото, алмазы [3].

**Канадская компания *Nautilus Minerals*** могла стать первой в мире компанией по глубоководной добыче полезных ископаемых и проектировала мощные горнодобывающие подводные роботы (рис. 2), однако стала банкротом.

Рис. 2. Проекты подводных горнодобывающих роботов компании *Nautilus Minerals* (Канада)

Вероятно, Китай станет первой страной в мире, которая начнет добычу полезных ископаемых на морском дне, если в 2020 году будут утверждены международные правила эксплуатации, сообщил агентству Reuters глава международного органа по морскому дну (ISA) [4].

Организация добычи минерального сырья со дна российского шельфа потребует устройство долговременных обитаемых и необитаемых сооружений на морском дне.

Даже на небольших глубинах 100-500 метров длительные подготовительные и строительно-монтажные работы возможны при формировании морских роботизированных платформ с функцией группового управления как на этапе строительства донной инфраструктуры, так и во время добычи полезных ископаемых. Структуры аналогичных систем и принципы их построения уже защищены патентами [5 – 8].

Мультиагентная подводная роботизированная система – это уже реальность, которая реализуется благодаря новейшим цифровым и нейросетевым технологиям. Стационарная долгосрочная подводная инфраструктура позволяет иметь мультиканальную интегральную информационную сеть с использованием комбинированных пространственно-объемных антенно-фидерных полей с автоматической системой удержания глубины для различных задач, в т.ч. и для управления различными роботами-агентами. Подводная производственная площадка – это ограниченное пространство и подводная акустическая связь со средней скоростью распространения звука около 1500 м/с, и наличие для нее цифровых модемов разной производительности и разных габаритов [9] позволит уже сегодня управлять автономными беспилотными подводными аппаратами с функцией группового управления с различными массогабаритными характеристиками.

Для организации взаимодействия автономных роботов без вмешательства операторов можно развивать нейросетевые технологии и наработанные программы взаимного обмена данными, созданные еще в 70-80-е года XX века при отработке залповой стрельбы крылатыми ракетами «Гранит» [10].

Появляются и новые решения, например, радиоуправление подводными робототехническими системами путем возбуждения эмалированного влагостойкого провода в поверхностном скин-слое морской воды малогабаритными антенными устройствами сверхнизких радиочастот, что повысит качество обмена информацией и управляющими командами [11 – 13].

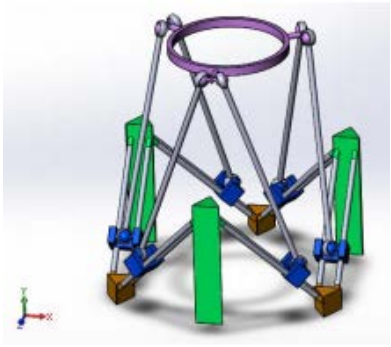


Рис. 3. Кинематическая схема "Гексапод-монтажник"

Типовые технологические циклы, например, монтаж подводной инфраструктуры из цилиндрических объемных конструкций, в ближайшие 5-15 лет будут решаться с помощью робототехнических комплексов с мощными рабочими органами типа гексаподов с 6-тью степенями свободы. Такой конструктивный вариант рабочего органа позволит перемещать, позиционировать, фиксировать и собирать объемные крупногабаритные конструкции в автоматическом режиме. На рисунке 3 представлена кинетическая схема рабочего органа «Гексапод-монтажник». Гексаподы способны перемещать, позиционировать и удерживать тяжелые и объемные конструкции [14 – 16].

Для подводных монтажных работ перспективно применять манипуляторы с гибкими звеньями (рис. 4). Применение таких манипуляторов под водой позволит если не полностью, то частично отказаться от дорогих подводных роботов транспортеров, т.к. есть возможность застропить конструкцию в надводном положение, например, в погружающемся плавучем доке.

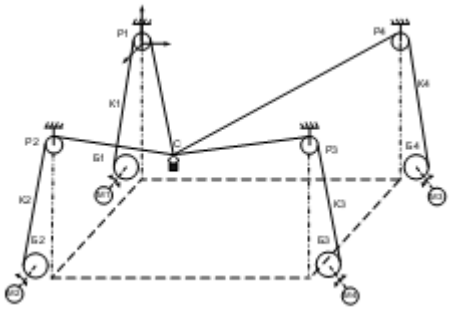



Рис. 4. Кинематическая схема манипулятора с гибкими звеньями

Используя накопленные компетенции в судостроительных технологиях по созданию тяжелых подводных крейсеров типа «Акула», а именно способность создавать многокорпусную систему, позволит создать комплексные горнопроходческие комплексы с объединением инъекционного закрепления массивов дна шельфа и тоннелепроходческие комплексы. Тоннелепроходческий комплекс выполняет механизированное разрушение забоя, отгрузку разрушенной породы, возведение крепи. К числу тоннелепроходческих комплексов относятся механизированные проходческие щиты, проходческие комбайны, тоннельные комплексы. Диаметр основных секций прочного корпуса «Акулы» равен 10 м (рис. 5), что может позволить разместить автоматический комбинированный тоннелепроходческий комплекс в одной секции не увеличивая диаметр прочного корпуса для устройства подводных герметичных штолен и шахт разного назначения. В другой секции можно обустроить служебные и жилые помещения для персонала. Субмарины типа «Акула» моряки называли плавучим «Хилтоном», т.к. это первые подводные лодки с повышенным комфортом [17].

Рис. 3. "Акула" на утилизации.
Видны две основные секции прочного корпуса диаметром 10 м

**Выводы.** Глубинное противостояние между цивилизациями по всем видам деятельности по модели Н. Данилевского [18] – это война на полное уничтожение конкурентной цивилизации как ЦУС. Это приводит к попыткам обеспечить себе автономность и расширение ареала влияния за счет освоения морского шельфа, что придает импульс к развитию роботизированных морских платформ. У стран-цивилизаций Россия и США накоплены компетенции для освоения океанских глубин. Однако Китай ускоренными темпами ликвидирует свое отставание как в боевых подводных роботизированных комплексах, так и в производстве и запуске морских роботизированных мультиагентных платформ гражданского и двойного назначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Акофф Р., Эмери Ф.** О целеустремленных системах / Р. Л. Акофф, Ф. Э. Эмери. - Пер. с англ. под ред. и с предисл. И. А. Ушакова. Изд. 2-е, доп. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. - 271 с.
2. **Веллер М.** Социология энергоэволюционизма / Михаил Веллер. - М.: Астрель, 2011. – 256 с.

3. Полезные ископаемые Арктики. URL: https://arktika-antarktida.ru/arktikapolisk.shtml (Дата обращения 13.08.2020 г.).
4. Nautilus to restructure seabed-mining assets (2019). URL: https://resourceworld.com/nautilus-to-restructure-seabed-mining-assets/ (Дата обращения 10.08.2020).
5. **Есаулов У.И., Култыгин Е..Ю., Гуркин В.Ф., Черников С.Г., Глущенко М.Ю., Белотелов Д.В., Фофанов Д.В., Захаров А.В.** Подводный робототехнический комплекс / Патент № 2446983 РФ, МПК B63G 8/00,10.04.2012.
6. **Есаулов У.И., Култыгин Е..Ю., Гуркин В.Ф., Черников С.Г., Глущенко М.Ю., Белотелов Д.В., Фофанов Д.В., Захаров А.В.** Погружаемая платформа-трансформер и робототизированный комплекс для осуществления подводных работ / Патент № 2438914 РФ, МПК D63D 35/00, B63G 8/00, B63,10.01.2012.
7. **Чернявец В.В., Зеньков А.Ф., Бродский П. Г., Руденко Е. И., Леньков В. П.** Подводный робототехнический комплекс / Патент № 2563074 РФ, МПК B63G 8/00, B63C 11/48, 20.09.2015.
8. **Борисов Е.Г., Матросов С.И., Семенов А.Г.** Мультиагентная роботехническая система / Патент № 2658684 РФ, МПК B25J 5/00,10.01.2017.
9. Мы сделали самый маленький в мире гидроакустический модем URL: https://habr.com/ru/post/428367/ (Дата обращения 12.08.2020).
10. П-700 "Гранит". URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/П-700_«Гранит» (Дата обращения 10.08.2020).
11. **Кистович Ю.В.** «Поверхностные электромагнитные волны Ценника СВЧ диапазона на соленой воде», Дисс. кандидата физ.-мат. наук, Москва, ВНИИФТРИ, 1988.
12. **Дацко В.Н.** «Новые типы поверхностных электромагнитных волн в проводящих средах» Дисс. доктора физ.-мат. наук, Москва, ИОФ РАН, 2000.
13. **Федосов Д.В., Николаев А.В.** и др. Резонансная спиральная антенна // Патент РФ RU2680674C.
14. **Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф.** Пространственные механизмы параллельной структуры/- М.: Наука, 1991. - 95 с.
15. **Merlet J.-P.** Parallel robots / Netherlanlands: Springer. - 2006. 384 p.
16. **Глазунов В.А.** Новые механизмы в современной робототехнике/ Под ред. В. А. Глазунова - М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018. - 316 с.
17. Подводные лодки проекта 941 «Акула». https://ru.wikipedia.org/wiki/Подводные_лодки_проекта_941_«Акула» (Дата обращения 10.08.2020).
18. **Данилевский Н.Я.** Россия и Европа: взгляд на культурные и политические отношения Славянского мира к Германо-Романскому/ Н. Я. Данилевский. - М.: Издательство "Э", 2017. - (576 с.) - (Подарочные издания. Российская императорская библиотека) [Перв. изд. 1871 г.].


---

**V.A. Glazunov, G.S. Filippov, Y.V.Rodionov, A.N. Sukhostavkiy** (IMASH RAS, Moscow). **Trends of the development of structural elements of underwater robotic multi-agent complexes**

*Abstract.* Hypotheses about trends of the development of robotic marine platform architectures for shelf development are formulated. The report focuses on the emerging trend of designing underwater infrastructure for hydrocarbon production and the need for multi-agent robotic offshore platforms for mining mineral resources. It is assumed that 6DOF robot agents with hard and flexible links will be effective for installation and construction of underwater structures. It is proposed to use structural solutions of the strong hull of the Akula submarine for the underwater tunneling complex.

А.Я. КРАСИНСКИЙ
(МГУПП, МАИ, РУДН, Москва)

А.В. НИ
(РУДН, Москва)

А.А. ЮЛДАШЕВ
(МАИ, Москва)

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЗВЕНЬЕВ КАК СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

*В исполнительном звене манипуляторов с параллельной кинематикой пересекаются несколько кинематических цепей, вследствие чего неизбежно возникают геометрические соотношения, чрезвычайно усложняющие математическое моделирование их динамики. Разрабатываемое в докладе и основанное на переходе к продифференцированным уравнениям связей применение методов аналитической механики систем с избыточными координатами существенно упрощает задачу построения нелинейных математических моделей динамики манипуляторов с параллельной кинематикой за счет уменьшения размерности задачи обратной кинематики. Наличие таких моделей делает возможным использование результатов современной математической теории управления с неполной информацией о состоянии. Предлагаемый подход ранее позволил, в частности, эффективно исследовать задачи стабилизации сложных мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями.*

**Введение.** Параллельный манипулятор - это манипулятор, который включает в себя несколько кинематических цепей. По сравнению с последовательными манипуляторами, параллельные манипуляторы имеют более высокую жесткость исполнительного звена [1], вследствие чего и более высокую точность, а также значительно меньшую массу [2,3]. Эти преимущества достигаются за счет того, что, в силу устройства параллельного манипулятора, его исполнительное звено является пересечением остальных цепей, не давая им перемещаться свободно: для координат манипулятора естественным образом возникают нелинейные условные соотношения между расстояниями для узлов манипулятора и координатами этих узлов [3,4], которые с точки зрения теоретической механики можно рассматривать как геометрические связи. Математическое моделирование динамики параллельных манипуляторов представляет значительные трудности: для моделирования динамики необходимо решение обратной задачи кинематики, которая чрезвычайно усложняется ввиду наличия параллельных кинематических цепей. В настоящем докладе предлагается подход, который за счет перехода к продифференцированным геометрическим связям, создает возможность применения для математического моделирования динамики этого класса манипуляторов методов аналитической механики систем с избыточными координатами. Тем самым в общем случае размерность обратной задачи кинематики сокращается, а для систем с тремя параллельными цепями (например, дельта-робота) необходимость в решении такой задачи вообще может быть исключена.

**Математическое моделирование динамики манипуляторов.** Одна из основных трудностей при построении математических моделей манипуляторов связана с необходимостью учета сложных нелинейных геометрических связей, не позволяющих описать конфигурацию системы независимыми параметрами. Приходится вводить координаты в количестве, превышающем их минимально необходимое количество – число степеней свободы системы, причем геометрические связи налагают ограничения на координаты и их скорости. Уравнения Лагранжа второго рода неприменимы для систем, описываемых зависимыми координатами. Для зависимых координат обычно используются уравнения Лагранжа с множителями связей [5,6], но они увеличивают размерность системы и затрудняют анализ устойчивости. Линеаризация уравнений гео-

метрических связей и использование только первого приближения связей [7] не всегда приводит к правильным результатам, особенно при исследовании устойчивости установившихся движений. В общем случае при построении соответствующих математических моделей должны быть учтены и нелинейные члены разложения геометрических связей [8]. Альтернативный способ − использование уравнений в избыточных координатах в форме М.Ф. Шульгина [9] вместе с линейными дифференциальными связями, полученными дифференцированием геометрических связей.

Рассмотрим манипулятор с параллельным соединением звеньев как систему с координатами $\dot{s} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\dot{r} = B(r,s)\dot{r}$ $q_1,\ldots,q_n$, кинетической и потенциальной энергиями $T(q,\dot{q}), \Pi(q)$ и функцией Лагранжа $L = T - \Pi,$ , находящуюся под действием, кроме потенциальных, еще и непотенциальных сил $\tilde{Q}_i$ (среди которых могут быть и управляющие), отнесенных к координатам $q_i$. Пусть, далее, на эту систему наложены независимые между собой геометрические связи

$$\Phi_j(q_1,\ldots q_n) = 0, \quad j = 1,\ldots,m \tag{1}$$

причем в некоторой области якобиан

$$\frac{\partial(\Phi_1,\ldots \Phi_m)}{\partial(q_{n-m+1},\ldots q_n)} \neq 0 \tag{2}$$

Для составления векторно-матричных уравнений динамики системы введем векторы

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}; \quad q = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n-m} \end{pmatrix}; \quad s = \begin{pmatrix} q_{n-m+1} \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

где $s$ - вектор избыточных координат. Продифференцируем (1) по времени

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial s}\dot{s} = 0 \tag{3}$$

Разрешая (3) относительно скоростей избыточных координат, что возможно, поскольку, в силу (2), якобиан $\frac{\partial \Phi}{\partial s} \neq 0$ , получим

$$\dot{s} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\dot{r} = B(r,s)\dot{r} \tag{4}$$

Обозначая через $\vartheta(r,s,\dot{r})$ результат исключения зависимых скоростей из функции Лагранжа, а результат их исключения из непотенциальных сил − через $Q_i(r,s,\dot{r})$ , будем описывать движение системы векторно-матричными уравнениями М.Ф. Шульгина [7,8,9]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = Q_r + B'(r,s)Q_s + B'(r,s)\frac{\partial \vartheta}{\partial s}, \; Q_r = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{n-m} \end{pmatrix}; \; Q_s = \begin{pmatrix} Q_{n-m+1} \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

Здесь штрих означает транспонирование соответствующего выражения. Для замыкания системы к (5) следует присоединить уравнения связей (4). При рассмотрении динамики конкретных устройств наряду с системой (4),(5) могут быть учтены и переходные процессы в исполнительных приводах. Для этого следует добавить математические модели их динамики [10,11].

Далее определяются условия существования заданного режима работы манипулятора − находятся управляющие воздействия, обеспечивающие реализацию этого режима (например, удержание исполнительного звена в заданном положении), значения координат на этом движе-

нии. Вводятся возмущения – отклонения текущих значений координат от их значений на заданном движении (режиме работы), причем к управлению, обеспечивающему реализацию этого движения, добавляется управление, стабилизирующее это движение. На основе (4),(5) составляются векторно-матричные уравнения возмущенного движения с выделенным по известной методике [7,8,10,11] первым приближением. Для определения стабилизирующего управления из полученной системы выделяется линейная управляемая подсистема [12], для которой методом Н.Н. Красовского [13] определяется управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость по ее переменным. Устойчивость в полной нелинейной системе, замкнутой найденным для подсистемы линейным управлением, устанавливается [14] с использованием теории критических случаев [15,16], поскольку в системах с геометрическими связями характеристическое уравнение системы первого приближения уравнений возмущенного движения обязательно имеет столько нулевых корней [17], сколько связей наложено на систему.

**Заключение.** Полученные строгими методами нелинейные математические модели в виде системы уравнений (4), (5) создают возможность применения результатов математической теории управления и показали свою эффективность при исследовании задач устойчивости и стабилизации сложных мехатронных систем с геометрическими связями [7,10,11].

Следует обратить внимание на то, что ввиду ранее отмеченных конструктивных особенностей манипуляторов с параллельной кинематикой для большинства реально существующих устройств (в частности, для дельта-роботов) массы тех звеньев кинематических цепей, которые пересекаются в исполнительном звене, достаточно малы по сравнению с массой исполнительного звена. И это обстоятельство позволяет при определенных условиях вообще исключить необходимость решения задачи обратной кинематики для исследования динамики системы (4),(5), в частности, при определении минимально необходимых размерности управляющего воздействия (т.е. задействованных исполнительных приводов) и объема измерительной информации, достаточной для получения с помощью системы оценивания оценку фазового вектора системы.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Юревич Е. И.** Основы робототехники. СПб: Изд.: БХВ-Петербург, 2018. 304 с.
2. Данг С. Х. Кинематика односекционного параллельного манипулятора типа «додекапод». *Наука и образование.* МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 2. С. 241-254. DOI: 10.7463/0213.0539000.
3. Пашкевич А.П., Гомолицкий Р.И. Кинематика параллельных манипуляторов квазиортогональной структуры *Докл. БГУИР.* 2012. Т. 5, №4. С. 150-155.
4. Мирзаев Р. А., Смирнов Н. А. Исследование кинематики манипулятора параллельной структуры (дельта-механизма*). Вестник СибГАУ*. 2012. С. 46-50.
5. **Лурье А.И**. Аналитическая механика, М: Физматлит., 1961, 824 с.
6. **Раус Э. Дж.** Динамика системы твердых тел. Т 2, М: Наука, 1983, 544с.
7. Krasinskiy A.Ya., Il'ina A.N., Krasinskaya E.M. Stabilization of Steady Motions for Systems with Redundant Coordinates. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2019. Vol. 74, No. 1. Pp. 14-20.
8. Красинский А.Я., Красинская Э.М. О допустимости линеаризации уравнений геометрических связей в задачах устойчивости и стабилизации равновесий. *Теоретическая механика. Сборник научно-методических статей,* Москва, Изд-во МГУ, 2015. Вып. 29. С. 54 – 65.
9. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Ташкент. Научные труды САГУ. 1958. Вып. 144. 183с.
10. Krasinskiy A.Ya., Krasinskaya E.M. Complex Application of the Methods of Analytical Mechanics and Nonlinear Stability Theory in Stabilization Problems of Motions of Mechatronic Systems. A. A. Radionov and A. S. Karandaev (Eds.): *RusAutoCon 2019, LNEE 641*, pp. 357–370, 2020. Springer Nature Switzerland AG 2020
11. Krasinskiy A.Ya., Yuldashev A.A. Mathematical and Computer Modeling of a New Type of Two-Link Manipulator. 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). Date of Conference: 20-22 Nov. 2019. Date Added to IEEE Xplore: 02 January 2020. DOI: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947534.
12. Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем. *VIII Международный семинар «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Избранные труды STAB04.* Москва, ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН. 2-4 июня 2004-электронное издание. http://www:ipu/ru/semin/arhiv/stab04/. С. 97-103.
13. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1967. Стр. 475-514.
14. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избы-

точными координатами. *Наука и образование.* МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 03. DOI: 10.7463/0313.0541146
15. **Ляпунов А.М.** Собрание сочинений, Т.2. Москва−Ленинград: Изд-во АН СССР. 1956. 472 с.
16. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. 532 с.
17. Krasinskii, A.Y., Krasinskaya, E.M. A stabilization method for steady motions with zero roots in the closed system. *Autom Remote Control* **77,** 1386–1398 (2016). https://doi.org/10.1134/S0005117916080051

---

**A.Ya. Krasinskiy** (Moscow Aviation Institute, Moscow State University of Food Production, Peoples Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia), **A.V. Ni** (Peoples Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia), **A.A. Yuldashev** (Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia). **On one method for modeling the dynamics of manipulators with parallel connection of links as systems with geometric constraints.**

*Abstract.* In the executive link of manipulators with parallel kinematics, several kinematic chains intersect, as a result of which geometric relations inevitably arise, which extremely complicate the mathematical modeling of their dynamics. The application of methods of analytical mechanics of systems with redundant coordinates, developed in the report and based on the transition to differentiated equations of constraints, significantly simplifies the problem of constructing nonlinear mathematical models of the dynamics of manipulators with parallel kinematics by reducing the dimension of the inverse kinematics problem. The presence of such models makes it possible to use the results of modern mathematical control theory with incomplete information about the state. The proposed approach previously made it possible, in particular, to effectively study the problems of stabilization of complex mechatronic systems with nonlinear geometric constraints.

## Секция 2

## ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ, СЕТЕВОЕ, ГРУППОВОЕ И КООПЕРАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Д. Ю. МАКСИМОВ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва)

# УПРАВЛЕНИЕ ГРУППОЙ РОБОТОВ С ПОМОЩЬЮ РЕЗИДУАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

*В докладе предлагается способ распределения задач в BDI-парадигме в группе роботов-дворников, выполняющих текущие работы, при возникновении новых задач. Все возможные намерения роботов представляются в виде решетки, на элементах которой определяется умножение так, чтобы получалась резидуальная (и осмысленная) конструкция. Тогда левый резидуал определяет роботов, предпочтительных для выполнения новой задачи в соответствии с правилом логического вывода.*

**Введение.** Для групп интеллектуальных агентов одной из наиболее популярных в настоящее время является BDI-парадигма (*belief-desire-intention* [1]). В BDI-парадигме состояния агентов описываются на основании их убеждений, желаний и намерений. Множество поставленных задач, целей называется *желаниями* агента. Те желания, которые в данный момент агенту представляются осуществимыми, называются его *намерениями*. Представления об осуществимости возникают на основе *убеждений* – информации о складывающейся обстановке у самого агента и поступающей от других агентов. Обычно предполагают, что агенты ведут себя максимизируя некоторую функцию полезности, в том числе и в методах «рыночной экономики» [2, 3]. Агенты в группе взаимодействуют на основе максимизации каждым агентом своего стоимостного вклада и минимизации расходов. Агенты формируют списки целевых задач, каждая из которых определенным образом оценивается. Из этого списка каждый агент выбирает для себя наиболее выгодную задачу, а остальные выставляет на аукцион для продажи другим агентам.

Целью доклада является представление нового метода назначения исполнителя новой возникшей задачи в такой группе агентов (роботов), в которой каждый робот выполняет свою текущую задачу в текущий момент времени. В данном методе предполагается, что распределение задач в такой системе происходит только на основе структур на множестве возможных намерений – решеточной и резидуальной. При этом, оценка стоимости или расходов принимает значение не в числовой шкале, а в частично-упорядоченном множестве – решетке намерений группы роботов (агентов). Это продолжение линии исследований по оценке состояния системы элементами частично-упорядоченного множества [4 – 7].

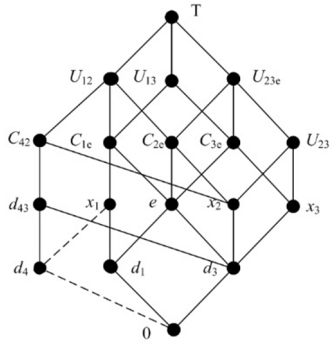



Рис. 1. Вариант решетки задач и намерений роботов-дворников

**Управление группой роботов-дворников.** Предполагается, что роботы-дворники могут выполнять следующие задачи: $x_1$ – поиск мусора, $e$ – вынос мусора, $x_3$ – распиливание мусора,

если он слишком велик для выноса за раз. У этих задач есть подзадачи, которые мы учитываем: $d_1$ – движение, $d_3$ – захват, $d_4$ – работа видеокамеры. Можно эти задачи рассматривать как множества необходимых операций для достижения соответствующих целей. Кроме этого, существует еще одна не-задача $x_2$ – ступор, в который впадает робот при невозможности выполнить задачу: при невозможности движения, или поднятия предмета, или его распиливания. У роботов могут быть намерения как объединение этих базовых задач – то, что роботы собираются выполнить исходя из своих возможностей. Таким образом, все возможные намерения робота представляются в виде решетки (Рис. 1). Чем выше лежит намерение на этой диаграмме, тем больше желаний включаются в это намерение и тем ценнее такой вариант поведения. Наиболее ценное поведение – наибольшая активность (элемент T), а наименее ценное – бездействие (0). При возникновении перед группой новой задачи необходимо решить, кто ее будет выполнять, т.е. включит в список своих намерений. Подобная задача рассматривалась в [5] на основе линейной логики, однако это сложная структура, тяжелая в реализации. Здесь мы рассмотрим вместо нее структуру резидуальной решетки, которая намного проще.

***Математические определения.*** Конечная *решетка* [8] (которые мы только и рассматриваем) – это конечное частично-упорядоченное множество $L$, в котором для любых элементов определены операции объединения $\vee$ и пересечения $\wedge$. На диаграмме решетки это ближайший больший (верхний) и ближайший меньший (нижний) соответственно. Таким образом, в конечной решетке всегда есть наибольший элемент T и наименьший 0. *Резидуальная решетка* [9] – это решетка $L=(L,\vee,\wedge,\mathrm{T},0)$, одновременно являющаяся моноидом $M=(L,\cdot,1)$. Операция умножения монотонна по обоим сомножителям и для нее должны быть определены левый $y$ и правый $x$ *резидуалы*: $x\cdot y\le z$, где $y=\{\max a\in L\mid x\cdot a\le z\}$, $x=\{\max b\in L\mid b\cdot y\le z\}$. Обозначения: $y=x\to z$, $x=z\leftarrow y$. Интуитивный смысл этих операций таков: было $x$ (ставка), сейчас возникло $y$ (выигрыш), что влечет $z$ (богатство). Или выигрыш оценивает переход от ставки к богатству. Аналогично в правом резидуале: если кода-то будет выигрыш $y$, то ставка $x$ оценивает переход к богатству $z$. Эта конструкция обладает рядом свойств, в частности: $x\cdot(y\vee z)=(x\cdot y)\vee(x\cdot z)$, $x\cdot 0=0$ и так же с другой стороны.

***Определение умножений.*** Для того, чтобы сравнивать решеточные оценки разных вариантов перехода от одних намерений к другим, надо определить умножения элементов решетки. Общего метода здесь не существует, и каждый раз требуется эвристика. Мы будем руководствоваться смыслом резидуалов для базовых элементов. Выберем единицу умножения из разумного предположения, что возникновения подзадач $d_4$ – работы видеокамеры, и $d_3$ – захвата, не вызывает смены задачи. Кроме того, повторение ступора $x_2$ влечет переход только к захвату $d_3$: $x_2\cdot x_2=d_3$, хотя в остальных случаях, например $d_1\cdot d_1=d_1$. Следовательно, может быть $x_2<1$ [1]. Таким образом, $C_{42}=1$ [2].

Также, потребуем $e\cdot x_2=d_3$, поскольку, если робот не может поднять предмет, то возникает ступор при выносе мусора. Аналогично, мы требуем $x_1\cdot x_2=d_4$, поскольку, если робот не может двинуться во время поиска, то остается только работа камеры. Точно так же, $x_3\cdot x_2=d_3$. Из этих соотношений, монотонности умножения и требования для всех задач $x\cdot 1=x$, получаем некоторые соотношения для подзадач.

Далее, очевидно, $x_1\cdot d_1=d_4\cdot d_1=x_1$, поскольку движение не выключает поиска и его подзадач. Следовательно, $x_1\cdot x_1=x_1\cdot e=x_1$, $e\cdot x_1=e$. Таким образом, робот в поиске, в нормальной ситуации, не переключается на вынос мусора и наоборот. Такое разделение труда встречается у муравьев и в [5] было получено из определения структуры линейной логики. Здесь же оно следствие определения базовых произведений.

Наконец, умножение на $x_3$ дает: $d_1\cdot x_3=d_3\cdot x_3=d_4\cdot x_3=x_3$. Также, мы полагаем $x_2\cdot x_3=\mathrm{T}$, поскольку неизвестно, может ли ступор переключиться на распиливание у данного роботу или

[1] Можно также потребовать $x_2\cdot x_2=0$.

[2] Мы определяем только правую единицу. Соответственно, используем правое умножение и левый резидуал.

возможен переход к любой другой задаче (или опять в ступор). Из всех этих соотношений и аналогичных им получаются произведения для всех базовых элементов ($d_1$, $d_3$, $d_4$, $x_2$, $x_3$).

***Выбор исполнителей.*** При возникновении перед группой новой задачи мы будем сравнивать намерения разных роботов включить ее себе в план, т.е. оценивать объединения элементов решетки намерений, соответствующих намерениям разных роботов и элемента, соответствующего этой новой задаче. При этом, с одной стороны, роботу надо максимизировать свой стоимостной вклад, т.е. количество желаний в намерениях, а с другой, минимизировать расходы. Первая из этих двух задач решается самим роботом, а вторую предполагается, что решает вся группа. Поэтому, мы ищем минимум всех намерений роботов, в которые включена новая задача. Формально, эти намерения получаются по резидуальному аналогу классической формулы вывода: $[a \wedge (a \Rightarrow b)] \Rightarrow b$, поскольку в резидуальной решетке верно неравенство: $I_0 \cdot (I_0 \to (I \vee x)) \le I \vee x$, где $I_0$ – это исходные намерения, $I \vee x$ – намерения вместе с возникшей задачей $x$. Будем использовать обобщенную форму: $I_0 \cdot x \le I \vee x$ («было $I_0$, возникла $x$, следовательно $I \vee x$ ») в случае, если $x \le I_0 \to (I \vee x)$. Тогда обе формы имеют один смысл.

Рассмотрим стандартную ситуацию – роботы ищут мусор и выносят его. При возникновении новой задачи поиска, ее включит в свои намерения кто-то из уже ищущих или выполняющих подзадачи поиска, поскольку $x_1 \cdot x_1 = x_1$ и $x_1$ – минимальное объединенное намерение, и $d_1 \cdot x_1 = d_1 < x_1$; $d_4 \cdot x_1 = x_1$. Состояния $d_1$, $d_4$ – движение и работа камеры – могут возникнуть, если ищущий робот не сможет двигаться: $x_1 \cdot x_2 = d_4$, $x_2 \cdot d_1 = d_1$.

При возникновении новой задачи выноса мусора, ее также будет выполнять кто-то из носильщиков потому, что $e \cdot e = e$ и $e$ – минимальное значение в стандартной ситуации. Хотя движущийся робот, или робот в состоянии только захвата также могут переключиться: $d_1 \cdot e = d_1 < e$, $d_3 \cdot e = e$. Последний случай возникает, когда после распиливания остается только захват. Таким образом, отпиленные куски может выносить также и пилящий робот.

При возникновении задачи распиливания, ее в первую очередь будут выполнять роботы-пильщики, или те, которые находятся только в захвате: $x_3 \cdot x_3 = d_3 \cdot x_3 = x_3$ – это значение минимально. Последняя ситуация возникает, когда выносящий мусор робот не может его поднять: $e \cdot x_2 = d_3$. Если робот не может распилить мусор, он тоже переключается на захват: $x_3 \cdot x_2 = d_3$. Однако, в этой ситуации никакая регулярная задача не может быть выполнена и требуются коллективные действия для выноса. Но это решение требует некоего дополнительного механизма для принятия. Такое же внешний механизм требуется и в случае, если робот не может захватить мусор: $d_3 \cdot x_2 = d_3$ и мы получаем два раза подряд $x_2 \cdot x_2 = d_3$ или $x_2 \cdot x_2 = 0$.

Таким образом, мы видим, что роботы ведут себя вполне разумно и похоже на то, как ведут себя муравьи, причем это поведение получено только на основании выбора базовых произведений в резидуальной решетке намерений.

**Заключение.** В докладе в очередной раз продемонстрировано, что частично-упорядоченные оценки состояния системы вполне пригодны вместо чисел для описания ее функционирования. В данном случае, была использована конструкция резидуальной решетки и логического вывода с резидуалом для определения исполнителя возникающих задач в группе роботов-дворников. В дальнейшем предполагается использовать нейронные сети тоже с частично-упорядоченными переменными и весами для технической реализации предложенного алгоритма.

*Работа выполнена по Программе Президиума РАН №7(30)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Rao A.S., Georgeff M.P. BDI Agents: From Theory to Practice // Proc. First International Conference on Multi-Agent Systems / Ed. by V. Lesser. AAAI Press/The MIT Press, 1995. P. 312–319
2. Dias M.B., Stenz A. A Free Market Architecture for Distributed Control of a Multirobot System // Proc. 6th International Conference on Intelligent Autonomous Systems (IAS), Venice, Italy, July, 2000.
3. Zlot R., Stentz A., Dias M.B., Thayer S. Multi-Robot Exploration Controlled by A Market Economy // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), May 2002.

4. Maximov D., Ryvkin S. Systems smart effects as the consequence of the systems complexity // Proc. 17th International Conf. on Smart Technologies (IEEE EUROCON 2017, Ohrid), Ohrid: IEEE, 2017. P. 576–582.
5. Maximov D. Y., Legovich Y. S., Ryvkin S. How the structure of system problems influences system behavior. Automation and Remote Control. 2017. Vol.78. № 4. P. 689–699.
6. Maximov D., Ryvkin S. Multi-valued logic in graph transformation theory and self-adaptive systems. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. 2019. Vol. 87. № 4. P. 395–408.
7. Maximov D. Control in a group of unmanned aerial vehicles based on multi-valued logic // Proc. 12th International Conference “Management of Large-Scale System Development” (MLSD'2019). Providence: IEEE, 2019. P. 1–5.
8. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
9. Blount K., Tsinakis C. The structure of residuated lattices. Int. J. Algebra Comput. 2003. № 13. P. 437–461.

**D.Yu.Maximov**, (Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow). **Managing a group of robots using residuated logic**

*Abstract.* The report proposes a way to distribute tasks in the BDI paradigm in a group of robotic janitors performing current work when new tasks arise. All possible intentions of robots are represented in the form of a general lattice, on the elements of which multiplication is defined. The multiplication of elements is determined based on the meaning of the respective intentions. In this case, we require that a residuated lattice construction is obtained as a result. Then the left residual defines the robots that are preferred for the new task in accordance with the inference rule.

И.В. БЫЧКОВ, А.Л. КАЗАКОВ, М.Л. ЖАРКОВ
(Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск)

# СИСТЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОТЫ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ СТАНЦИЙ НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

*В работе представлена интеллектная система поддержки моделирования работы железнодорожных станций на основе теории сетей массового обслуживания. Особенностями системы являются автоматическое построение имитационной модели выбранного объекта на основе его математического описания, выявление "узких мест" в его структуре и формирование рекомендации по устранению существующих и потенциальных проблем.*

**Введение.** В рамках национальной программы «Цифровая экономика Российской Федерации» выполнение «Комплексной программы инновационного развития холдинга «РЖД» на период до 2025 года» предполагает создание инструментов цифрового моделирования и мониторинга объектов транспортной инфраструктуры [1], среди которых ключевое положение, как известно, занимают железнодорожные станции (ЖС). Они имеют сложную многоуровневую структуру, при этом входящий транспортный поток нередко обладает стохастической природой. В этом случае применим математический и алгоритмический аппарат теории массового обслуживания [2].

Ранее авторами был предложен программно-алгоритмический инструментарий, позволяющий автоматически строить математические и имитационные модели выбранного объекта в виде многофазных систем массового обслуживания (СМО). Такой подход оказался пригоден для описания систем с линейной структурой, в которых обслуживающие устройства (подсистемы, парки) располагаются последовательно, и заявки (вагоны) обслуживаются в каждой из них по одному разу. К сожалению, ЖС не всегда обладают подобной (простой) структурой [3].

Предлагаемый доклад посвящен развитию интеллектуальной системы поддержки моделирования работы железнодорожных станций [4] за счет использования математического аппарата сетей массового обслуживания (СеМО) [2]. Это позволяет детально отобразить нелинейную иерархическую структуру ЖС и маршрут движения вагонов в ней, а также описать следующие классы систем: грузовые и сортировочные станции. Далее представлены математическое описание сети массового обслуживания, на основе которого строится модель работы грузовой ЖС общего вида, имитационная модель СеМО и интеллектуальная система.

***Математическая модель.*** СеМО являются обобщением многофазных СМО и представляют собой совокупность конечного числа $S$ СМО (далее – узлов), в которой заявки переходят из одного узла в другой, в соответствии с маршрутной матрицей $P$ [2].

Рассмотрим открытые СеМО, в которых заявки поступают из внешнего источника. Тогда, если принять его в качестве дополнительного узла с индексом 0, то маршрут заявки определяется стохастической матрицей $P = \|P_{ij}\|$, где $P_{ij}$ – вероятность перехода заявки из узла $i$ в узел $j$ ($i, j = \overline{1,S}$); $P_{0j}$ – вероятности поступления заявки из источника в $j$-й узел; $P_{j0}$ – вероятность того, что заявка покинет сеть после обслуживания в $j$-м узле. Очевидно, что в этом случае $\sum_{j=0}^{S} P_{ij} = 1$ $(i = \overline{0,S})$, $P_{00} = 0$.

Математическая модель функционирования грузовой железнодорожной станции общего вида строится в два этапа: вначале описывается входящий поток, а затем – собственно система. На ЖС поступают поезда с четного и нечетного направлений, интенсивность прибытия которых может существенно различаться. При этом входящий состав следует рассматривать как группу заявок на обслуживание (вагонов), потому что последние обрабатываются по отдельности (или группами случайного размера) [5]. Для описания такого составного вагонопотока используем *BMAP*-поток [6], который допускает изменение интенсивности поступления групп заявок и их случайный размер.

В структуре ЖС имеются функциональные подсистемы, в которых над поступающими вагонами проводятся различные технические операции, т.е. обслуживание. В грузовой железнодорожной станции можно выделить пять подсистем ($S = 5$): парк прибытия, сортировочная горка,

сортировочный парк, грузовой двор и парк отправления. Они имеют различные технические характеристики: число обслуживающих устройств (каналов), распределение времени их работы и вместимость [5]. Каждую из подсистем представим в виде СМО, а направление движения вагонопотоков в системе зададим в маршрутной матрице. Отметим, что заявки поступают только в парк прибытия (обычно – узел 1) и принимаются к обслуживанию в соответствии с дисциплиной полного отказа: если не хватает места хотя бы для одной заявки из группы, то теряется вся группа заявок. Если в очереди следующего узла нет свободных мест для принятия заявок с предыдущего узла, то происходит временная блокировка каналов последнего.

Таким образом, для структурной идентификации модели в виде СеМО необходимо определить количество узлов и задать маршрутную матрицу *P*. Параметрическая идентификация этой модели состоит из двух этапов. На первом определяются параметры входящего *BMAP*-потока. На втором для каждого из узлов СеМО устанавливается количество каналов, максимальная длина очереди, распределение размера обслуживаемой группы заявок и времен их обслуживания. Показателями эффективности СеМО (искомыми параметрами) являются: абсолютная пропускная способность, вероятность обслуживания заявки и группы заявок, среднее время пребывания заявки в системе в целом и в каждом из узлов, время блокировки каналов [2].

Полученная модель является сложной для исследования и нам не удалось найти для нее аналитически показатели эффективности. Для определения последних было применено имитационное моделирование [7]. Верификация имитационной модели работы СеМО проводилась на примере железнодорожной сортировочная станции, расположенной в Иркутской области. Полученные результаты были предоставлены экспертам для оценки. Подробное описание имитационной модели и вычислительные эксперименты будут представлены в докладе.

По результатам верификации было установлено, что разработанный программно-алгоритмический инструментарий является универсальным, пригоден для решения широкого класса задач и обеспечивает удовлетворительную точность моделирования. Однако выявились и его слабые стороны. Во-первых, результаты моделирования необходимо интерпретировать для объекта исследования, что бывает трудно сделать не специалисту в теории массового обслуживания. Во-вторых, подбор оптимальных (с той или иной точки зрения) технических параметров выбранного объекта занимает продолжительное время, так как приходится после каждого модельного эксперимента анализировать полученные результаты. Для решения этих проблем целесообразно использовать методы искусственного интеллекта.

***Интеллектная система.*** Авторами предлагается интеллектная система поддержки моделирования железнодорожных станций (ИСМ ЖС). Она предназначена для автоматизации построения имитационных моделей различных ЖС по их математическому описанию, последующего анализа результатов моделирования, а также формирования рекомендаций по улучшению технических характеристик станций с точки зрения увеличения производительности.

Для реализации такой системы выбран подход на основе знаний (экспертные системы), так как авторы уже имеют опыт разработки подобных систем [4]. Для реализации ИСМ ЖС использовалась среда разработки Delphi XE8. Вычислительный процесс ИСМ ЖС построен по модульному принципу: результаты работы каждого модуля являются исходными данными для другого. В системе имеются два модуля и три программных блока:

*Модуль моделирования* – программная реализация имитационной модели работы СеМО.

*Модуль экспертной системы* (ЭС) позволяет автоматически проводить модельные эксперименты и анализировать полученные результаты. Для этого в него включена база знаний в виде комбинации продукционных правил и фреймов. С их помощью проверяются характеристики всех узлов, полученные в результате имитационного моделирования. ЭС ищет зависимые друг от друга характеристики в двух смежных узлах. Если такие зависимости обнаруживаются, то зависимая характеристика из последнего (по направлению движения заявок) узла добавляется в список «узкие места». Затем из этого списка исключаются повторяющиеся элементы и на основе оставшейся информации формируются рекомендации по устранению «узких мест». Отметим, что, если в структуре ЖС имеются кольцевые маршруты движения заявок, то ЭС может выделить несколько противоречивых рекомендаций. Тогда возможно автоматическое внесение соответствующих исправлений в имитационную модель для проверки и выявления лучшей из возможных рекомендаций.

*Блок интерпретации* преобразует математическую модель ЖС в имитационную.

*Блок графика* отображение результатов работы имитационной модели в графическом и табличном видах.

*Блок управления* принимает входные данные (математические модели входящего вагонопотока и структуры системы, время моделирования), управляет работой программных модулей и блоков, а также предоставляет результаты работы ИСМ ЖС пользователю. Примеры продукционных правил будут представлены в докладе.

**Заключение.** Представленный программно-алгоритмический инструментарий позволяет автоматически проводить исследования различных по структуре грузовых и сортировочных железнодорожных станций и формировать рекомендации по улучшению их технических характеристик с точки зрения повышения производительности. Возможности ИСМ ЖС позволяют использовать его в рамках «Комплексной программы инновационного развития холдинга «РЖД» на период до 2025 года» в качестве модуля для разрабатываемых ОАО «РЖД» сервисов цифрового моделирования и мониторинга объектов транспортной инфраструктуры.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Иркутской области, проекты № 20-47-380001 и № 20-47-383002.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Об инновационном развитии [Электронный ресурс]: веб-портал ОАО "РЖД". URL: https://company.rzd.ru/ru/10004 (дата обращения: 05.08.2020).
2. Medhi J. Stodhastic models in queuing theory. San Diego: Academic Press. 1991. 447 p.
3. **Лемперт А.А., Павидис М.М., Жарков М.Л.** Моделирование зарубежных сортировочных станций на основе теории массового обслуживания // Вестник УрГУПС. 2019. №3 (43). С. 24–32.
4. **Бычков И.В., Казаков А.Л., Жарков М.Л.** Интеллектуальная технология моделирования железнодорожных станций на основе теории массового обслуживания // Управление товарными потоками и перевозочным процессом на железнодорожном транспорте на основе клиентоориентированности и логистических принципов: коллективная монография членов и научных партнеров Объединенного ученого совета ОАО «РЖД» / под. ред. Б.М. Лапидуса, А.Т. Осьминина. СПб.: ЛЕМА, 2019. С. 185–193.
5. **Шубко В.Г.** Железнодорожные станции и узлы. М.: УМК МПС России, 2002. 368 с.
6. **Дудин А.Н., Клименок В.И.** Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн.: БГУ, 2000. 176 с.
7. **Кельтон В., Лоу А.** Имитационное моделирование. СПб.: Питер, 2004. 846 с.

---

**I.V. Bichkov, A.L. Kazakov, M.L. Zharkov** (Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia). **System simulation of the railway station based on queuing networks**

*Abstract.* The paper presents an intelligent system for modeling the operation of railway stations based on the theory of queuing networks. The automatic construction of the simulation model of the selected object based on its mathematical description, the identification of bottlenecks in its structure, and the formation of recommendations for eliminating existing and potential problems are features of the system.

И. В. БЫЧКОВ, А. Г. ФЕОКТИСТОВ, Р. О. КОСТРОМИН, С. А. ГОРСКИЙ
(Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск)

# АЛГОРИТМ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛАЧНЫХ РЕСУРСОВ НА ОСНОВЕ КООПЕРАТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТОВ

*Обсуждается проблема повышения отказоустойчивости вычислительных процессов при решении крупномасштабных научных и прикладных задач в облачных средах. Вычислительный процесс описывается с помощью абстрактной программы, коррелирующей с понятием workflow. Предлагается новый адаптивный агентный алгоритм мульти-сценарного перераспределения ресурсов среды при отказе программно-аппаратных средств.*

**Введение.** В настоящее время, проблема решения на суперкомпьютерах комплексных задач, включающих набор взаимосвязанных подзадач, обуславливает необходимость обеспечения отказоустойчивости высокопроизводительных вычислений. Эта проблема остается чрезвычайно актуальной [1]. В докладе рассматриваются вопросы повышения отказоустойчивости процесса решения научных и прикладных задач в распределенных пакетах прикладных программ, предназначенных для выполнения в разнородных вычислительных средах. Как правило, в таких средах ресурсы грид-систем и суперкомпьютерных центров коллективного пользования интегрируются на основе разного рода облачных или гибридных платформ.

В распределенном пакете прикладных программ вычислительный процесс описывается схемой решения задачи (абстрактной программой). Она является аналогом так называемого рабочего процесса (workflow) [2]. В общем случае такая схема состоит из набора взаимосвязанных подзадач, реализуемых отдельными программными модулями. Взаимосвязи задаются множествами входных и выходных параметров модулей. Как правило, модули характеризуются различными требованиями к ресурсам среды.

Планирование вычислений и распределение ресурсов имеет важное значение для эффективного использования среды. Отказ программно-аппаратных ее ресурсов представляет собой серьезную проблему для достижения необходимого качества обслуживания заданий. В связи с этим разработан новый адаптивный агентный алгоритм перераспределения облачных ресурсов. Он применяется при отказе одного или нескольких заданий в выполняющейся схеме решения задачи. Модули схемы, выполнение которых не завершено, представляют остаточные вычисления. Из таких модулей с помощью методов конкретизирующего программирования формируется новая схема, называемая остаточной схемой решения задачи [3].

Существуют различные подходы к решению проблемы повышения отказоустойчивости вычислительных систем. В отличие от известных алгоритмов подобного аналогичного назначения (см., например, широко распространенные алгоритмы с применением контрольных точек [1, 4]), в предлагаемом подходе реализован адаптивный мульти-сценарный алгоритм перераспределения ресурсов с использованием системы мета-мониторинга [5], которая обеспечивает обнаружение сбоев и частичное устранение отказов, а также возможность учета производительности ресурсов. При этом свойства заданий определяются системой их классификации [6]. Таким образом обеспечивается значительное повышение отказоустойчивости вычислительных процессов в среде [7].

**Среда.** Разнородная вычислительная среда интегрирует облачные и грид-платформы, включая ресурсы суперкомпьютерных центров коллективного пользования. Основными компонентами среды являются кластеры персональных компьютеров или высокопроизводительные кластеры. Выделенные узлы кластеров используются в рамках облачных и грид-платформ. Невыделенные узлы кластеров задействуются в качестве ресурсов коллективного пользования. При решении задач, пользователям сред предоставляются возможность применения как выделенных, так и невыделенных узлов.

Среда создается с помощью инструментального комплекса Orlando Tools [8]. Он реализует модульный подход к разработке и применению распределенных пакетов прикладных программ, как специального класса масштабируемых научных приложений. Orlando Tools предоставляет

пользователям широкие возможности описания предметной области, включая как текстовый, так и графический языки ее спецификации и формулировки на ней постановок задач.

Постановки задач могут формулироваться в процедурном и непроцедурном видах. В последнем случае автоматически строится схемы решения задачи. Схема, сконструированная в процедурном виде, может включать управляющие операторы ветвления, цикла и рекурсии. Для выполнения схем решения задач в среде формируются вычислительные задания.

Управление заданиями в среде реализуется самоорганизуемой иерархической многоагентной системой с несколькими уровнями работы агентов. Агенты представляют облачные ресурсы среды, осуществляют их мониторинг, распознают свойства заданий, и распределяют их по ресурсам. Они могут играть различные роли и выполнять при этом различные функции, соответствующие той или иной роли. Роли могут быть постоянными или временными. Они возникают в дискретные моменты времени в процессе локальных взаимодействий агентов. Агенты являются автономными сущностями. Однако, они могут объединяться в виртуальные сообщества. В рамках виртуальных сообществ, агенты сотрудничают в выполнении общего задания и конкурируют при распределении вычислительной нагрузки. Распределение нагрузки осуществляется с помощь тендера вычислительных работ. Тендер базируется на применении новой специализации комбинаторного аукциона Викри [9]. Нагрузка рассчитывается с помощью оригинальных моделей оценки времени выполнения схем решения задач [10].

**Алгоритм.** Агенты используют алгоритм перераспределения облачных ресурсов среды для улучшения отказоустойчивости процесса решения задачи. Алгоритм включает следующие основные этапы работы:

1. *Обнаружение отказа узла, модуля или агента.* Выявление и идентификация отказов осуществляется средствами системы мета-мониторинга.
2. *Обработка отказа узла, модуля или агента.* Агенты запускают процедуру обработки отказа, включающую частичное устранение последствий и реконфигурацию множества доступных ресурсов. Кроме того, они собирают и снабжают всех членов виртуального сообщества необходимой информацией о состоянии среды и вычислительных процессов.
3. *Выбор сценария обеспечения отказоустойчивости схемы решения задачи.* На основе полученных данных агенты выбирают сценарий, обеспечивающий отказоустойчивость выполнения схемы решения задачи. Когда узел агента выходит из строя во время выполнения модуля, агент может принять независимое решение выполнить этот модуль на одном из резервных узлов. В остальных случаях агенты выбирают сценарий коллективно.
4. *Формирование остаточной схемы решения задачи.* Данный этап реализуется с помощью методов редукции избыточных вычислений.
5. *Перераспределение вычислительных ресурсов.* На последнем этапе агенты в процессе торгов борются за право выполнить модули остаточной схемы решения задачи в соответствии с выбранным сценарием. Определение победителей торгов осуществляется с учетом прогнозирования времени выполнения схемы решения задачи. Время выполнения отдельных модулей схемы оценивается в процессе их тестирования в узлах среды в рамках непрерывной интеграции, доставки и развертывания прикладного программного обеспечения разрабатываемых пакетов на ресурсы среды.

**Эксперимент.** Преимущества применения предложенного алгоритма продемонстрированы в процессе полунатурного моделирования различного рода отказов, возникающих в процессе обработки синтетических потоков заданий в виртуальной приватной сети. Сеть организована на базе ресурсов разнородной вычислительной среды. Потоки сформированы на основе вычислительной истории, полученной в процессе решения практических задач пользователями Центра коллективного пользования «Иркутский суперкомпьютерный центр Сибирского Отделения Российской Академии Наук» [11]. Работа многоагентной системы по обеспечению отказоустойчивости вычислений оценена в сравнении с известными мета-планировщиками Condor Directed Acyclic Graph Manager [12] и GridWay [13]. Результаты эксперимента показали очевидное преимущество многоагентной системы.

**Заключение.** Предложен новый многоагентный алгоритм перераспределения вычислительной нагрузки в узлах разнородной среды с облачными ресурсами с целью поддержки отказоустойчивости вычислительных процессов при решении задач с помощью масштабируемых научных приложений при наличии отказов программных и аппаратных средств узлов. Адаптивная работа предложенного алгоритма базируется в отличие от алгоритмов подобного назначения на применении методов конкретизации абстрактных программ и мета-мониторинга ресурсов среды, а также рыночных механизмов регулирования спроса и предложения этих ресурсов.

*Исследование выполнено при поддержке РФФИ, проект № 19-07-00097-а.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бондаренко А.А., Лахов П.А., Якобовский М.В.** Координированное сохранение контрольных точек с журналированием передаваемых данных и асинхронное восстановление расчетов после отказов. Суперкомпьютерные дни в России: Труды международной конференции. М.: Изд-во МГУ, 2018. С. 694–704.
2. Yu J., Buyya R. A taxonomy of workflow management systems for grid computing. Journal of Grid Computing. 2005. Vol. 3. №. 3-4. P. 171–200.
3. Ershov A.P. On Mixed Computation: Informal Account of the Strict and Polyvariant Computation Schemes. In: Broy M. Control Flow and Data Flow: Concepts of Distributed Programming. Berlin A.O.: Springer-Verlag, 1985. P. 107–120.
4. Garg R., Singh A.K. Fault tolerant task scheduling on computational grid using checkpointing under transient faults *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2014. Vol. 39. №. 12. P. 8775–8791.
5. **Сидоров И.А., Новопашин А.П., Опарин Г.А., Скоров В.В.** Методы и средства метамониторинга распределенных вычислительных сред. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2014. Т. 3. № 2. С. 30-42.
6. **Феоктистов А.Г.** Методология концептуализации и классификации потоков заданий масштабируемых приложений в разнородной распределенной вычислительной среде *Системы управления, связи и безопасности*. 2015. № 4. С. 1–25.
7. **Феоктистов А.Г.** Логико-вероятностные аспекты алгоритма управления распределенными вычислениями. Вычислительные технологии. 2016. Т. 21. № 3. С. 91-102.
8. Feoktistov A., Gorsky S., Sidorov I., Bychkov I., Tchernykh A., Edelev A. Collaborative Development and Use of Scientific Applications in Orlando Tools: Integration, Delivery, and Deployment. *Communications in Computer and Information Science.* 2020. Vol. 1087. P. 18–32.
9. Feoktistov A. Tender of computational works in heterogeneous distributed environment // Proceedings of the 2nd International Workshop on Information, Computation, and Control Systems for Distributed Environments. *CEUR-WS Proceedings*. 2020. Vol. 2638. P. 99–108.
10. Feoktistov A.G., Basharina O.Yu. Predicting the Runtime of Computational Jobs in a Distributed Computing Environment. Proceedings of the 2nd International Workshop on Information, Computation, and Control Systems for Distributed Environments. *CEUR-WS Proceedings*. 2020. Vol. 2638. P. 109–117.
11. Центр коллективного пользования «Иркутский суперкомпьютерный центр СО РАН» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://hpc.icc.ru/ (дата обращения: 31.07.2020).
12. HTCondor – Directed Acyclic Graph Manager [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://research.cs.wisc.edu/htcondor/dagman/dagman.html (дата обращения: 31.07.2020).
13. GridWay Metascheduler [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gridway.org (дата обращения: 31.07.2020).

---

**I. V. Bychkov, A. G. Feoktistov, R. O. Kostromin** (Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk). **Algorithm for cloud resource re-allocation based on the cooperative behavior of agents**

*Abstract.* We consider a relevant problem of increasing the fault tolerance for computational processes related to solving large-scale scientific and applied problems in cloud environments. An abstract program that correlates with the workflow concept specifies the computational process. We provide a new adaptive multi-agent algorithm for multi-scenario re-allocation of cloud resources when their hardware or software are failed. To evaluate the algorithm practicability, we provide extensive modeling and practical experiments. We demonstrate the obvious advantages of using the algorithm in comparison with well-known meta-schedulers.

И. В. БЫЧКОВ, А. Ю. ЮРИН
(Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск)

# МЕТОД И СРЕДСТВА ПРОТИТИПИРОВАНИЯ КОМПОНЕНТОВ ИНТЕЛЛЕКТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ТРАНСФОРМАЦИЙ

*Разработка интеллектных систем и их отдельных компонентов, в том числе, для систем управления и принятия решений остается сложной и трудоемкой задачей. Одним из способов повышения эффективности их создания является использование принципов порождающего и визуального программирования, а также концепции модельных трансформаций в контексте решения задач концептуализации, формализации и автоматической кодификации. В докладе описан метод и средства, реализующие данные принципы, приведены примеры их применения для решения задачи в области надежности и безопасности технических систем.*

**Введение.** Разработка интеллектных систем и их отдельных компонентов (модулей), в том числе для задач управления, продолжает оставаться сложной и трудоемкой задачей, решение которой требует развития теории программирования.

Исследования в данной области ведутся с момент появления систем, основанных на знаниях и на текущий момент их можно разделить на три основных группы:

1. Подходы и средства онтологического и когнитивного моделирования, которые ориентированы на непрограммирующего пользователя и позволяют вести разработку в терминах предметной области.

2. Классические средства программирования в форме редакторов и оболочек (Expert System Designer, Expert System Creator, ARITY Expert Development Package, CxPERT, Exsys Developer и др.), ориентированные на программистов, требуют изучения языков программирования.

3. Интегрированные подходы и среды (АТ-ТЕХНОЛОГИЯ, MOKA, CommonKADS, OSTIS, IACPaaS), сочетающие элементы предыдущих подходов.

При этом можно выделить основные недостатки существующих решений такие как: узкую специализацию в части поддержки форматов и языков программирования; низкую интеграционную способность с системами визуального моделирования; сложность повторного использования разработанных ранее предметных моделей; высокие квалификационные требования к пользователям в области программирования.

При этом перспективным является вовлечение непрограммирующих пользователей в процесс разработки и автоматизация большинства этапов разработки.

Основным способом выполнения данных условий является использование принципов порождающего и визуального программирования, а также концепции модельных трансформаций в контексте решения задач концептуализации, формализации и автоматической кодификации. Комплексное использование рассмотренных принципов реализуется в рамках группы подходов, основанных на модельных трансформациях. В настоящий момент данное направление известно как модельно-ориентированный подход (Model-Driven Engineering, MDE) [1].

Предлагаемый доклад посвящен описанию методов и средств разработки компонентов интеллектных систем на основе MDE и стандартов в области программной инженерии, таких как UML, XMI, MOF. При этом создаваемые компоненты представляют собой модули принятия решения, содержащие продукционные базы знаний.

**Метод и средства.** Для преодоления недостатков, приведенных во введении, были разработаны метод и средства (формирующие технологию) создания компонентов интеллектных систем в виде программных модулей принятия решений на основе принципов модельных трансформаций.

При этом были решены следующие задачи: произведен анализ современных подходов, методов и средств создания продукционных баз знаний на основе трансформации моделей; метод создания модулей принятия решения содержащих баз знаний продукционного типа; разрабо-

таны и исследованы языковые и программные средства поддержки предлагаемых методов; произведена апробация разработанных методов и средств при решении практических и учебных задач [2-5].

Основными результатами решенных задач являются:

1. Метод создания экспертных систем и баз знаний продукционного типа на основе последовательного преобразования концептуальных моделей с большей абстракцией к моделям с меньшей абстракцией и получением в конце цепочки трансформаций интерпретируемых программных кодов и спецификаций; при этом метод состоит из пяти основных этапов (Рис.1) и использует модели предметной области в форме онтологий, диаграмм классов UML, концепт-карт, таблиц решений и канонических электронных таблиц в качестве начальных вычислительно-независимых моделей. Метод качественно отличается от стандартного метода MDE, т.к. переопределяет основные его этапы в контексте создания интеллектуальных систем продукционного типа и их компонентов при этом активно используются стандарты OMG: UML, XMI, MOF.

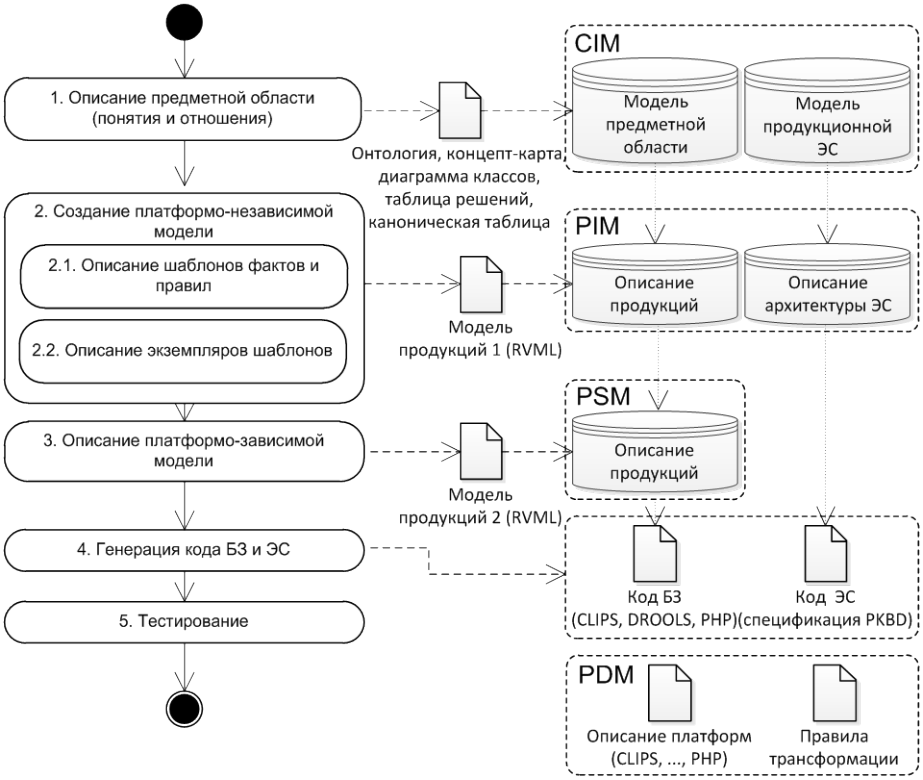



Рис. 1. Этапы метода и соответствующие им модели: CIM – Computation-Independent Model (вычислительно-независимая модель), PIM – Platform-Independent Model (платформо-независимая модель), PSM – Platform-Specific Model (платформо-зависимая модель), PDM – Platform Description Model (модель платформы)

2. Языки поддержки метода:
   - графическая нотация для моделирования предметных знаний в форме логических правил основанная на UML – Rule Visual Modeling Language, отличающаяся от известных представлением продукций в виде специализированных графических примитивов [6] и четкого выделения ядра продукции;
   - предметно-ориентированный декларативный язык описания трансформаций моделей – Transformation Model Representation Language (TMRL), обеспечивающий декларативное описание правил трансформаций и ориентированный на XML-подобные стандарты (XMI, XTM) [7].
3. Программные средства:
   - Personal Knowledge Base Designer (PKBD) - инструментальная программная платформа прототипирования баз знаний и экспертных систем продукционного типа [4], реализующая разработанные метод и языки;

- Knowledge Base Development System (KBDS) – инструментальное программное средство построения компонентов трансформации моделей [3], реализует язык TMRL и используется для формирования вычислительно-независимой модели.

4. Апробация методов и средств при решении задач в области обеспечения надежности и безопасности технических систем, в частности при выполнении работ с АО «ИркутскНИИхиммаш» и при разработке:
   - модуля определения причин повреждения и разрушения элементов технических систем программного комплекса «Экспертиза ПБ» [8];
   - базы знаний для прогнозирования развития деградационных процессов в нефтехимии (систем идентификации технических состояний конструкций) [9];
   - интеллектуального планировщика процесса анализа отказа [10].

**Заключение.** В рамках решения задачи повышения эффективности создания компонентов интеллектных систем для управления и принятия решения рассмотрены метод и средства, использующие модельные трансформации, особенностью которых являются: переопределенная цепочка модельных преобразований, оригинальные языковые и программные средства реализации, а также методика их применения. Предложенные метод и средства позволяют снизить трудозатраты и сократить сроки прототипирования модулей поддержки принятия решений, содержащие продукционные базы знаний.

ЛИТЕРАТУРА


1. Da Silva, A.R. Model-driven engineering: A survey supported by the unified conceptual model. *Computer Languages, Systems & Structures*. 2015. Vol.43, P.139–155.
2. **Дородных Н.О., Юрин А.Ю.** Технология создания продукционных экспертных систем на основе модельных трансформаций. Новосибирск: СО РАН, 2019. 144 с.
3. **Бычков И.В., Дородных Н.О., Юрин А.Ю.** Подход к разработке программных компонентов для формирования баз знаний на основе концептуальных моделей. *Вычислительные технологии*. 2016. Т.21. №4. С.16-36.
4. Yurin A.Yu., Dorodnykh N.O. Personal knowledge base designer: Software for expert systems prototyping. *SoftwareX*. 2020. Vol. 11, 100411.
5. Yurin A.Yu., Dorodnykh N.O., Nikolaychuk O.A., Grishenko M.A. Designing rule-based expert systems with the aid of the model-driven development approach. *Expert Systems*. 2018, Vol. 35. №. 5, P. 1-23.
6. **Юрин А.Ю.** Нотация для проектирования баз знаний продукционных экспертных систем. *Объектные системы*. 2016. №12. С.48-54.
7. Dorodnykh, N.O., Yurin, A.Yu. A domain-specific language for transformation models. *CEUR Workshop Proceedings* (ITAMS-2018). 2018.Vol. 2221, P.70–75.
8. **Берман А.Ф., Кузнецов К.А., Николайчук О.А., Павлов А.И., Юрин А.Ю.** Информационно-аналитическая поддержка экспертизы промышленной безопасности объектов химии, нефтехимии и нефтепереработки. *Химическое и нефтегазовое машиностроение*. 2018. №8. С.30-36.
9. Nikolaychuk O.A., Yurin A.Y. Computer-aided identification of mechanical system's technical state with the aid of case-based reasoning. *Expert Systems with Applications*. 2008. Vol. 34. P. 635-642.
10. Berman A.F., Nikolaychuk O.A., Yurin A.Yu. Intelligent planner for control of failures analysis of unique mechanical systems. *Expert Systems with Applications*. 2010. Vol. 37. P. 7101–7107.


---

**I.V. Bychkov, A.Yu.Yurin** (Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk) **Method and tools for prototyping components of intelligent systems based on transformations**

*Abstract.* The development of intelligent systems and their software components, including for control and decision-making systems, remains a complex and time-consuming task. One of the ways to improve the efficiency of their development is to use the principles of generative and visual programming, as well as the concept of model transformations in the context of solving problems of conceptualization, formalization, and automatic codification. The report describes the method and tools that implement these principles and provides examples of their application to solve problems in the field of reliability and safety of technical systems.

М. Ю. КЕНЗИН, И. В. БЫЧКОВ, Н. Н. МАКСИМКИН
(Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова, Иркутск)

# СТРАТЕГИИ ЭКСТРЕННОГО ОПОВЕЩЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ГРУПП МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ПОИСКОВО-ОБСЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ МИССИЙ

*Выполнение комплексных динамических миссий группой мобильных роботов сопряжено с необходимостью оперативно реагировать на возникновение непредвиденных событий различной природы. Информирование действующих членов группы о произошедших изменениях высокой важности является нетривиальной задачей для больших групп в условиях ограниченной коммуникации. В докладе рассматривается задача поиска такого маршрута движения осведомленного робота, который обеспечил бы оперативное оповещение распределенной группы роботов. Предложен ряд эвристик для решения поставленной задачи, проведен их сравнительный анализ.*

**Введение.** Стремительное развитие технологий в последние десятилетия привело к значительному росту эффективности и надежности мобильных робототехнических систем. На данный момент, использование скоординированных групп роботов представляется наиболее перспективным методом для решения целого ряда поисково-обследовательских задач в различных динамических средах. Эффективность использования таких групп во многом определяется их способностью реагировать на любые возникающие изменения. Для этого требуется решение двух независимых подзадач: децентрализованного оповещения группы о произошедших изменениях и, непосредственно, группового принятия решения [1]. Проблема динамического планирования групповой стратегии неоднократно освещалась авторами в предыдущих работах [2], данный доклад, в свою очередь, посвящен подзадаче оповещения.

В общем случае, поисково-обследовательские миссии заключаются в посещении некоторого множества подобластей в рамках обозначенного региона с целью выполнения там набора заданий. Поскольку размеры региона обычно значительно превышают сенсорные возможности каждого робота, общепринятым является подход по распределению заданий миссии внутри действующей группы. По мере того, как роботы расходятся по областям для выполнения своих заданий, текущая групповая стратегия может терять свою эффективность вследствие динамических условий миссии. Так, например, один из членов группы может обнаружить потенциально опасный регион, ставящий под угрозу успех миссии [3]. В случае критической важности полученной информации робот должен прекратить свою текущую деятельность и оповестить остальных роботов, которые, по мере информирования также прекращают свою работу и присоединяются к задаче оповещения оставшейся группы.

Обобщая вышесказанное, задача экстренного оповещения заключается в поиске маршрута для первого и последующих информированных роботов для наискорейшего распространения информации внутри всей группы. Поскольку роботы не являются стационарными и в течение миссии перемещаются между подобластями (хоть их маршрут и является заранее известным), это накладывает дополнительный уровень сложности на задачу групповой маршрутизации. Ограниченность межаппаратной коммуникации также заметно осложняет решение задачи.

**Математическая постановка.** Пусть регион выполнения миссии будет представлен в виде связного графа $G = (V, E)$ из $m$ вершин. В данном докладе мы рассматриваем простейшую постановку, в которой граф $G$ является невзвешенным, неориентированным и статичным.

Пусть в миссии принимает участие группа из $n$ идентичных роботов (агентов) $a_1, a_2, ..., a_n$. Каждый агент $i$ перемещается по графу $G$ на дискретном времени $T = \{T_0, T_1, T_2, ...\}$ по заранее известному маршруту $R_i = \left\{r_{i0}, \mathrm{r}_{i1}, ..., \mathrm{r}_{iq}\right\}$, представляющему собой путь на графе с циклами. Под состоянием $i$-го агента в момент времени $j$ понимается совокупность его текущего местоположения и статуса $a_i\left(T_j\right) = \left\langle v_{ij}, s_{ij} \right\rangle$. Статус $s_{ij} \in \{0,1\}$ агента $i$ отражает, является ли он опо-

вещенным на момент $T_j$. В начале миссии все агенты не оповещены $s_{i0}=0$, $i=1,...,\mathrm{n}$. В некоторый момент времени (без потери общности, в $T_1$) случайный агент *x* получает информацию высокой важности $s_{x1}=1$. С этого момента любой оповещенный агент *i* может:

1. прекращать свое движение по маршруту $R_i$ и становиться объектом управления;
2. оповещать других агентов в пределах общей вершины $s_{kj}=\max\limits_{i=1,...,n}\left\{s_{ij}\mid v_{ij}=v_{kj}\right\}$.

Таким образом, задача группового оповещения заключается в поиске такого маршрута-решения в матричной форме $A=\left\{a_i\left(T_j\right)\right\}$, $i=1,...,\mathrm{n}$, $j=1,...,f$, что:

- В начале миссии каждый агент является неоповещенным $a_i\left(T_0\right)=\left\langle r_{i0},0\right\rangle$, $i=1,...,\mathrm{n}$;
- Неоповещенные агенты действуют согласно своим маршрутам $\left\{v_{ij}=r_{ij}\mid s_{ij}=0\right\}$;
- Случайный агент *x* становится оповещенным в момент $T_1$, $a_x\left(T_1\right)=\left\langle r_{x1},1\right\rangle$;
- Уже оповещенные агенты оповещают других агентов в общей вершине;
- Все агенты должны быть оповещены не позднее времени $T_q$, $\prod_{i=1}^{n}s_{if}=1$, $f\le q$;
- Предпочтительными являются решения с наименьшим значением *f*, $\min_f(A)$.

***Классификация задачи.*** Авторами не было найдено прямых аналогов исследуемой задачи в литературе. Тем не менее, необходимо отметить, что она имеет ряд пересечений с задачами групповой маршрутизации (VRP), а также с такими мультиагентными дискретными моделями на графах, как распространение информации в коммуникационных и социальных сетях [4], распространение инфекционных болезней [5], модели горящих графов (burning graphs) [6].

**Методы решения.** Очевидно, что поиск решения напрямую в матричной форме *A* является нерациональным, поскольку при большой размерности она содержит значительное количество избыточной неключевой информации. Предлагается кодировать решение в виде списка команд для роботов в порядке их назначения $P=\left\{p_1,...,p_{2n-1}\right\}$, $p_i\in\left\{0,1,...,\mathrm{n}\right\}$, $p_i\ne x$. Новая команда назначается роботам после того, как они становятся оповещенными или сами оповещают свою текущую цель. Команда $p_i>0$ задает роботу индекс его новой цели (агента) для оповещения, а нулевая команда «0» отвечает за прекращение агентом работы в рамках задачи оповещения.

***Конструктивные эвристики.*** Используя предложенную форму представления решений *P*, были разработаны и исследованы три различные эвристики построения начальных маршрутов.

Первый подход – *классическая жадная эвристика* – очевидный базовый алгоритм, но зачастую способный показывать приемлемые результаты при малых вычислительных затратах. При этом подходе список действий P строится таким образом, чтобы агенты всегда стремились оповестить ближайшего (по времени достижения) неоповещенного агента. Две другие эвристики являются авторскими модификациями жадной эвристики и предложены в качестве решения для тех частных случаев, когда жадный алгоритм показывает низкую эффективность.

Так, эвристика *Near-and-Far* является вероятностной: каждый раз, когда агент должен выбрать новую цель для оповещения, выбирается либо ближайший робот, либо, с некоторой вероятностью, наиболее дальний. Значение вероятности при этом изменяется со временем.

В эвристике *Smart Greedy*, в свою очередь, вводится дополнительное условие назначения целей для оповещения: выбирается не просто ближайший по времени агент, а ближайший из тех, до кого текущий робот может добраться быстрее любого другого уже оповещенного робота. При отсутствии таких кандидатур, текущему роботу назначается команда «0».

***Процедура локального поиска.*** В качестве эвристики улучшения предлагается использовать специализированную процедуру локального поиска, которая направлена на то, чтобы переназначить роботов, оповещенных в последних рядах, тем роботам, которые были остановлены (получили команду «0») раньше. Для этого процедура производит рекурсивный переборный поиск более эффективных решений в окрестности *swap(a,b),* где $a\cdot b=0$, $a+b>0$.

**Вычислительный эксперимент.** Предложенные выше модель задачи и набор эвристик для ее решения были программно-реализованы в рамках разрабатываемого авторами модели-

рующего комплекса «Multiobjective Mission Planner». Для создания разнообразных начальных условий задачи разработан ряд методов по генерации графа миссии $G$ и набора стартовых маршрутов $R_i$, $i = 1,...,n$ для роботов группы. Подробное описание разработанных методов и визуальное представление результатов их работы могут быть найдены в [7].

С использованием данных методов был сформирован набор тестовых задач вида XY-$m$($n$) для проведения серии вычислительных экспериментов. Сформированный набор задач разделен на девять категорий: каждому методу X={T,B,S} генерации графа соответствует одна из трех схем построения групповых маршрутов Y={R,C,M}. Размерность тестовых задач находится в пределах $n$={25,50,100} агентов на графе из $m$={500,2000,5000,10000} вершин.

Статистические результаты проведенных вычислительных экспериментов частично представлены в таблице 1 (вариации эвристик со звездочкой включают процедуру постоптимизации локальным поиском). Вычисления производились на одном ядре процессора Intel Core 2 Duo E6750 Conroe с частотой 2.667 GHz, время работы $t$ указано в миллисекундах (мс).

Таблица 1

**Результаты вычислительных экспериментов**

| Код задачи | Greedy | | Greedy* | | Near&Far | | Near&Far* | | Smart | | Smart* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *F* | *t* | *F* | *t* | *F* | *t* | *F* | *t* | *F* | *t* | *F* | *t* |
| TR-500(25) | 37 | *1* | **24** | *19* | 35 | *1* | 27 | *19* | 25 | *1* | 25 | 6 |
| BC-2000(25) | 67 | *1* | 52 | *22* | 59 | *1* | **49** | *21* | 54 | *2* | 52 | 7 |
| SM-2000(50) | 323 | *4* | 319 | *184* | 319 | *4* | 307 | *169* | **274** | *33* | **274** | 115 |
| TC-5000(25) | 120 | *3* | 92 | *42* | 98 | *2* | 91 | *61* | **66** | *4* | **66** | 23 |
| BM-5000(50) | 102 | *6* | 98 | *299* | 110 | *6* | 103 | *194* | **91** | *12* | **91** | 83 |
| SR-5000(100) | 569 | *20* | 476 | *6986* | 500 | *21* | 431 | *5597* | 370 | *628* | **334** | 4851 |
| TM-10000(25) | 152 | *5* | 151 | *41* | 150 | *5* | **139** | *55* | 144 | *7* | **139** | 42 |
| BR-10000(50) | 215 | *11* | 200 | *483* | 248 | *12* | 207 | *698* | **170** | *35* | **170** | 148 |
| SC-10000(100) | 885 | *39* | 852 | *3677* | 863 | *42* | **842** | *6982* | 852 | *937* | 852 | 2986 |

**Заключение.** В работе предложена новая модель задачи экстренного оповещения для распределенной группы мобильных роботов в условиях ограниченной коммуникации. Исследуемая задача заключается в поиске кратчайшего по времени маршрута для изначально осведомленного робота с целью распространения некоторой экстренной информации внутри динамической группы роботов. Для решения поставленной задачи предложен ряд конструктивных эвристик, а также процедура локального поиска. Проведенные эксперименты показали, что добавление даже простых проблемно-ориентированных эвристик в классический жадный алгоритм позволяет добиться генерации около-оптимальных решений при небольших вычислительных затратах. Тем не менее, открытым остается вопрос эффективности применения к задаче более продвинутых оптимизационных методов, в том числе метаэвристик. Кроме того, дальнейшее развитие предложенной модели связано с переходом к более реалистичным постановкам с непрерывным временем, взвешенным и ориентированным графом местности, разнородной (по скорости и коммуникационным возможностям) группой роботов.

*Работа проводилась при финансовой поддержке гранта РФФИ 20-07-00397.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Gan S.K., Xu. Z., Sukkarieh S. Distributed situational awareness and control. *Encyclopedia of Aerospace Engineering*. 2016. P 1–11.
2. Kenzin M., Bychkov I., Maksimkin N. Two-level evolutionary approach to persistent surveillance for multiple underwater vehicles with energy constraints. *SPIIRAS Proceedings*. 2019. Vol. 18. № 2. P. 267–301.
3. Papp Z. Situational awareness in intelligent vehicles. *Handbook of Intelligent Vehicles*. 2012. P 61–80.
4. Simon M., Huraj L., Shi L., Dirgova-Luptakova I., Pospichal J. Heuristics for spreading alarm throughout a network. *Applied Sciences*. 2019. Vol. 9. № 16. #3269.
5. Riley S. Large-scale spatial-transmission models of infectious disease. *Science*. 2007. Vol. 316. № 5829. P. 1298–1301.
6. Farokh Z., Tahmasbi M., Tehrani Z., Buali Y. New heuristics for burning graphs. 2020. Preprint cs-dm/2003.09314.

7. Kenzin M., Bychkov I., Maksimkin N. Situational awareness for distributed mobile robot teams under limited communication. *Proceedings of 2nd International Workshop ICCS-DE-2020*. 2020. P. 146–155.

**M.Yu. Kenzin, I.V. Bychkov, N.N. Maksimkin** (ISDCT SB RAS, Irkutsk). **Emergency broadcasting strategy for search and survey operations of the distributed robotic groups**

*Abstract.* The real-world performance of the complex dynamic missions by mobile robot teams requires a strong capability to respond to any unforeseen events in a quick and efficient manner. In light of this, the emergent broadcasting of any highly relevant information among team members is a nontrivial task for large-sized groups under limited communication. The paper states and discusses the route-building problem to ensure the prompt distribution of the information within the travelling group of robots. A number of constructive and improvement heuristics is proposed to solve the problem. Both experimental results and the comparative analysis are presented in the work.

А. Ю. ИСХАКОВ, М. В. МАМЧЕНКО
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН), Москва)

# ИССЛЕДОВАНИЕ УЯЗВИМОСТЕЙ И ТОЧЕК ОТКАЗА В СЦЕНАРИЯХ ГРУППОВОГО УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМИ ТРАНСПОРТНЫМИ СРЕДСТВАМИ

*Постоянное совершенствование аппаратного, программного и математико-алгоритмического обеспечения беспилотных транспортных средств приближает срок их массового задействования во всех физических средах (на дорогах, в воздухе, на воде и под водой), в том числе в составе групп, а также совместно с традиционным – управляемым операторами – транспортом. Несмотря на предпринимаемые меры по повышению защищенности и устойчивости к внешним воздействиям, беспилотные транспортные средства, являясь сложной киберфизической системой, имеют ряд уязвимостей и точек отказа. Цель данного исследования заключается в выработке предложений по повышению отказоустойчивости и защищенности киберфизических систем такого класса путем классификации уязвимостей и точек отказа, в том числе при групповом управлении, и выработке предложений по их устранению.*

**Введение.** В настоящее время идея массового применения беспилотных транспортных средств (БТС), в том числе в среде "умного города", является наиболее перспективной концепцией организации транспортной системы будущего. Наиболее эффективным использованием БТС является их задействование в составе гомогенных и гетерогенных групп, выполняющих задачи по перемещению пассажиров и грузов полностью автономно [1]. В связи с этим наиболее острым вопросом является обеспечение безопасного функционирования БТС и их групп для пассажиров и других участников движения, при этом основным риском группового задействования БТС является возможность эксплуатации злоумышленником их уязвимостей и наличие точек отказа в различных подсистемах автономных транспортных средств. Предлагаемый доклад посвящен анализу уязвимостей и точек отказа БТС, а также выработке предложений по повышению их отказоустойчивости и защиты от несанкционированных внешних воздействий.

**Групповое управление БТС.** Групповое управление БТС подразумевает формирование гомогенных или гетерогенных групп. Гомогенная группа БТС может представлять собой совокупность одинаковых и согласованно действующих автономных беспилотных автомобилей для перевозки пассажиров или грузов. В свою очередь, группа гетерогенных БТС может быть представлена в качестве наземных беспилотных автомобилей с разным целевым назначением (перевозка грузов и/или пассажиров) и различными характеристиками вместимости/грузоподъемности. Для упрощения дальнейшего анализа уязвимостей, сценариев атак и точек отказа при групповом управлении будем полагать, что в группу гетерогенных БТС могут входить транспортные средства с различными характеристиками и назначением, при этом функционирующие только в одной среде (наземные/воздушные/надводные).

Следует отметить, что ключевым аспектом функционирования гомо- и гетерогенных групп БТС является их связанность единой целью (общей задачей, поставленной для конкретной группы). Это обусловлено необходимостью координации действий роботов в составе группы, в том числе во времени и пространстве. Кроме того, несмотря на то, что объекты в гетерогенной группе могут отличаться конструктивно, по функциональным возможностям и назначению, в случае гетерогенной группы БТС одинаковым для всех автономных транспортных средств (при условии функционирования в одной и той же среде) будет являться их единая типовая архитектура [2].

**Типовая архитектура БТС.** С целью проведения комплексного анализа уязвимостей и точек отказа для исследуемых объектов важным представляется рассмотрение типовой архитектуры их построения. В настоящее время БТС, функционирующее в любой среде (наземной, надводной, подводной или воздушной) функционально можно представить в качестве совокупности четырех базовых программно-аппаратных систем.

***Система навигации и ориентации.*** Включает в себя блок навигации – чаще всего систему инерциальной навигации с коррекцией показаний по данным спутниковых навигационных систем типы GPS/ГЛОНАСС, а также блок ориентации и отслеживания обстановки (в том числе 2D, 2D+ и 3D лидары, радары, ультразвуковые сенсоры, системы технического зрения – видеокамеры, стереокамеры, камеры глубины – и т.д.) [3]. Блок навигации отвечает за определение местоположения БТС в глобальной и локальной системах координат, блок ориентации – за отслеживание дорожной/воздушной/надводной/подводной обстановки, в том числе обнаружение и определение дальности до препятствий и других участников движения, считывание дорожных знаков, разметки и т.д.

***Система связи.*** Используется для обмена данными между БТС в составе группы или для передачи информации оператору/в центр обработки данных. Возможные варианты реализации систем связи: ультракоротковолновая цифровая связь; Wi-Fi (стандарт IEEE 802.11), 4G/5G сети, спутниковая связь типа Iridium/Thuraya и т.д.

***Система обработка данных и принятия решения.*** Эта подсистема отвечает за полное формирование текущей обстановки на основе данных систем навигации и ориентации, а также краткосрочное прогнозирование ситуации и передачу управляющих сигналов в подсистему управления движением для корректировки местоположения и скорости движения, уклонения от препятствий и предотвращения столкновений.

***Система управления движением.*** Отвечает за физическую реализацию ускорения, совершения маневров, движения с постоянной скоростью, торможения, изменения высоты полета/глубины погружения и т.д.

Несмотря на повышенное внимание разработчиков БТС к обеспечению их безопасной эксплуатации, данные транспортные средства потенциально подвержены как несанкционированному воздействию злоумышленников, так и непреднамеренным сбоям в функционировании подсистем. Учитывая контекст выполнения БТС задачи в составе группы, а также целевое назначения данных транспортных систем (перевозка пассажиров и грузов), неадекватное функционирование группы в условиях сложной дорожной/воздушной/надводной/подводной обстановки способно повлечь за собой не только повреждение и/или уничтожение одного или нескольких БТС группы, но и причинение вреда здоровью или смерти пассажирам, повреждение/уничтожение перевозимых грузов и создание опасных условий для других участников движения и объектов инфраструктуры. В связи с этим необходимо выявить и проанализировать существующие и потенциально возможные уязвимости и точки отказа БТС, а также предложить способы повышения их устойчивости к несанкционированному воздействию и непреднамеренным отказам.

**Уязвимости БТС**. Под уязвимостью БТС будем понимать недостаток его физических или аппаратно-программных систем, используя который можно намеренно вызвать неадекватное функционирование БТС, в том числе при использовании в составе группы. Рассмотрим основные уязвимости БТС:

1. Простейшей уязвимостью БТС является возможность намеренного вмешательства пассажира-злоумышленника в функционирование физических систем транспортного средства при отсутствии/нахождении в выключенном состоянии системы всесторонней и непрерывной диагностики: нажатие кнопки включения/выключения двигателя, воздействие на рулевую/тормозную систему, прокалывание шин и т.д. В этом случае БТС будет функционировать неправильно, но система принятия решения не сможет отследить несанкционированное вмешательство и прекратить движение.

2. Вмешательство в работу систем технического зрения [4]. Одним из наиболее популярных классов атак на нейронные сети с учителем является класс атак "враждебных изображений" (adversarial image). Принцип атаки данного класса состоит в модификации исходного изображения таким образом, что изменения почти не заметны человеческому глазу, однако весьма ощутимы для нейронной сети, работающей с таким изображением. Мерой модификации обычно является норма, которая измеряет максимум абсолютного изменения в одном пикселе.

3. В случае отсутствия/слабой защиты каналов связи между БТС в составе группы (или между БТС и центром обработки данных) злоумышленник может перехватывать передаваемый служебный трафик. В частности, первоочередной целью злоумышленника может стать беспро-

водная точка доступа на базе стандарта Wi-Fi 802.11. В простейшем случае злоумышленник может начать массовую трансляцию пакетов деаутентификации (deauthentication attack), чтобы точка доступа отключила всех клиентов, или передавать большое количество пакетов аутентификации клиентов (authentication flooding attack), что приведет к отказу в обслуживании (Denial of Service). Более сложным вариантом является перехват т.н. "рукопожатий" между точкой доступа и аутентифицируемым устройством (при наличии шифрования WPA2-PSK TKIP/AES) для дальнейшего перехвата и подбора пароля по словарю [5].

4. Подмена сервера обновлений (DNS-спуфинг) или вмешательство в работу БТС посредством USB интерфейса позволит злоумышленнику загрузить модифицированную прошивку с несанкционированными возможностями (перехват управления, слежка за пассажирами и грузом, создание ботнетов из групп БТС) или вредоносное программное обеспечение.

5. Недостаточная мощность передатчиков и отсутствие помехоустойчивого кодирования сигнала могут дать злоумышленнику возможность осуществлять радиоэлектронное подавление каналов связи в группе и прекращать информационный обмен между ними. Кроме того, злоумышленник также может подавлять не только каналы связи, но и подменять сигнал спутниковой навигационной системы GPS, передавая БТС ложные координаты (т.н. GPS-спуфинг). Учитывая тот факт, что спутниковые навигационные данные используются для корректировки инерциальных систем навигации, подобная уязвимость может привести к транспортным происшествиям с серьезными последствиями.

6. Слабое экранирование проводки и микросхем позволит злоумышленнику перехватывать полезные данные по сторонним каналам. В частности, перехват побочных электромагнитных излучений и наводок (ПЭМИН) позволяет восстанавливать видеосигнал мониторов, а также данные, передаваемые через порты USB [6].

**Точки отказа БТС**. В отличие от уязвимостей, которые могут эксплуатироваться злоумышленниками, точки отказа представляют собой потенциальные и непреднамеренные неисправности подсистем БТС, которые могут возникнуть в результате недостатков, допущенных на этапе проектирования и производства БТС, ошибок в программном обеспечении или неадекватного функционирования БТС в непредвиденных условиях. Наиболее часто встречающимися точками отказа являются:

1. Ошибки в программном коде прошивки. Могут привести к выдаче неверных значений переменных, зависаниям и непроизвольной перезагрузке бортового компьютера БТС и другим серьезными последствиями.

2. Отказы системы спутниковой навигации. Приводят к невозможности осуществления корректировки БТС по данным спутниковых навигационных систем.

3. Ложное срабатывание/отказ системы технического зрения или ошибки распознавания образов нейронной сетью [4]. Ошибки систем распознавания дорожных знаков, статических и динамических объектов городской инфраструктуры (препятствий) или других участников движения (в том числе пешеходов) может спровоцировать возникновение дорожно-транспортных происшествий. Уже известны случаи смертельных дорожно-транспортных происшествий в результате неправильного функционирования систем автономного вождения автомобилей [7].

4. Ложное срабатывание/отказ системы ориентации. Одной из причин является функционирование датчиков в неблагоприятных погодных условиях (например, экстремальные и нехарактерные для места использования БТС погодные условия значительным образом снижают эффективность работы оптических камер и лидаров). Если в системе принятия решения данные с сенсоров сопоставляются, это может привести к ошибкам в определении собственного местоположения и оценке текущей транспортной обстановки [3].

5. Выход из строя лидера группы (в случае централизованного группового управления). Если сценарием не предусмотрена передача функции БТС-лидера другому транспортному средству, это может привести к дезорганизации группы и прекращению движения или дорожно-транспортному происшествию.

**Заключение.** Стремительно развивающаяся отрасль беспилотного транспорта включает в себя необходимость совершенствования целой совокупности технологий – искусственного интеллекта, телекоммуникационных систем, киберфизических интерфейсов, а также информаци-

онной безопасности. Среди возможных мер и способов противодействия атакам злоумышленников и повышения отказоустойчивости и надежности БТС для эффективного функционирования в составе группы особо следует отметить:

1. Непрерывную диагностику и отслеживание состояния всех основных узлов, агрегатов и систем БТС (как физических, так и аппаратно-программных).
2. Реализацию алгоритмов комплексирования (объединения) сенсорных данных с разнородных датчиков, например, с интеллектуальным модулем выбора приоритетного датчика в зависимости от внешних условий [3].
3. Обеспечение безопасности функционирования систем технического зрения БТС, например, с помощью подхода, указанного в статье [4]. Дообучение систем нейронных сетей систем машинного зрения на основе непредусмотренных обстоятельств, а также создание специализированных систем искусственного интеллекта для выявления критических ситуаций в транспортных системах [8-9].
4. Экранирование кабельных сборок и микросхем, а также использование оптического волокна для передачи данных способно снизить эффективность перехвата злоумышленником ПЭМИН.
5. Реализацию возможности кратковременного функционирования навигационной подсистемы без корректировки по данным спутниковой навигации.
6. Обновление программного обеспечения БТС с функцией контроля целостности только при нахождении в пунктах технического обслуживания.
7. Использование алгоритмов шифрования и помехоустойчивого кодирования способно повысить защищенность каналов связи от перехвата устойчивость к помехам. Кроме того, необходимо использовать алгоритмы гарантированной передачи данных по беспроводным калам связи, например, в условиях их подавления злоумышленниками [10], на базе технологии блокчейн [11] или цифровых водяных знаков [12].
8. Рекомендуется использовать децентрализованные модели группового управления или в обязательном порядке применять алгоритмы переназначения функции БТС-лидера при его выходе из строя.

Для того чтобы завоевать доверие жителей, экосистема умной транспортной инфраструктуры города должна функционировать надежно, стабильно и безотказно. В связи с этим актуальным направлением при разработке современных БТС является решение проблемы обеспечения безопасности для новых и усовершенствованных систем, алгоритмов, методов и принципов технического зрения и пространственной навигации роботов. Данные обстоятельства обуславливают актуальность проводимого авторами исследования, направленного на поиск и анализ уязвимостей и точек отказа как в отдельных БТС, так и в сценариях их группового управления.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 19-29-06044.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов А.А., Покусаев О.Н., Куприяновский В.П., Намиот Д.Е. Архитектура автономных (беспилотных) автомобилей и инфраструктура для их эксплуатации. *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2018. Vol. 14. № 3. P. 727-736.
2. Белоглазов Д.А., Гайдук А.Р., Косенко Е.Ю., Медведев М.Ю., Пшихопов В.Х., Соловьев В.В., Титов А.Е., Финаев В.И., Шаповалов И.О. Групповое управление подвижными объектами в неопределенных средах / Под ред. В.Х. Пшихопова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015, стр. 10-91.
3. Mamchenko M., Romanova M., Trefilov P. Algorithm for Sensor Data Merging Using Analytical Module for Priority Sensor Selection. *2020 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*. 2020. P. 1-5.
4. Iskhakov A., Jharko E. Approach to Security Provision of Machine Vision for Unmanned Vehicles of “Smart City”. *2020 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*. 2020. P. 1-5.
5. Krisztián J. et al. WiFi vulnerability caused by SSID forgery in the IEEE 802.11 protocol. *IEEE 17th World Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMI 2019)*. 2019. P. 333-338.
6. Zhang C. et al. TEMPEST in USB. *2017 IEEE 5th International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC-Beijing)*. 2017. P. 1-4.
7. Автопилот Tesla не видит грузовики! Очередное смертельное ДТП [Электронный ресурс]. URL: https://www.kolesa.ru/news/avtopilota-tesla-ne-vidit-gruzoviki-ocherednoe-smertelnoe-dtp (дата обращения: 10.08.2020).

8. Pashchenko F.F., Amosov O.S., Amosova S.G., Ivanov Y.S., Zhiganov S.V. Deep Neural Network Method of Recognizing the Critical Situations for Transport Systems by Video Images. *Procedia Computer Science*. 2019. Vol. 151. P. 675-682.
9. The Use of Deep Neural Networks to Recognize Network Traffic Abnormalities in Enterprise Information and Telecommunication Systems Amosov O.S., Amosova S.G., Ivanov Y.S., Zhiganov S.V. The Use of Deep Neural Networks to Recognize Network Traffic Abnormalities in Enterprise Information and Telecommunication Systems. *2019 Twelfth International Conference "Management of large-scale system development" (MLSD)*. 2019. P. 1-5.
10. Iskhakova A., Iskhakov A., Meshcheryakov R., Jharko E. Method of Verification of Robotic Group Agents in the Conditions of Communication Facility Suppression. *IFAC-PapersOnLine*. 2019. Vol. 52. № 13. P. 1397-1402.
11. Evsutin O., Meshcheryakov Y. The Use of the Blockchain Technology and Digital Watermarking to Provide Data Authenticity on a Mining Enterprise. *Sensors*. 2020. Vol. 20. № 12. P. 1-19.
12. Shumskaya O., Iskhakova A. Application of digital watermarks in the problem of operating signal hidden transfer in multi-agent robotic system. *2019 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*. 2019. P. 1-5.

---

**A.Y .Iskhakov, M.V. Mamchenko**,(Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (ICS RAS), Moscow).
**Study of the vulnerabilities and points of failure of the unmanned vehicles within the group control scenarios**

*Abstract.* Continuous improvement of the hardware, software and algorithms of the unmanned vehicle (UV) accelerates their widespread deployment in all physical environments (roads, air, water and underwater), including the scenarios of forming up groups of UVs that operate in conjunction with traditional (manned) vehicles. Despite measures taken to improve security and resilience of the UVs, they have (and will have anyway) a number of vulnerabilities and points of failure.
The essence of this work is not only the analysis of the vulnerabilities and points of failure of the UVs within scenarios of group control, but also formulation of proposals in order to increase their fault tolerance and protection against external influences and internal errors.

И. В. БЫЧКОВ, С. А. УЛЬЯНОВ, Н. В. НАГУЛ, А. В. ДАВЫДОВ, М. Ю. КЕНЗИН, Н. Н. МАКСИМКИН
(Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова, Иркутск)

# СОБЫТИЙНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОЙ РОБОТОВ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МНОГОЦЕЛЕВЫХ МИССИЙ

*Эффективное и автономное выполнение многоцелевых миссий с использованием группы мобильных роботов предполагает использование развитой системы управления, обычно состоящей из множества подсистем, выстроенных в иерархию. С целью унификации взаимодействия отдельных компонент разработана основанная на событиях система управления, обеспечивающая решение множества актуальных робототехнических задач: планирования пути, управления формациями, групповой маршрутизации и планирования действий.*

**Введение.** Автономное выполнение многоцелевых групповых миссий в неизвестной среде возможно только при наличии у роботов развитой системы управления, которая, как правило, является многоуровневой. Большинство известных архитектур ориентированы на решение конкретных задач и имеют проблемы с масштабированием. Предлагаемый доклад посвящен разработке иерархической событийной системы управления, обеспечивающей решение широкого спектра актуальных задач: планирования пути, управления формациями, групповой маршрутизации и планирования действий. Основным компонентом системы является дискретно-событийная система (ДСС). Вопросы анализа ДСС также затрагиваются в докладе.

**Событийная система управления.** Для эффективной реализации совместных операций предполагается, что каждый робот в группе имеет иерархическую систему управления, состоящую из трех уровней (рисунок 1). Функция нижнего уровня – исполнение алгоритмов управления, соответствующих текущему режиму работы группы, который определяется средним (тактическом) уровнем. Планировщик на среднем уровне определяет способ выполнения текущей задачи, полученной в результате стратегического планирования на верхнем уровне. Планировщик верхнего уровня выполняет пространственно-временную декомпозицию миссии на последовательность задач (действий или заданий). Многокомпонентная ДСС обеспечивает подходящую реакцию на обнаруженные события путем анализа данных от датчиков и информации, полученной от других роботов. Изменение состояния ДСС может инициировать как пересчет управляющих воздействий на нижнем уровне, так и перепланирование пути на среднем уровне.

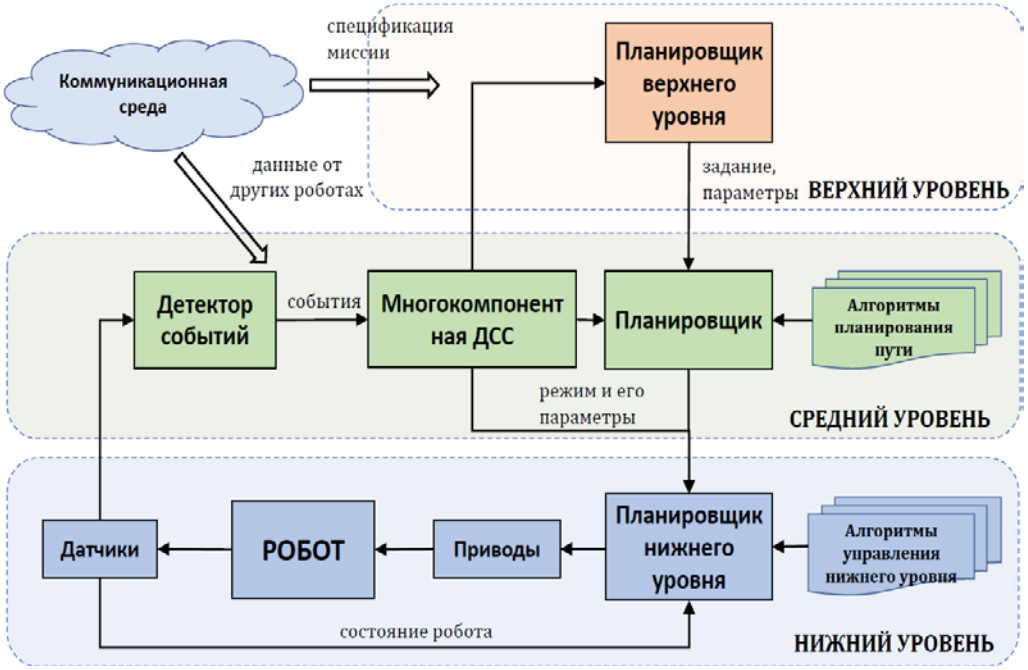



Рис. 1. Архитектура иерархической системы управления группой роботов

**Исчисление позитивно-образованных формул (ПОФ) в супервизорном управлении ДСС.** В конце 1980-х годов для ДСС в автоматной форме была создана теория супервизорного управления (ТСУ). ТСУ предполагает, что некоторые события могут быть запрещены устройством управления, называемым супервизором, чтобы ограничить поведение системы в соответствии с заданным набором ограничений. Подробный обзор современного состояния ТСУ можно найти в [1]. Поскольку многие вопросы ТСУ остаются открытыми, для их решения предлагается применить логический вывод в исчислении ПОФ как средство интеллектуализации алгоритмов построения и исследования ДСС. Общий вид ПОФ, представляющего некоторый конечный автомат, состоит из единственной базы, содержащей атомы, соответствующие состояниям автомата, его переходам, начальному и маркированным состояниям. Последние используются как метки завершенных системой задач.

Решающую роль в ТСУ играет понятие управляемости, поскольку только управляемые языки могут быть в точности достигнуты совместным поведением управляемой системы и супервизора. Для проверки условия управляемости строится произведение автоматов, описывающих систему и спецификацию на ее поведение, затем оценивается наличие одинаковых неуправляемых переходов в спецификации и системе. Эта идея заимствована для проверки управляемости с помощью ПОФ, причем произведение автоматов, также как и их параллельная композиция, могут быть построены в процессе вывода соответствующей ПОФ. В случае нарушения управляемости вывод ПОФ позволяет автоматически построить наибольший управляемый подъязык спецификации как новые, гарантированно выполнимые, ограничения на систему. Супервизор затем реализовывается с помощью новой ПОФ, в процессе вывода которой моделируется поведение системы под действием управления. Накопление в базе ПОФ в ходе вывода фактов позволяет использовать их для автоматической модификации системы или спецификации. Дальнейшее развитие подхода к ДСС на основе ПОФ позволит эффективно решать важные задачи ТСУ, такие как построение централизованных и децентрализованных супервизоров, а также создание и исследование ДСС с частичным наблюдением.

**Задача планирования пути в неизвестной среде.** Успешное выполнение отдельных этапов сложной многоцелевой миссии невозможно без наделения робота способностью коррекции своего движения в режиме реального времени с целью избежания столкновений с препятствиями. В докладе исследуется постановка задачи планирования пути, в рамках которой робот должен следовать по заданной опорной траектории и обходить препятствия, обнаруживаемые локатором секторного обзора. Для решения этой задачи предложен событийный подход, центральным компонентом которого является ДСС, ответственная за выявление ситуаций, требующих изменение текущего пути. Выделены два типа действий, которые выполняются при изменении состояния ДСС: действия, обеспечивающие построение траектории обхода препятствия с помощью модификаций алгоритмов, предложенных в [2], и действия генерирующие путь для возврата робота на опорную траекторию на основе кривых Дубинса [3]. Генерируемые пути являются гладкими и удовлетворяют кинематическим ограничениям, которые задаются минимальным радиусом поворота. Эффективность разработанного подхода подтверждается результатами численных экспериментов.

**Задача управление формацией.** Традиционно выполнение различных поисковых и обследовательских работ предполагает движение группы роботов вдоль заданной траектории с сохранением желаемой формации. С целью уменьшения нагрузки на каналы связи и бортовые вычислительные устройства в докладе разработан основанный на схеме лидер-ведомый децентрализованный алгоритм управления формациями роботов. Он использует механизмы, обеспечивающие установление сеансов связи между роботами и пересчет их управляющих сигналов лишь при возникновение определенных событий, условия срабатывания которых проверяются как на стороне лидера (для инициации соединения), так и на стороне ведомых (для пересчета управления). Неизвестные параметры в алгоритме для типовых формаций синтезированы по критерию минимума ошибки стабилизации ведомых с применением модификаций алгоритмов [4], основанных на векторных функциях Ляпунова, с учетом неопределенности параметров робота, ошибок измерений и насыщения управления. Проведены численные расчеты, демонстрирующие высокое качество предложенных алгоритмов.

**Задача планирования групповых маршрутов.** В качестве задачи планирования миссии группы роботов на верхнем уровне рассматривается задача многоатрибутной маршрутизации в оригинальной постановке. Работа группы в данном случае заключается в своевременном обследовании заданного набора из целей в соответствии с установленным расписанием и при действующем наборе ограничений. В качестве требований к обследованию каждой цели могут выступать в различном сочетании пространственные (местоположение, размеры) и временные ограничения (допустимые временные окна, периодичность и длительность обслуживаний), а также ограничения обслуживания (требуемое количество роботов, наличие оборудования) [5].

Действующая группа состоит из параметрически и функционально разнородных роботов. На каждом периоде маршрутизации роботы начинают движение в установленной области сбора, периодически возвращаясь туда для проведения сеансов связи. Такие сеансы связи позволяют обеспечить регулярный обмен актуальными данными внутри группы и возможность распределенного планирования групповой стратегии на ближайший период маршрутизации.

Ставится задача генерации такого допустимого группового маршрута на один период маршрутизации, который обеспечивал бы своевременное обследование большинства целей, насколько это позволяет текущая конфигурация группы и действующие ограничения.

Для решения предложенной задачи предлагается использовать модификацию гибридных эволюционных алгоритмов. Применение набора специализированных эвристик, а также ряда проблемно-ориентированных процедур локального поиска и дополнительных схем по улучшению маршрутов позволяет добиться высокоэффективной генерации решений, близких к оптимальному (погрешность не более 1,3%), даже для самых сложных тестовых примеров.

**Задача планирования действий.** В этом разделе представляются возможности применения исчисления ПОФ для планирования действий группы роботов при коллективном выполнении заданий на примере задачи совместного передвижения блоков. ПОФ формализация данной задачи понимается как спецификация миссии для роботов, а результатом автоматического поиска вывода по этой спецификации будут последовательные планы действий.

Рассматривается некоторая рабочая среда для роботов в виде плоской платформы ограниченного размера. Задача формализуется в виде нехорновской ПОФ, состоящей из базы, которая до начала поиска вывода содержит факты о начальном положении объектов на сцене, а также вопросов-правил, отвечающих за распределение целей для группы роботов, передвижение роботов к целям и перемещение блоков к целевой области. За остановку поиска вывода отвечает целевой вопрос-правило, сравнивающий координаты целевой области с текущими координатами блоков. Для сокращения пространства поиска при логическом выводе используется эвристика, осуществляющая проверку расстояния между текущим положением робота и назначенной целью. Предполагается, что при полном построении вывода в опровергнутых базах будут накапливаться факты, отражающие последовательные изменения состояния сцены. При этом извлечь оттуда минимальные планы будет довольно легко.

**Заключение.** В докладе представлена общая концепция иерархической модели для событийной системы управления группой роботов при выполнении многоцелевых динамических миссий. Предложены методы и алгоритмы для реализации различных блоков и уровней представленной архитектуры. В дальнейшем планируется проведение как модельных, так и практических экспериментов для отработки сценариев с комплексным групповым взаимодействием.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ № 20-07-00397*

ЛИТЕРАТУРА

1. Wonham W.M., Cai K. Supervisory Control of Discrete-Event Systems. NY:Springer, 2019. 487 pp.
2. Yan Z., Li J., Zhang G., Wu Y.A Real-time reaction obstacle avoidance algorithm for autonomous underwater vehicles in unknown environments. *Sensors*. 2018. Vol. 18. № 2.
3. Dubins E. L. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangent. *American Journal of Mathematics*. 1957. Vol. 79. № 3. P. 497–516.
4. Vassilyev S., Ulyanov S., Maksimkin N. A VLF-based technique in applications to digital control of nonlinear hybrid multirate systems. *AIP Conference Proceedings*. 2017. Vol. 1798:1. P. 020170.

5. Caceres-Cruz J., Arias P., Guimarans D., Riera D., Juan A.A. Rich vehicle routing problem: Survey. *ACM Computing Surveys.* 2014. Vol. 47. № 2. P. 1–28.

**I.V. Bychkov, S.A. Ulyanov, N.V. Nagul, A.V. Davydov, M.Yu. Kenzin, N.N. Maksimkin** (ISDCT SB RAS, Irkutsk).
**Event-based control system for cooperative multi-objective robotic missions**

*Abstract.* The presence of the advanced control system is an essential requirement to achieve high performance and reliability in autonomous multi-robot missions. In general, such systems are assumed to be hierarchical and consist of several subsystems. To unify the interaction of individual system components, an event-based control system has been developed to provide solutions to a number of challenging robotic problems: path planning, formation control, group routing and action planning.

Д. Н. ФЕДЯНИН
(ИПУ РАН, Москва)

# ОБМЕН ИНФОРМАЦИЕЙ АВТОНОМНЫМИ МОБИЛЬНЫМИ АГЕНТАМИ ПРИ ПОИСКЕ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ДАЛЬНОСТИ СВЯЗИ

*Предлагаемый доклад посвящен сравнению эффективности обмена информацией автономными мобильными агентами при поиске в условиях ограниченной дальности связи.. Особенностью задачи является рассмотрение случая функционирования при запрете использования радио, световых и акустических каналов связи на большом расстоянии, а также без всплытия. В докладе сравниваются следующие алгоритмы работы группы автономных роботов, основанные на предварительном разбиении на пространства на сектора и обследование каждым роботов своего сектора методом "в ширину".*

**Введение.** Предлагаемый доклад посвящен сравнению эффективности обмена информацией автономными мобильными агентами при поиске в условиях ограниченной дальности связи. Такая задача возникает при поиске подводными аппаратами источника загрязнения на поверхности плоского дна. Задачей группы роботов является обнаружение расположения источника загрязнения, сообщение об этом на базу и возвращение всех роботов на базу. Особенностью задачи является рассмотрение случая функционирования при запрете использования радио, световых и акустических каналов связи на большом расстоянии, а также без всплытия. Разрешенным каналом связи является передача данных на расстоянии порядка размеров самого робота. Задача разбивается на три связанных между собой подзадачи:

1. Организация непосредственно посредственно траектории поиска,
2. Организация обеспечения запаса топлива,
3. Организация сообщения информации на базу и обеспечения возврата всех роботов.

В докладе сравниваются следующие алгоритмы работы группы автономных роботов, основанные на предварительном разбиении на пространства на сектора и обследование каждым роботов своего сектора методом "в ширину".

Проблема поиска, картографирования, логистики весьма хорошо изучены [1], хотя исчерпывающего решения, которое можно было бы использовать нет. Проблема информационного обмена также изучалась [2-12], причем используемые идеи каскадных процессов в задачах информирования в социальных сетях хорошо известны и активно изучаются.

**Сравниваемые алгоритмы обмена.** Описание идей алгоритмов.

1. Возвращение роботов на базу синхронно к заданным моментам времени или при успешном отыскании источника загрязнения.
2. Выделение специального робота, двигающегося между роботами и проверяющего, нашли ли роботы источник. Если роботы обнаруживают, что такой специальный робот не вышел на контакт в заданное время, это является сигналом, что поиск завершен и все роботы возвращаются на базу.
3. Робот, успешно нашедший источник, движется к ближайшему роботу по кратчайшему пути, далее роботы по специальной траектории каскадом информируют других роботов, при этом один из роботов движется кратчайшим путем к базе.
4. Роботы синхронизируются и обмениваются информацией при встрече, если источник обнаружен, робот движется к базе, а остальные роботы если не обнаружили соседнего робота в заданное время (при известных траекториях движение роботов просчитается), идет к базе. Это также каскадный алгоритм, но в отличие от алгоритма 3, скорость распространения меньше (например, когда территория большая, и регулярные встречи роботов редки).

В ходе анализа было показано, что алгоритмы 3 и 4 имеют преимущество, причем преимущество алгоритма 3 в экономии топлива, а 4 – в меньшем времени выполнения задачи.

Схематичные иллюстрации работы алгоритмов приведены на рисунках 1-4. Иллюстрации представляют собой вид на акваторию вблизи берега в последовательные моменты времени. Черный прямоугольник внизу – берег. Выше его на схеме – акватория, разделенная на четыре сектора. В этой акватории ведется поиск. Черные круги – роботы (подводные аппараты), пунк-

тиром выборочно (для упрощения диаграммы) показаны участки траекторий, по которым осуществлял движение робот.

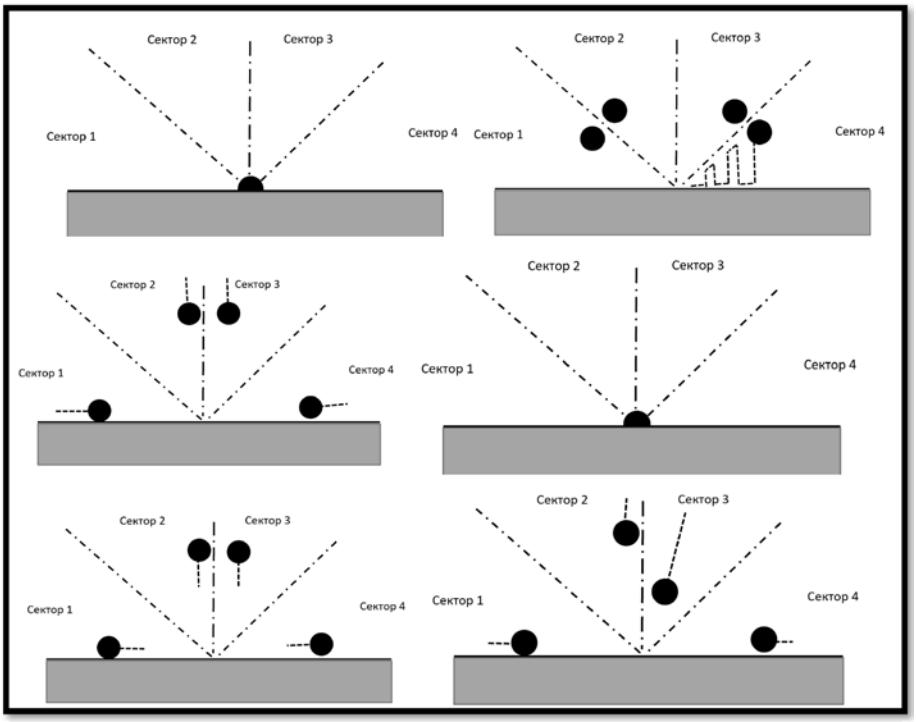



Рис. 1. Алгоритм 1: поиск с синхронным возвращением на базу.

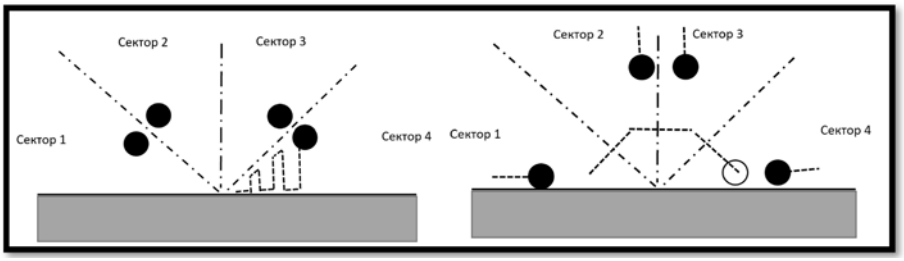



Рис. 2. Алгоритм 2: поиск с выделенным роботом-посредником (показан белым).

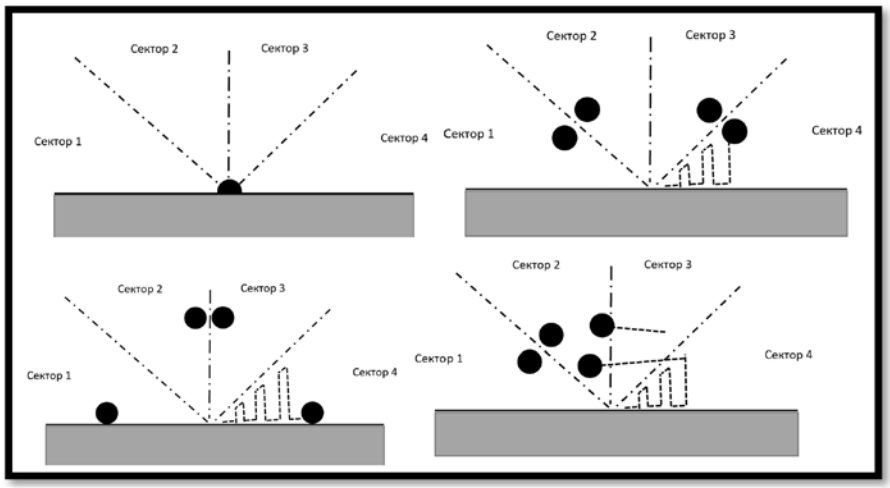



Рис. 3. Алгоритм 3: поиск с каскадным информированием.

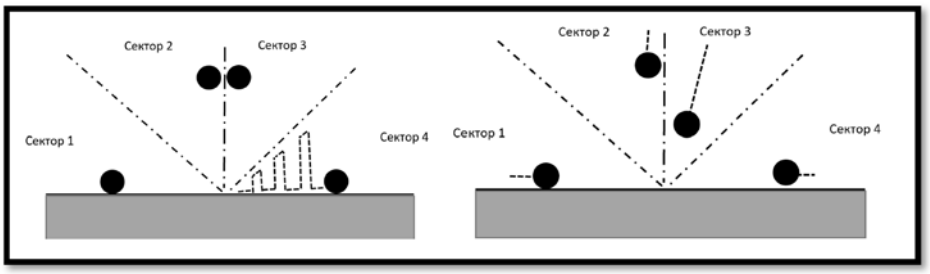



Рис. 4. Алгоритм 4: поиск с синхронизацией и последовательным информированием.

**Заключение.** В предложены четыре алгоритма информационного обмена при решении задачи поиска, и изучены их слабые и сильные стороны. Построена компьютерная модель для моделирования, и выполнен предварительный аналитический анализ.

*Работа проводилась при частичной поддержке гранта РНФ 16-19-10609.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В.** Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему. Фундамент. и прикл. матем., 1:4 (1995), С. 827–862
2. **Goldman C. V., Zilberstein S.** Optimizing information exchange in cooperative multi-agent systems //Proceedings of the second international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems. – 2003. – С. 137-144.
3. **Díaz-Báñez J. M. et al.** The synchronization problem for information exchange between aerial robots under communication constraints //2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). – IEEE, 2015. – С. 4650-4655.
4. **Leung K. Y. K., Barfoot T. D., Liu H. H. T.** Decentralized localization of sparsely-communicating robot networks: A centralized-equivalent approach //IEEE Transactions on Robotics. – 2009. – Т. 26. – №. 1. – С. 62-77.
5. **Schill F. et al.** Towards optimal TDMA scheduling for robotic swarm communication //Proceedings Towards Autonomous Robotic Systems. – 2005. – С. 197-203.
6. **Rahmanpour S., Esfanjani R. M.** Energy-aware planning of motion and communication strategies for networked mobile robots //Information Sciences. – 2019. – Т. 497. – С. 149-164.
7. **Hutin N., Pégard C., Brassart E.** A communication strategy for cooperative robots //Proceedings. 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Innovations in Theory, Practice and Applications (Cat. No. 98CH36190). – IEEE, 1998. – Т. 1. – С. 114-119.
8. **Ren W., Atkins E.** Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange //International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal. – 2007. – Т. 17. – №. 10-11. – С. 1002-1033.
9. **Pfingsthorn M., Birk A., Bülow H.** An efficient strategy for data exchange in multi-robot mapping under underwater communication constraints //2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. – IEEE, 2010. – С. 4886-4893.
10. **Kostenko V. V., Lvov O. Y.** Combined systems of communication and navigation for autonomous underwater robot equipped with a float towed unit //Underwater Investigation and Robotics. – 2017. – Т. 1. – №. 23. – С. 31-43.
11. **Couceiro M. S. et al.** Darwinian robotic swarms for exploration with minimal communication //2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation. – IEEE, 2013. – С. 127-134.
12. **De Hoog J., Cameron S., Visser A.** Autonomous multi-robot exploration in communication-limited environments //Proceedings of the Conference on Towards Autonomous Robotic Systems. – 2010. – С. 68-75.

---

**D.N. Fedyanin** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow). **Requirements to formatting the papers to be published in the Proceedings of the Multiconference on Control Problems**

The proposed report is devoted to the comparison of the efficiency of information exchange by autonomous mobile agents when searching in a limited communication range. A feature of the problem is to consider the case of operation with the prohibition of the use of radio, light, and acoustic communication channels at a great distance, as well as without surfacing. The report compares the following algorithms for the work of a group of autonomous robots, based on a preliminary division into spaces into sectors and a survey of each robots in their sector using the “breadth-first search” method.

В.А. БАТУРИН
(Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск)

В.Н. СИЗЫХ
(Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск)

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА СЕТИ ОПЕРАТОРОВ

*Математические модели, описывающие функционирование сети операторов, и в частности, многоэтапные процессы, достаточно часто встречаются на практике: технологичнские системы машиностроительных и химико-технологических производств, крекинга нефти, обработки металлов и полимеров. Управление такими процессами может быть как точечным, так и распределенным по независимой переменной (по времени или расстоянию). Поэтому задачи управления и, в частности, оптимального управления важны при исследовании такого рода объектов. В работе авторами предлагаются приближенные методы решения задачи управления с параметрами на сети операторов. Они основаны на методологии, развитой в работах [1] – [4].*

**Введение.** Пусть задан ориентированный граф с вершинами $i=\overline{0,N+h}$ и координатами $(\xi_1^i, \xi_2^i)$, координаты точек $(\xi_1^i, \xi_2^i)$ нефиксированы. Обозначим $A_i$ – множество индексов точек $j$ таких, что в заданном графе существует ребро $ij$, причем $j<i$, $B_i$ – множество индексов точек $j$ таких, что в заданном графе существует ребро $ij$, причем $j>i$.

Пусть первые $k$ вершин графа являются входными, а последние $h$ вершин – выходными, т.е. $A_i = \emptyset$ при $i = \overline{0,k}$ и $B_i = \emptyset$ при $i = \overline{N+1, N+h}$.

На каждом ребре состояние процесса описывается своей математической моделью в форме обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^{ij}}{dt_{ij}} = f^{ij}\left(t_{ij}, x^{ij}(t_{ij}), u^{ij}(t_{ij})\right), \tag{1}$$

где $t_{ij} \in [\tau_i, \tau_j]$, $i = \overline{0,N}$, $j \in B_i$. Далее индексы $ij$ и $t$ будем опускать.

Начальные условия на каждом ребре определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &x^{ij}(\tau_i) = \aleph^{ij}, i = \overline{0,k}, \\ &x^{ij}(\tau_i) = \aleph^{ij}(\tau_i, x^{l_1 i}(\tau_i), \ldots, x^{l_1 i}(\tau_i)), l_1, \ldots, l_p \in A_i, i = \overline{k+1, N}. \end{aligned} \tag{2}$$

Функции $x^{ij}(t)$ – кусочно дифференцируемы и принимают значения в евклидовом пространстве $R^{n(ij)}$, $u^{ij}(t) \in U_{ij} \subset R^{m(ij)}$ – кусочно непрерывны, $\aleph^{ij}$ - заданные функции.

Обозначим $x^i = \left\{x^{ij}(t) : j \in B_i, i = \overline{0,N}\right\}$, $u^i = \left\{u^{ij}(t) : j \in B_i, i = \overline{0,N}\right\}$,

$$x = \left(x^0(t), x^1(t), \ldots, x^N(t)\right)', \; u = \left(u^0(t), u^1(t), \ldots, u^N(t)\right)'.$$

Множество пар $(x,u)$, удовлетворяющих перечисленным условиям, а также дифференциальным связям (1) и начальным условиям (2), будем называть множеством допустимых и обозначать $D$. Предполагается, что $D \neq \emptyset$.

Определим функционал

$$I(x,u) = F(x^{S_{N+1}, N+1}(\tau_{N+1}), \ldots, x^{S_{N+h}, N+h}(\tau_{N+h})),$$

который требуется минимизировать. Здесь $S_i \in A_i$.

Такую задачу будем называть задачей оптимального управления на сети операторов.

Данная постановка задачи является новой. Новизна состоит в том, что вершины $(\xi_1^i, \xi_2^i)$ графа нефиксированы. Примером моделей (1) могут быть бассейны рек, где русло в процессе

времени меняется, например, река Амур. Исследователи таких задач занимаются более пятидесяти лет и до настоящего времени они не утратили свою актуальность, например [5–9].

***Общая схема решения задачи.*** Приведем общую схему решения задачи, которая состоит в последовательном улучшении управления, то есть по заданному управлению надо найти новое управление, на котором значение функционала меньше.

Минимум функционала определяется через функции Понтрягина

$$H^{ij}(t,x^{ij},\psi^{ij},u^{ij}) = \psi'^{ij}(t)\cdot f^{ij}(t,x^{ij},u^{ij}),\ i=\overline{0,N}.$$

и векторно-матричную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi^{ij}}{dt} = -H^{ij}_{x^{ij}} + \left(H^{ij}_{x^{ij}u^{ij}} + \sigma^{ij} f^{ij}_{u^{ij}}\right)\left(H^{ij}_{u^{ij}u^{ij}} - (1-\alpha)E^{m(ij)}\right)^{-1} H^{ij}_{u^{ij}},$$

$$\psi^{ij}(\tau_j) = \sum_{z\in B_j}\psi^{jz}(\tau_j)\cdot\kappa^{jz}_{x_1^{ij}},\ \text{где}\ i=\overline{0,N},\ j\in B_i,\ j\le N, \tag{3}$$

$$\psi^{ij}(\tau_j) = -F_{x_1^{ij}},\ \text{где}\ j=\overline{N+1,N+h},\ i\in A_j,$$

$$\frac{d\sigma^{ij}}{dt} = -H^{ij}_{x^{ij}x^{ij}} - \sigma^{ij} f^{ij}_{x^{ij}} - f'^{ij}_{x^{ij}}\sigma^{ij} + \left(H^{ij}_{x^{ij}u^{ij}} + \sigma^{ij} f^{ij}_{u^{ij}}\right)\times$$

$$\times\left(H^{ij}_{u^{ij}u^{ij}} - (1-\alpha)E^{m(ij)}\right)^{-1}\left(H^{ij}_{u^{ij}x^{ij}} + f'^{ij}_{u^{ij}}\sigma^{ij}\right), \tag{4}$$

$$\sigma^{ij}(\tau_j) = \sum_{z\in B_j}\left[\left(\psi^{jz}(\tau_j)\cdot\kappa^{jz}_{x_1^{ij}}\right)'_{x_1^{ij}} + \kappa'^{jz}_{x_1^{ij}}\sigma^{jz}(\tau_j)\kappa^{jz}_{x_1^{ij}}\right],\ \text{где}\ i=\overline{0,N},\ j\in B_i,\ j\le N,$$

$$\sigma^{ij}(\tau_j) = -\alpha F_{x_1^{ij}x_1^{ij}},\ \text{где}\ j=\overline{N+1,N+h},\ i\in A_j,$$

$$\frac{d\eta^{ij}}{dt} = -f^{ij}_{x^{ij}}\eta^{ij} + \left(H^{ij}_{x^{ij}u^{ij}} + \sigma^{ij} f^{ij}_{u^{ij}}\right)\left(H^{ij}_{u^{ij}u^{ij}} - (1-\alpha)E^{m(ij)}\right)^{-1}\times f^{ij}_{u^{ij}}\eta^{ij},$$

$$\eta^{ij}(\tau_j) = 0,\ \text{где}\ i=\overline{0,N},\ j\in B_i.$$

где $\psi^{ij}$ - $n(i)$ - вектор, $\sigma^{ij}$ - $n(i)\times n(i)$ - симметрическая матрица, и формулу линейного синтеза для управления

$$\Delta u^{ij} = -\left(H^{ij}_{u^{ij}u^{ij}} - (1-\alpha)E^{m(ij)}\right)^{-1}\left(H^{ij}_{u^{ij}} + \left(H^{ij}_{u^{ij}x^{ij}} + f'^{ij}_{u^{ij}}\sigma^{ij}\right)\Delta x^{ij}\right), \tag{5}$$

***Алгоритм приближенно-оптимального синтеза***

1. На каждом ребре задаются начальные управления $u^{ij}_I(t)$ из уравнений (1) и начальных условий (2) определяются $x^{ij}_I(t)$.
2. Задается параметр $\alpha\in(0,1]$ и из дифференциальных уравнений (3), (4) находятся $\psi^{ij}(t),\sigma^{ij}(t),\ i=\overline{0,N},\ j\in B_i$.
3. Подсчитываются $\Delta\xi_1,\Delta\xi_2,\xi_1=\xi_1^I+\Delta\xi_1,\xi_2=\xi_2^I+\Delta\xi_1$.
4. Новая траектория определяется из уравнений (1) при условиях $x^{ij}_{II}(\tau_i)=\kappa^{ij}\left(\tau_i,a^{ij}_{II}\right),i=\overline{0,k}$, и $x^{ij}_{II}(\tau_i)=\kappa^{ij}\left(\tau_i,x^{l_1 i}_{II}(\tau_i),\ldots,x^{l_p i}_{II}(\tau_i),a^{ij}_{II}\right)$, $l_1,\ldots,l_p\in A_i,\ i=\overline{k+1,N}$ и управлениях $u^{ij}=u^{ij}_I(t)+\Delta u^{ij}(t,\Delta x^{ij})$, где $\Delta u^{ij}$ задаются формулой (5), тем самым получаются и новые управления $u^{ij}_{II}=u^{ij}_I(t)+\Delta u^{ij}(t,x^{ij}_{II}(t)-x^{ij}_I(t))$.
5. Сравниваются значения функционалов $I(x_I,u_I)$ и $I(x_{II},u_{II})$. Если улучшения не произошло, то параметр $\alpha$ уменьшается и процесс повторяется начиная с шага 2.

Свойства монотонно убывающей (релаксационной) сходимости алгоритма сформулированы в виде следующей теоремы.

**Теорема.** *Пусть функция* $F\left(x^{S_{N+1},N+1}(\tau_{N+1}),\ldots,x^{S_{N+h},N+h}(\tau_{N+h})\right)$ *дважды дифференцируема, функции* $f^{ij}(t,x^{ij},u^{ij})$ *дважды дифференцируемы и хотя бы на одном ребре управление* $u_I^{ij}(t)$ *не удовлетворяет условию стационарности* $H_{u^{ij}}^{ij}(t,x_I^{ij}(t),\psi^{ij}(t),u_I^{ij}(t))\equiv 0$ *при* $\alpha=1$. *Тогда алгоритм улучшает управление* $u^I(t)$.

**Заключение.** Таким образом, в работе на основе теории планарных графов с нефиксированными вершинами предложены математические модели, описывающие функционирование сети операторов, и в частности, многоэтапные процессы. На основе таких моделей разработаны приближенные методы решения задачи управления с параметрами на сети операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кротов В.Ф., Гурман В.И.** Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 448 с.
2. **Гурман В.И.** Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука. Физматлит, 1999. 288 с.
3. **Батурин В.А., Урбанович Д.Е.** Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. Новосибирск: Наука, 1997. 172 с.
4. **Батурин В.А., Лемперт А.А.** Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления // Вычислительные технологии, том 8, 2003, с.103-108.
5.**Гурман В.И., Расина И.В., Гусева И.С.** Метод улучшения управления для иерархических моделей сетевой структуры. // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика, №8. 2014, с. 71-95.
6. **Гурман В.И., Расина И.В., Фесько О.В., Гусева И.С.** Методы приближенного решения задач оптимального управления. // Программные системы: теория и приложения, 6:4, 2015, с. 113-137.
7. **Гурман В.И., Расина И.В.** Сети дискретных операторов. // Программные системы: теория и приложения, 7:3, 2016, с. 71-78.
8. **Сизых В.Н., Данеев А.В.** Квазилинеаризация и достаточные условия оптимальности в задаче улучшения и локализации // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18. № 4 (6). С. 1250-1260.
9. **Sizykh V.N., Daneev A.V., Dambaev J.G.** Methodology of Approximately Optimal Synthesis of Fuzzy Controllers for Circuit of Improvement and Localization // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 101. No. 3. Pp. 487-506.

---

**V.A. Baturin** (Institute of Systems Dunamics and Control Theory of Russian Sciences Akademy, Irkutsk), **V.N. Sizykh** (Irkutsk State Railway University, Irkutsk). **Approximate methods of the solution of a optimal control problem on a operators network**

*Abstract.* The mathematical models describing behavor of a operators network, and in particular multi-stage process, rather often meet in practice. In work as authors approximate methods of the control problem solution with parameters on network of operators are proposed. They are based on the methodology developed in works [1-4].

А.А. ТОЛСТИХИН
(Институт динамики систем и теории управления им. Матросова СО РАН, Иркутск)

# РОЕВОЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБСЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ ГРУППОЙ АВТОНОМНЫХ РОБОТОВ

*Обследование морских физических полей с помощью скоординированной группы автономных необитаемых подводных аппаратов является в настоящий момент популярным направлением, поскольку позволяет решать широкий спектр практических и научных задач. Особый интерес представляет обследование нестационарных физических полей, чему и посвящен данный доклад. Для решения данной задачи был предложен ряд модификаций для роевого оптимизационного алгоритма, который за заданное количество итераций позволяет поисковой группе найти источник физического поля.*

**Введение.** Задача обследования физического поля (также известная как задача сбора образцов, или sampling problem) в области подводных исследований имеет в настоящее время высокую актуальность и популярность в работах как отечественных ученых [1], так и иностранных [2]. Это связано с тем, что существует широкий спектр ее прикладных и фундаментальных постановок. Особый интерес вызывает решение этой задачи с помощью скоординированной группы автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) в условиях нестационарности обследуемого физического поля. В данном докладе предлагается стратегия управления группой АНПА, основанная на роевом алгоритме оптимизации, для нахождения источника нестационарного физического поля.

**Стратегия управления.** Физическое поле – это объект, описываемый скалярным математическим полем. На данном этапе исследования обследуемое поле полагается абстрактным, то есть не зависящим от природы его происхождения, и двумерным. Физическое поле может быть образовано одним или несколькими источниками, которые, при этом, являются локальными экстремумами. Нестационарность достигается возможностью источников перемещаться по обследуемой области по заранее неизвестным для группы АНПА траекториям. Тем не менее, значения величины физического поля источников фиксированы и не изменяются во времени.

Учитывая вышесказанное, задача поиска источников сводится к обнаружению таких координат $(x^*, y^*)$ на момент окончания поисковой миссии, в которых функция, описывающая физическое поле, принимает максимальное значение.

$$f(x^*, y^*, T) = \max f(x, y, T), \quad (1)$$

где $T$ – время окончания миссии, определяемое количеством циклов «замер-движение».

Важным ограничением является то, что величина физического поля в некой точке может быть получена только, если АНПА достигнет данных координат и проведет замер. Кроме того, будем полагать, что не существует ограничений на коммуникацию между АНПА и каждый аппарат имеет полную информацию о всех проведенных замерах.

Предложенная стратегия управления группой АНПА заключается в использовании роевого алгоритма оптимизации для динамической генерации траекторий движения группы, которая естественным образом гарантирует сбор аппаратов в окрестности предполагаемого экстремума. В качестве базисного роевого алгоритма был выбран гибрид Whale Optimization Algorithm [3] и Grey Wolf Optimizer [4], тем не менее, все предлагаемые в данной работе модификации применимы и к большинству других популяционных алгоритмов.

***Фазы поисковых итераций.*** Для запуска базисного алгоритма необходимо, в первую очередь, задать количество поисковых итераций (поколений), по истечению которых АНПА должны предоставить приемлемое решение поставленной задачи. Каждая такая итерация состоит из трех фаз:

1. Замер. АНПА измеряет величину физического поля в его текущих координатах и добавляет эту информацию в общий для всей группы массив (массив замеров).
2. Расчет путевой точки. Согласно базисному алгоритму производится расчет координат следующей точки траектории аппарата.
3. Движение. Аппарат перемещается в найденную путевую точку.

Поскольку организация движения АНПА находится на другом уровне системы управления, чем рассматривается в данном докладе, особое внимание будет уделено двум другим фазам.

***Предложенные модификации.*** Основной проблемой, возникающей при обследовании нестационарного физического поля, является устаревание замеров и потеря их актуальности. Для устранения данного недостатка был предложен механизм, основанный на построении трехмерной диаграммы Вороного, где третьим измерением является время, прошедшее со старта миссии.

Диаграмма Вороного – это такое разбиение пространства на подобласти (ячейки), в котором расстояние от любой точки ячейки до заданной точки (сайта) меньше, чем до любого другого сайта. В данном случае сайтами выступают замеры, сделанные агентами в ходе решения задачи. Для предложенного подхода нет необходимости строить и хранить трехмерную диаграмму, достаточно иметь ее двумерный срез в необходимые моменты времени.

Если на данном срезе площадь какой-либо ячейки Вороного оказалась равна нулю, то соответствующий ей сайт удаляется и массива замеров. Кроме того, было предложено ввести коэффициент времени, позволяющий настраивать скорость «забывания». При его значении равном 0, данный процесс отключается, таким образом, рассматриваются все проведенные замеры. При увеличении данного параметра, единовременно рассматривается все меньшее количество замеров, вплоть до замеров, получаемых только на текущей итерации. Данный процесс также позволяет регулировать трудоемкость построения среза диаграммы посредством уменьшения количества известных аппаратам замеров.

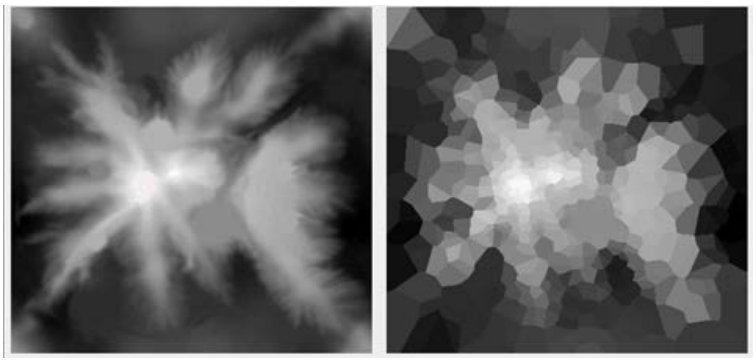


Рис. 1. Сравнение исходного физического поля, представленного картой высот, и диаграммы Вороного

Для стационарных физических полей существует другое применение предложенного подхода. При коэффициенте времени равном 0, срезы диаграммы представляют приближенную карту обследуемой области (рис. 1).

Наконец, срезы диаграммы Вороного могут быть использованы в механизме выбора лидеров стаи (или другом механизме передачи информации между поколениями в популяционных алгоритмах). Обычно приспособленность каждого решения зависит только от целевой функции, в то время как мы предлагаем использовать следующую формулу:

$$F = k_1 \times f(x, y, t) \times k_2 \times s(x, y, t), \quad (2)$$

где: $f(x, y, t)$ – значение величины физического поля в данной точке; $s(x, y, t)$ – площадь ячейки диаграммы Вороного с сайтом в данной точке; $k_1$ и $k_2$ – настраиваемые коэффициенты, позволяющие балансировать между увеличением точности имеющихся решений и обследованием регионов, получивших плохое начальное приближение, но потенциально содержащих экстремум.

**Заключение.** Для оценки влияния предложенных модификаций была проведена серия тестов. Для каждого из трех выбранных физических полей проводилось 50 независимых запусков, целью которых было собрать поисковую группу в точке нахождения источника, генерирующего максимальную величину физического поля (255 единиц). На рис. 2 изображена диаграмма размаха, сравнивающая модифицированный и оригинальный подходы.

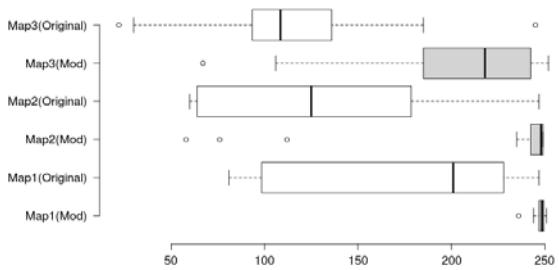



Рис. 2. Сравнение модифицированного (Mod) и оригинального (Original) подходов

Как видно из данной диаграммы, базовый алгоритм не способен с хоть сколько-нибудь прогнозируемой вероятностью найти достаточно хорошее приближение к экстремуму

для нестационарных физических полей. В то же время, только в 15% запусков модифицированного алгоритма источник был найден неверно. В остальных случаях погрешность определения его абсолютной величины составляет в среднем 5-7%.

*Работа проводилась при поддержке гранта РНФ № 16-11-00053.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.В. Киселев, А.В. Медведев. Автоматизированное обследование морских геофизических полей и их аномалий с использованием анпа. Информационное противодействие угрозам терроризма, 2012, № 18. С. 98–103
2. Hrvoic, Doug & Pozza, M. High-resolution magnetic target survey: Harnessing the power of three-axis total-field magnetic gradient. 2004. Vol. 8. P. 6-26.
3. S. Mirjalili, A. Lewis. The Whale Optimization Algorithm. Adv. Eng. Softw. 2016. № 95. P. 51–67.
4. S. Mirjalili, S. Mirjalili, A. Lewis. Grey Wolf Optimizer. Advances in Engineering Software. № 69. P. 46–61.

---

**A.A. Tolstikhin** (Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk). **A swarm optimization approach to the non-stationary physical field survey problem using a group of autonomous underwater vehicles**

*Abstract.* The survey of marine physical fields using a coordinated group of autonomous underwater vehicles is currently a popular direction, since it allows solving a wide range of practical and scientific problems. This report is devoted to the study of nonstationary physical fields. To solve this problem, a number of modifications were proposed for the swarm optimization algorithm, which, for a given number of iterations, allows the search group to find the source of the physical field.

А. Н. СЕРГЕЕНКО
(Санкт-Петербургский государственный университет)

# АЛГОРИТМ ОТСЛЕЖИВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЕТЬЮ МОБИЛЬНЫХ СЕНСОРОВ ТРАЕКТОРИЙ МНОЖЕСТВА ОБЪЕКТОВ

*Рассмотрен распределённый алгоритм обработки данных о местоположении множества целей, полученных сетью сенсоров с учетом топологических ограничений, который накладываются на сеть в связи с особенностями их технической реализации. Представлены результаты моделирования для подтверждения работоспособности алгоритма.*

**Введение.** Отслеживание нескольких целей — это классическая задача в обработке сигналов, которая возникает во многих приложениях, например, при управлении воздушным, морским или дорожным движением [1-4]. Для определения местоположения объекта чаще всего используются сети автономных датчиков благодаря высокой избыточности и реконфигурируемости [5]. Сетевая реализация, однако, делает невозможным использовать классические централизованные подходы к обработке данных, поскольку каждый датчик имеет ограниченные вычислительные возможности и ограниченный доступ к измерениям других датчиков. Помимо топологических ограничений (каждый датчик может взаимодействовать только с несколькими соседними узлами сети), связь между датчиками может быть нарушена, например, из-за задержек в каналах связи и вносимых ими искажениями данных [6]. В этой статье предлагается новый алгоритм для распределенного отслеживания нескольких целей в сенсорной сети с учетом ограничений, описанных выше.

**Постановка задачи.** Пусть существует распределенная сеть, состоящая из $m$ целей и $n$ датчиков слежения за ними (сенсоров). Введем обозначения: $N = \{1,2,\dots,n\}$ – набор всех сенсоров, $d$ – размерность пространства, $\boldsymbol{s}_t^i = [s_t^{i,1},\dots,s_t^{i,d}]^{\mathrm{T}}$ – множество координат сенсора $i$ в момент времени $t$, $M = \{1,2,\dots,m\}$ – набор всех целей, $\boldsymbol{r}_t^l = [r_t^{l,1},\dots,r_t^{l,d}]^{\mathrm{T}}$ – множество координат цели $l$ в момент времени $t$, $\boldsymbol{\theta}_t = \mathrm{col}(\boldsymbol{r}_t^1,\dots,\boldsymbol{r}_t^m)$ – общий вектор состояния всех целей в момент времени $t$. Предположим, что сенсоры могут обмениваться друг с другом информацией о местоположении целей согласно заранее известной топологии сети. $B_t = [b_t^{i,j}]$ – матрица связности в момент времени $t$. Пусть в каждый момент времени $t$ сенсор $i$ измеряет квадрат расстояния $\rho$ только до одной цели $l$. Предположим, что он еще получает квадрат расстояния от $p$ других сенсоров $j_1$, ..., $j_p$ до этой же цели. Стоит отметить, что количество соседей обычно меньше или равно размерности пространства ($p \le d$). Это допущение, которое, с одной стороны, усложняет решение задачи, а, с другой стороны, делает ее более практически ориентированной. Обозначим через $\boldsymbol{u}_t^i = \mathrm{col}(i, j_1, \dots, j_p, l)$ набор соседей, с которыми сенсоер $i$ наблюдает за целью $l$. Необходимо найти такой общий вектор оценок местоположения состояния целей $\widehat{\boldsymbol{\theta}_t} = \mathrm{col}(\hat{\boldsymbol{r}}_t^1,\dots,\hat{\boldsymbol{r}}_t^m)$, который будет практически совпадать с $\boldsymbol{\theta}_t$.

**Алгоритм решения.** Точное местоположение цели $l$ можно выразить следующим образом:

$$C_t^{\boldsymbol{u}_t^i}\boldsymbol{r}_t^{l(\boldsymbol{u}_t^i)} = D_t^{\boldsymbol{u}_t^i} \to C_t^{\boldsymbol{u}_t^i\,\mathrm{T}} C_t^{\boldsymbol{u}_t^i}\boldsymbol{r}_t^{l(\boldsymbol{u}_t^i)} = C_t^{\boldsymbol{u}_t^i\,\mathrm{T}} D_t^{\boldsymbol{u}_t^i} \to I_t^{\boldsymbol{u}_t^i}\boldsymbol{r}_t^{l(\boldsymbol{u}_t^i)} = H_t^{\boldsymbol{u}_t^i} \quad (1)$$

где $I_t^{\boldsymbol{u}_t^i} = [C_t^{\boldsymbol{u}_t^i\,\mathrm{T}} C_t^{\boldsymbol{u}_t^i}]' C_t^{\boldsymbol{u}_t^i\,\mathrm{T}} C_t^{\boldsymbol{u}_t^i}$, $H_t^{\boldsymbol{u}_t^i} = [C_t^{\boldsymbol{u}_t^i\,\mathrm{T}} C_t^{\boldsymbol{u}_t^i}]' C_t^{\boldsymbol{u}_t^i\,\mathrm{T}} D_t^{\boldsymbol{u}_t^i}$, $C_t^{\boldsymbol{u}_t^i} = 2\begin{bmatrix}(\boldsymbol{s}_t^{j_1} - \boldsymbol{s}_t^i)^{\mathrm{T}} \\ \dots \\ (\boldsymbol{s}_t^{j_p} - \boldsymbol{s}_t^i)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$, $D_t^{\boldsymbol{u}_t^i} =$

$\begin{bmatrix}\bar{\rho}_t^1(\boldsymbol{u}_t^i) + \left\|\boldsymbol{s}_t^{j_1}\right\|^2 - \left\|\boldsymbol{s}_t^i\right\|^2 \\ \dots \\ \bar{\rho}_t^p(\boldsymbol{u}_t^i) + \left\|\boldsymbol{s}_t^{j_p}\right\|^2 - \left\|\boldsymbol{s}_t^i\right\|^2\end{bmatrix}$, $\bar{\rho}_t^k(\boldsymbol{u}_t^i) = \rho\left(\boldsymbol{s}_t^i, \boldsymbol{r}_t^{l(\boldsymbol{u}_t^i)}\right) - \rho\left(\boldsymbol{s}_t^{j_k}, \boldsymbol{r}_t^{l(\boldsymbol{u}_t^i)}\right)$, $\rho(\boldsymbol{s}_t^i, \boldsymbol{r}_t^l) = \left\|\boldsymbol{r}_t^l - \boldsymbol{s}_t^i\right\|^2$,

$l(\boldsymbol{u}_t^i)$ – последний элемент вектора $\boldsymbol{u}_t^i$, $^{\mathrm{T}}$ – транспонированная матрица, $'$ – псевдообратная матрица.

Пусть сенсоры получают наблюдения с помехами:

$$y_t^i(\boldsymbol{u}_t^i, \hat{\boldsymbol{r}}_t^{l(\boldsymbol{u}_t^i)}) = \left\| I_t^{\boldsymbol{u}_t^i} \boldsymbol{r}_t^{l(\boldsymbol{u}_t^i)} - H_t^{\boldsymbol{u}_t^i} \right\|^2 + v_t^i = f_t(\boldsymbol{u}_t^i, \hat{\boldsymbol{r}}_t^{l(\boldsymbol{u}_t^i)}) + v_t^i, \quad (2)$$

где $v_t^i$ – неизвестные (но ограниченные по амплитуде) помехи [6], а $\widehat{\ }$ обозначает оценку величины.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, F, P)$, соответствующее произвольному множеству $\Omega$ с σ -алгеброй всех событий $F$ и вероятностной мерой $P$. Обозначим σ-алгебру всех вероятностных событий, которые произошли до времени $t$, как $F_t$. Пусть $E_{F_t}$ – условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $F_{\mathrm{t}}$. Для того, чтобы определить точное местоположение цели, необходимо минимизировать введенную ранее в выражении (2) функцию потерь [7]:

$$\overline{F_t}(\widehat{\boldsymbol{\theta}_t}) = \sum_{i \in N} E_{F_{t-1}} f_t(\boldsymbol{u}_t^i, \hat{\boldsymbol{r}}_t^{l(\boldsymbol{u}_t^i)}) \to \min(\widehat{\boldsymbol{\theta}_t}). \quad (3)$$

Распределенный мультиагентный алгоритм, которым решается задача оптимизации (3), совмещает в себе два подхода, а именно SPSA (simultaneous perturbation stochastic approximation) [8] и LVP (local voting protocol) [9]. Согласно этому алгоритму определение местоположения объекта наблюдения можно произвести по формулам:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{2k}^i = \hat{\theta}_{2k-2}^i + \beta \boldsymbol{e}_{l(\boldsymbol{u}_k^i)} \otimes \Delta_k^i, \;\; \boldsymbol{x}_{2k-1}^i = \hat{\theta}_{2k-2}^i - \beta \boldsymbol{e}_{l(\boldsymbol{u}_k^i)} \otimes \Delta_k^i \\ \hat{\theta}_{2k-1}^i = \hat{\theta}_{2k-2}^i \\ \hat{\theta}_{2k}^i = \hat{\theta}_{2k-1}^i - \alpha[\boldsymbol{e}_{l(\boldsymbol{u}_k^i)} \otimes \Delta_k^i \frac{y_{2k}^i(\boldsymbol{u}_t^i, \boldsymbol{x}_{2k}^i) - y_{2k-1}^i(\boldsymbol{u}_t^i, \boldsymbol{x}_{2k-1}^i)}{2\beta} + \gamma \sum_{j \in \boldsymbol{u}_t^i} b_t^{i,j}(\hat{\theta}_{2k-1}^i - \hat{\theta}_{2k-1}^j)] \end{cases}, \quad (4)$$

где $\alpha, \beta, \gamma$ – параметры алгоритма; $\hat{\theta}_t^i$ – общий вектор оценок состояния всех целей, полученных сенсором $i$; $\{\boldsymbol{x}_t^i\}$ – выбранные оценки местоположения объекта, значения которых определяются с использованием оценок $\hat{\boldsymbol{r}}_t^{l(\boldsymbol{u}_t^i)}$; $\Delta_k^i$ принимает значения $\pm 0{,}5$ согласно распределению Бернулли с вероятностью 0,5; $\boldsymbol{e}_l = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)^{\mathrm{T}}$ – вектор, в котором все элементы нули, кроме $l$ -го ряда, $k$ – шаг алгоритма.

**Моделирование.** Рассмотрим двумерный случай, при котором три сенсора следят за шестью целями, причем в каждый момент времени все сенсоры могут общаться между собой. Рассмотрим помехи трех видов: равномерно распределённая случайная величина, колеблющееся в интервале от -1 до +1, неизвестная константа и поочередные периодические колебания то около +1, то около -1. Параметры в выражении (4) заданы следующими величинами: $\alpha = 0{,}04$; $\beta = 0{,}1$; $\gamma = 1{,}0$. Результат моделирования при таких параметрах представлен на рис.1. Видно, что предложенный алгоритм сходится и ведет себя одинаково для разных типов помех, так как разница между настоящим местоположением цели и оцениваемым уменьшается с течением времени.

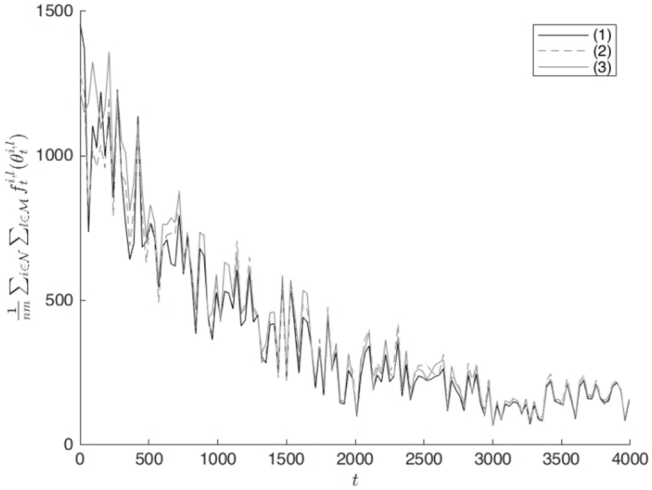



Рис 1. Зависимость усредненных остатков от времени t при трех видах помех:
(1) - равномерно распределённая случайная величина, колеблющееся в интервале от -1 до +1,
(2) - неизвестная константа, (3) - поочередные периодические колебания то около +1, то около -1

**Заключение.** В настоящей работе рассмотрен алгоритм обработки данных о местоположении множества целей, полученных сетью сенсоров с учетом ограничений н тополгию и приведено моделирование, подтверждающее работоспособность этого алгоритма.

*Исследование проводится при поддержке Фонда содействия инновациям по договору №397ГУЦЭС8-D3/56404 от 2019 г.*

ЛИТЕРАТУРА

1. S. S. Blackman. (2004). Multiple hypothesis tracking for multiple target tracking. IEEE Aerospace and Electronic Syst. Mag., vol. 19, no. 1, pp. 5–18.
2. S. Battiato, G. M. Farinella, A. Furnari, G. Puglisi, A. Snijders, and J. Spiekstra. (2015). An integrated system for vehicle tracking and classification. Expert Systems with Applications, vol. 42, no. 21, pp. 7263 – 7275.
3. S. Maresca, P. Braca, J. Horstmann, and R. Grasso. (2014). Maritime surveillance using multiple high-frequency surface-wave radars. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 52, no. 8, pp. 5056–5071.
4. Y. Tesfaye, E. Zemene, A. Prati, P. Marcello, and S. Mubarak. (2019). Multi-target tracking in multiple non-overlapping cameras using fastconstrained dominant sets. Int. J. Computer Vision, vol. 127, pp. 1303–1320.
5. Граничин, О.Н. (2020). Самоорганизация и искусственный интеллект в группе автономных роботов: методология, теория, практика. Стохастическая оптимизация в информатике. № 16/1. — С. 5-12.
6. N. Amelina, V. Erofeeva, O. Granichin, Y. Ivanskiy, Y. Jiang, A. Proskurnikov, and A. Sergeenko. (2020). Consensus-based distributed algorithm for multisensor-multitarget tracking under unknown-butbounded disturbances. Proc. of IFAC World Congress.
7. Erofeeva, V., Granichin, O., Ivanskiy, Y., and Jiang, Y. (2019). Distributed tracking based on simultaneous perturbation stochastic approximation-based consensus algorithm. In Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control, December 10-13, Nice, France. IEEE.
8. Amelina, N., Granichin, O., Granichina, O., and Jiang, Y. (2014). Differentiated consensuses in decentralized load balancing problem with randomized topology, noise, and delays. In 53rd IEEE Conference on Decision and Control, 6969-6974. IEEE.
9. Amelina, N., Fradkov, A., Jiang, Y., and Vergados, D.J. (2015). Approximate consensus in stochastic networks with application to load balancing. IEEE Transactions on Information Theory, 61(4), 1739-1752.

---

**A. N. Sergeenko** (St. Petersburg State University, Saint Petersburg). **Algorithm for tracking the trajectories of a set of objects by a distributed network of mobile sensors.**

*Abstract.* In this paper we apply distributed multiagent algorithm to the problem of multisensory-multitarget tracking. The convergence of the algorithm is illustrated by numerical simulations.

Э.В. МЕЛЬНИК
(Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, г. Ростов-на-Дону)

А.Б. КЛИМЕНКО, В.В. КОРОБКИН
(Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем им. акад. А. В. Каляева ЮФУ, г. Таганрог)

# ОРГАНИЗАЦИЯ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОГО УПРАВЛЕНИЯ В ГРУППАХ МОБИЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

*В статье рассматривается проблема отказоустойчивого управления в группах мобильных краевых устройств с применением методов консенсуса, используемых в современных криптовалютах. Предложены методы и алгоритмы управления с распределённым лидером, в основу которых положены протоколы ViewStamped Replication/Raft. Проведено численное моделирование, на основе результатов которого разработаны рекомендации по применению новых метода и алгоритмов.*

**Введение.** В настоящее время технологии туманных и облачных вычислений, распределённого реестра (DLT), Интернета вещей (IoT) находят применение в широком спектре практических приложений, включая анализ дорожного движения, управление автономными и мобильными роботами и другие.

В части обнаружения неисправностей для групп объектов и мобильных устройств в ряде работ рассмотрены такие вопросы, как:

- обнаружение неисправности конкретного устройства (робота) [1,2];
- обнаружение неисправностей и диагностика в группах устройств (роботов) [3,4];
- обнаружение неисправностей и диагностика в мультиагентных системах [5].

Однако в перечисленных публикациях используется упрощение (мобильное устройство = агент), при этом не учитывается расположение устройств.

В данной работе рассмотрен случай организации отказоустойчивого распределённого управления в группах мобильных устройств на краю сети. Процесс управления включает следующее:

- обнаружение неисправностей;
- восстановление системы путём перемещения функциональных задач.

Новизной предлагаемых решений является применение методов распределённого консенсуса для управления краевыми устройствами, в частности применения методов с избираемым лидером.

**Оценка применения методов консенсуса с избираемым лидером при управлении группами мобильных устройств.** «Стандартные» децентрализованные методы достижения консенсуса [6-8], применяемые в распределённых реестрах, являются ресурсозатратными, например с точки зрения потребления энергии (Proof of Work), для групп мобильных устройств. Поэтому целесообразно применить методы достижения консенсуса с избираемым лидером, как предусмотрено в протоколах ViewStamped Replication и Raft [9, 10].

В данном исследовании предполагается, что основная группа устройств может делиться на подгруппы (локальные группы) в процессе выполнения поставленной задачи. При этом считается, что в пределах локальной группы прямое взаимодействие устройств по сети возможно, а другие устройства участники локальной группы «не видят». Выход устройств из зоны прямой видимости рассматривается, как отказ, из чего следует, что функции отказавшего устройства должны быть переданы кому-то из участников локальной группы. Учитывая, что в алгоритмах с избираемым лидером наряду с лидером существуют ещё ведомые, должны быть реализованы процедуры выбора лидера среди ведомых, в случае его отказа, а также перераспределение функций ведомых лидером, в случае отказа ведомого. Вариант реализации указанных процедур приведён в [11]. Устройства, которые «видят» часть устройств локальной группы, считаются исполнителями и выполняют инструкции лидера или ведомых, такие устройства не участвуют в выборах лидера.

Целостность локальной группы поддерживается контекстными сообщениями «пульс» между лидером и ведомыми, которые позволят лидеру знать местоположение ведомых и понимать, отказали они или вышли из зоны действия сети. При отказе происходит восстановление.

Адаптация процедуры достижения консенсуса с избираемым лидером для группы мобильных устройств в рамках разработанных в исследовании алгоритмов потребовала модификации известных протоколов распределённого консенсуса, включая распределение контекстных данных, восстановление системы и проверку контекстных данных местоположения ведомых.

Разработанные алгоритмы могут быть оценены с точки зрения накладных расходов на информационный обмен. Пусть: $N$ – количество узлов в управляемой группе; $V_i$ – размер информационного сообщения «пульс», включая некоторые контекстные данные, например, информацию о выполняемых действиях, текущие координаты и т.д.; $V_{st}$ – это размер хранилища контекстных данных, который необходим каждому устройству для хранения знаний о ходе решения задачи, состояниях устройств и так далее.

Если система находится в рабочем состоянии, то оценить загрузку сети можно следующим образом:

$$V_{op} = 2V_i(N-1) \quad (1)$$

При фиксации отказа случаи отказа ведомого и отказа лидера должны рассматриваться отдельно.

В случае сбоя ведомого лидер принимает решение о том, какой ведомый будет реализовывать функции отказавшего узла, поэтому нагрузка на сеть будет следующей:

$$V_{ff} = (N-1)V_i \quad (2)$$

В случае отказа лидера выполняется процедура выбора лидера и восстановления системы, поэтому возникает необходимость передачи гораздо больших объёмов данных, включая наиболее полную копию накопленных контекстных данных:

$$V_{lf} = 3N(N-1)V_i + 2(N-1)V_{st} \quad (3)$$

Для сравнения приведём зависимости для случая децентрализованного управления группой устройств без лидера. В ходе нормальной работы нагрузка на сеть следующая:

$$V_{nlo} = N(N-1)V_i \quad (4)$$

В случае возникновения отказа объёмы предаваемых данных в ходе обнаружения отказа и последующего восстановления могут быть оценены следующим образом:

$$V_{nlr} = 4N(N-1)V_i \quad (5)$$

Оценка была произведена со следующими значениями параметров: $N$= 5…120, $V_i$=10 (модельных единиц, м.е.), $V_{st}$=400 (м.е.). Можно заметить, как нагрузка на сеть увеличивается в рамках этапов работы системы для случаев без лидера и с избираемым лидером.

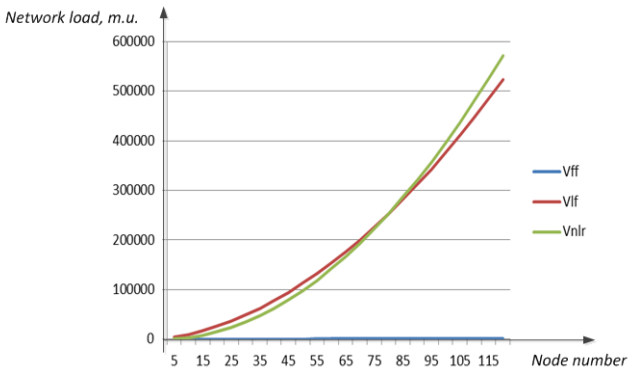



Рис. 1. Нагрузка на сеть при обнаружении отказа и восстановлении в системах с избираемым лидером и без лидера ($V_{ff}$ –отказ ведомого, $V_{lf}$ – отказ лидера, $V_{nlr}$ – без лидера)

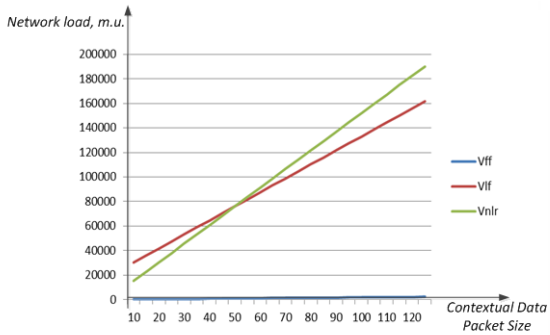



Рис. 2. Нагрузка на сеть при передаче контекстных данных ($V_{ff}$ –отказа ведомого, $V_{lf}$ – отказ лидера, $V_{nlr}$ – без лидера)

Эта оценка включает данные, полученные при обнаружении сбоя и при достижении консенсуса относительно отказавших узлов, а также процедуру принятия решения о том, какой узел берёт на себя функции отказавшего.

**Выводы.** В результате данного исследования можно сделать следующие выводы:

- управление с избираемым лидером эффективно для групп роботов в случае относительно небольшого времени решения поставленной задачи (небольшой размер контекстных данных) и в случае применения надежных устройств, поскольку процедура выбора лидера ресурсозатратна;
- управление без лидера эффективно в случае продолжительного времени решения поставленной задачи группой роботов и в случае относительно небольшого числа роботов в группе.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 18-29-22086.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pettersson O.** Execution monitoring in robotics: A survey. *Robotics and Autonomous Systems*. 2005. Vol. 53. P. 73-88.
2. **Duan Z., Cai Z., Yu J.** Fault diagnosis and fault tolerant control for wheeled mobile robots under unknown environments: A survey. *IEEE International Conference on Robotics and Automation Proceedings*. 2005. P. 3428 – 3433.
3. **Khalastchi E., Kalech M.** Fault Detection and Diagnosis in Multi-Robot Systems: A Survey. *Sensors19*. 2019. P. 4019.
4. **Yan Z., Jouandeau N., Cherif A.A.** A survey and analysis of multi-robot coordination. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2013. Vol. 10. P. 399.
5. **Yang H.et al.** Fault-tolerant cooperative control of multiagent systems: A survey of trends and methodologies. *IEEE Trans. Ind. Informatics*. 2020. Vol. 16. № 1. P. 4-17.
6. **Baird L., Harmon M., Madsen P. Hedera**. A governing council and public hashgraph network - The trust layer of the internet. *Whitepaper*. 2018.
7. **Wright C. S.** Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System, https://fermatslibrary.com/s/bitcoin (дата обращения 2020/06/29).
   **Angelis S. De, Aniello L., Baldoni R., Lombardi F., Margheri A., Sassone V**. PBFT vs proof-of-authority: Applying the CAP theorem to permissioned blockchain. https://pdfs.semanticscholar.org/17b8/4f0e092401b88b2505c145890d1d0db91219.pdf (дата обращения 2020/06/29).
8. **Liskov B., Cowling J.** Viewstamped Replication Revisited. *IEICE Trans. Inf. Syst.* 2012.
9. **Ongaro D., Ousterhout J.** In search of an understandable consensus algorithm. *Proceedings of the 2014 USENIX Annual Technical Conference, USENIX ATC*. 2014. P. 305-320.
10. **Klimenko A.B., Safronenkova I.B.** A Technique of Workload Distribution Based on Parallel Algorithm Structure Ontology. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019. Vol 1046. P. 37-48.

---

**E.V. Melnik** (Federal Research Center The Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don), **A.B. Klimenko, V.V. Korobkin** (Southern Federal University, Scientific Research Institute of multiprocessor computing systems, Taganrog). **The organisation of fault-tolerant control in mobile device groups**

*Abstract.* The problem of fault-tolerant control in mobile edge devices with the use of consensus methods, applying in contemporary cryptocurrency, is presented in a current paper. Control method and algorithms with distributed leader, based on protocols ViewStamped Replication/Raft, were proposed. Computational modeling was performed and recommendations for new method and algorithms were developed.

О.В. БЛИНОВА
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОБИЛЬНЫХ УЗЛОВ СВЯЗИ С ОГРАНИЧЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ДОСТУПА

*В работе рассматривается новый способ позиционирования беспилотных летающих аппаратов, использующихся в качестве точки доступа для обеспечения связью абонентов, перемещающихся по известным траекториям по малонаселенной местности. Для этого используется программное обеспечение, моделирующее движение абонентов и оптимизационный алгоритм, позволяющий находить такие координаты размещения точек доступа, при которых уровень доступа абонентов к сети будет максимальным.*

**Введение.** Одним из современных и очень интересным решением задачи обеспечением связи абонентов или групп абонентов в малонаселенных районах является использование беспилотных летательных аппаратов (БЛА) с закрепленными на них точками доступа к сети связи. Такой способ организации сети рассмотрен в [1,2, 3] и многих других работах. К достоинствам этого метода можно отнести: простоту организации, независимость от рельефа, возможность гибко подстраиваться под изменения маршрута (зависит от способа управления), быстрое развертывание сети, высокую мобильность. Также этот метод имеет и ряд существенных недостатков: в первую очередь это дороговизна устройств, ограниченная грузоподъемность БЛА, ограниченная емкость элементов питания и, как следствие – продолжительности работы, чувствительность к погодным условиям, сложности навигации. Основные способы организации управления беспилотными летательными аппаратами это полное ручное управление действиями БЛА, движение по заранее намеченному маршруту, полуавтоматическое управление, например, автоматические взлет и посадка по команде с наземного пункта, движение за заданной целью, использование интеллектуальных систем управления для выполнения поставленных задач и др. Подробнее способы управления БПА рассмотрены в [4].

**Управление БПА с помощью оптимизационного алгоритма.** В данной работе предложен новый способ управления маршрутами движения БЛА с учетом следующих допущений: количество аппаратов меньше, чем количество абонентов или групп абонентов, для которых необходимо обеспечить связь и их возможностей недостаточно для полного покрытия территории зонами доступа к сети, абоненты движутся по заранее известным маршрутам с известной скоростью или передают об изменениях своего маршрута заблаговременно при наличии связи, БЛА имеют связь с центром управления вне зависимости от своего положения благодаря используемому оборудованию, заранее известны те особенности рельефа, которые могут представлять опасность при движении аппарата (горные хребты и т.п.), минимальна вероятность внезапного появления препятствия, которое может быть опасно для БЛА.

Суть предлагаемого метода управления состоит в использовании специального программного обеспечения, способного моделировать движение абонентов по маршрутам и рассчитывать оптимальные траектории перемещения точек доступа к сети для обеспечения максимально возможного уровня доступа для абонентов исходя из текущего положения всех участников сети связи. Для расчета уровня доступа абонента к сети используется вероятность доступа абонента к каждому из узлов связи, рассчитываемая по следующей формуле:

$$d=\left(x-x^{*}\right)^{2}+\left(y_i-y^{*}\right)^{2},\ p=e^{-d/2R^{2}}, \quad (1)$$

где $x,y$ – координаты абонента, $x^*,y^*$ - координаты точки доступа, $R$ – радиус действия точки доступа, он определяется в зависимости от технических характеристик устройств связи, прикрепленных к БЛА. За уровень доступа абонента к сети принимается суммарное значение вероятностей доступа по каждому из узлов связи. Для каждой из точек доступа все абоненты являются равными по приоритету, направление ее перемещения выбирается исходя из требований по повышению совокупного показателя доступности сети связи для абонентов. Он рассчитывается следующим образом:

$$w = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \ , \qquad (2)$$

где $n$ – это количество точек доступа, $k$ – количество абонентов, $p_{ij}$ – вероятность доступа $j$-того абонента к $i$-й точке доступа. Так же введено дополнительное ограничение, запрещающее БЛА приближаться друг к другу. Это необходимо для обеспечения безопасности техники, а также для более эффективного расположения узлов связи на местности. Рис. 1,2 демонстрируют пример работы программы.

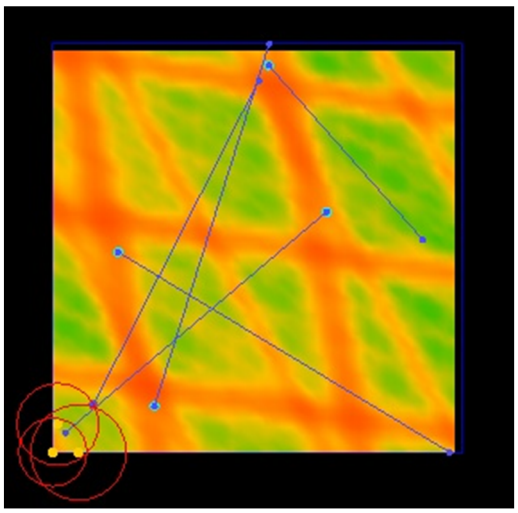


Рис.1. Начало моделирования.

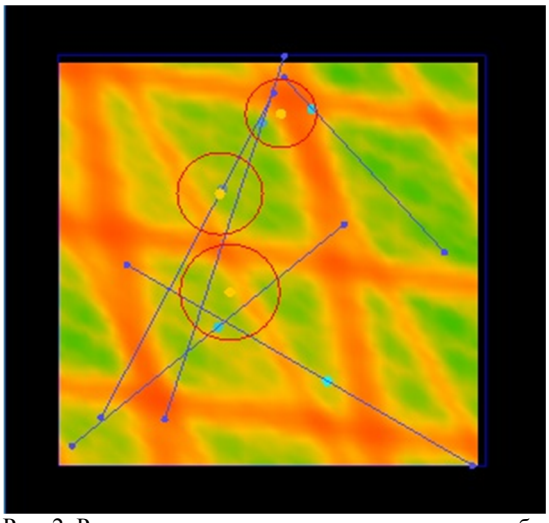


Рис. 2. Расположение точек доступа в процессе работы модели

Траектории движения абонентов обозначены отрезками, абоненты – точками на отрезках, точки доступа – окружностями с точками в центре. Рис. 1 обозначает старт моделирования, рис.2. – спустя некоторое время моделирования. Видно, что точки доступа переместились относительно начального положения для обеспечения максимально возможного уровня доступа к сети. При движении абонентов точки доступа продолжают свое следование к местам, позволяющим обеспечить максимально высокий уровень связи. Учет в системе рельефа местности позволяет выбрать координаты по оси z. После проведения моделирования пользователь получает рекомендуемые маршруты передвижения для узлов связи, прикрепленных к БЛА и сведения об обеспечиваемом уровне связи в любой момент времени для каждого из абонентов. Полученные данные позволяют выбрать моменты для проведения сеансов связи, оценить необходимость привлечения дополнительной техники (можно провести моделирования добавив еще одну точку доступа и проверить целесообразность такого решения) а также принять другие необходимые управляющие решения. Достоинством предложенного метода является простота использования, низкая вычислительная мощность и соответственно высокая скорость работы системы, наглядность интерфейса, возможность гибкой настройки системы под реальные условия (можно вводить дополнительные параметры, такие, как приоритеты абонентов, дополнительные стационарные точки доступа и пр.), отсутствие необходимости в режиме реального времени считывать и обрабатывать информацию с датчиков и камер БЛА. К недостаткам стоит отнести неопределенную точность получаемых результатов, необходимость вручную задавать большое количество исходных данных, невозможность использовать существующие топографические карты для считывания рельефа, отсутствие учета особенностей рельефа при распространении сигнала.

**Заключение.** В докладе предложен новый способ позиционирования БЛА, которые используются для обеспечения доступа к сети связи абонентов, перемещающихся по известным маршрутам. Метод отличается отсутствием необходимости обработки данных с камер и датчиков БЛА, но способен гибко адаптироваться под изменяющиеся условия. Может быть применен для организации сети связи в малонаселенных участках со сложным рельефом. Дальнейшие исследования следует направить на исправление указанных в докладе недостатков и

возможность учитывать большее количество условий и факторов. Полученный программный продукт может быть полезен при организации связи на туристических маршрутах, спасательных работах, проведении различных мероприятий в местах, где обеспечение полного покрытия территории зонами доступа не представляется возможным.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Чертова О.Г., Чиров Д.С.** Построение опорной сети связи на базе малоразмерных беспилотных летательных аппаратов с отсутствием наземной инфраструктуры // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. 2019. №3. С. 60-70.
2. **Мельников А. В., Гайдай В. А., Рогозин Е. А.** Построение оптимальной траектории полета беспилотного летательного аппарата при выполнении задачи поиска //Вестник Воронежского института МВД России. – 2017. – №. 1. С.351-355.
3. **Динь Ч. З., Киричек Р. В.** Подходы к организации мобильных гетерогенных шлюзов на базе беспилотных летательных аппаратов //Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании (АПИНО 2017). – 2017. – С. 260-265.
4. **Иванова И. А., Никонов В. В., Царева А. А.** Способы организации управления беспилотными летательными аппаратами //Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2014. – №. 11-1. – С. 56-63.
5. **Царев Ф.Н.** Совместное применение генетического программирования, конечных автоматов и искусственных нейронных сетей для построения системы управления беспилотным летательным аппаратом // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2008. №53.


---

**O. V. Blinova** (Federal state budgetary institution of science V. A. Trapeznikov Institute of management problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow). **Modeling and research of interaction of mobile communication nodes with a limited number of mobile access points.**

*Abstract.* The paper considers a new method for positioning unmanned aerial vehicles that are used as an access point for providing communication to subscribers moving along known trajectories in a sparsely populated area. To do this, we use software that simulates the movement of subscribers and an optimization algorithm that allows us to find such coordinates of the location of access points, at which the level of access to the network for subscribers will be the maximum.

А. В. ДАВЫДОВ, А. А. ЛАРИОНОВ, Н.В. НАГУЛ
(Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова, Иркутск)

# ПРИМЕНЕНИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПОЗИТИВНО-ОБРАЗОВАННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕБЛОКИРУЮЩЕГО СУПЕРВИЗОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНО-СОБЫТИЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

*Представляемый подход предлагает формализовать автоматную дискретно-событийную систему (ДСС) с помощью позитивно-образованной формулы (ПОФ). Во время вывода получившейся формулы в исчислении ПОФ генерируются порождаемый и маркированный языки ДСС. Та же техника используется для построения параллельной композиции и произведения автоматов. Эти конструкции затем применяются для эффективного решения основных задач супервизорного управления.*

**Введение.** В настоящее время все больше внимания уделяется проблеме управления сложными техническими и технологическими объектами, структура которых не позволяет использовать традиционные подходы. Для описания эволюции таких систем часто используется понятие события, а теория дискретно-событийных систем (ДСС) получила в последние годы широкое развитие. Например, последние публикации о применении ДСС в области робототехники касаются управления отдельными роботами [1], [2], управления группами роботов [3], [4], [5], управления формациями роботов [6] и роевой робототехники [7], [8]. В начале 1980-х для ДСС автоматного типа была предложена теория супервизорного управления (ТСУ) [9]. Несмотря на большое число работ по ТСУ, многие ее вопросы остаются открытыми, прежде всего, ввиду вычислительной сложности алгоритмов при рассмотрении систем большой размерности.

Предлагаемый доклад посвящен оригинальному подходу к решению задачи супервизорного управления ДСС, который основан на применении метода автоматического доказательства теорем в исчислении позитивно-образованных формул (ПОФ). Исчисление ПОФ было представлено в [10, 11] и получило дальнейшее развитие в [12]. Благодаря своим особенностям, исчисление ПОФ позволяет совмещать автоматический поиск логических выводов со специальными эвристиками, настраиваемыми для решаемой задачи. Кроме того, модифицируемость семантики, которая может быть конструктивной, немонотонной или временной, а также способность создавать интуиционистские выводы некоторых формул, не относящихся к хорновым, помогают при решении задач управления динамическими системами.

В докладе обсуждается решение задачи неблокирующего супервизорного управления. Проблема блокирования возникает при рассмотрении маркированных состояний как меток завершения в системе определенных задач, а также при построении модульных супервизоров. Несмотря на существование алгоритмов проверки системы на блокирование, при моделировании больших систем такая проверка становится вычислительно сложной задачей, требующей применения новых методов и подходов.

## ПОФ в супервизорном управлении ДСС.

***Дискретно-событийные системы.*** Самый распространенный и удобный способ представления ДСС - конечные автоматы, которые рассматриваются как генераторы цепочек событий, или слов, образующих так называемый язык описания поведения системы. В [13] была создана теория супервизорного управления для ДСС как генератора формального языка. Пусть $G = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_m)$ – логическая дискретно-событийная система, где $Q$ – множество состояний $q$; $\Sigma$ – множество событий; $\delta\colon\ \Sigma \times Q \to Q$ – функция переходов; $q_0 \in Q$ - начальное состояние; $Q_m \subset Q$ - множество маркированных состояний. Пусть $\Sigma^*$ - замыкание Клини, т.е. множество всех строк над $\Sigma$, включая пустую строку $\varepsilon$. Пусть $L(G)$ обозначает язык, генерируемый $G$: $L(G) = \{w\colon w \in \Sigma^*$ и $\delta(w, q_0)$ определено$\}$, а $L_m(G)$ обозначает язык, маркированный $G$: $L_m(G) = \{w\colon w \in L(G)$ и $\delta(w, q_0) \in Q_m\}$. Маркированный язык, как правило, включает слова, обозначающие завершенные системой задачи.

Пусть $\Sigma_c \subseteq \Sigma$ будет множеством управляемых событий, $\Sigma_{uc} = \Sigma \backslash \Sigma_c$, $\Sigma_c \cap \Sigma_{uc} = \emptyset$. Супервизор как средство управления ДСС способен препятствовать возникновению управляемых событий с целью ограничить поведение системы в некоторых заданных рамках, определяемых регу-

лярным языком, например, $K$. Он может быть построен, например, как пара $J = (S, \phi)$, где $S = (X, \Sigma, \xi, x_0)$ - детерминированный автомат, а $\phi: X \to \Gamma$ - функция, отображающая состояния супервизора $x$ в схемы управления $\gamma \in 2^{\Sigma}$. Обозначим $L(J/G)$ язык, генерируемый ДСС $G$ в присутствии супервизора: $L(J/G) = \{w: w \in \Sigma^*$ и $(\xi \times \delta_c)(w, x, q)$ определено$\}$. Пусть $L_m(J/G)$ обозначает язык, маркированный супервизором: $L_m(J/G) = L(J/G) \cap L_m(G)$. Супервизор называется неблокирующим, если $L(J/G) = \overline{L_m}(J/G)$.

Пусть $\overline{K}$ обозначает множество всех префиксов слов из $K$. Язык называется префиксно-замкнутым, если $K = \overline{K}$. Задача неблокирующего супервизорного управления заключается в построении такого неблокирующего супервизора, что $L_m(J/G) = K$ и $L(J/G) = \overline{K}$. Известно [14], что условием существования решения этой задачи являются управляемость $K$ и его $L_m(G)$-замкнутость, т.е. выполнение равенства $K = \overline{K} \cap L_m(G)$. Язык $K$ управляем (относительно $L(G)$ и $\Sigma_{uc}$) если $\overline{K}\Sigma_{uc} \cap L(G) \subseteq \overline{K}$. Поскольку $L_m(G)$-замкнутость выполнена при естественном выборе $K \subseteq L_m(G)$, для построения супервизора требуется обеспечить выполнение свойства управляемости $K$, в том числе для языков, не являющихся префиксно-замкнутыми. Для этого применяется автоматическое доказательство теорем в исчислении ПОФ.

***Позитивно-образованные формулы.*** Рассмотрим язык первопорядковых логических формул, состоящий из формул, построенных из атомарных формул с помощью связок $\vee, \&, \neg, \to, \leftrightarrow$, кванторов $\forall$ и $\exists$, а также констант *true* и *false*. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ - множество переменных, $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ - множество атомарных формул, называемых конъюнктами, и $\Phi = \{F_1, \dots, F_n\}$ - множество первопорядковых логических формул. Следующие формулы $\forall x_1 \dots \forall x_k (A_1 \& \dots \& A_m) \to (F_1 \vee \dots \vee F_n)$ и $\exists x_1 \dots \exists x_k (A_1 \& \dots \& A_m) \& (F_1 \& \dots \& F_n)$ обозначаются как $\forall x_1, \dots, x_k A_1, \dots, A_m \{F_1, \dots, F_n\}$ и $\exists x_1, \dots, x_k A_1, \dots, A_m \{F_1, \dots, F_n\}$ соответственно. Последние могут быть сокращены следующим образом: $\forall_X A\, \Phi$ и $\exists_X A\, \Phi$ соответственно, учитывая при этом, что $\forall$-квантор соответствует $\to \Phi^{\vee}$, где $\Phi^{\vee}$ обозначает дизъюнкцию всех формул из $\Phi$, а $\exists$-квантор соответствует $\& \Phi^{\&}$, где $\Phi^{\&}$ обозначает конъюнкцию всех формул из $\Phi$. Любое из множеств $X$, $A$, $\Phi$ может быть пустым, в этом случае они могут быть опущены при записи формулы.

В формуле $P = \forall\{F_1, \dots, F_n\}$, $F_i = \exists_{X_i} B_i \{Q_{i1}, \dots, Q_{im}\}$, $i = \overline{1,n}$, называются базовыми подформулами $P$, $B_i$ называются базами фактов или просто базами, $Q_{ij}$ называются подформулами-вопросами, а корни подформул-вопросов - вопросами к базам $B_i$, $i = \overline{1,n}$. Вопрос вида $\forall_X A$ (без каких-либо потомков) называется целевым вопросом.

Определение 1 [Ответ]. Рассмотрим некоторую базовую подформулу $\exists_X A\, \Psi$. Будем говорить, что вопрос подформулы $Q = \forall_Y B\, \Phi$, $Q \in \Psi$ имеет ответ $\theta$ тогда и только тогда, когда θ является подстановкой $Y \to H^{\infty} \cup X$ и $B\theta \subseteq A$, где $H^{\infty}$ - эрбрановский универсум, основанный на константах и функциональных символах, встречающихся в соответствующей базовой подформуле.

Определение 2. Пусть $P_1 = \exists_X A\, \Psi$ и $P_2 = \exists_Y B\, \Phi$, тогда $merge(P_1, P_2) = \exists_{X \cup Y} A \cup B\, \Psi \cup \Phi$.

Определение 3. Рассмотрим некоторую базовую подформулу $B = \exists_X A\, \Psi$. Если подформула-вопрос $Q \in \Psi$ имеет вид $\forall_Y D\ \{P_1, \dots, P_n\}$, где $P_i = \exists_{Z_i} C_i\, \Gamma_i, i = \overline{1,n}$, тогда $split(B, Q) = \{merge(B, P'_1), \dots, merge(B, P'_n)\}$, где $'$ - оператор переименования переменных. Будем говорить, что $Q$ расщепляет $B$, а $split$(B, Q) - результат расщепления $B$. Очевидно, $split(B, \forall_Y D) = \emptyset$.

Определение 4 [Правило вывода $\omega$]. Рассмотрим некоторую формулу $F = \forall\, \Phi$. Если существует базовая подформула $B = \exists_X A\, \Psi$, $B \in \Phi$ и подформула вопрос $Q \in \Psi$, и некоторый вопрос в $Q$ имеет ответ $\theta$, тогда $\omega(F) = \forall\, \Phi \backslash \{B\} \cup split(B, Q\theta)$.

Любая конечная последовательность формул $F, \omega F, \omega^2 F, \dots, \omega^n F$, где $\omega^s F = \omega(\omega^{s-1} F), \omega^1 = \omega, \omega^n F = \forall$, называется выводом F в исчислении ПОФ (с аксиомой $\forall$).

Общая форма ПОФ, моделирующей конечный автомат, имеет базу $B = \{I(S), L(\varepsilon, S), L_m(\varepsilon, S), \delta(S_1^i, \sigma^i, S_2^i), \delta_m(S_1^i, \sigma^i, S_2^i), \Sigma_c(\sigma^j), \Sigma_{uc}(\sigma^j)\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$, где $n$ – число переходов, $k$ – число событий, и два вопроса, как показано в формуле (1):

$$\exists B \begin{cases} \forall \sigma, s, \sigma', s'\ \ L(\sigma, S), \delta(s, \sigma', s') - \exists L(\sigma \cdot \sigma', s') \\ \forall \sigma, s, \sigma', s'\ \ L(\sigma, S), \delta_m(s, \sigma', s') - \exists L_m(\sigma \cdot \sigma', s') \end{cases} \quad (1)$$

Применяя правила вывода к этой ПОФ, слова языков, генерируемого и маркированного автоматом, будут построены как первые аргументы атомов $L(s,S)$, $L_m(s,S)$ в базе.

***Построение супервизора.*** Покажем, как с помощью логического вывода в исчислении ПОФ на основе автоматов $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, генерирующих $K$ и $L_m(G)$, может быть построен наибольший управляемый подъязык $K^{\uparrow C}$ спецификации $K$ во время проверки ее управляемости. Пусть база ПОФ $F$ содержит предикатное описание переходов of $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$, а вопросы к базе $F$ будут такими, как показано ниже.

$Q_1$: $\forall s_1, s_2, p_1, p_2, \sigma\ I_1(s_1), I_3(p_1), \delta_1(s_1,\sigma,s_2), \delta_3(p_1,\sigma,p_2) - \exists\ N(s_1,p_1)$
$Q_2$: $\forall s_1, s_2, p_1, \sigma\ N(s_1,p_1), \delta_1(s_1,\sigma,s_2), E_{uc}(\sigma) - \exists\ Chk(p_1,\sigma,0)$
$Q_3$: $\forall p_1, p_2, \sigma\ Chk^*(p_1,\sigma,0), \delta_3(p_1,\sigma,p_2) - \exists\ Chk(p_1,\sigma,1)$
$Q_4$: $\forall p_1, \sigma\ Chk(p_1,\sigma,0) - \exists\ Del(p_1)$
$Q_5$: $\forall s_1, s_2, p_1, p_2, \sigma\ N(s_1,p_1), \delta_1(s_1,\sigma,s_2), \delta_3(p_1,\sigma,p_2) - \exists\ N(s_2,p_2)$
$Q_6$: $\forall p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, \sigma\ Del(p_{11}\cdot p_{12}), \delta_2^*(p_{12},\sigma,p_{22}), \delta_3^*(p_{11}\cdot p_{12},\sigma,p_{21}\cdot p_{22}) - \exists\, T(p_{12},\sigma,p_{22})$
$Q_7$: $\forall p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, \sigma\ Del(p_{21}\cdot p_{22}), \delta_2^*(p_{12},\sigma,p_{22}), \delta_3^*(p_{11}\cdot p_{12},\sigma,p_{21}\cdot p_{22}) - \exists\, T(p_{12},\sigma,p_{22})$

Чтобы построить наибольший управляемый подъязык в $K$, мы используем следующую стратегию. Вывод строится путем проверки применимости правила вывода к вопросам в порядке от $Q_1$ до $Q_7$. Правила $Q_1$ - $Q_5$ проверяют, является ли спецификация управляемой или нет. Правила $Q_6$, $Q_7$ удаляют переходы, связанные с состоянием, в котором происходит событие, нарушающее условие управляемости. Если при применении правил $Q_1$ - $Q_5$ был найден ответ на вопрос $Q_4$, то в базу добавляется атом $Del()$, обозначающий неуправляемость $K$. Затем мы применяем правила $Q_6$, $Q_7$, игнорируя правила из $Q_1$ - $Q_5$, пока возможные замены для применения правила вывода к $Q_6$ и $Q_7$. Далее процесс повторяется до тех пор, пока вывод не остановится, исчерпав все возможные замены. Заметим, что данный подход позволяет рассматривать в том числе языки, не являющиеся префиксно-замкнутыми.

На основе построенного языка $K^{\uparrow C}$, принятого за новую спецификацию, может быть построен супервизор, реализующий построенные ограничения. Показано [14], что в качестве такого супервизора может быть использован автомат, распознающий $K^{\uparrow C}$. Для построения языков, описывающих функционирование системы под управлением супервизора, используется ПОФ общего вида (2):

$$\exists B, B_S \begin{cases} \forall \sigma, s, \sigma', s'\ L(\sigma,S), \delta_1(s,\sigma',s'), \delta_2(s,\sigma',s') - \exists L(\sigma\cdot\sigma',s') \\ \forall \sigma, s, \sigma', s'\ L_m(\sigma,S), \delta_1^m(s,\sigma',s'), \delta_2^m(s,\sigma',s') - \exists L_m(\sigma\cdot\sigma',s'), \end{cases} \quad (2)$$

где базы $B$ и $B_S$ содержат атомы описания переходов системы и супервизора, $\delta_1$, $\delta_1^m$ отвечает переходам автомата системы, а $\delta_2$, $\delta_2^m$– переходам супервизора.

**Заключение.** Выше мы описали подход к представлению конечных автоматов, лежащих в основе теории супервизорного управления ДСС, с использованием логических формул первого порядка языка ПОФ. Предложен метод построения в процессе конструктивного вывода ПОФ наибольшего управляемого подъязыка спецификации на поведение ДСС. Знания, накопленные в базе ПОФ в процессе логического вывода, могут быть использованы для решения различных задач ТСУ, включая модификацию спецификаций, рациональный выбор управляемых и наблюдаемых событий и редукцию супервизоров. Дальнейшая работа предполагает исследование модульных и частично наблюдаемых ДСС, построение децентрализованных супервизоров и реализацию временной логики для ТСУ с помощью исчисления ПОФ. Полученные результаты будут встроены на разные уровни иерархической системы управления мобильными роботами.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 20-07-00397а*

ЛИТЕРАТУРА

1. Jayasiri A., Mann G., Gosine R. Behavior coordination of mobile robotics using supervisory control of fuzzy discrete event systems, 2011 IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics). 2011. Vol. 41. P. 1224–1238.
2. Torrico C.R., Leal A.B., Watanabe A.T. Modeling and Supervisory Control of Mobile Robots: A Case of a Sumo Robot. IFAC-Papers OnLine. 2016. Vol. 49. P. 240–245.

3. Dai X., Jiang L., Zhao Y. Cooperative exploration based on supervisory control of multi-robot systems. Applied Intelligence. 2016. Vol. 45 P. 18–29.
4. Tsalatsanis A., Yalcin A., Valavanis K.P. Dynamic task allocation in cooperative robot teams. Robotica. 2012. Vol. 30. P. 721-730.
5. Hill R.C., Lafortune S. Scaling the formal synthesis of supervisory control software for multiple robot systems. 2017 American Control Conference (ACC). 2017. P. 3840–3847.
6. Gamage G.W., Mann G.K.I., Gosine R.G. Proceedings of the 2009 IEEE RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS 09. 2009. P. 4831–4836.
7. Lopes Y.K., Trenkwalder S.M., Leal A.B., Dodd T.J., and Groß R. Supervisory control theory applied to swarm robotics. Swarm Intelligence. 2016. Vol. 10. P. 65–97.
8. Mendiburu F.J., Morais M.R.A., Lima A. Behavior coordination in multi-robot systems. IEEE International Conference on Automatica (ICA-ACCA) Oct. 2016. 2016. P. 1 – 7.
9. Ramadge P.J., Wonham W.M. Supervisory control of a class of discrete event processes. SIAM Journal on Control and Optimization 1987. Vol. 25. P. 206–230.
10. Vassilyev S.N. The Journal of Logic Programming. 1990. Vol. 9. P. 235–266.
11. **Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федунов Е.А., Федосов Б.Е.** Интеллектное управление динамическими системами. Москва: Физматлит, 2000. 352 с.
12. Davydov A., Larionov A., Cherkashin E. Automatic Control and Computer Sciences. 2011. Vol. 45. P. 402–407.
13. Ramadge P.J., Wonham W.M. Supervisory control of a class of discrete event processes. SIAM Journal on Control and Optimization 1987. Vol. 25. P. 206–230.
14. Cassandras C.G., Lafortune S. Introduction to Discrete Event Systems. Springer US, 2008. 782 pp.

**A.V.Davydov, A.A.Larionov, N.V.Nagul** (ISDCT SB RAS, Irkutsk). **Application of the calculus of positively-constructed formulas for solving the problem of nonblocking supervisory control of discrete event systems**

*Abstract.* The paper presents an approach to formalization an automata-based discrete-event system (DES) using a positively-constructed formula (PCF). During inference in the PCF calculus, the generated and marked languages of the DES are obtained. The same technique is used to construct parallel composition and production of automata. These constructs are then applied to efficiently solve basic supervisory control problems.

Р. П. АГАЕВ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Работа посвящена асимптотическому поведению многоагентных систем второго порядка. Изучаются протоколы второго порядка для согласования характеристик и сходимости траекторий агентов к заданной конфигурации. Доказано, что асимптотическое поведение системы второго порядка однозначно определяется собственным проектором Лапласовской матрицы орграфа связей. Представленный протокол и соответствующее ему выражение для асимптотического поведения являются обобщениями других известных протоколов второго порядка.*

**Введение.** Многагентным системам (МАС) второго порядка за последние годы посвящен ряд известных работ [1-4]. Если в [1] рассматривается обычная задача консенсуса с протоколом второго порядка, то протоколы для сходимости к заданной конфигурации имеют более сложное выражение и их асимптотическое поведение представляет большой интерес. Настоящая работа посвящена исследованию асимптотического поведения группы движущихся объектов в многоагентных системах второго порядка. Выбирая определенный порядок характеристик (позиций и скоростей) протокол второго порядка был представлен таким образом, что его выражение для асимптотического поведения приобрело более универсальный вид и ряд других протоколов получается из него как частный случай.

Ключевым инструментом исследования является собственный проектор лапласовской матрицы орграфа связей, который ранее был применен для анализа асимптотического свойства протоколов первого порядка и регуляризации протоколов консенсуса с кратными нулевыми собственными значениями лапласиана.

**Некоторые определения и предварительные результаты.** Лапласовская матрица $L = (l_{ij})$ взвешенного орграфа $G = (V, E)$ определяется следующим образом: $l_{ij} = -w_{ji}$ и $l_{ii} = \sum_{j \neq i} l_{ij}$, где $w_{ij}$ – вес дуги $(i, j)$.

Для квадратной матрицы $A$ через $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$ обозначим ее образ и ядро, соответственно. Пусть $\nu = \operatorname{ind} A$ *индекс* матрицы $A$, т.е., наименьшее число $\nu \in \{0, \dots, n, \}$, для которого имеет место $\operatorname{rank}(A^{\nu+1}) = \operatorname{rank}(A^{\nu})$ ($A_0 = I$, где $I$ – единичная матрица порядка $n$).

Собственный проектор $A^{\vdash}$матрицы $A$ для нулевого собственного значения (или просто собственный проектор $A$) – это идемпотентная матрица, для которой выполняются соотношения $\mathcal{R}(A^{\vdash}) = \mathcal{N}(A^{\nu})$ и $\mathcal{N}(A^{\vdash}) = \mathcal{R}(A^{\nu})$.

Рассмотрим базовую дифференциальную модель консенсуса первого порядка:

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\left(x_i(t) - x_j(t)\right), \tag{1}$$

где $x(t) = \left(x_1(t), \cdots, x_n(t)\right)^T$ – характеристики агентов; $A = (a_{ij})$ – матрица влияний. $a_{ij} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(j, i)$ является дугой в орграфе влияний (связей).

Систему (1) можно записать в матричной форме как

$$\dot{x}(t) = -L(t)x(t), \tag{2}$$

где $L(t)$ – лапласовская матрица орграфа влияний.

Рассмотрим протокол консенсуса второго порядка [1]

$$\dot{\xi}_i = \zeta_i, \;\; \dot{\zeta}_i = u_i,$$
$$u_i = -\sum_{j=1} a_{ij}\left[\left(\xi_i - \xi_j\right) + \gamma\left(\zeta_i - \zeta_j\right)\right], \tag{3}$$

где $\zeta_i$ и $\dot{\zeta}_i = u_i$ – *состояние и скорость изменения состояния* агента $i$, соответственно, а $u_i$ – управление с фактором масштабирования (scaling factor) $\gamma$.

Протокол консенсуса (3) в матричном виде запишем как

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}(t)\\ \dot{\zeta}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0_{n\times n} & I_n\\ -L & -\gamma L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \zeta(t)\end{bmatrix}. \quad (4)$$

Цель протокола (4) - обеспечить $|\xi_i(t) - \xi_j(t)| \to 0$ и $|\zeta_i(t) - \zeta_j(t)| \to 0$ при $t \to \infty$.

**Утверждение 1.** 1) [5] *Если* $x(t)$ *есть решение системы* (1), *то*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-Lt}x(0) = L^{\vdash}x(0). \quad (5)$$

2) [6] Если $(\xi(t),\ \zeta(t))^T$ *является решением* (5), *то для достаточно большего значения t выполнится*

$$\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \zeta(t)\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix} \otimes L^{\vdash}\begin{bmatrix}\xi(0)\\ \zeta(0)\end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $\otimes$ обозначает произведение Кронекера.

**Основные результаты.**

***1. Выражение для собственного проектора.*** В доказательстве утверждения 2 используется следующая лемма.

**Лемма 1**. *Если* $J_L$ *– Жорданова форма лапласовской матрицы L, т.е.* $J_L = T^{-1}LT$, *то собственный проектор* $L^{\vdash}$ *можно вычислить следующей формулой,*

$$L^{\vdash} = TD_0T^{-1},$$

*где* $D_0 = (d_{ij})$ *- диагональная матрица и* $d_{ii} = 1$ *тогда и только тогда, когда соответствующий элемент матрицы* $J_L$ *равен нулю*.

**Доказательство.** Известно, что

$$L^{\vdash} = \lim_{n\to\infty} e^{-Lt}.$$

Тогда $L^{\vdash} = \lim_{n\to\infty} e^{-TJ_LT^{-1}t} = T\lim_{n\to\infty} e^{-J_Lt}\,T^{-1} = T\,D_0T^{-1}$.

***2. Асимптотика МАС второго порядка с протоколом для сходимости к заданной конфигурации.*** Пусть $\zeta_i$ и $\dot{\zeta}_i = u_i$ *– вектора положений и скоростей* агента $i$ в $\mathbb{R}^d$, соответственно. Для всех $n$ агентов пусть [3,4]

$$z = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \left(\xi_i \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \zeta_i \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

где $e_i \in \mathbb{R}^n$ вектор столбец с единственной единицей в $i$-й позиции. Также пусть $h \in \mathbb{R}^{2dn}$ - вектор конфигурации, определяющий форму движения агентов:

$$h = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes h_i \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

где $h_i \in \mathbb{R}^{2d}$ определяет положение -го агента.

Рассмотрим линейную модель МАС второго порядка [3].

$$\dot{y} = (I_n \otimes A)y + (L \otimes K)y, \quad (7)$$

где $y = z - h - \mathbf{1_n}\otimes\alpha$, (см., 4.2 в [6]), $I_n$ единичная матрица порядка $n$, $L$ – лапласовская матрица системы, $K$ – матрица управления порядка $2d$, $A$ – матрица порядка $2d$:

$$A = I_d \otimes \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix};\quad K = I_d \otimes \begin{pmatrix}0 & 0\\ f & g\end{pmatrix}.$$

**Утверждение 2.** *Пусть матрицы A и K выбраны так, что система* (7) *устойчива (агенты сходятся к заданной конфигурации). Тогда для достаточно большего значения t имеет место*

$$y(t) \approx L^{\vdash} \otimes e^{At}y(0). \quad (8)$$

Отметим, что протокол (7) для МАС второго порядка является более общим по сравнению с протоколом (4). Но, асимптотическое поведение (6) системы (4) непосредственно не следует из (8).

Для линейной модели (7) в $d$-мерном пространстве с $n$ агентами переупорядочим параметры следующим образом: пусть первые $d$ координат вектора представляют положения первого агента, вторая группа $d$ координат представляет положения второго агента и т.п., вторая поло-

вина координат указывает скорости агентов тем же порядком, что первая половина координат. Например, в трехмерном пространстве МАС с тремя агентами имеет следующий вектор состояний (положений и скоростей):

$$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3)^T.$$

При такой нумерации МАС второго порядка для группы агентов, движущихся по заданной конфигурации, соответствующий протокол будет иметь следующей вид:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ fL & gL + aI_n \end{pmatrix} \otimes I_d y. \quad (9)$$

Очевидно, спектр системы (9) состоит из трех наборов системы $\begin{pmatrix} O_n & I_n \\ fL & gL + aI_n \end{pmatrix}$.

Заметим, что протокол (6) является частным случаем (9), если положить $f = -1, a = 0, d = 1$.

**Утверждение 3.** *Пусть параметры* $f, g$ и $a$ *выбраны так, что система* (9) *является устойчивой (агенты сходятся к заданной конфигурации). Тогда для достаточно большего* $t$ *имеет место*

$$y(t) \approx (e^{At} \otimes L^{\vdash} \otimes I_d) y(0), \quad (10)$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

**Следствие из утверждения 3.** Выражение (6) является частным случаем (10), если положить $a = 0,\ d = 1$.

Доказательство следствия получается из тождества

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Заключение.** В работе мы исследовали асимптотическое поведение многоагентной системы второго порядка для сходимости к заданной конфигурации. Для более простых протоколов было известно, что консенсус определяется собственным вектором нулевого собственного значения лапласовской матрицы орграфа связей. В [6] этот результат был распространен на более общие протоколы, и было доказано, что в многоагентных системах второго порядка асимптотическое поведение системы также определяется собственным проектором лапласовской матрицы. Многоагентные системы второго порядка для группы движущихся агентов имеют более сложную математическую модель. В работе для приведенного протокола второго порядка было получено явное выражение, описывающее асимптотическое поведение системы. Такое представление протокола и выражение для асимптотического поведения являются более общими и из них непосредственно следует результаты для МАС второго порядка более простого вида. Полученные результаты позволяют реализовать различные протоколы второго порядка единым алгоритмом.

*Исследование асимптотики модели консенсуса второго порядка проведено при поддержке гранта Российского научного фонда № 19-19-00673, предоставленного ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. Выражения для собственного проектора лапласиана получены при частичной поддержке программы президиума РАН №30 "Теория и технологии много-уровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации".*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ren W. and Atkins E. Distributed Multi-Vehicle Coordinated Control via Local Information Exchangeю *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2007. Vol. 17. № 10-11. P. 1002-1033.
2. Olfati-Saber R. Flocking for Multi-agent Dynamic Systems: Algorithms and Theory. *IEEE Transact.Autom. Control.* 2006. Vol. 51. № 3. P. 401-420.
3. Veerman J. J. P., Lafferriere G., Caughman J. S., and Williams A. Flocks and formations. *Journal of Statistical Physics.* 2005. Vol. 121. № 5-6. P. 901-936.
4. Lafferriere G., Williams A., Caughman J., and Veerman J.J.P. Decentralized control of vehicle formations. *Systems & control letters.* 2005. Vol. 54. № 9. P. 899-910.
5. Chebotarev P. and Agaev R. The forest consensus theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2014. Vol. 59, № 9. P. 2475-2479.
6. Agaev R.P. On the Role of the Eigenprojector of the Laplacian Matrix for Reaching Consensus in Multiagent Second-Order Systems. *Automation and Remote Control*. 2019. Vol. 80. №11. P. 2033-2042.

**R.P. Agaev** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow). **Asymptotic behavior of second-order multiagent systems**

*Abstract.* The article is devoted to the asymptotic behavior of second-order multiagent systems. Second-order protocols for consensus and convergence of agent's trajectories to a given configuration are investigated. It is proved that the asymptotic behavior of the second-order system is uniquely determined by the eigenprojection of the Laplacian matrix of the communication digraph. The presented protocol and the corresponding expression for the asymptotic behavior are generalizations of the protocols of a more particular case.

## Секция 3

## ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЙ ПРИРОДЫ

А. А. ЧЕНЦОВ, А. Г. ЧЕНЦОВ
(Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург)

А. Н. СЕСЕКИН
(Уральский федеральный университет, Екатеринбург)

# ОПТИМАЛЬНАЯ МАРШРУТИЗАЦИЯ В ЗАДАЧЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ФУНКЦИЯМИ ЗАТРАТ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СПИСКА ЗАДАНИЙ

*Рассматривается задача маршрутизации с ограничениями и функциями стоимости, зависящими от списка заданий. Такая постановка мотивирована прикладными задачами, возникающими в атомной энергетике и машиностроении. Обсуждается вопрос о применении варианта метода динамического программирования для решения данной задачи.*

**Введение.** Элементы маршрутизации возникают в различных областях человеческой деятельности. В докладе рассматривается постановка, ориентированная на применение в задачах атомной энергетики, связанных со снижением дозовой нагрузки исполнителей при проведении комплекса работ в условиях повышенной радиации. Данная постановка может быть связана с действиями исполнителей при авариях, подобных Чернобылю и Фукусиме; другой вариант касается задачи демонтажа энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации. В обоих случаях речь идет о последовательном «выключении» источников излучения, а это предполагает маршрутизацию перемещений и самих выполняемых работ. В связи с упомянутыми инженерными задачами отметим монографии [1,2].

**Особенности рассматриваемой задачи и метод динамического программирования.** Имея в виду задачу о снижении дозовой нагрузки, отметим, что речь идет о суммарной дозе, получаемой работником, что приводит к постановке с аддитивным критерием, причем стоимости выполняемых работ и связанных с ними перемещений типично зависят от списка заданий, не выполненных на текущий момент: «светят» те и только те источники, которые не были демонтированы на данный момент. Эта особенность осложняет постановку в сравнении с задачей коммивояжера (TSP), которая является естественным прототипом рассматриваемой прикладной (по смыслу) задачи маршрутизации (в связи с исследованием TSP и задач типа TSP см. [6-13]). В настоящей работе используется подход [13-17], в основе которого находится широко понимаемое динамическое программирование (ДП) в реализации, являющейся развитием схемы [10].

Предполагается, что объектами посещения и выполнения работ являются непустые конечные множества – мегаполисы (с посещением мегаполисов связывается выполнение «внутренних» работ). Исследователь выбирает точку старта, очередность посещений (маршрут) и конкретную траекторию процесса, имея целью минимизацию аддитивного критерия, определяе-

мого суммарной дозой радиации. По постановке допускается, что выбор маршрута стеснен условиями предшествования (см. [9,13-17]). Это, в частности, может быть связано с тем, что одни излучающие источники располагаются с опорой на другие, что мотивирует их более раннюю разборку (демонтаж). Возможны и другие варианты условий предшествования.

В качестве замечания отметим, что подобные постановки возникают и в других инженерных задачах. В частности, элементы маршрутизации с условиями предшествования играют [3-5] существенную роль в задаче управления инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ.

Особенностью используемого метода решения является активное применение вышеупомянутых условий предшествования, реально присутствующих в инженерных задачах, в интересах снижения вычислительной сложности, что связывается с построением специального расширения исходной задачи, при котором допустимость по предшествованию заменяется допустимостью по вычеркиванию заданий из списка. В рамках данного расширения построение всего массива значений функции Беллмана удается заменить построением системы слоев этой функции, что позволяет, в частности, экономить ресурсы памяти вычислителя. Тем самым реализуется экономичный вариант ДП (см. [13-17]).

Для задач маршрутизации, имеющих большую размерность, применения аппарата ДП возможны в локальных версиях, использующих оптимизирующие вставки, мультивставки, а также итерационные процедуры с перестраиваемыми вставками. При этом фрагменты улучшаемых эвристик имеют умеренную размерность, что позволяет использовать аппарат ДП (см. [18-20] и др.) для оптимизации упомянутых фрагментов исходного эвристического решения (последнее должно быть допустимым и может, в частности, определяться на основе жадного алгоритма). При переходе к оптимизации «в окне» (либо «в окнах») принципиально согласование глобальных и локальных условий предшествования, а также согласование функций стоимости для вставок с исходными функциями стоимости «большой» задачи в части зависимости от списка заданий. Упомянутое согласование реализовано в рамках алгоритмов для ПЭВМ и МВС. Таким образом, ДП может использоваться для улучшения качества эвристик в задачах большой размерности.

В связи с упомянутыми соображениями о роли ДП в задачах маршрутизации, ниже излагается общая схема решения задачи последовательного обхода непустых конечных множеств (мегаполисов) с применением ДП.

**Основные этапы решения по методу ДП (алгоритм на функциональном уровне).**

1) Построение модели, включая определение множества возможных точек старта, системы мегаполисов, множества (адресных) пар индексов для формирования условий предшествования, вычисление массивов значений стоимостей внешних перемещений, внутренних работ (связанных с посещением мегаполисов) и терминального состояния; в задаче демонтажа радиоактивных источников последний этап является весьма трудоемким в связи с определением зависимостей, характеризующих потенциально возможные дозы радиации для различных вариантов перемещений и внутренних работ.
2) Расширение исходной (полной) задачи до системы частичных (укороченных) подзадач с заменой допустимости маршрутов по предшествованию допустимостью по вычеркиванию заданий из списка.
3) Последовательное построение существенных в смысле условий предшествования списков заданий, слоев пространства позиций и, на этой основе, слоев функции Беллмана посредством попятной рекуррентной процедуры. На этом этапе возможны следующие два варианта упомянутой процедуры:

   3’) вариант, обеспечивающий нахождение глобального экстремума и оптимальной точки старта, при котором в памяти вычислителя находится всякий раз только один слой функции Беллмана;

   3”) вариант, при котором сохраняются все слои функции Беллмана и пригодный для последующего построения оптимального решения.
4) Использование слоев функции Беллмана, найденных на этапе 3’), построение оптимального решения, включая нахождение точки старта, маршрута (перестановки индексов) и конкретной траектории.

**Заключение.** Для задач маршрутной оптимизации с ограничениями в виде условий предшествования и усложненными функциями стоимостей, зависящими от списка невыполненных к текущему моменту заданий, предложен вариант метода ДП для определения глобального экстремума и построения оптимального решения, включая выбор точки старта, очередности выполняемых заданий и построения конкретной траектории процесса. Возможен вариант решения, при котором (с некоторой экономией ресурсов памяти вычислителя) определяются только экстремум и оптимальная точка старта, что может потом использоваться для тестирования эвристик при решении задач ощутимой размерности. В применяемых конструкциях на основе ДП важную роль играют условия предшествования, которые удается использовать «в положительном направлении» в смысле снижения вычислительной сложности. При этом построение всего массива значений функции Беллмана заменяется построением системы ее слоев. Для задач высокой размерности, когда вычислительная реализация метода ДП на современных ЭВМ становится проблематичной, обсуждается вариант его применения для целей локальной оптимизации (оптимизация в «окнах»).

*(Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 19-01-00573*)

ЛИТЕРАТУРА


1. **Коробкин В.В., Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Ченцов А.Г.** Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций. М.: Новые технологии, 2012, 234 с.
2. **Ташлыков О.Л.** Дозовые затраты персонала в атомной энергетике. Анализ. Пути снижения. Оптимизация. Изд. LAP LAMBERT. 2011. 232 с.
3. **Chentsov A.G., Chentsov P.A., Petunin A.A., Sesekin A.N**. Model of megalopolises in the tool path optimization for CNC plate cutting machines // International Journal of Production Research, 2018. Vol. 56, Issue 14. pp. 4819-4830.
4. **Петунин А.А**. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика, 2009. Т. 13, № 2 (35). С. 280--286.
5. **Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D.** An Improvement Heuristic Framework for the Laser Cutting Tool Path Problem // International Journal of Production Research. 2015. Vol. 53 (6). pp. 1761–1776.
6. **Gutin G., Punnen A.P.** The Traveling Salesman problem and its variations. Berlin: Springer, 2002. 850 p.
7. **Cook W. J.** In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation. Princeton University Press, 2012. 228 p.
8. **Гимади Э.Х., Хачай М.Ю.** Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ. 2016. 216 с.
9. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х**. Задача коммивояжера. // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3—34, . № 10. С.3—29, № 11. С. 3--26.
10. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т.9. С. 219--228.
11. **Хелд М., Карп Р.М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир. 1964. Т. 9. С. 202--218.
12. **Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К**. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т.1 (Вып. 1) С. 94-107.
13. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 238~с.
14. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Сесекин А.Н.** Задачи маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат. М.: URSS. 2020. 232 с.
15. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Динамическое программирование в задаче маршрутизации с ограничениями и стоимостями, зависящими от списка заданий // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 1. С. 20-23.
16. **Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 96–117.
17. **Ченцов А.Г.** Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования //Автоматика и телемеханика, 2014. № 4. С. 170--190.
18. **Ченцов А.**Г. Беллмановские вставки в задаче маршрутизации с ограничениями и усложненными функциями стоимости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Т.24. Вып. 4. С. 122-141.
19. **Ченцов А.**Г. Оптимизирующие вставки в задачах маршрутизации и их реализация на основе динамического программирования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т.26. Вып. 4. С. 565-578.
20. **Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Об одной задаче маршрутизации перемещений инструмента при листовой резке деталей // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 2. С. 278--294.

**A.A. Chentsov, A.G. Chentsov**, (N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics. UB RAS, Yekaterinburg), **A.N.Sesekin** (Ural Federal University, Yekaterinburg). **Optimal routing in a problem with constraints and cost functions depending on the task list**

*Abstract.* A routing problem with constraints and cost functions depending on the list of tasks is considered. This statement is motivated by applied problems arising in nuclear power and mechanical engineering. The question of using a version of the dynamic programming method for such a problem is discussed.

В. Д. СЕКЕРИН, А.Е. ГОРОХОВА, Т.С. ЗАЙЦЕВА
(ИПУ РАН, Москва)

И. А. ЗАЙЦЕВ
(Технологический университет, Королев)

# МЕТОД ОЦЕНКИ ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ

*В статье рассматривается метод оценки инновационной деятельности предприятия в условиях цифровой экономики, основанный на сборе информации по приведенным критериям оценки, а также включающий в себя развитый математический аппарат расчета интегрального индекса инновационной деятельности. В статье предложена модель оценки «Вход-Выход».*

**Введение.** В цифровой экономике главным факторов, обеспечивающим конкурентоспособность предприятия, является способность вести инновационную деятельность [1]. Для этого предприятие должно аккумулировать достаточные ресурсы, то есть обеспечить себе инновационный потенциал. Кроме подготовки базы компания должна постоянно ее использовать для развития и производства инноваций, то есть быть инновационно активным предприятием.

С переходом к модели, где инновационная деятельность является ключевым факторов развития предприятия остро встал вопрос оценки инновационной деятельности, так как руководству компании необходимо иметь полное представление об экономическом хозяйстве для грамотного принятия решения [2].

На сегодняшний момент существует множество подходов к оценке инновационной деятельности, большинство из них базируется на сборе информации по набору критериев и последующего вычисления среднего значения методом среднего арифметического или среднего корня [3]. Преимуществом и в то же время недостатком данных методов является их простота. Предлагаемый доклад посвящен не стандартному методу оценки инновационной деятельности – методу, построенному на модели «Вход-Выход» [4].

**Основная часть.** Задачей исследования является разработка метода оценки инновационной деятельности предприятия на основе модели «Вход-Выход». Метод подходит для условий промышленного предприятия, обеспечивающих сбор большого набора показателей, которые после обработки можно преобразовать через математический аппарат в единый интегральный индекс инновационной деятельности.

Модель метода состоит из трех основных частей и называется моделью «Вход-Выход» (Рис.1).

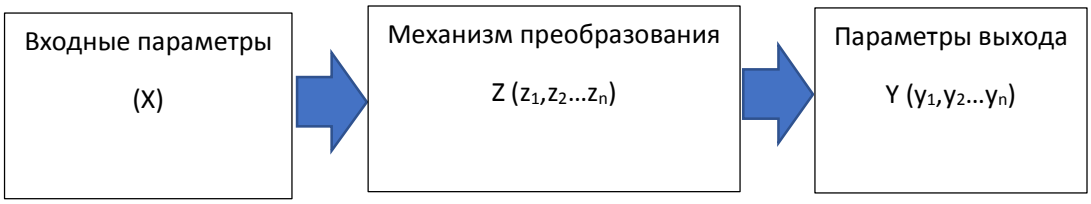



Рис.1. Модель оценки инновационной деятельности «Вход-Выход».

Модель получает на вход значения показателей – набор значений X, то есть входные параметры. Начальные значения преобразуются математическим аппаратом, состоящим из функций и коэффициентов, которые обозначаются как группа Z. На выходе получаются значения группы Y, по которым определяется интегральный индекс инновационной деятельности. Интегральный индекс инновационной деятельности рассчитывается по формуле 1.

$$ИД = X^{\alpha} + Y^{\beta} + Z^{\gamma} \quad (1)$$

где: ИД – индекс инновационной деятельности; X – входные параметры; Y – выходные параметры; Z – параметры преобразования; α – коэффициент входа; β - коэффициент выхода; $\gamma$ - коэффициент преобразования.

Отсюда необходимо найти коэффициенты альфа, бета и гамма. Преобразуем уравнение 1, взяв из него натуральный логарифм, формула 2.

$$Ln(ИА) = \alpha Ln(X) + \beta Ln(Y) + \gamma Ln(Z) \quad (2)$$

Рассмотрим подробнее X,Y,Z – это набор условий влияющих друг на друга и задающих инновационную деятельность.

К факторам X относятся факторы инновационного потенциала предприятия [5]:

- Инновационный климат предприятия
- Наличие информации
- Система управления знаниями и опытом
- Система мотивации и обучения сотрудников
- Информационно-коммуникационные технологии

Факторы, формирующие механизм F, являются инновационной активностью предприятия [6]:

- Своевременные поставки материалов
- Обновление оборудования
- Обеспечивание потоками инвестиций
- Проектная система управления

Перечислим факторы результата Y – инновационную результативность [7]:

- система патентования продукции;
- система стратегического маркетинга;
- система сбыта продукции.

Поэтому инновационную деятельность можно представить как функцию, зависящую от X,Y,Z, формула 3.

$$ИД = f(X;Y;Z) \quad (3)$$

Каждому из показателей, задающих X,Y,Z присваиваются коэффициенты значимости: 1) от 0 до 10 сила выражения показателя, то есть насколько сильно он способен проявить себя и повлиять на инновационную деятельность, то есть величина амплитуда показателя. 2) Степень влияния на инновационную деятельность в пределах от -5 до 5, что выражает взаимосвязь показателя и инновационной деятельности.

Степень влияния может быть направлена в разные стороны: значение от 0 до 5 означает положительное влияние на инновационную деятельность, значение от 0 до -5 означает отрицательное влияние на инновационную деятельность, значение 0 означает отсутствие влияния на инновационную деятельность.

Тоже самое можно представить в виде вектора с углом отклонения φ. Влияние положительно, если φ = (0;180], отрицательно, если φ = [-180;0), не влияет, если φ = 0.

Таким образом выражение можно записать в виде формулы 4:

$$ИД = Y * \cos \varphi y + X * \cos \varphi x + Z * \cos \varphi z. \quad (4)$$

Данное уравнение описывает инновационную деятельность только в том случае, если факторы X,Y,Z не зависят друг от друга, в противном случае они начнут дублировать друг друга. Поэтому необходимо применять коэффициенты влияния.

$K_{xz}$ – коэффициент зависимости X от Z.

$K_{yz}$ – коэффициент зависимости Y от Z.

$K_{xv}$ – коэффициент зависимости X от Y.

Тогда значения функций X,Y,Z принимают вид по формуле 5,6,7:

$$Xf = Kyx*Y + Kzx*Z + X; \quad (5)$$

$$Yf = Kyz*Z + Kyx*X + Y; \quad (6)$$

$$Zf = Kzx*X + Kzy*Y + Z. \quad (7)$$

Тогда искомую функцию инновационной деятельности можно представить в виде формулы 8:

$$I = Xf* \times \cos \varphi x + Yf* \times \cos \varphi y + Zf* \times \cos \varphi z. \quad (8)$$

Предлагаемая формула имеет графическое отображение в виде набора функций с заданными амплитудами X, Y, Z, что изображено на рисунке 2.

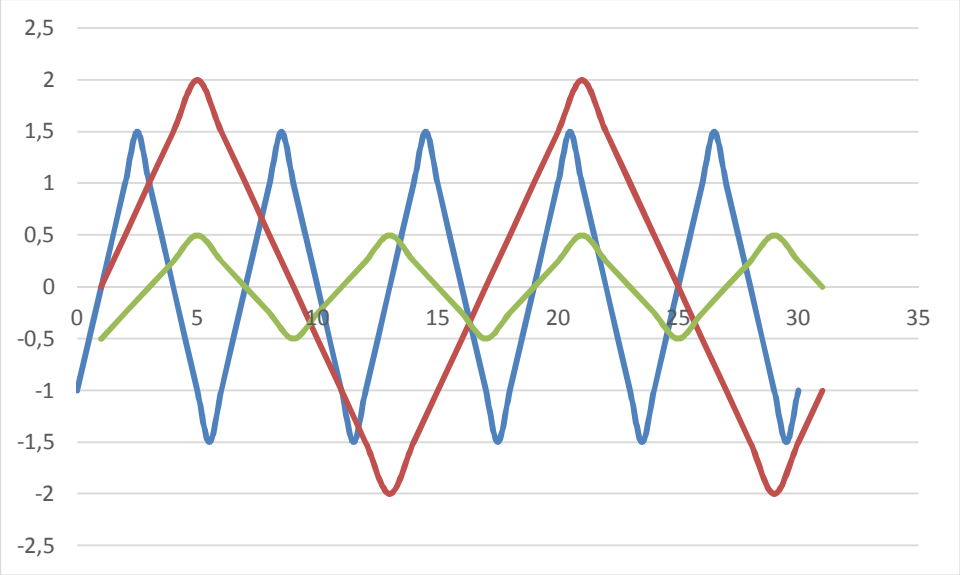



Рис.2. Графическое изображения параметров X,Y,Z.

Предлагаемая методика оценки значения инновационной деятельности предприятия кроме взаимосвязи факторов учитывает силу их проявления, их направленность на достижение ключевой цели организации – осуществление инноваций. Применение векторного подхода расширяет возможности аналитического представления и интерпретации полученных результатов, что необходимо для повышения уровня инновационной деятельности организации.

**Заключение.** В статье изображена модель оценки инновационной деятельности предприятия «Вход-Выход». А также разобран математический аппарат проведения оценки и выведения единого интегрального индекса инновационной деятельности предприятия, выведена конечная формула, в которой учитывается степень влияния показателя на инновационную деятельность, амплитудная сила, а также степень взаимного влияния показателей. В дальнейшем возможно проведения исследования с целью адаптации приведенной методики к конкретным отраслям промышленности и предприятиям. Также следует рассмотреть другие оригинальные методы оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bazzoun Mohammed**. (2019). The Digital Economy. International Journal of Social Science and Economics Invention. 5.
2. **Chen Liang, Zhang Pengxiang, Li Sali, Turner Scott.** (2019). The Disruptive Effects of Generational Innovation in Digital Economy. Academy of Management Proceedings. 2019. 19583.
3. **Battisti Guiliana, Stoneman Paul.** (2019). Defining and Measuring the Innovativeness of Firms. Academy of Management Proceedings. 2019. 15184.
4. **Havas A. (**2019). Innovation Indicators: Their relevance for assessing innovation performance, advancing theory development, and assisting policy formation. 31st Annual EAEPE Conference. 10. 13140.
5. **Boyko Larysa, Chevhanova Vira, Kulakova Svitlana.** (2020). The Essence and Components of the Innovative Potential of the Enterprise. Modern Economics. 20. 31-35.
6. **Hellwig Lukas, Pawlowski Jan, Schäfer Michael.** (2020). An Innovation Ac
7. **Radosevic S**. (2020) Benchmarking innovation policy in catching up and emerging economies: Methodology for innovation policy index. University College London center for comparative studies of emerging economies. 1. 20.

**V.D.Sekerin, A.E. Gorokhova, T.S. Zaytseva** (IPU RAN, Moscow), I.A.Zaytsev (Technological University, Korolev).
**Method for evaluating innovative activities of the enterprise in the conditions of the digital economy**

*Abstract.* The article consideres a method for assessing the innovative activity of an enterprise in digital economy conditions, based on the information acquisition according to the given evaluation criteria, as well as that including a developed mathematical apparatus for calculating the composite index of innovation activity. The article proposes an "In-Out" assessment model.

А. А. ЧЕЧИНА, Н. Г. ЧУРБАНОВА, М. А. ТРАПЕЗНИКОВА, А. В. ЕРМАКОВ, М. С. ГЕРМАН
(Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, Москва)

# МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НА ГОРОДСКИХ ДОРОЖНЫХ СЕТЯХ

*Работа посвящена созданию и апробации микроскопической модели транспортных потоков на основе теории клеточных автоматов. Модель учитывает различные стратегии поведения водителей, оказывающие влияние на транспортный поток, при прохождении различных сложных элементов городской улично-дорожной сети. Комплекс программ, реализующий модель, предназначен для выполнения расчетов на высокопроизводительных вычислительных системах. Апробация на тестовых задачах показывает согласие с экспериментальными данными и фундаментальными свойствами транспортных потоков.*

**Введение.** Без моделирования трафика уже невозможно себе представить эффективное управление дорожным движением в мегаполисе. Создаваемые модели становятся основой интеллектуальной транспортной системы (ИТС) города. При этом современные вычислительные системы позволяют принимать во внимание все больше деталей и особенностей реального транспортного потока без ущерба скорости вычислений.

Созданная авторами модель основана на уже хорошо зарекомендовавшей себя теории клеточных автоматов, которая из-за своей дискретности идеально подходит для описания алгоритмов сложного поведения водителей и их взаимодействия со средой. Предлагаемый доклад посвящен верификации данной модели при помощи решения ряда тестовых задач и сравнения полученных данных с эмпирическими. Отдельное внимание уделяется способам осреднения данных для эффективной интерпретации результатов.

**Особенности модели.** При использовании микроскопических моделей объектами исследования являются отдельные автомобили, что делает подход более гибким как в части реакции водителей на управляющее воздействие (сигналы светофора, знаки, разметка и т. п.), так и в части описания особенностей поведения водителей. Созданная авторами модель на основе теории клеточных автоматов относится к этому классу, обеспечивая все вышеперечисленные преимущества, а ее дискретная структура – дополнительное удобство при создании алгоритмов, описывающих поведение водителей. Подробнее о модели – см. [1].

Поведение водителей на дороге может существенно отличаться в зависимости от их личностных качеств, стажа вождения и других параметров. Учет этих стратегий облегчает калибровку модели при практическом моделировании на участках дорожных сетей реальных городов (например, в больших городах стиль вождения, как правило, носит более агрессивный характер, а в городах с неинтенсивным движением – более спокойный). Как известно, частая смена полосы отдельных водителей может существенно влиять на весь транспортный поток, порождая волны уплотнений при стесненном движении, даже при отсутствии физических препятствий на дороге.

В модели реализованы две стратегии перестроения водителей:
- «Осторожные» водители для смены полосы выбирают большой интервал до следующего автотранспортного средства в целевой полосе. Расстояние до следующего автомобиля должно быть больше максимально разрешенной скорости в системе.
- «Агрессивные» водители оценивают текущую скорость следующего автомобиля, движущегося по целевой полосе, и перестраиваются вплотную, сохраняя лишь минимальный зазор, необходимый для обеспечения безопасности.

Количество тех и других водителей в системе, а также условия на скорость можно варьировать. Часть водителей в системе могут, при определенных условиях, стать «вежливыми», то есть пропустить автомобиль из соседнего ряда, который хочет перестроиться, но не имеет такой возможности по соображениям безопасности. «Вежливым» может быть как «агрессивный», так и «осторожный» водитель.

Модель на основе клеточных автоматов предназначена как для воспроизведения дорожного движения как на небольших элементах сети (например, на сложной развязке, на пропускную способность которой влияет много нюансов, таких как правила приоритета и стиль вождения участников движения), так и на больших сетях, собранных из базовых элементов. При переходе к крупномасштабным участкам улично-дорожной сети (УДС) можно снизить степень подробности описания поведения водителей, заменив универсальным алгоритмом для всех участников движения и, таким образом, при необходимости ускорить расчет. Входящие в модель алгоритмы поведения водителей - «вежливый», «агрессивный» и «осторожный», могут быть отключены для решения задач на больших сетях. На маленьких участках сложной конфигурации, однако, особенности вождения очень сильно влияют на скорость прохождения такого элемента. Например, как показали расчеты, на участке с сужением без «вежливых» водителей, помогающих другим участникам движения перестроиться перед препятствием на их полосе, при плотном входящем потоке существенно увеличивается время нахождения автомобилей на дороге и очередь на въезд на данный элемент УДС.

Входящий в модель алгоритм «медленного старта» (автомобили, начинающие движение, стартуют только при условии, что перед ними имеется более одной свободной ячейки) также можно включать и выключать в зависимости от особенности движения в конкретном месте, облегчая калибровку модели.

**Программный комплекс.** Программный комплекс для высокопроизводительных вычислительных систем представляет собой набор стандартных модулей, таких как: регулируемые и нерегулируемые Т-образные и четырехсторонние перекрестки, участки с въездом на магистраль, участки дороги с расширением, с сужением, с пешеходным светофором и т.д. (примеры представлены на рисунке 1).

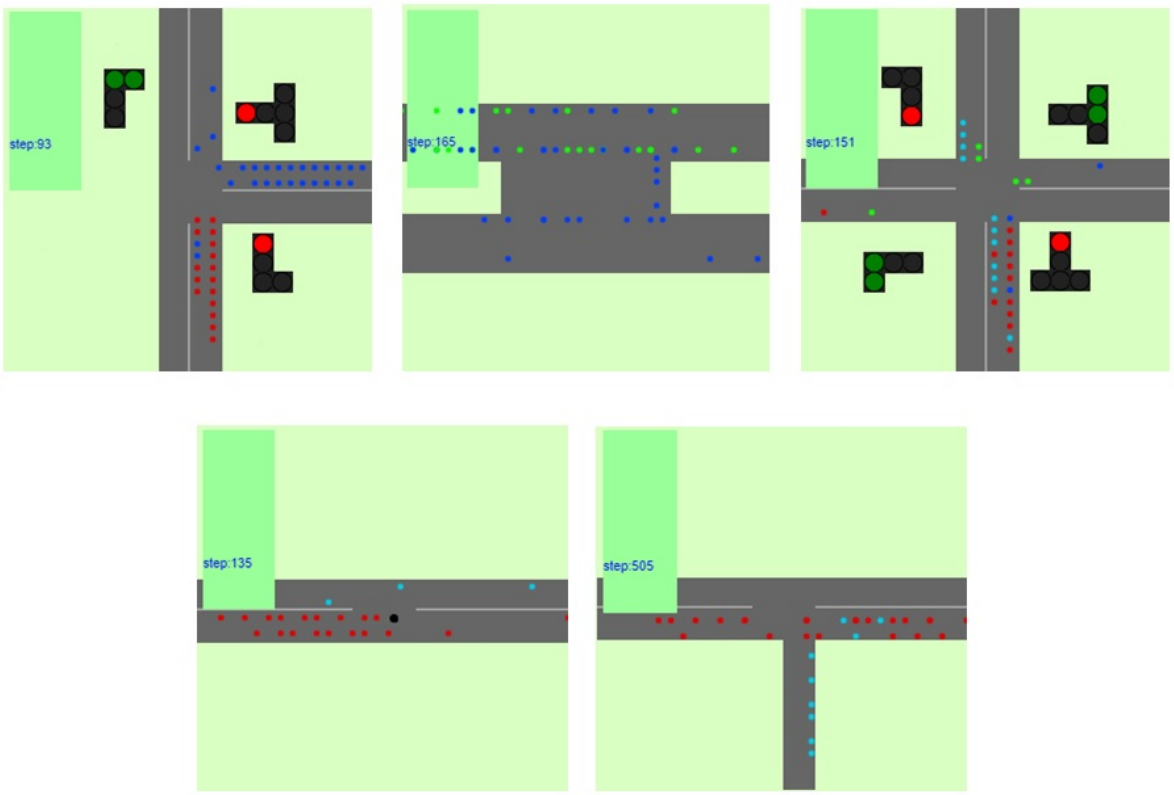


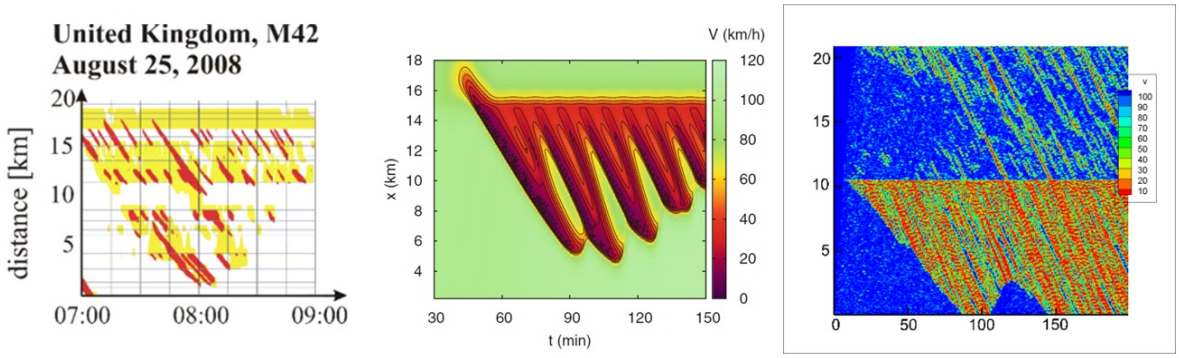

Рис. 1. Примеры элементов УДС расчетных модулей

Из этих модулей, как из конструктора, можно собирать любые сети, соответствующие реальной карте города. Каждый такой элемент рассчитывается на своем вычислительном узле с обменом данными на границах: автомобиль, выезжающий с одного элемента, появляется на другом, в месте, соответствующем его скорости на момент перехода. Если на целевом участке

дороги образовался затор, информация об этом передается водителям на предыдущем элементе, и они снижают скорость или останавливаются в зависимости от своего местоположения, ожидая, когда можно будет двигаться дальше.

**Тестовые расчеты и сравнение с экспериментом**. Созданная модель и программный комплекс были апробированы на ряде тестовых задач, а результаты сравнивались с экспериментальными данными и с расчетами других исследователей.

Одним из примеров такого тестового расчета является задача о «бутылочном горле» на въезде на магистраль (рисунок 2).




2(а) 2(б) 2(в)

Рис. 2 – Наблюдаемые экспериментально пространственно-временные структуры на диаграмме скорости транспортного потока при въезде на магистраль (из [2]) (2а), результат моделирования при помощи модели Кернера-Конхойзера (из [3]) (2б), моделирование при помощи созданной авторами модели (2в).

На рисунке 2 (в) представлен результат моделирования с использованием созданной авторами модели клеточных автоматов. По оси абсцисс отложено время в минутах, по оси ординат – расстояние. Цветом представлена осредненная скорость транспортного потока, где красный цвет соответствует низкой скорости (затору), синий – скорости свободного движения (100 км/ч). Въезд на магистраль расположен в точке 10 км от начала дороги.

Для осреднения данных использовалась средняя гармоническая скорость. Для данной задачи из-за большого разброса значений скорости (от 0 до 100 км/ч) а также из-за необходимости осреднять скорость не только по пространству, но и по времени (так как из-за дискретности модели за один временной шаг скорость может существенно измениться) этот способ является оптимальным. Данный вывод подтверждается тестовыми расчетами со сравнением различных методов осреднения (подробнее см. [4]).

Представленные результаты расчетов получены с использованием суперкомпьютеров ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

**Заключение.** Полученные в ходе расчетов пространственно-временные структуры на диаграмме скорости транспортного потока совпадают с наблюдаемыми экспериментально. Сравнение вычислений с результатами из литературы показывает большее сходство с реальными данными (видно на рисунке 2). Все известные свойства транспортного потока созданная модель хорошо воспроизводит. Модель позволяет описывать транспортный поток на различных участках УДС и на больших городских сетях. Параллельная реализация модели обеспечивает высокую скорость расчетов. Созданный программный комплекс может использоваться как основа ИТС города.

*Работа проводилась при поддержке грантов РФФИ 20-07-00528А, 18-01-00405А*

ЛИТЕРАТУРА

1. **А.А. Чечина, Н.Г. Чурбанова, М.А. Трапезникова, А.В. Ермаков, М.С. Герман**. Моделирование и визуализация транспортных потоков на элементах дорожной сети с использованием теории клеточных автоматов. *XII мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2019) материалы XII мультиконференции (Дивноморское, Геленджик, 23-28 сентября 2019 г.), Том 3, редкол. И.А. Каляев, В.Г. Пешехонов и др.* – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2019, С. 159-163.

2. **B. Kerner.** The physics of Traffic. Berlin: Springer, (2004). 682 p.
3. **M. Treiber, A. Kesting.** Traffic Flow Dynamics. Data, Models and Simulation, Berlin-Heidelberg: Springer, (2013).503 p.
4. **Chechina A., Churbanova N., Trapeznikova M.** Modelling traffic on road junctions on parallel computing systems using cellular automata approach. *Int. Journal of Interactive Mobile Technologies (iJIM)*, Vol. 14, No. 10, 2020, pp. 178-185

**A.A. Chechina, N.G. Churbanova, M.A. Trapeznikova, A.V. Ermakov, M.S. German** (Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow). **Cellular automata traffic flow model for traffic management on city road networks**

*Abstract.* The work is devoted to development and testing of the microscopic traffic flow model based on the cellular automata theory. The model takes into account various driving strategies that may have considerable influence on traffic flow, on different complex road elements. The program package implementing the model is designed to perform calculations on high-performance computing systems. Approbation on test problems shows the agreement with experimental data as well as with the fundamental features of traffic flows.

Д. А. ГУБАНОВ, А. Г. ЧХАРТИШВИЛИ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, Москва)

# О ПОНЯТИИ ИНФОРМАЦИОННОГО СООБЩЕСТВА В СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

*Введено конструктивное определение информационного сообщества, согласованное с формальными моделями формирования представлений ограниченно рациональных агентов в социальных сетях. Показана возможность учета неопределенности при выявлении информационных сообществ, приведен пример стабильного информационного сообщества. Предложена постановка задачи управления информационными сообществами.*

**Введение.** Во многих предметных областях важной практической задачей является выявление и исследование в онлайновых социальных сетях информационных сообществ – множеств индивидов, обладающих общими и устойчивыми представлениями относительно некоторого вопроса. Например, в социологии и политологии считается, что формирование изолированных сообществ чревато поляризацией и конфликтами. В теоретических и прикладных исследованиях изучаются вопросы получения пользователем альтернативной информации в зависимости от предпочтений его контактов и алгоритмов онлайновой социальной сети [1], вопросы взаимодействия сообществ с разными представлениями [2], вопросы информационных ролей пользователей [3] и т.д. Для исследования чаще всего используются статистические методы и методы машинного обучения, а также методы матричного и социально-сетевого анализа [1-5]. Особенности обработки информации индивидом исследуются в когнитивистике, психологии и социальной психологии (см., напр., [6]), а для моделирования динамики представлений в сетях с учетом этих особенностей разрабатываются формальные модели ограниченно рациональных агентов. Классической является модель ДеГроота [7], в которой агент обновляет свое представление на основе информации о представлениях его сетевого окружения. В содержательно более богатых моделях [8-12] сила влияния соседей зависит от того, насколько их представления согласуются с представлением агента.

На практике использовать эти модели для выявления сообществ затруднительно: из-за принятых упрощений и предположений, из-за сложности идентификации параметров моделей, и, наконец, из-за того, что одних моделей динамики представлений недостаточно для работы с информационными сообществами. В данном докладе предлагается конструктивное определение информационного сообщества, которое опирается на концептуальные и формальные модели динамики представлений индивидов в социальных сетях, приведена постановка задачи управления информационными сообществами.

**Информационное сообщество.** Пусть имеется направленная сеть информационного влияния, узлами которой являются агенты из множества $N = \{1, \dots, n\}$. Для каждого агента $i$ множество влияющих на него узлов обозначим через $N_i$. Сеть будем считать постоянной.

Каждый агент характеризуется своим состоянием $x_i \in S$ – представлением (мнением) по какому-либо вопросу. Содержательно состояние может означать мнение агента по какому-либо вопросу, его информированность о какой-то проблеме, комплекс идейно-политических взглядов и т.п. Состояние агента выражается в действиях, которые он совершает, например – подписка на те или иные страницы в сети, написание постов определенного содержания и т.п.

Мы разделяем учетные записи обычных индивидов и учетные записи страниц – групп, пабликов и т.п. в онлайновых социальных сетях. Считаем, что на изменения состояния агента влияет его окружение из таких же агентов, которые также могут менять состояние. Что касается страниц, на которые агент подписан, то они только поддерживают то состояние, в котором агент уже находится, одновременно являясь его индикаторами.

Состояние агента меняется в дискретном времени в зависимости от влияющего на него окружения:

$$x_i(t+1) = F_i\big(x_i(t), x_{-i}(t)\big), \qquad (1)$$

где $x_{-i}(t)$ – вектор состояний в момент $t$ агентов множества $N_i$.

Зафиксируем множество состояний $X \subseteq S$, момент $t_0$ и натуральное число $k$. Будем говорить, что подмножество $M \subseteq N$ агентов является *информационным сообществом*, если состояния агентов из $M$ входят в множество $X$ во все моменты $t_0, t_0+1, \dots, t_0+k$, т.е. выполняется условие

$$\forall i \in M \quad \forall t \in \{t_0, t_0+1, \dots, t_0+k\} \quad x_i(t) \in X. \tag{2}$$

Содержательно это означает, что поступающая агентам информация не приводит (в следующие $k$ моментов времени) к существенному пересмотру их представлений, и в сообществе сохраняется близкие представления, т.е. можно сказать, что его члены являются единомышленниками и их общие представления остаются стабильными.

Параметр $k$ в практических задачах содержательно означает горизонт планирования, в течение которого предполагается рассмотрение динамики сети (которая, напомним, при этом предполагается неизменной). Если предметом наблюдения являются медленно изменяющиеся состояния, то целесообразно рассмотрение информационных сообществ для $k$, принимающих небольшие значения, 1 или 2.

**Учет неопределенности при выявлении информационных сообществ.** Рассмотрим ситуацию, когда динамика состояний (1) известна с точностью до некоторого неизвестного параметра:

$$x_i(t+1) = F_i(x_i(t), x_{-i}(t), \theta), \tag{3}$$

где $\theta \in \Theta$. Как и в предыдущем разделе, зафиксируем множество состояний $X \subseteq S$, момент $t_0$ и натуральное число $k$. Тогда информационным сообществом будем называть подмножество $M \subseteq N$ агентов, для которого выполнено следующее условие:

$$\forall i \in M \quad \forall \theta \in \Theta \quad \forall t \in \{t_0, t_0+1, \dots, t_0+k\} \quad x_i(t) \in X. \tag{4}$$

Пусть, например, $k = 1$, а динамика смены состояний агентов задается выпуклой комбинацией его состояния и состояния окружения (модель ДеГроота):

$$x_i(t+1) = (1-\theta_i)x_i(t) + \theta_i \sum_{j \in N_i} b_{ij} x_j(t),$$

где $b_{ij}$ – коэффициенты, обозначающие относительное влияние на $i$-го агента различных агентов из его окружения $N_i$, а коэффициент $\theta_i$ можно интерпретировать как степень влияния на агента его окружения в целом (все эти коэффициенты лежат в отрезке [0, 1]). В процессе анализа данных из реальной онлайновой социальной сети коэффициенты $b_{ij}$ могут быть рассчитаны, например, при помощи акциональной модели влияния [13, 14]. Что касается коэффициентов $\theta_i$, то их оценка быть затруднительной, поэтому мы находимся в условиях неопределенности (3). Применим условие (4):

$$\forall i \in M \quad \forall \theta_i \in [0,1] \quad (1-\theta_i)x_i(t_0) + \theta_i \sum_{j \in N_i} b_{ij} x_j(t_0) \in X.$$

Ясно, что в случае выпуклости множества $X$ (что представляется естественным в практических задачах) последнее условие можно записать в следующем виде:

$$\forall i \in M \quad x_i(t_0) \in X, \sum_{j \in V_i} b_{ij} x_j(t_0) \in X.$$

Содержательно это означает, что состояния агентов из $M$ входят в множество $X$, и при этом влияние окружения на каждого из агентов не выводит его состояние из множества $X$.

**Стабильные информационные сообщества.** Зафиксируем множество состояний $X \subseteq S$ и момент $t_0$. Будем говорить, что подмножество $M \subseteq N$ агентов является *стабильным информационным сообществом*, если оно является информационным сообществом для любого значения $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Содержательно это означает, что состояния агентов из $M$ в течение даже больших промежутков времени не выходят из множества $X$ (при заданных предположениях о динамике состояний).

Приведем неформальный пример стабильного информационного сообщества. Пусть множество $X$ является конечным, а состояние агента на каждом шаге меняется следующим образом: он принимает то состояние, в котором находится большинство агентов из его влияющего окружения. Пусть, далее, в момент $t_0$ имеется такое подмножество $M \subseteq N$ агентов, что выполнены два свойства: (1) все они находятся в одном и том же состоянии $x \in X$ и (2) для каждого агента $i \in M$ большинство влияющего на него окружения $V_i$ составляют единомышленники из $M$. Тогда $M$ является стабильным информационным сообществом.

**Управление информационными сообществами.** Одной из задач информационного управления [10] является управление информационными сообществами. Рассмотрим случай, когда управляющий орган (центр) стремится минимизировать количество входящих в информационное сообщество агентов на следующем шаге (т.е. $k = 1$), воздействуя на их текущие представления (содержательно это воздействие может состоять, например, в предложении подписаться на страницы, транслирующие альтернативные точки зрения) и, тем самым, на динамику представлений (1). Тогда задача управления может быть сформулирована следующим образом:

$$|\{i \in M | F_i(x_i(t_0), x_{-i}(t_0), u) \in X\}| \underset{u \in U}{\longrightarrow} \min, \qquad (5)$$

где $|\cdot|$ – количество элементов множества, $M$ – множество образующих информационное сообщество агентов, $U$ – множество всевозможных информационных воздействий центра. Решение задачи (5) является оптимальным информационным воздействием центра в описанной ситуации.

**Заключение.** В данном докладе введено конструктивное определение информационного сообщества, которое, с одной стороны, согласовано с формальными моделями формирования представлений ограниченно рациональных агентов в социальных сетях, а с другой – позволяет выявлять информационные сообщества в реальных онлайновых социальных сетях. На примерах моделей с дискретными и непрерывными представлениями агентов рассмотрена ситуация с неопределенностью при выявлении информационных сообществ и ситуация стабильного информационного сообщества. Приведена постановка задачи управления информационными сообществами.

*Работа проводилась при частичной поддержке гранта РФФИ 18-29-22042.*

ЛИТЕРАТУРА


1. **Bakshy E., Messing S., Adamic L. A.** Exposure to ideologically diverse news and opinion on Facebook // Science. 2015. Т. 348. № 6239. С. 1130–1132.
2. **Garimella K.** и др. Political Discourse on Social Media: Echo Chambers, Gatekeepers, and the Price of Bipartisanship // ArXiv180101665 Cs. 2018.
3. **Kumar S.** и др. Community Interaction and Conflict on the Web // Proc. 2018 World Wide Web Conf. World Wide Web - WWW 18. 2018. С. 933–943.
4. **Barberá P.** et al. Tweeting from left to right: Is online political communication more than an echo chamber? // Psychological Science. 2015. Vol. 26. Issue 10. P. 1531–1542.
5. **Бызов Л.Г., Губанов Д.А., Козицин, И.В., Чхартишвили А.Г.** Идеальный политик для социальной сети: подход к анализу идеологических предпочтений пользователей // Проблемы управления. 2020. № 4. С. 15-26.
6. **Myers, D.G.** Social Psychology. N.-Y.: McGraw-Hill, 1999.
7. **De Groot, M.H.** Reaching a Consensus // Journal of American Statistical Assotiation. 1974. No. 69. P. 118–121.
8. **Deffuant, G., Neau, D., Amblard, F., Weisbuch, G.** Mixing Beliefs among Interacting Agents // Advances in Complex Systems. 2000. Vol. 03. P. 87–98.
9. **Hegselmann, R., Krause, U.** Opinion Dynamics under the Influence of Radical Groups, Charismatic Leaders, and Other Constant Signals: A Simple Unifying Model // Networks and Heterogeneous Media. 2015. Vol. 10, no. 3. P. 477–509.
10. **Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г**. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. 3-е изд., перераб. и дополн. М.: МЦНМО, 2018. 224 с.
11. **Новиков Д.А.** Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // Управление большими системами. Выпуск 85. М.: ИПУ РАН, 2020. С.206-237.DOI: https://doi.org/10.25728/ubs.2020.85.9
12. **Губанов Д.А., Петров И.В., Чхартишвили А.Г.** Многомерная модель динамики мнений в социальных сетях: индексы поляризации // Проблемы управления. 2020. № 3. С. 26-33.
13. **Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г.** Влиятельность пользователей и метапользователей социальной сети // Проблемы управления. 2016. № 6. С. 12-17.

14. **Губанов Д.А.** Влияние в социальных сетях: варианты формализации // Управление большими системами. Выпуск 85. М.: ИПУ РАН, 2020. С.51-71. DOI: https://doi.org/10.25728/ubs.2020.85.3

**A.G. Chkhartishvili, D.A. Gubanov** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow). **Towards a concept of the information community in a social network**

*Abstract.* We introduce a constructive definition of the information community, consistent with formal models for the dynamics of the beliefs of boundedly rational agents in social networks. Then we show the possibility of taking into account uncertainty when identifying information communities and give an example of a stable information community. Finally, we give the statement of the information communities control problem.

Н. Н. УНАНЯН
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, Москва)

# РАЗРАБОТКА БИОНИЧЕСКОГО ПРОТЕЗА КИСТИ РУКИ С ИНТЕЛЕКТУАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

*Работа посвящена разработке бионического протеза кисти руки. В данной статье представлена интеллектуальная система распознавания электромиографического (ЭМГ) сигнала на основе искусственной нейросети. Предложен способ обучения нейросети, позволяющий идентифицировать несколько типов движения пальцев кисти руки. Приведено описание структуры нейронной сети (ИНС), а также моделирование и проверка качества распознавания. Описан стенд для испытания и отладки системы управления.*

**Введение.** В современном мире проблема протезирования широко изучается и имеет неоспоримую актуальность. С развитием электроники, робототехники и систем искусственного интеллекта современные бионические протезы конечностей позволяют частично компенсировать функции здоровой конечности. Наиболее популярным способом управления робототехническим процессом является неинвазивный метод, основанный на данных мышечной активности человека. Одним из важнейших требований при проектировании надежного, недорогого и функционального протеза кисти руки является быстрая, простая в реализации и надежная система управления. Установка сенсорных устройств для извлечения информации, может осуществляться несколькими методами, на уровне головного мозга и других супраспинальных областей [1] или периферических нервов [2], чаще всего сенсорные устройства устанавливают непосредственно на мышцы, которые требуют изучения [3], [4]. Управление сложных коммерческих протезов осуществляется с помощью электрокимографических (ЭМГ) сигналов, записанных с помощью поверхностных электродов, регистрирующих электрическую активность, связанную с мышцами руки пациента, что позволяет интерпретировать намерение субъекта, который действует на руку соответствующим сокращением мышц. Исследование ЭМГ сигнала затрагивает не только область протезирования[5]. Основной целью данной работы является разработка системы управления, которая сможет качественно идентифицировать несколько типов движения.

**Основная часть.** Разработка бионического протеза состоит из нескольких этапов. Ниже будут рассмотрены основные этапы более подробно.

***Описание механической части стенда.*** Кисть любого человека является манипулятором, в данном случае захватным манипулятором, состоящим из нескольких частей. Каждый палец можно представить как последовательный манипулятор. Один конец цепи, которого закреплен внутри базовой рамы в то время, как другой конец свободен. Следовательно, чтобы манипулировать объектом в пространстве, необходимо описать положение каждого сочленения. По образу и подобию оригинального образца был сконструирован и собран механизм, показанный на рисунке 1. При вращении сервопривода рычаг, который закреплён к выходному валу привода, приходит в движение. Что впоследствии приводит в движение весь остальной механизм. Для своего стенда мы используем многорычажный механизм. Такие механизмы удобнее и практичнее в использовании чем механизмы с сухожильными приводными системами. Стоит заметить, что механизм большого пальца немногим отличается от остальных. Это вызвано тем, что у большого пальца есть косая и поперечная мышцы, которые приводят в движение палец относительно кисти руки. Данная модель была изготовлена с использованием 3D технологий. После проведения испытаний на разрыв было принято решение печатать модель с помощью ABS пластика.

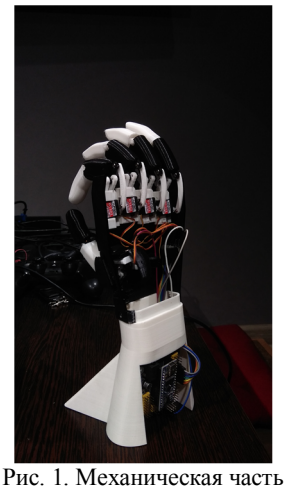


Рис. 1. Механическая часть протеза

***Описание электронной части стенда.*** Для реализации алгоритмов управления манипулятором предполагается использова-

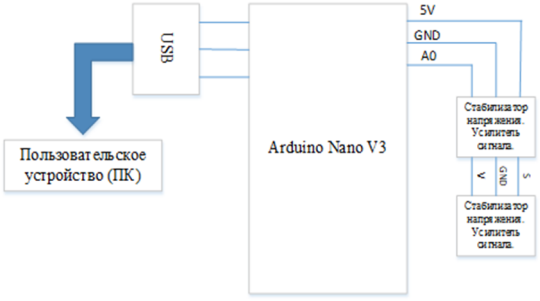



Рис. 2. Структурная схема

ние микроконтроллера Arduino Nano, схема подключения которого к персональному компьютеру изображена на рис. 2 (дать структурную схему). На персональном компьютере данные с электродов поступают на программную оболочку Matlab, где в дальнейшем производится распознавание сигнала. В дальнейшем, сигналы от пользовательского устройства подаются на механическую часть протеза.

***Алгоритм распознавания.*** Распознавание сигналов, поступающих через электромиографические датчики, было решено проводить с помощью искусственной нейронной сети. В данной статье мы рассматриваем два связанных каскадно многослойных персептрона. Оба они имеют один слой с гиперболической сигмоидной передаточной функцией.

$$f_{\tan}(s)=\frac{e^{\beta s}-e^{-\beta s}}{e^{\beta s}+e^{-\beta s}} \qquad (1)$$

Первый персептрон производит предварительную фильтрацию исходного сигнала, в то время как второй идентифицирует намерения пользователя. Структура сети изображена на рисунке 3. Здесь $X_i$ - измерение ЭМГ-сигнала от одного датчика в i-й момент времени, $z^{-1}$ - оператор задержки, $Y_i$ - выход предварительного классификатора, $G_i$ – выход функции, которая имеет три состояния: 1 – палец разжат, 2 – палец сжат частично, 3 – палец сжат полностью. N и m - количество наблюдений $X_i$ и $Y_i$ соответственно. Обучающая выборка была подготовлена в размере 18000 значений, где по 6000 значений соответствует сжатому, частично разжатому и полностью расслабленному пальцу. Измерения снимались в течение 1-2 минут для каждого действия, особое внимание было уделено сжатому состоянию, так как после 1минуты возникает усталость мышцы. Очевидно, что увеличение значений N и m на повышает надежность и устойчивость классификатора, нос другой стороны уменьшает скорость отклика. Следовательно, можно сформулировать задачу оптимизации следующим образом: Найдите ($N^*$, $m^*$ ) = min (N, m), которые обеспечивают ответ $G_i$ с высокой точностью. Решение этой задачи оптимизации может дать максимальную скорость отклика классификатора. Оптимальные значения можно найти эвристически в процессе обучения. Для рассматриваемого случая оптимальными значениями являются $N^*$ = 40 и $m^*$ = 4. Нейронные сети имеют 15 и 10 нейронов на каждом слое соответственно.

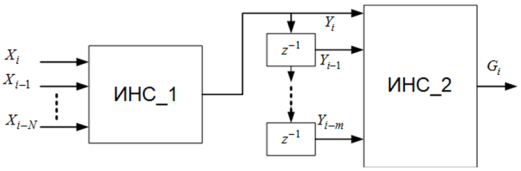



Рис. 3. Структура искусственной нейронной сети.

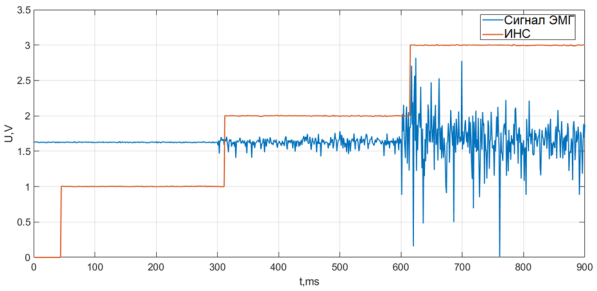



Рис. 4. Распознавание сигнала с использованием ИНС.

***Результаты моделирования.*** Результат распознавания ЭМГ сигнала изображен на рисунке 4. Данный алгоритм был реализован в среде Matlab и протестирован на стенде. После обучения и тестирования можно сделать вывод, что ИНС достаточно качественно распознает 3 вида положений пальцев руки, а сервоприводы отрабатывают задающее воздействие. Ложных срабатываний и каких-либо иных проблем не наблюдалось.

**Заключение.** В данной статье был представлен алгоритма распознавания ЭМГ сигнала с использованием ИНС. Предложенный метод был реализован и протестирован на специальном стенде. Было приведено краткое описание стенда. В процессе тестирования ИНС позволяет качественно и быстро произвести идентификацию, исключая ложные срабатывания. В дальней-

шем предполагается реализация данного алгоритма на базе микроконтроллера для получения автономного устройства.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-38-90293.*

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R.Wolpaw, N. Birbaumer, D. J. McFarland, G. Pfurtscheller, and T. M. Vaughan, “Brain-computer interfaces for communication and control,” Clin. Neurophysiol., vol. 113, no. 6, pp. 767–791, Jun. 2002.
2. T. Stieglitz, M. Schuettler, and K. P. Koch, “Neural prostheses in clinical applications—Trends from precision mechanics towards biomedical microsystems in neurological rehabilitation,” Biomed. Tech. Eng., vol. 49, no. 4, pp. 72–77, Apr. 2004.
3. D. Farina, A. Holobar, R. Merletti, and R. M. Enoka, “Decoding the neural drive to muscles from the surface electromyogram,” Clin. Neurophysiol., vol. 121, no. 10, pp. 1616–1623, Oct. 2010.
4. Z. Lu, K. Tong, X. Zhang, S. Li and P. Zhou, "Myoelectric Pattern Recognition for Controlling a Robotic Hand: A Feasibility Study in Stroke," in IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 66, no. 2, pp. 365-372, Feb. 2019, doi: 10.1109/TBME.2018.2840848.
5. S. Morita, T. Kondo, K. Ito. Estimation of forearm movement from EMG signal and application to prosthetic hand control. IEEE Intl Conf on Robotics and Automation (ICRA), Seoul, 2001, pp. 3692–3697..

---

**N. N. Unanyan** (Laboratory of Dynamics of Control Systems, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences Moscow). **Design of a bionic prosthetic hand with intelligent control**

*Abstract.* This paper is devoted to the design of a bionic prosthetic hand. An intelligent system for recognizing an electromyographic (EMG) signal based on an artificial neural network (ANN) is developed. A method of neural network training is proposed that allows identifying several types of finger movements. The structure of the neural network is described, as well as modeling and verification of recognition accuracy. A prosthetic hand setup for testing and debugging the control system is described.

М. Г. ШИРОБОКОВ
(Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва)

# МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

*В докладе представлен обзор методов обучения с подкреплением, которые используются для решения задач управления движением космических аппаратов. Обсуждаются характерные черты работы алгоритмов и идеи, которые привели к прогрессу в практике применения методов обучения с подкреплением в задачах управления. Особое внимание уделяется методу Proximal Policy Optimization. Описывается случай, когда использование метода обучения с подкреплением без знания агентом модели среды позволило получить более эффективный алгоритм управления аппаратом, чем метод, основанный на знании модели среды агентом.*

**Введение.** Обучение с подкреплением – это область машинного обучения, которая, в отличие от обучения с учителем и без учителя, предполагает наличие среды и агента, взаимодействующего со средой и получающей от нее скалярный сигнал вознаграждения [1]. Цель агента – максимизировать получаемое вознаграждение на определенном интервале времени, учитывая опыт взаимодействия со средой. Как правило, взаимодействие агента со средой описывается в терминах марковского процесса принятия решений, при этом предполагается, что известно пространство состояний среды, пространство действий агента и функция вознаграждения. Модель среды агенту может быть не известна.

С точки зрения проработанности методов, в обучении с подкреплением выделяют случаи, когда пространство состояний и пространство действий являются дискретными или непрерывными. Самые первые работы касались случаев, когда оба пространства являются дискретными с небольшим числом элементов. В этом случае известны алгоритмы действий агента, которые гарантированно приводят к максимизации вознаграждения от среды, эта теория основывается на теории оптимальности Беллмана [2]. Сегодня в ответ на запросы приложений, связанных с управлением динамическими системами, большим вниманием пользуется гораздо менее разработанный случай, когда оба пространства является непрерывными.

Среди этих приложений оказывается и механика космического полета (астродинамика). Интерес к методам обучения с подкреплением со стороны астродинамики основывается с одной стороны на успешных примерах применения этих методов в других областях, а с другой стороны – на попытке решать новые и сложные задачи управления, среди которых, в первую очередь, это задачи поиска оптимальных траекторий перелета (см., например, [3]), задачи управления угловым движением аппаратов с неизвестными характеристиками [4], управления формациями спутников [5], а также управления посадочными модулями в условиях высокой неопределенности в состоянии атмосферы и рельефе небесного тела (см., например, [6]).

Все методы обучения с подкреплением так или иначе сводятся к задачам оптимизации некоторого функционала, причем функция управления всегда аппроксимируется функцией с конечным числом параметров (как правило, нейронной сетью) [1]. В прямых методах обучения с подкреплением оптимизируются только параметры этой функции управления; эти методы обычно не основываются на теории оптимальности Беллмана. Непрямые методы основываются на уравнении Беллмана и прямо или косвенно решают его в процессе оптимизации. Основной интерес разработчики методов проявляют именно к непрямым методам.

В методах обучения с подкреплением привлекательно отсутствие необходимости создавать для агента модель среды, с которой он взаимодействует. Таким образом, хотя как правило эти методы являются градиентными, они не требуют расчета градиента каких-либо функций, связанных со средой. Для агента среда может быть «черным ящиком». Естественно, за это прихо-

дится платить на порядки увеличенными временем сходимости и продолжительностью взаимодействия агента со средой.

**Содержание обзора методов**. В докладе обсуждаются характерные черты работы алгоритмов и идеи, которые привели к значительному прогрессу в практике применения методов обучения с подкреплением в задачах управления. Особое внимание будет уделено методу Proximal Policy Optimization (PPO), разработанному в 2017 году [7]. Анализ литературы показывает, что именно этот метод используется для решения задач посадки аппарата на поверхность небесного тела в условиях высокой неопределенности в состоянии атмосферы и рельефе в области посадки. С точки зрения разработчиков PPO-метода, перед другими методами он выигрывает во многих аспектах, об этом тоже пойдет речь в докладе.

Кроме того, будет описан случай, когда использование метода обучения с подкреплением без знания агентом модели среды позволило получить более эффективный алгоритм управления аппаратом, чем метод, основанный на знании модели среды агентом [6].

**Заключение**. За последние несколько лет в разы возросло число новых задач механики космического полета, которые решаются методами обучения с подкреплением. В первую очередь это связано с появлением эффективных методов их решения, в первую очередь – метода Proximal Policy Optimization, который представляет собой аналог метода доверительных областей среди классических методов оптимизации. Известны случаи, когда метод обучения с подкреплением позволил получить более надежное управление динамической системой, чем классический метод управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sutton R. S., Barto A.G. Reinforcement learning: An introduction. MIT press, 2018. 526 p.
2. Puterman M.L. Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming. John Wiley & Sons, 2014. 649 p.
3. Dachwald B. Optimization of very-low-thrust trajectories using evolutionary neurocontrol. *Acta Astronautica*. 2005. Vol. 57. № 2-8. P. 175-185. doi: 10.1016/j.actaastro.2005.03.004.
4. Brandonisio A., Lavagna M., Guzetti D. Deep reinforcement learning to enhance fly-around guidance for uncooperative space objects smart imaging. In: *2020 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, August 9-12, 2020. Paper AAS 20-756.
5. Izzo D., Simões L.F., de Croon G.C.H.E. An evolutionary robotics approach for the distributed control of satellite formations. *Evolutionary Intelligence*. 2014. Vol. 7. P. 107-118. doi: 10.1007/s12065-014-0111-9.
6. Gaudet B., Linares R., Furfaro R. Adaptive guidance and integrated navigation with reinforcement meta-learning. Acta Astronautica, 2020. Vol. 169. P. 180-190. doi: 10.1016/j.actaastro.2020.01.007.
7. Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O. Proximal policy optimization algorithms. arXiv preprint arXiv:1707.06347. 2017 Jul 20.

---

**M.G. Shirobokov** (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow). **Reinforcement learning methods in astrodynamics control problems**

*Abstract.* A review of reinforcement learning methods that are used to solve astrodynamics control problems is provided. The characteristic features of algorithms and ideas that have led to progress in the practice of using reinforcement learning methods in control problems are discussed. Special attention is paid to the Proximal Policy Optimization method. A case is described when using a reinforcement learning method without the agent's knowledge of the environment model gives a more efficient algorithm than the method based on the agent's knowledge of the environment model.

Д.Г. АРСЕНЬЕВ, Д.Е. БАСКАКОВ, В.П. ШКОДЫРЕВ
(Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого)

# ИЕРАРХИЧЕСКАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ: АЛГОРИТМЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

*При работе с большими данными разного свойства и качества на каком-то этапе крайне эффективно начать использовать иерархическую кластеризацию. При этом, несмотря на множество различных приложений и эвристик, теория, которая лежит в основе иерархической кластеризации, по-прежнему не развита в полной мере. Нет теории, которая бы освещала именно анализ качества проведенной кластеризации, теории, которая была бы посвящена анализу целевой функции построенного дерева. И как вообще строить такую целевую функцию? При этом важно понимать, что хорошо сформулированная целевая функция позволяет нам сравнивать, безусловно, разные алгоритмы и их качество, использовать различные методы оптимизации с типовыми метриками для проверки результатов работы. Все это резко контрастирует с теорией плоской оптимизации и кластеризации, где, например, использование медиан, средних и ядер существенно упрощает процесс анализа и делает его куда более понятным и качественным.*

**Введение.** Иерархическая кластеризация является современным и эффективным методом интеллектуального анализа данных. В условиях обработки большого количества связанных в режиме реального времени для сложных управляющих систем построение быстрых эвристик и алгоритмов представляет собой актуальную задачу с точки зрения теории управления. В докладе рассматриваются современные алгоритмы и парадигмы иерархической кластеризации, вводится понятие целевой функции иерархической кластеризации, которая позволяет решать $NP$ −сложную задачу построения оптимального дерева с необходимыми допущениями и ограничениями за приемлемое с вычислительной точки зрения время.

**Иерархическая кластеризация. Основные концепции**. В 1957 году великий британский математик Артур Кейли (1821-1895) опубликовал работу опубликовал статью под названием «On the theory of the analytical forms called trees » и позже в 1889 году другую работу под названием «A theorem on trees», где впервые и предложил новый метод абстракции данных под названием «дерево» [1, 2].

*Под иерархической кластеризацией* (также графовые алгоритмы и иерархический кластерный анализ) мы понимаем совокупность алгоритмов упорядочивания данных, направленных на создание иерархии (дерева) вложенных кластеров. Выделяют два основных метода иерархической кластеризации:

1. *Агломеративные методы:* новые кластеры создаются путем объединения более мелких кластеров и, таким образом, дерево создается от листьев к стволу.
2. *Дивизивные или дивизионные методы:* новые кластеры создаются путем деления более крупных кластеров на более мелкие и, таким образом, дерево создается от ствола к листьям [3].

Алгоритмы иерархической кластеризации предполагают, что анализируемое множество объектов характеризуется определенной степенью связанности, то есть мы можем говорить о связанных данных. Иерархическая кластеризация используется сейчас повсеместно от рекомендательных систем в YouTube до анализа динамических данных в сетях передачи данных. Алгоритмы иерархической кластеризации в научной литературе часто называют алгоритмами таксономии. Объект в рамках иерархической кластеризации может принадлежать сразу к нескольким кластерам, что в корне отличается от обычной плоской кластеризации с принадлежностью одному классу. Иерархическая кластеризация присутствует повсюду от простейших рекомендательных систем до сложнейших интеллектуальных систем управления или социальных сетей.

Как часто бывает в компьютерных науках, некоторые проблемы весьма непросто оптимизировать и такая иерархическая кластеризация здесь не исключение, что не мешает нам использо-

вать некие приближенные алгоритмы и решения. Использования таких алгоритмов требует наличие доказательства их корректной работы. Таким образом, мы и переходим к созданию теории иерархической кластеризации (ИК). То есть, изучая алгоритмы аппроксимации и их ограничения, мы продвигаемся к созданию новых алгоритмов иерархической кластеризации на основе задач разбиения графа с использованием целевых функций.

**Деревья, поддеревья и предки.** *Некорневое дерево* есть ациклический связанный граф без вершин степени 2. Вершина, имеющая одного соседа (степени 1), называется *листом*. Пример такого дерева мы видим на рисунке ниже:

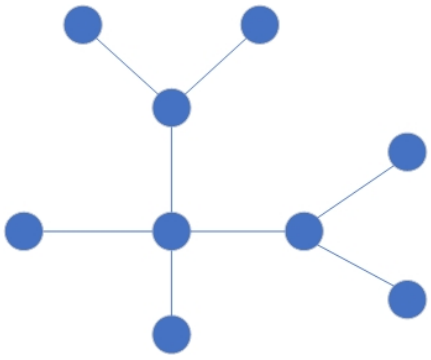


*Рис. 1. Некорневое дерево.*

Некорневые деревья не дают информации о порядке событий. Вершина $u$ корневого дерева называется *потомком* вершины $v$, если путь от $u$ до корня $r$ проходит через $v$. Таким образом, $v$ называется *предком* вершины $u$. Важным понятием является и *наименьший общий предок* $L$ *вершин* $u$ *и* $v$ в корневом дереве— наиболее удаленная вершина от корня дерева, лежащая на обоих путях от $u$ и $v$ до корня, то есть являющаяся предком обеих вершин. $T$ − корневое дерево с $n$ листьями. При удалении пути от $v$ и его родителями мы получаем два связанных подграфа. При этом набор листьев, которые являются потомками $v$ мы назовем *кластером*. Укореняя подграф с вершиной $v$ мы получаем поддерево $T$ с корнем в $v$ и которое мы обозначим как $T_v$. Если $r$ является корнем $T$, то поддеревья, ветвящиеся в корне, называются *максимальными поддеревьями* дерева $T$.

Для каждого листа $a, b, c$ существует ровно три бинарных корневых дерева с набором листов $a, b, c$ , а именно: $ab|\, c,\ ac|b,\ bc|\, a$. Такие деревья называются *корневыми тройками* или *разрешенными корневыми тройками*. В общем случае для $n$ листьев мы получаем общее количество корневых деревьев равное [4]:

$$1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-5) \times (2n-3) = \frac{(2n-3)!}{(n-2)!\, 2^{n-2}} \quad (1)$$

Для примера, в случае в случае $n = 20$ мы получим 8200794532637891559375 возможных комбинаций, а для $n = 5$ мы получаем 336 уникальных комбинаций.

**Иерархическая кластеризация. Методы.** ИК обладает весьма существенным преимуществом в сравнении с классическими плоскими задачами кластеризации с применением $k$ −средних, $k$ −медиан и $k$ −центров [5]. Напомним, что *алгоритмом обучения без учителя* называется алгоритм, который получает на входе только признаки без какой-либо подсказки со стороны учителя [6]. То есть неформально под обучением без учителя как раз и понимается попытка извлечь информацию из распределения, которое не было аннотировано человеком или которое нам попросту неизвестно [6]. Таким образом ИК может использоваться как некий непараметрический метод машинного обучения без учителя, так как данный метод не требует строго фиксированного количества кластеров $k$. При этом в случае ИК само по себе дерево несет куда больше информации о выборке и более обширную детализацию связей и зависимостей, ибо мы получаем *связанные данные*. При этом важно отметить, что существует немало весьма простых и быстрых алгоритмов, которые позволяют решать те или иные оптимизацион-

ные задачи на дереве. При этом новые кластеры создаются с использованием агломеративных или дивизивных методов кластеризации.

***Метод одиночной связи.*** Алгоритм является одним из методов иерархической кластеризации. Группировка кластеров происходит восходящим образом на каждом этапе объединяя два кластера, которые содержат ближайшую пару элементов, которые не принадлежат к тому же кластеру или к обеим кластерам. Математически—это расстояние $D(X,Y)$ между кластерами $X$ и $Y$, посчитанное с использованием какой-то метрики:

$$D\ (X,Y) = min_{x\in X, y\in Y}\ d\ (x,y) \tag{2}$$

Алгоритм работы метода будет выглядеть следующим образом:

**input:** Similarity matrix $w \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\geq 0}$.
Initialize clusters $\mathcal{C} \leftarrow \cup_{v\in V}\{v\}$.
**while** $|\mathcal{C}| \geq 2$ **do**
  Pick $A, B \in \mathcal{C}$ to maximize:
    $w(A,B) := \max_{a\in A, b\in B} w_{ab}$
  Set $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{A \cup B\} \setminus \{A, B\}$
**end while**

***Невзвешенный метод средней связи.*** При объединении кластеров вычисляется расстояние между двумя кластерами, равное среднему расстоянию между элементов двух кластеров:

$$\frac{1}{|A|\cdot|B|}\sum_{a\epsilon A}\sum_{b\epsilon B} d\ (a,b) \tag{3}$$

где d $(a,b)$—расстояние между элементами $a$ и $b$, принадлежащим кластерам $A$ и $B$, а $|A|$ и $|B|$—мощности кластеров.

Алгоритм работы метода средней связи имеет вид:

**input:** Similarity matrix $w \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\geq 0}$.
Initialize clusters $\mathcal{C} \leftarrow \cup_{v\in V}\{v\}$.
**while** $|\mathcal{C}| \geq 2$ **do**
  Pick $A, B \in \mathcal{C}$ to maximize:
    $w(A,B) := \frac{1}{|A||B|}\sum_{a\in A, b\in B} w_{ab}$
  Set $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{A \cup B\} \setminus \{A, B\}$
**end while**

***Кластеризация с полной связью.*** В случае кластеризации с полной связью расстояние между двумя кластерами равно максимальному расстоянию между двумя элементами из разных кластеров, то есть:

$$D\ (X,Y) = max_{x\in X, y\in Y}\ d(x,y) \tag{4}$$

В псевдокоде запись имеет следующий вид:

**input:** Similarity matrix $w \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\geq 0}$.
Initialize clusters $\mathcal{C} \leftarrow \cup_{v\in V}\{v\}$.
**while** $|\mathcal{C}| \geq 2$ **do**
  Pick $A, B \in \mathcal{C}$ to maximize:
    $w(A,B) := \min_{a\in A, b\in B} w_{ab}$
  Set $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{A \cup B\} \setminus \{A, B\}$
**end while**

***Невзвешенный центроидный метод.*** Расстояние между кластерами равно расстоянию между их центроидами (центрами масс).

***Метод Уорда.*** Расстояние между кластерами вычисляется с использованием методом дисперсионного анализа. В качестве расстояния между кластерами берется прирост суммы квадратов расстояний объектов до некоего центра кластера, который вычисляется путем их объединения по следующей формуле:

$$\Delta = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 - \sum_{x_i \epsilon A} (x_i - \bar{a})^2 - \sum_{x_i \epsilon B} (x_i - \bar{b})^2 \quad (5)$$

На каждом шаге алгоритма такие два кластера объединяются, которые минимально увеличивают дисперсию.

Ну и с точки зрения некой общей метрики можно использовать и обобщенную формулу А. Н. Колмогорова (1903- 1987):

$$K_\eta([i,j],k) = \left[\frac{n_i K(i,k)^\eta + (n_j K(j,k)^\eta}{n_i + n_j}\right]^{\frac{1}{\eta}}, -1 \le \eta \le +1 \quad (6)$$

где $[i,j]-$ группа из двух объектов (кластеров) $i$ и $j$ . $k-$ объект (кластер), с которым ищется сходство указанной группы; $n_i$ и $n_j$ число элементов в кластере $i$ и $j$ соответственно.

**Оптимальная кластеризация. Целевая функция.** Обозначим целевую функцию как $cost\ (T)$. Важно заметить, что задача минимизации целевой функции эквивалента задачи максимизации этой же функции [7]. Задача построения дерева, то есть решения задачи иерархической кластеризации, в общем случае относится к $NP$ -задачам с точки зрения вычислительной сложности [7]. Согласно С. Дасгупта и его работе [7] целевая функция имеет следующий вид:

$$cost_G\ (T) = \sum_{\{i,j\}\ \epsilon E} \omega_{i,j} |leaves(T_{i,j})| = \sum_{\{i,j\} \epsilon E} \omega_{i,j} |T_{i,j}| \quad (7)$$

**Машинное обучение и ИК.** Наиболее перспективным и интересным нам видится использование методов ИК для задач глубокого обучения с большими и непараметризованными данными. Применение быстрых алгоритмов приемлемой точности открывает возможность применения машинного обучения для управления сложными техническими системами на основании данных и метрик, которые система будет обрабатывать в режиме реального времени.

**Заключение.** В рамках проведенных экспериментов и тестов с алгоритмами иерархической кластеризации связанных данных осталось немало открытых вопросов, анализ которых требует дальнейших серьезных исследований. Во-первых, нам не удалось обнаружить универсального алгоритма, который эффективно и за полиномиальное время работал бы как с евклидовыми, так и с символьными или визуальными данными. Во-вторых, для работы с большими графами весьма эффективными оказываются просто случайные разбиения при ИК. Это позволяет нам делать выводы о том, что теория построения целевых функций и метрик для ИК открыта для исследователей с точки зрения теории и будущих практических решений.

ЛИТЕРАТУРА


1. Arthur Cayley. On the theory of the analytical forms called trees // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 13(85), 1857. pp. 172-176.
2. Cayley A. A theorem on trees // Quarterly J. Math, Vol. 23, 1889. pp. 376-378.
3. URL: ru.wikipedia.org/wiki/Иерархическая_кластеризация
4. Felsenstein J. Inferring phylogenies. Vol 2. MA: Sinauer associates Sunderland, 2004
5. Плас Д.В. Python для сложных задач. Наука о данных и машинное обучение. Питер, 2018.
6. Ян Гуддфеллоу, Иошуа Бенджио, Ааарон Курвилль. Глубокое обучение. Москва: Издательство ДМК, 2018. 652 pp.
7. Dasgupta S. A cost function for similarity-based hierarchical clustering 2015. URL: https:/arxiv.org/pdf/1510.05043.pdf
8. TensorFlow [Электронный ресурс]
9. Scikit Learn [Электронный ресурс] URL: https:/scikit-learn.org/stable/
10. NetworkX [Электронный ресурс] URL: http:/networkx.github.io/
11. Путь (теория графов) [Электронный ресурс] URL: https:/ru.wikipedia.org/wiki/ Теория_графов

12. Daphne Koller and Nir Friedman. Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques - Adaptive Computation and Machine Learning. The MIT Press, 2009. 1268 pp.
13. Peter W. Battaglia, Jessica B. Hamrick, Victor Bapst, Alvaro Sanchez-Gonzalez, Vinicius Zambaldi etc. Relational inductive biases, deep learning, and graph networks 2018. URL: https:/arxiv.org/pdf/1806.01261.pdf
14. Self-driving car [Электронный ресурс] URL: https:/en.wikipedia.org/wiki/Self-driving_car
15. П.В. Строев С.Б.Р. "Умный город "как новый этап городского развития, Грант РГНФ № 17-02-00269
16. NVIDIA Tegra [Электронный ресурс] URL: https:/developer.nvidia.com/tegra-development
17. ALTAIR [Электронный ресурс] URL: https:/www.altair.com/monarch/
18. ASAP [Электронный ресурс] URL: https:/www.asapnetwork.org/
19. Hadoop.apache.org [Электронный ресурс] URL: https:/hadoop.apache.org/docs/r1.2.1/mapred_tutorial.html
20. Google [Электронный ресурс] URL: https:/en.wikipedia.org/wiki/Google
21. Apache Flink [Электронный ресурс] URL: https:/flink.apache.org/
22. Derek G. Murray, Frank McSherry, Rebecca Isaacs, Michael Isard, Paul Barham, and Martin Abadi. Naiad: A Timely Dataflow System // ACM. Farminton, Pennsylvania. 2013. Vol. Proceedings of the Twenty-Fourth ACM Symposium on Operating Systems Principles. SOSP ’13. pp. 439-455.
23. Spark.Apache.org [Электронный ресурс] URL: https:/spark.apache.org/
24. П.П. Кейно, А.В. Силуянов. Разработка и внедрение интерпретатора декларативного языка моделирования Web-интерфейсов на высоконагруженных системах // Прикладная информатика, Vol. 10, No. 55, 201. pp. 55-70.
25. Ian Robinson, Jim Webber, and Emil Eifrem. Graph Databases. O’Reilly Media, Inc, 2013.
26. Joseph Gonzalez, Reynold Xin, Ankur Dave, Daniel Crankshaw, Michael J. Franklin. GraphX: Graph Processing in a Distributed Dataflow Framework // 11th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI 14). Broomfield. Oct. 2014.
27. Resource Description Framework [Электронный ресурс]
URL: https:/ru.wikipedia.org/wiki/Resource_Description_Framework
28. Yucheng Low, Joseph Gonzalez, Aapo Kyrola, Danny Bickson, Carlos Guestrin, Joseph Hellerstein. GraphLab: A New Framework For Parallel Machine Learning // https://arxiv.org/. 2010.
URL: https:/arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1408/1408.2041.pdf
29. Grzegorz Malewicz, Matthew H. Austern, Aart J.C Bik, James C. Dehnert, Ilan Horn, Naty Leiser, and Grzegorz Czajkowski. Pregel: A System for Large-scale Graph Processing // Proceedings of the 2010 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. Indianapolis, Indiana, USA. 2010. pp. 135-146.
30. Joseph E. Gonzalez, Yucheng Low, Haijie Gu, Danny Bickson, and Carlos Guestrin. PowerGraph: Distributed Graph-parallel Computation on Natural Graphs // Proceedings of the 10th USENIX Conference on Operating Systems Design and Implementation. OSDI’12. Hollywood, CA, USA. 2012. pp. 17-30.
31. github.com [Электронный ресурс] URL: https:/github.com/jegonzal/PowerGraph
32. Meraj Hashemizadeh, Michelle Liu, Jacob Miller, Guillaume Rabusseau. Adaptive Tensor Learning with Tensor Networks // arxiv. 2020. URL: https:/arxiv.org/pdf/2008.05437.pdf
33. URL: https:/en.wikipedia.org/wiki/Karger%27s_algorithm

---

**D.G. Arsenjev, D.E. Baskakov, V.P. Shkodyrev** (Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg).
**Requirements to formatting the papers to be published in the Proceedings of the Multiconference on Control Problems**

*Abstract.* When working with big data of different properties and qualities, at some stage it is extremely effective to start using hierarchical clustering. At the same time, despite many different applications and heuristics, the theory that underlies hierarchical clustering is still not fully developed. There is no theory that would highlight the analysis of the quality of the performed clustering, a theory that would be devoted to the analysis of the objective function of the constructed tree. And how do you build such an objective function? At the same time, it is important to understand that a well-formulated objective function allows us to compare, of course, different algorithms and their quality, to use various optimization methods with typical metrics to check the work results. All this contrasts sharply with the theory of flat optimization and clustering, where, for example, the use of medians, means and kernels significantly simplifies the analysis process and makes it much more understandable and qualitative.

Н.А. БАБУШКИНА
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва)

# ЭФФЕКТИВНЫЕ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ ВВЕДЕНИЕМ ПРОТИВООПУХОЛЕВЫХ ВАКЦИН: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*В работе представлены модели воздействия на опухоль двух видов противоопухолевых вакцин – на основе вируса и на основе дендритных клеток. В результате определены максимально эффективные стратегии введения таких вакцин, подавляющие рост опухоли или стабилизирующие ее размеры на уровне, соответствующем началу лечения.*

**Введение.** Для решения проблемы успешного лечения онкологических заболеваний в настоящее время широко изучаются различные методы противоопухолевой иммунотерапии. Преимуществом иммунотерапии является её нетоксичность, в отличие от химиотерапии и лучевой терапии. При этом экспериментально доказано, что противоопухолевая иммунотерапия позволяет добиться регрессии опухоли или её стабилизации, что значительно увеличивает продолжительность жизни поражённого организма.

В данной работе поставлена задача сравнить эффективность двух противоопухолевых вакцин (ПВ) на вирусе венесуэльского энцефаломиелита лошадей (ВЭЛ) и на дендритных клетках (ДК) по результатам математического моделирования взаимодействия опухолевых клеток с антителами иммунной системы. Решение этой задачи предусматривает определение трёх параметров, которые управляют процессом гибели опухолевых клеток при введении ПВ. Во-первых, вид зависимости «доза – эффект», которая задаёт диапазон эффективных доз. Во-вторых, интервал между введениями ПВ, который определяется скоростью развития иммунного ответа на введение вакцины. Третьим параметром является количество повторных введений вакцины.

Исходными данными для построения модели являются экспериментальные кривые роста опухоли без лечения (контроль). Рост опухоли без лечения описывается уравнением:

$$dN(t)/dt = \lambda(t)N(t), \quad (1)$$

где $N(t)$ – численность популяции опухолевых клеток, $N(t_0) = N_0 = 0.78$ – начальное количество опухолевых клеток в момент $t_0 = 0$, $\lambda(t) = \alpha_N \beta_N exp(-\beta_N t)$ – скорость роста экспериментальной опухоли. Кинетическая кривая роста экспериментальной опухоли без лечения описывается функцией Гомпертца $N(t) = N_0 exp(\alpha_N (1 - \beta_N exp(-\beta_N t))$, при $\alpha_N$=3.3613, $\beta_N$=0.0332 [1].

Динамика роста опухоли после введения ПВ зависит от математической модели, которая описывает механизм гибели опухолевых клеток в результате иммунной реакции организма.

Предлагаемый доклад посвящен сравнительному анализу эффективных стратегий управления лечением для двух методов иммунотерапии. Один метод направлен на стимуляцию Т-клеточного иммунного ответа при введении вакцины на основе дендритных клеток (ВДК). Другой метод направлен на стимуляцию В-клеточного гуморального иммунного ответа при введении вирусной вакцины на основе вируса (ВВ).

***Математическая модель противоопухолевой вакцинотерапии на дендритных клетках.*** Процесс передачи информации ДК о специфичном антигене опухоли происходит вне организма, в котором развивается опухоль. Незрелые ДК выделяют из крови организма и по специальным технологиям организуют возможность созревать в контакте с опухолевыми клетками своего организма [2-6]. Полученные антигенпрезентативные ДК вводят обратно в кровь организма для стимуляции клеточного иммунного ответа. Система дифференциальных уравнений математической модели записывается в соответствии с этапами развития клеточного иммунного ответа.

Динамика численности антигенпрезентативных ДК, несущих информацию о антигене опухоли $DK^N(t)$, описывается дифференциальным уравнением:

$$dDK^N(t)/dt = -\alpha_{DK}(t)DK^N(t), \quad (2)$$

где $DK^N_0$ – вводимая доза антигенпрезентативных ДК, $t_1$ – момент введения ДК, $\alpha_{DK}(t)$ – темп расхода антигенпрезентативных ДК при передаче антигена опухоли Т-лимфоцитам предшественникам. Функция $\alpha_{DK}(t)$ записывается в виде:

$$\alpha_{DK}(t) = 1/\pi K_1 \times \alpha rctg(2\alpha_1\beta_1 t/(1-\beta_1^2 t^2)),$$

где $K_1$ = 0,96, $\alpha_1$ = 0,1 – постоянные параметры, и $\beta_1=1/t_1$*, где $t_1$*= 3 суток – время, за которое расходуется половина из числа ДК, введённых в организм [5].

Динамика численности антиген активированных Т-лимфоцитов предшественников $TL^N(t)$ описывается дифференциальным уравнением:

$$dTL^N(t)/dt = \alpha_{TL} DK^N(t) - \beta_{TL} TL^N(t), \quad (3)$$

где $\alpha_{TL}$=2,43 – скорость увеличения числа антиген активированных Т-лимфоцитов, получающих информацию об антигене опухоли от антигенпрезентативных ДК, $\beta_{TL}$=0,3 – скорость расхода активированных Т-лимфоцитов за период образования цитотоксических Т-лимфоцитов киллеров.

Динамика численности цитотоксических Т-лимфоцитов киллеров $CTL(t)$ описывается дифференциальным уравнением:

$$dCTL(t)/dt=\alpha_{CTL}(t) TL^N(t)-\beta_{CTL} CTL(t), \quad (4)$$

где $TL^N(t)$ – численность антиген активированных Т-лимфоцитов предшественников, $\beta_{CTL}$ – скорость расхода цитотоксических Т-лимфоцитов киллеров на уничтожение опухолевых клеток, $\alpha_{CTL}(t)$ – скорость образования цитотоксических Т-лимфоцитов киллеров из Т-лимфоцитов предшественников, которая описывается функцией $\alpha_{CTL}(t)= \alpha_{CTL}^{max}[1-1/\pi\ K_2 \times \alpha rctg(2\alpha_2\beta_2 t/(1-\beta_2^2 t^2))]$, где $\alpha_{CTL}^{max}$ = 2,43 – максимальная скорость образования цитотоксических Т-лимфоцитов киллеров, $K_2$ = 0,96, $\alpha_2$=0,1 – постоянные параметры, и $\beta_2=1/t_2$*, где $t_2$*=4,5 суток – время, за которое образуется половина максимального количества цитотоксических Т-лимфоцитов киллеров [6].

Динамика роста популяции опухолевых клеток $N(t)$ после введения ДК в момент $t_1$ описывается дифференциальным уравнением:

$$dN(t)/dt = [\lambda(t) - K_{CTL} CTL(t)]N(t), \quad (5)$$

где $N(t_1) = N_0\ exp(\alpha_N\ (1 - \beta_N exp(-\beta_N t_1))$ – размер опухоли в момент введения ВДК, $\lambda(t)$ – скорость роста экспериментальной опухоли в контроле, $K_{CTL}$=0,8 – скорость расхода цитотоксических Т-лимфоцитов киллеров.

Как показали результаты моделирования, однократное введение максимально эффективных доз ДК не приводит к полному уничтожению опухолевых клеток. Были исследованы различные схемы многократного введения ДК в различных сочетаниях доз и интервалов между введениями. Проведённые исследования позволили выявить наиболее эффективный режим введения ДК, который приводит к полному уничтожению опухоли. Необходимым условием для достижения такой эффективности является первоначальное введение максимально эффективной дозы, которая выбирается в зависимости от размера опухоли в момент начала лечения. Затем повторные введения можно проводить, используя минимально эффективную дозу с интервалом в 2-е суток.

***Математическая модель противоопухолевой вирусной вакцинотерапии.*** Вакцины с вирусом ВЭЛ (ВВ) вызывают последовательно двухэтапную гибель опухолевых клеток [1,7]. Первый этап гибели вызван самим вирусом, который разрушает опухолевую клетку, размножаясь в ней. Второй этап гибели связан с тем, что вирус, осаждаясь на опухолевых клетках, оставляет на поверхности их мембран новые белковые образования. В результате иммунная система воспринимает инфицированные вирусом опухолевые клетки как новые чужеродные тела. В организме развивается иммунный ответ против инфицированных опухолевых клеток, что приводит их к гибели. Математическая модель вирусной вакцинотерапии, описывающая динамику двухэтапной гибели опухолевых клеток, представлена в виде системы дифференциальных уравнений [1,8-9].

Динамика роста опухоли до введения ВВ описывается дифференциальным уравнением:

$$dN(t)/dt = \lambda(t)N(t),\ t \in [t_0,t_V], \text{ при } N_V(t_0) = N_0 \quad (6)$$

где $N(t)$ – популяция опухолевых клеток до введения ВВ, $t_V$ – момент начала иммунной реакции против вирусов.

Динамика роста и гибели инфицированных опухолевых клеток после введения вируса на первом этапе иммунного ответа описывается дифференциальным уравнением:

$$dN_V(t)/dt = [\lambda(t) - K_V\, V(t) - K_{AV}\, A_V(t)]\, N_V(t),\ t \in [t_V, t_N],\ \text{при}\ N_{V0} = N(t_V) \qquad (7)$$

где $N_V(t)$ – популяция инфицированных опухолевых клеток после введения ВВ, $V(t)$ – численность вирусов, $A_V(t)$ – численность антител против вируса, $K_V$ –коэффициент темпа размножения вируса, $K_{AV}$ –коэффициент темпа гибели вирусов в результате взаимодействия с антителами $A_V(t)$, $t_N$ – момент начала иммунной реакции против инфицированных опухолевых клеток.

Динамика роста и гибели инфицированных опухолевых клеток под действием антител на втором этапе иммунного ответа описывается дифференциальным уравнением:

$$dN_V(t)/dt = [\lambda(t) - K_{AN} A_N(t)] N_V(t),\ t \in [t_N, t_L],\ \text{при}\ N_{V0} = N(t_N) \qquad (8)$$

где $A_N(t)$ – численность антител против инфицированных опухолевых клеток, $K_{AN}$ – размерный коэффициент, $t_L$ – продолжительность жизни организма без опухоли.

Механизм образования антител на каждом этапе иммунного ответа определялся на основании модели инфекционного заболевания Г.И. Марчука, параметры которой адаптированы для экспериментальных кривых роста опухоли после введения ВВ [10,11].

В результате проведённых исследований на модели были определены эффективные стратегии введения ВВ, которые позволяют либо стабилизировать размер опухоли, зафиксированный в момент начала лечения, либо добиваться полного уничтожения опухоли путём сокращения длительности интервалов между введениями ВВ и увеличения количества повторных введений.

**Заключение.** Сравнительный анализ двух методов иммунотерапии указывает на то, что размер опухоли в момент начала лечения определяет эффективность лечебного процесса. Вид зависимости эффективной дозы от размера опухоли не является линейной для любого вида рассмотренных вакцин.

Показано, что метод ВДК более эффективно действует на опухоль и может подавлять ее рост на длительном интервале времени после лечения.

Показано, что метод ВВ более эффективен для стабилизации роста опухоли, но не может гарантировать возобновления роста опухоли.

Математическое моделирование позволяет существенно сокращать период экспериментального изучения новых методов иммунотерапии и ограничивать объём заранее спланированных экспериментов, что сокращает стоимость научных исследований.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Бабушкина Н.А., Кузина Е.А., Лоос А.А., Беляева Е.В.** Оценка эффективных стратегий применения противоопухолевой вакцинотерапии на основе математического моделирования // Математическая биология и биоинформатика. 2019. Т.14. №1. С.34-54. doi: 10.17537/2019.14.34
2. **Гриневич Ю. А., Храновская Н. Н.** Вакцины на основе антигенпрезентирующих дендритных клеток в иммунотерапии больных со злокачественными опухолями. // Онкология. 2007. Т. 9. № 4. С. 365 – 370.
3. DePillis L., Gallegos A., Radunskaya A. A model of dendritic cell therapy for melanoma // *Molecular and cellular oncology*. 2013.Vol. 3. № 56. P. 1 – 14.
4. Köse E., Moore S., Ofodile C., Radunskaya A., Swanson E. R., Zollinger E. Immuno-kinetics of immunotherapy: dosing with DCs // *Letters in Biomathematics*. 2013. Vol. 4. № 1. P. 39 – 58.
5. Ludewig B., Krebs P., Junt T., Metters H., Ford N. G., Anderson R. M., Bocharov G. Determining control parameters for dendritic cell – cytotoxic T lymphocyte interaction // European journal of immunology. 2004. № 34. P. 2407 – 2418.
6. Kim R., Woods T., Radunskaya A. Mathematical modeling of tumor immune interactions: A closer look at the role of a PD-L1 inhibitor in cancer immunotherapy // Spora: A Journal of Biomathemanics. 2018. Vol. 4. № 1, P. 25-41.
7. Babushkina N., Kuzina E. Analytical study of the antitumor viral vaccine introduction regimens based on mathematical modeling // Advances in Systems Science and Applications. 2018. Vol.18. № 1. P.59–84.
8. **Лежнин Ю.Н., Кравченко Ю.Е., Фролова Е.И., Чумаков П.М., Чумаков С.П.** Онкотоксические белки в противораковой терапии: Механизмы действия // Молекулярная биология. 2015. Т. 49, № 2, С. 264 – 278.
9. **Локтев В. Б., Иванькина Т.Ю., Нетесов С.В., Чумаков П.М.** Онколитические парвовирусы. Новые подходы к лечению раковых заболеваний // Вестник Российской академии медицинских наук. 2012. №. 2. С. 42 – 47.
10. **Марчук Г.И.** Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М.: Наука, 1991. 304 с.

11. **Романюха А.А.** Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2011. 293 с.

**N.A.Babushkina** (V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow). **Efficient strategies for controlling antitumor vaccine introduction: mathematical modelling**

*Abstract.* The paper presents mathematical models of the interaction between tumor cells and antibodies that were formed in response to the two types of antitumor vaccines: based on Venezuelan equine encephalitis (VEE) virus and based on dendritic cells. As a result of computational experiments based on these models, efficient strategies for vaccine administration are defined. These strategies allow suppressing tumor growth or stabilizing tumor size at the pre-treatment level.

А. А. КУЗЬМЕНКО
(Южный федеральный университет, г. Таганрог)

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРСИРОВАННОГО СКОЛЬЗЯЩЕГО РЕЖИМА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ СИНХРОННЫМ ДВИГАТЕЛЕМ С ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ

*В работе представлена методика синтеза нелинейных векторных законов управления синхронным двигателем с постоянными магнитами с форсированным скользящим режимом, которая базируется на синергетической теории управления, обеспечивает повышение скорости протекания процессов скольжения и позволяет преодолеть трудности синтеза традиционных систем со скользящим режимом.*

**Введение.** Задача обеспечения робастности к параметрическим и внешним возмущениям является достаточно распространенной задачей управления сложными техническими объектами. Для реализации свойства робастности проектировщиками применяются различные методы и подходы современной теории управления. Одним из таких характерных подходов выступает скользящее управление (sliding mode control), используемое для синтеза линейных и нелинейных законов управления различными объектами [1]. Однако при синтезе SMC по-прежнему остаются актуальными трудности векторного синтез, снижения влияния или исключения высокочастотного переключения знака сигнала управления (chattering эффекта) и анализа устойчивости замкнутой системы. Предлагаемый доклад посвящен использованию форсированного скользящего режима (ФСР) синергетической теории управления (СТУ) для векторного управления синхронным двигателем с постоянными магнитами (СДПМ).

***Методика синтеза управления.*** Путем организации нового скольжения вдоль поверхности еще более низкой размерности можно ускорить протекание процесса скольжения. Такая процедура синтеза скользящего управления обеспечивает организацию ФСР [2], что в свою очередь позволяет не только ускорить протекание переходного процесса, но и наделить систему свойствами инвариантности к изменению в широком диапазоне параметров объекта и к внешним возмущениям. А также, как показано в [2], позволяет упростить задачу анализа устойчивости замкнутой системы. Методика синтеза законов управления с ФСР является развитием методики синтеза скользящего управления в рамках СТУ [2, 3] в силу общности этапов процедуры синтеза, подхода к анализу устойчивости и условий возникновения скользящего режима. А ее отличительными особенностями являются то, что на всех этапах синтеза вводятся многообразия, содержащие модуль, а в силу этого не только внешние, но и все «внутренние» (промежуточные) управления будут иметь разрывную структуру.

Пусть исходные дифференциальные уравнения объекта управления имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1,...,x_n) + a_{j+1}x_{j+1}, \ j=\overline{1,n-1}; \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1,...,x_n) + u, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = [x_1,...,x_n]^T$ – вектор переменных состояния, $\dim \mathbf{x} = n \times 1$; $u = u(\mathbf{x})$ – скалярное управление, $f_i(x_1,...,x_n)$, $i=\overline{1,n}$ – непрерывные дифференцируемые функции.

Для системы (1) ставится задача синтеза SMC с ФСР: требуется определить такое управление $u = u(\mathbf{x})$ в функции переменных состояния объекта (1), которое обеспечивает перевод изображающей точки (ИТ) объекта из произвольного исходного состояния (в некоторой допустимой области) в заданное состояние, определяемое желаемым инвариантом – целью управления, и робастности к параметрическим и / или внешним возмущениям.

На первом этапе синтеза закона управления с ФСР вводится многообразие вида

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j |x_j| + |s_1| = 0 \tag{2}$$

с поверхностью скольжения первого порядка ($k=1$)

$$s_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{kj} x_j + x_n + u_2\left(x_1,...,x_{n-1}\right), \tag{3}$$

где $\alpha_{kj}$, $\beta_j$ могут быть любыми выражениями, за счет выбора которых движению системы (1) в скользящем режиме придаются требуемые динамические свойства, в частности, $\{\alpha_{kj},\beta_j\} = \text{const}$; $u_2\left(x_1,...,x_{n-1}\right)$ – неизвестная на данном этапе непрерывная функция, играющая роль «внутреннего» управления для декомпозированной системы следующего, после первого, этапа:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_j\left(t\right) = f_j\left(x_1,...,x_j\right) + a_{j+1}x_{j+1}, \;\; j = \overline{1,n-2}; \\ &\dot{x}_{n-1}\left(t\right) = f_{n-1}\left(x_1,...,x_{n-1}\right) - a_n \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{kj} x_j - a_n u_2\left(x_1,...,x_{n-1}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Далее рассматривается основное функциональное уравнение метода АКАР [2]:

$$T_i \dot{\psi}_i\left(t\right) + \psi_i = 0, \tag{5}$$

где $\dot{\psi}_i\left(t\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \dot{x}_j\left(t\right)$ – полная производная многообразия, определяемая в силу уравнений системы (1).

Тогда, раскрывая (5) в силу исходных уравнений объекта (1), многообразия (2) и поверхности скольжения (3), находим выражение исходного управления:

$$\begin{aligned} u = &-\sum_{j=1}^{n-1}\left(\alpha_{kj} + \frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)\left(f_j\left(x_1,...,x_n\right) + a_{j+1}x_{j+1}\right) - f_n\left(x_1,...,x_n\right) - \\ &-\left(\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \left(f_j\left(x_1,...,x_n\right) + a_{j+1}x_{j+1}\right)\text{sign}\, x_j + \frac{1}{T_1}\psi_1\right)\text{sign}\, s_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что выражение (6) можно представить в виде

$$u = u_{eq} + u_{SMC},$$

здесь $u_{eq} = -\sum_{j=1}^{n-1}\left(\alpha_{kj} + \frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)\left(f_j\left(x_1,...,x_n\right) + a_{j+1}x_{j+1}\right) - f_n\left(x_1,...,x_n\right)$ – эквивалентное управление; $u_{SMC} = -\left(\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \left(f_j\left(x_1,...,x_n\right) + a_{j+1}x_{j+1}\right)\text{sign}\, x_j + \frac{1}{T_1}\psi_1\right)\text{sign}\, s_1 = -M\left(\mathbf{x}\right)\text{sign}\, s_1$ – разрывное управление, в котором $M\left(\mathbf{x}\right)$ – нелинейная функция, являющаяся аналогом большого коэффициента усиления SMC [1].

Управление (6) переводит ИТ системы (1) из произвольного начального состояния на многообразие $\psi_1 = 0$ (2). В связи с тем, что движение относительно $\psi_1 = 0$ асимптотически устойчиво при $T_1 > 0$, то это означает, что ИТ неизбежно попадает на подмногообразие (3), т.е. на поверхность скольжения.

На втором этапе синтеза закона управления с ФСР осуществляется синтез закона управления, обеспечивающего ФСР уже вдоль выбранной поверхности скольжения первого этапа (3), а также на этом этапе мы определяем выражение «внутреннего» управления $u_2\left(x_1,...,x_{n-1}\right)$. Если еще раз применить процедуру синтеза первого этапа, то в исходной системе возникает скольжение второго порядка, или ФСР. Иначе говоря, на поверхности скольжения первого порядка организуется новое скольжение, понижающее размерность исходной системы еще на единицу.

Таким образом, на втором этапе синтеза для декомпозированной системы (4) аналогично вводится многообразие вида (2):

$$\psi_2 = \sum_{j=1}^{n-2} \beta_j \left| x_j \right| + \left| s_2 \right| = 0, \tag{7}$$

в которую входит поверхность скольжения второго порядка (*k=2*) вида (3):

$$s_2 = \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_{kj} x_j + x_{n-1} + u_3 \left( x_1, ..., x_{n-2} \right). \tag{8}$$

Аналогичным образом на основе функциональных уравнений вида (5) находим промежуточное управление $u_2 \left( x_1, ..., x_{n-1} \right)$. Указанную процедуру второго этапа при необходимости можно повторять (*n-1*) раз, пока порядок исходной системы не станет равным единице, например, вида

$$\dot{x}_1 \left( t \right) = f_1 \left( x_1 \right) - a_2 u_{m+1} \left( x_1 \right) \tag{9}$$

или пока не обеспечим желаемый целевой инвариант (или целевые инварианты при векторном синтезе). Выражение $u_{m+1} \left( x_1 \right)$ для финишной декомпозированной системы (9) выбирается или находится методами СТУ или каким-либо другими методами современной теории управления. Затем полученное выражение $u_{m+1} \left( x_1 \right)$ подставляется в предыдущее управление $u_m \left( x_1, x_2 \right)$, которое, в свою очередь, подставляется в $u_{m-1} \left( x_1, x_2, x_3 \right)$ и т. д., вплоть до управления $u_2 \left( x_1, ..., x_{n-1} \right)$, непосредственно входящего в закон управления (6).

Отметим, что на каждом этапе синтеза необходимо проверять условие возникновения скользящего режима [1] по неравенству:

$$s_k \cdot \dot{s}_k \left( t \right) < 0 \tag{10}$$

или по функции Ляпунова:

$$V_k \left( \mathbf{x} \right) = 0,5 s_k^2 .$$

Условия устойчивости замкнутой системы согласно СТУ [2] складываются из условий устойчивости всех введенных функциональных уравнений вида (5) и условий устойчивости финишной декомпозированной системы, размерность которой существенно меньше размерности исходной системы.

Приведенная выше методика синтеза скалярного SMC с ФСР справедлива и для векторного синтеза: в этом случае на первом этапе синтеза по числу каналов управления вводятся многообразия вида (2), а последующие этапы идентичны этапам, описанным выше. В общем случае и на последующих этапах может вводится несколько многообразий. Рассмотрим описание предлагаемой методики на конкретном примере.

***Синтез закона управления.*** Согласно [4] математическая модель СДПМ в осях *q, d* описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}\left( t \right) &= \frac{1}{J}\left( K_t i_q - B\omega - z \right); \\
\dot{i}_d \left( t \right) &= \frac{1}{L}\left( -R_s i_d + L n_p \omega i_q + u_d \right); \\
\dot{i}_q \left( t \right) &= \frac{1}{L}\left( -R_s i_q - L n_p \omega i_d - n_p \phi_f \omega + u_q \right); \\
\dot{z}\left( t \right) &= \omega - \omega_0,
\end{aligned} \tag{11}$$

где $\omega$ – частота вращения ротора; $J$ – момент инерции; $i_q, i_d$ – проекции тока статора по осям *q, d* соответственно; $B$ – коэффициент вязкого трения; $z \to T_L$ – динамическая оценка момента нагрузки $T_L$; $L$ – индуктивность статора; $R_s$ – активное сопротивление статора; $n_p$ – количество пар полюсов; $u_q, u_d$ – проекции напряжения статора по осям *q, d* соответственно (управления); $\phi_f$ – потокосцепление ротора; $K_t = 1,5 n_p \phi_f$ – константа, $\omega_0$ – заданное значение частоты вращения.

Поскольку внешнее возмещение не должно входить в структуру законов управления, то, предполагая, что изменения момента нагрузки $T_L$ носят кусочно-постоянный характер, в первом уравнении системы (11) момент нагрузки $T_L$ заменен его динамической оценкой. Целями управления (целевыми инвариантами) для СДПМ являются [4]: стабилизация проекции тока статора по оси *d:* $i_d = 0,$ стабилизация частоты вращения ротора: $\omega = \omega_0$. Для системы (11) ставится задача построения законов скользящего управления $u_q, u_d$ с ФСР, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы, выполнение целевых инвариантов и робастность к внешнему возмущению – моменту нагрузки $T_L$.

Опираясь на метод синтеза законов скользящего управления на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий СТУ, подробно изложенный в [2, 3], опишем процедуру синтеза законов векторного управления СДПМ с ФСР.

Из (11) видно, что управление $u_d$ непосредственно воздействует на ток $i_d$ и, соответственно, задаем инвариантное многообразие СТУ, обеспечивающее выполнение инварианта $i_d = 0$ в явном виде

$$\psi_1 = |i_d| = 0\,. \tag{12}$$

Аналогично, управление $u_q$ в (11) непосредственно не воздействует на частоту вращения $\omega$ и, соответственно, задать инвариантное многообразие, обеспечивающее выполнение инварианта $\omega = \omega_0$, в явном виде нельзя. В этой ситуации применяем последовательную процедуру метода синтеза законов скользящего управления на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий. Задаем инвариантное многообразие вида

$$\psi_2 = \beta_1 |\omega - \omega_0| + \beta_2 |z| + |s_1| = 0, \tag{13}$$

где $s_1 = \alpha_{11}(\omega - \omega_0) + \alpha_{12} z + K_t i_q + u_2(\omega, z)$ – поверхность скольжения, $u_2(\omega, z)$ – «внутреннее» управление.

Подставляя (12) и (13) в соответствующее функциональное уравнение СТУ вида (5) получаем в силу уравнений объекта (11) искомые нелинейные законы скользящего управления:

$$u_d = R_s i_d - L n_p \omega i_q - L\psi_1 \operatorname{sign}(i_d)/T_1; \tag{14}$$

$$\begin{aligned} u_q = -L\Big[\beta_1 \operatorname{sign}(\omega - \omega_0)\big(K_t i_q - B\omega - z\big)/J + \beta_2(\omega - \omega_0)\operatorname{sign} z + \psi_2/T_2\Big]\operatorname{sign}(s_1)/K_t + R_s i_q + \\ + L n_p \omega i_d + n_p \phi_f \omega - \frac{L}{K_t J}\left(\alpha_{11} + \frac{\partial u_2}{\partial \omega}\right)\big(K_t i_q - B\omega - z\big) - \frac{L}{K_t}\left(\alpha_{12} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)(\omega - \omega_0). \end{aligned} \tag{15}$$

Под действием управлений (14), (15) ИТ системы (11) попадает в окрестность пересечения многообразий (12), (13), на котором $s_1 = 0$ и движение вдоль которого описывается декомпозированной системой:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= \big(-\alpha_{11}(\omega - \omega_0) - \alpha_{12} z - u_2(\omega, z) - B\omega - z\big)/J; \\ \dot{z}(t) &= \omega - \omega_0. \end{aligned} \tag{16}$$

В выражение (15) входят частные производные неизвестного на данном этапе «внутреннего» управления $u_2(\omega, z)$, для нахождения которого осуществим второй этап синтеза: т. к. в (16) управление $u_2(\omega, z)$ уже непосредственно воздействует на частоту, поэтому, согласно методике СТУ [2], вводим многообразие, отражающее целевой инвариант $\omega = \omega_0$ и обеспечивающее компенсацию возмущения:

$$\psi_3 = \beta_3 |z| + |s_3| = 0\,, \tag{17}$$

где $s_3 = (\omega - \omega_0) + \gamma z$, $\gamma$ – некоторая константа.

Из функционального уравнения вида (5) в силу уравнений декомпозированной системы (16) и многообразия (17) находим:

$$u_2(\omega, z) = J\big[\beta_3(\omega - \omega_0)\operatorname{sign} z + \psi_3/T_3\big]\operatorname{sign} s_3 - (\omega - \omega_0)(\alpha_{11} - J\gamma) - B\omega - z(1 + \alpha_{12}). \tag{18}$$

Движение ИТ вдоль $\psi_3 = 0$ описывается следующей, после (16), декомпозированной системой:

$$\dot{z}(t) = -\gamma z. \qquad (19)$$

Согласно СТУ [2] условие устойчивость замкнутой системы (11) с синтезированными законами управления (14), (15) складывается из условия устойчивости финишной декомпозированной системы (19), в нашем случае это $\gamma > 0$, и условий устойчивости движения к введенным многообразиям (12), (13) и (17), которые определяются условиями устойчивости соответствующих функциональных уравнений вида (5), в нашем случае это $T_i > 0, i = \overline{1,3}$. Проверим также выполнения условия возникновения скользящего режима [1]: $s_i \cdot \dot{s}_i(t) < 0,\ i = 1,3$. Данные условия выполняются при $\gamma, T_2, T_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_{11}, \alpha_{12} > 0$.

Итак, вычислив частные производные $u_2(\omega, z)$ из (18) и подставив их в (15), получим итоговые выражения для нелинейных законов управления (14), (15), обеспечивающих ФСР, устойчивость замкнутой системы, выполнение целевых инвариантов и робастность к внешнему возмущению – моменту нагрузки $T_L$. Но для того чтобы исключить дифференцирования функции $\text{sign}(\bullet)$ в управлении (18), рекомендуется ее заменить на непрерывную функцию $\text{th}(A\bullet)$, здесь $A$ – большой коэффициент, $(\bullet)$ – аргумент функции $\text{sign}(\bullet)$.

На рис. 1, 2 показаны результаты моделирования замкнутой системы (11) с законами управления с ФСР (14), (15). При моделировании до момента *t=0,06* с на СДПМ действует момент нагрузки $T_L$=2,4 *Н·м*, а после $T_L$=3,6 *Н·м*. При это на рис. 1 для иллюстрации ускорения процессов синей линией показано изменение частоты вращения с законами с ФСР (14), (15), а красной линией – с законами управления с обычным скользящим режимом [5], т.е. без ФСР.

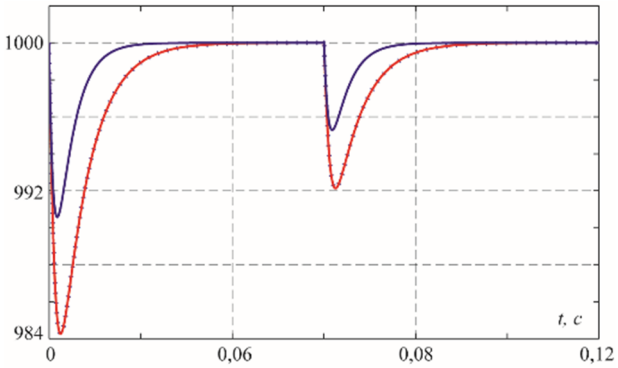



Рис. 1. График изменения частоты вращения

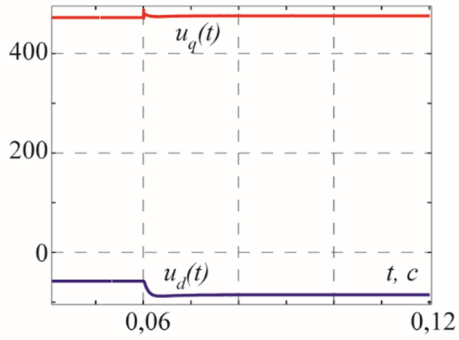



Рис. 2. Графики изменения управлений

**Заключение.** В работе получены нелинейные законы правления с ФСР для СДПМ, обеспечивающие достижение целевых инвариантов, робастность к изменению момента нагрузки, повышение быстродействия, а выбором параметров этих законов можно исключить chattering эффект. При этом упрощается процедура анализа устойчивости замкнутой системы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ – грант №19-08-00366.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Utkin V., Guldner J., Shi J.** Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. 2nd ed. Boca Raton, London: CRC Press, Taylor and Francis, 2009. 504 p.
2. **Колесников А.А.** Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.
3. Колесников А.А., Кузьменко А.А. Синтез законов разрывного управления на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий метода АКАР. *Мехатроника, автоматизация и управление*. 2019. Т. 20, № 8. С. 451-460.
4. **Krishnan R.** Electric Motor Drives: Modeling, Analysis and Control. New Jersey: Prentice-Hall, 2001. 652 p.
5. **Кузьменко А.А.** Робастное управление синхронным двигателем с постоянными магнитами: синергетический подход. *Мехатроника, автоматизация и управление*. 2020. Т. 21, № 8. С. 480-488.

**A.A. Kuz'menko** (Southern Federal University, Taganrog city). **Using forced sliding mode to control a permanent magnet synchronous motor**

*Abstract.* The paper presents a method for the synthesis of nonlinear vector control laws for a permanent magnet synchronous motor with forced sliding mode, which based on the synergetic control theory. It provides an increase in the speed of sliding processes and allows you to overcome the difficulties of synthesis with a classical sliding mode.

Е. Н. ОБУХОВА
(Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону)

# УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОПНЕВМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПРОТИВОДАВЛЕНИЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ АГРЕГИРОВАННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

*В докладе рассмотрен синтез законов управления электропневматической системой с использованием метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов. Достижение поставленных целей управления осуществляется за счет задания инвариантных многообразий. Проведен сравнительный анализ с наиболее часто используемом управлении пневмоавтоматикой - методом типовых регуляторов.*

**Введение.** Технологическая актуальность задачи управления пневматической системой, связана со сложностью точного и плавного торможения поршня пневмопривода в заданной координате его траектории. Это обосновано тем, что рабочим телом системы является сжатый воздух, обладающий физическим свойством сильной сжимаемости, а так же существенной нелинейностью происходящих в системе термодинамических процессов.

В прошлом веке наиболее используемыми в управлении пневматическими системами были промышленные регуляторы, реализующие типовые линейные законы управления, посредством настройки П, И, Д составляющих регулятора. Активное развитие в последние десятилетия микропроцессорной техники привело к усовершенствованию алгоритмов настройки ПИД регуляторов. На данный момент имеются промышленные регуляторы с автоматической настройкой параметров, использующие адаптивные алгоритмы, нейронные сети, методы нечеткой логики, а так же генетические алгоритмы [1].

В данной работе предлагается рассмотреть синтез нелинейных синергетических законов управления положением поршня пневмопривода, путем изменения давлений в камерах наполнения и выхлопа. Синтез законов управления осуществляется с помощью метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) синергетической теории управления [2].

**Математическая модель пневматической системы.** Математическая модель сложной динамической системы, к которой относится электропневматическая система, представляет взаимосвязи между переменными, которые характеризуют поведение системы, исходя из уравнения движения механической части устройства, а так же из уравнений, характеризующих термодинамические и газодинамические процессы, происходящие в полостях цилиндра [3]:

$$\begin{aligned}
\dot{x_1}(t) &= x_2;\\
\dot{x_2}(t) &= a_{21}\cdot x_3 - a_{22}\cdot x_4 - a_{23}\cdot x_2 - a_{24};\\
\dot{x_3}(t) &= \left[a_{31}\cdot (x_1 + l_{01})^{-1}\cdot U_{1f}\cdot \sqrt{p_{\text{м}}^2 - x_3^2}\right] - \frac{k x_3 x_2}{(x_1 + l_{01})};\\
\dot{x_4}(t) &= -\left[a_{41}\cdot (a_{42} - x_1)^{-1}\cdot U_{2f}\cdot \left(\frac{x_4}{p_a}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\cdot \sqrt{x_4^2 - p_{\text{А}}^2}\right] + \frac{k x_4 x_2}{(a_{42} - x_1)}.
\end{aligned} \qquad (1)$$

В математическую модель (1) для упрощенного представления и дальнейшего анализа введены следующие коэффициенты: $a_{21} = \frac{S_1}{M}$; $a_{22} = \frac{S_2}{M}$; $a_{23} = \frac{k_{\text{Втр}}}{M}$; $a_{24} = \frac{P_a(S_1 - S_2)}{M}$; $a_{31} = \frac{k\sqrt{RT_{\text{м}}}}{S_1\sqrt{\xi}}$; $a_{41} = \frac{k\sqrt{RT_{\text{м}}}}{S_2\sqrt{\xi}}$; $a_{42} = (L + l_{02})$. В модели следующие параметры обозначены как: $x_1$ – координата перемещения поршня $l$, (м); $x_2$ – скорость перемещения движущихся масс $V$, (м/с); $x_3$ – давление в камере наполнения $p_1$, (Па); $x_4$ – давление в камере выхлопа $p_2$, (Па); $M$ – масса подвижной части поршня и штока, включая массу объекта управления, который механически связан со штоком, (кг); $S_1$ и $S_2$ – эффективные площади поршневой и штоковой полостей пневмоцилиндра соответственно, ($м^2$); $k_{\text{Втр}}$ – коэффициент вязкого трения, (Н · с/м); $T_{\text{м}}$ – абсолютная температура газа, (К); $k$ – показатель адиабаты для воздуха; $R$ – универсальная газовая постоянная, (Дж/(кг · К)); $l_{01}$ – начальная координата положения поршня, (м); $l_{02}$ – конечная

координата положения поршня, (м); $\xi$ – суммарный коэффициент сопротивления входящих в линию дросселей; $p_{\text{м}}$ – уровень давления на входе магистрали, (Па); $p_{\text{а}}$ – атмосферное давление, (Па).

**Постановка задачи управления и способы ее реализации**. Согласно методу АКАР количество задаваемых целевых функций должно соответствовать количеству управляющих каналов. Управление в электропневматической системе осуществляется по двум каналам:

– управление $U_{1f}$ приходящим массовым расходом воздуха, формирующим давление $p_1$ в камере наполнения, осуществляется путем изменения площади сечения $f_1$ клапана первого пневмораспределителя;

– управление $U_{2f}$ покидающего камеру выхлопа массовым расходом воздуха, который физически отражается в виде давления $p_2$, осуществляется путем изменения площади сечения $f_2$ клапана второго пневмораспределителя;.

Таким образом, задача управления состоит в том, что необходимо синтезировать такие управляющие воздействия $U_{1f}$ и $U_{2f}$ обеспечивающие определенные соотношения давлений $p_1$ и $p_2$, при котором поршень пневмоцилиндра совершает плавную остановку в заданном положении $\ell$.

Согласно сформулированной технологической задачи позиционирования штока пневмоцилиндра на требуемом положении, введем первый инвариант, соответствующий цели управления:

$$x_1 = x_1^*, \tag{2}$$

где $x_1$ – текущее положение штока, а $x_1^*$ – требуемое значение.

Вторым инвариантом системы будем считать условие:

$$x_4 = x_3, \tag{3}$$

при котором давления во впускной и выпускной камерах равны друг другу.

**Синтез нелинейных синергетических законов управления противодавлением.** На первом этапе синтеза можно учесть инварианты (2) и (3) во вводимой совокупности инвариантных многообразий:

$$\begin{cases} \psi_1 = x_4 - x_3 = 0, \\ \psi_2 = x_3 - \varphi_1(x_1, x_2) = 0, \\ \psi_3 = x_2 - k(x_1 - x_1^*) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

При этом совокупность многообразий (4) должна удовлетворять решению системы функциональных уравнений [2]:

$$\begin{cases} T_1\dot{\psi}_1(t) + \psi_1 = 0, \\ T_2\dot{\psi}_2(t) + \psi_2 = 0, \\ T_3\dot{\psi}_3(t) + \psi_3 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

При попадании изображающей точки системы в окрестность пересечения многообразий (4) в замкнутой системе произойдёт динамическая декомпозиция и поведение системы будет описываться редуцированной системой дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2; \\ \dot{x}_2(t) = (a_{21} - a_{22}) \cdot \varphi_1(x_1, x_2) - a_{23} \cdot x_2 - a_{24}, \end{cases} \tag{6}$$

где $\varphi_1(x_1, x_2)$ – так называемое внутреннее управление декомпозированной системы.

Выражения управляющих воздействий $U_{1f}$ и $U_{2f}$ определяются из совместного решения (4) и (5) и математической модели объекта (1) и (6). Таким образом закон управления площадью проходного сечения клапана на ПР1 имеет вид:

$$U_{1f} = \frac{T_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4) - x_3 + \lambda_5}{T_2\lambda_3}, \tag{7}$$

где $\lambda_1 = -\frac{kx_2}{T_3(a_{22}+a_{21})}$; $\lambda_2 = \frac{(T_3k+T_3a_{23}-1)(a_{21}x_3-a_{22}x_4-a_{23}x_2-a_{24})}{T_3(a_{22}+a_{21})}$;

$\lambda_3 = \frac{a_{31}\sqrt{p_{\text{м}}^2 - x_3^2}}{x_1 + l_{01}}$; $\lambda_4 = \frac{kx_3x_2}{(x_1 + l_{01})}$; $\lambda_5 = \frac{T_3(kx_2 + a_{23}x_2 + a_{24}) + k(x_1 - x_1^*) - x_2}{T_3(a_{21} - a_{22})}$.

А закон управления площадью проходного сечения клапана на ПР2 принимает следующий вид:

$$U_{2f} = \frac{T_1(\lambda_3 U_1 + \lambda_4 + \lambda_7) - x_4 + x_3}{-T_1\lambda_6}, \quad (8)$$

где $\lambda_6 = \frac{a_{41}(x_4/P_m)^{\frac{k-1}{2k}} \cdot \sqrt{(x_4^2 - p_A^2)}}{a_{42} - x_1}$; $\lambda_7 = \frac{k x_4 x_2}{a_{42} - x_1}$.

Таким образом приведённая процедура синергетического синтеза позволяет определить векторный нелинейный закон управления электропневматической системы, обеспечивающий равенство давлений $p_1$ и $p_2$, при котором поршень пневмоцилиндра совершает плавную остановку в заданном положении $\ell$. Кроме того, представленная процедура синтеза гарантирует асимптотически устойчивое положение равновесия системы, определённое введённой системой инвариантов (4).

**Анализ синергетических законов управления с методом управления типовыми регуляторами.** Проведем сравнительный анализ полученных нелинейных синергетических законов управления с наиболее широко используемыми в пневмоавтоматике типовыми линейными трехпараметрическими ПИД – регуляторами. Коэффициент усиления П регулятора $k_p = 0{,}00003$, а так же параметры ПИД регулятора $k_p = 1{,}5; T_И = 1$ с; $T_D = 0{,}3$ с были получены на основе анализа ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой линейной системы.

Переходные процессы перемещения и скорости штока с применением П и ПИД регуляторов, а так же нелинейного закона управления полученного методом АКАР представлены на рисунке 1. Использование П регулятора в нелинейной модели дает колебательный затухающий за 2-2,5 секунды переходный процесс, при применении ПИД регулятора процесс имеет перерегулирование равное 11,5% при этом синергетический регулятор позволяет плавно без перерегулирования перемещать шток привода в заданное положение.

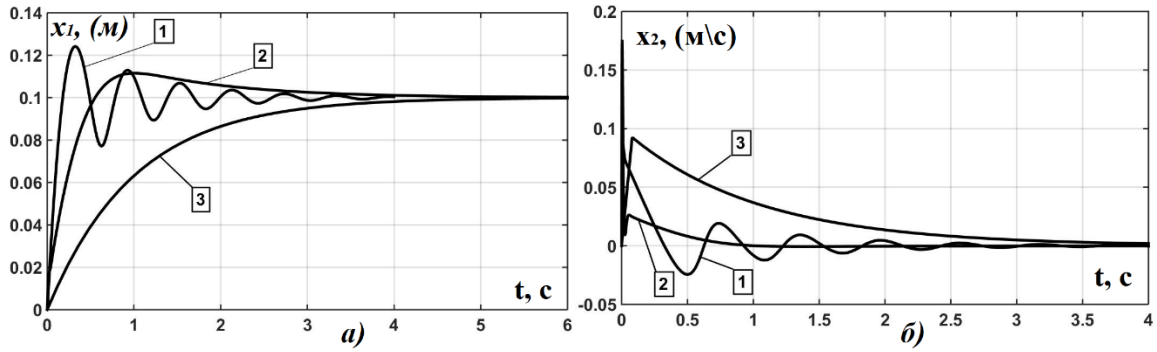



Рис. 1. Графики переходных процессов 1 – П регулятора; 2 – ПИД регулятора; 3 – синергетический регулятора: а) перемещения штока; б) скорости штока

Результаты управления с применением линейных типовых законов управления существенно отличаются от результатов синергетического управления методом АКАР, что естественно будет отражаться при реальном внедрении управления в технологический процесс.

**Заключение.** Достижение поставленных целей управления с помощью полученных в работе нелинейных синергетических законов управления осуществляется за счет задания инвариантных многообразий, представляющих собой притягивающие поверхности в фазовом пространстве состояния, к которым устремляются фазовые траектории системы. При этом устойчивость фазового движения системы к инвариантным многообразиям обеспечивается введением функциональных уравнений. За счет использования естественных притягивающих свойств задаваемых аттракторов достигается робастность управления исследуемой системы, которая выражается в неизменяемости переходных характеристик переменных состояния при небольших отклонениях фазовых траекторий – изменениях параметров системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Tan K.K., Putra A.S.** Drives and control for industrial automation. Part of the advances in industrial control: Servo hydraulic and pneumatic drive. P.: Springer London, 2011, 386 p.
2. **Колесников А.А.** Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М.: Либроком, 2012, 237 с.
3. **Попов Д.Н.** Механика гидро- и пневмоприводов: Учеб. Для вузов. 2-е изд. стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002, 320с.

---

**Obukhova E.N.** (Don State Technical University, Rostov-on-Don). **Control of Electric Pneumatic System of Anti-Pressure with the Application of Analytical Design of Aggregated Regulators**

*Abstract.* The report considers the synthesis of control laws for an electro-pneumatic system using the method of analytical design of aggregated regulators. Achievement of the set control goals is carried out by specifying invariant manifolds. A comparative analysis with the most frequently used pneumoautomatics control - the method of standard regulators is carried out.

А. А. ШИРОКИЙ
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

А. С. ИСАКОВ
(ФНЦ агроэкологии РАН, Волгоград)

В. В. НОВОЧАДОВ
(Волгоградский государственный университет)

# МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ АРИДНЫМИ РАСТИТЕЛЬНЫМИ СООБЩЕСТВАМИ

*Работа посвящена имитационному моделированию поведения агроэкологических систем — аридных растительных сообществ (АРС). Спецификой таких систем является большое число сложным образом взаимодействующих естественных факторов, способствующих деградации системы. На основе экспертных оценок сравнительной проявленности факторов и их взаимной связи построена модель поведения АРС на основе взвешенного ориентированного графа, позволяющая прогнозировать поведение АРС в ответ на различные биогенные управляющие воздействия.*

**Введение.** Растительные сообщества являются крайне сложными открытыми биологическими системами, внешнее управление которыми (когда такая необходимость возникает в процессе хозяйственной или иной деятельности человека) наталкивается на значительные трудности выбора управляющих воздействий и прогнозирования конечного результата [1, 2].

Аридные растительные сообщества (АРС) обладают определённой спецификой — в частности, ограниченными возможностями к восстановлению и присутствием значительного числа естественных факторов, способствующих дестабилизации (дефляции) системы. Хозяйственная деятельность человека привела к тому, что в настоящее время растительность в зоне аридного земледелия представлена устойчивым чередованием агро-экосистем и антропогенно трансформированных АРС с нарушением естественного рельефа, растительности и качества почв [3, 4]. Показано, что видовой состав таких АРС обычно редуцирован, обладает прямым и косвенным негативным влиянием на прилегающие агро-экосистемы и способствует нарушению консортных связей в них. В этих участках формируется особый микрорельеф, меняющий условия увлажнения и перенос поллютантов с последующим накоплением их в подсистеме «почва — растение» [5].

Одним из выходов для преодоления многочисленных трудностей интерпретации разнородных данных, которые получаются при сопоставлении информации о самой экосистеме и условиях окружающей среды, в которой она находится, видится применение сценарного подхода. Он показал себя успешным в прогнозе поведения сложных систем с разнородными, неполными и частично искажёнными данными, как это часто встречается в системах с высоким весом человеческого фактора [6].

Отметим, что полученных при исследовании данных, как и предполагалось, оказалось недостаточно для достоверной количественной оценки прогнозирования влияния АРС на прилегающую агро-экосистему в динамике. Тем не менее, вполне возможно предсказать направление этого влияния и дать интервальную оценку его интенсивности.

В настоящей работе предлагается модель управления АРС, позволяющая прогнозировать результат различных комбинаций управляющих воздействий. Для этого применён аппарат взвешенных ориентированных графов [7] с элементами сценарного анализа поведения сложных систем [8]. Ранжирование силы действия отдельных групп управляющих факторов было получено методом экспертных оценок.

**Построение модели и результаты имитационного моделирования.** В более ранней работе [9] решалась задача построения модели управления свойствами АРС, непосредственно прилегающих к агро-экосистемам. Её применение позволило найти оптимальное в смысле экономической эффективности решение для поддержки агроценоза, заключающееся в комбинированном внесении в почву подвижных форм микроэлементов и субдоминантов микробиоты.

Естественным развитием подхода видится обобщение модели с данного частного случая (фитоценоза в техногенной интрузии) до АРС в целом.

***Цель работы*** — построение имитационной модели поведения АРС на основе экспертных оценок сравнительной выраженности и взаимного влияния абиотических и биотических факторов. Такая модель позволит предсказать направление развития АРС при различных управляющих воздействиях.

***Построение модели поведения АРС.*** На первом этапе работы было проведено анкетирование 20-ти экспертов в области агроэкологии. Им предлагалось оценить по 5-балльной шкале степень влияния семи факторов на два индикатора состояния АРС — видовое разнообразие и продолжительность жизненного периода многолетних растений. Ввиду того, что предшествующие исследования по выявлению ключевых факторов влияния [5] проводились на Юге России, экспертные оценки относятся к растительным сообществам аридных зон.

На втором этапе откликнувшихся экспертов просили заполнить таблицу взаимного влияния факторов друг на друга, ранжируя его по трёхбалльной шкале (слабое, умеренное, ярко выраженное влияние). Результаты экспертного опроса представлены в таблице 1.

Таблица 1

**Взаимное влияния факторов развития АРС**

| Фактор ↓<br>влияет на фактор → | (*SS*) | (*IE*) | (*ML*) | (*WL*) | (*PC*) | (*IC*) | (*IS*) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Засоленность почвы (*SS*) | 0 | +1 | -1 | +2 | -1 | -1 | -1 |
| Избыточная инсоляция (*IE*) | +2 | 0 | 0 | +3 | -1 | -1 | -1 |
| Дефицит микроэлементов в почве (*ML*) | 0 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 |
| Дефицит воды (*WL*) | +2 | +3 | +1 | 0 | -1 | 0 | +1 |
| Поражённость фитопатогенами (*PC*) | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | +2 | +1 |
| Поражённость насекомыми-вредителями (*IC*) | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | +1 | +1 |
| Заселение инвазивных видов растений (*IS*) | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | +1 |

Взвешенный орграф взаимного влияния изменений факторов представлен на рис. 1. Отметим, что весовые коэффициенты на рёбрах были назначены исходя из общебиологических соображений — слабому влиянию соответствует коэффициент 0,1, умеренному — 0,4, ярко выраженному — 1,0. Знак веса обозначает направление влияния: положительный коэффициент соответствует усилению действия фактора, отрицательный — подавлению.

Минимальные значения импульса в вершинах *SS*, *PC*, *IC*, *IS* ограничены нулём. Значения импульса в остальных вершинах не ограничены.

Значение импульса в *i*-й вершине графа в момент времени *t* вычисляется по формуле:

$$v_i(t) = v_i(t) + e_i \sum_{k \in K_i} w_k v_k(t-1), \qquad (1)$$

где $e_i$ — параметр, характеризующий выраженность на конкретной территории фактора, соответствующего *i*-й вершине, а $K_i$ — множество смежных по входящим в *i* рёбрам вершин.

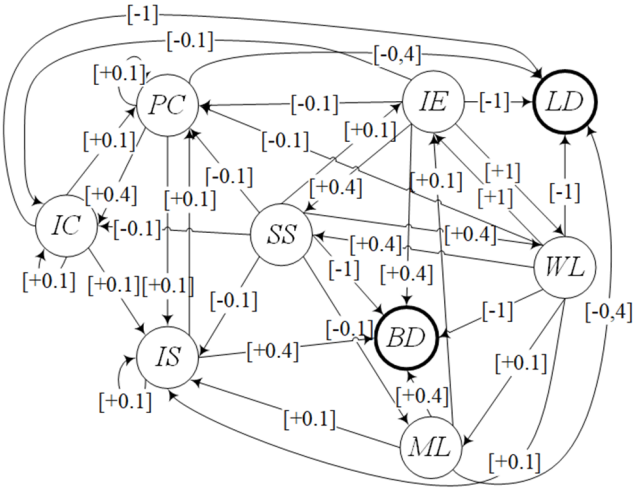



Рис. 1. Взвешенный ориентированный граф для анализа поведения аридных растительных сообществ

***Результаты и обсуждение.*** На рис. 2 показаны результаты имитационного моделирования поведения АРС в отсутствие управлений и при управляющем воздействии в виде полива. На горизонтальной оси отложены шаги импульсного процесса. Колебания значения импульса в целевых вершинах аппроксимированы линейной функцией, возрастание или убывание которой позволяет идентифицировать тип динамики АРС. В данном случае мы видим подтверждение хорошо известного факта необходимости искусственного орошения растений в аридных зонах.

Другой пример приведён на рис. 3. Результат имитационного моделирования поведения АРС при заселении инвазивных видов (сорняков) показывает снижение видового разнообразия при сохранении продолжительности жизненного периода растений. Этот результат хорошо согласуется с практикой — инвазивные виды хоть и конкурируют с АРС за ресурсы, но не поражают другие растения как, например, фитопатогены. При этом со временем участок окажется полностью занятым сорной травой.

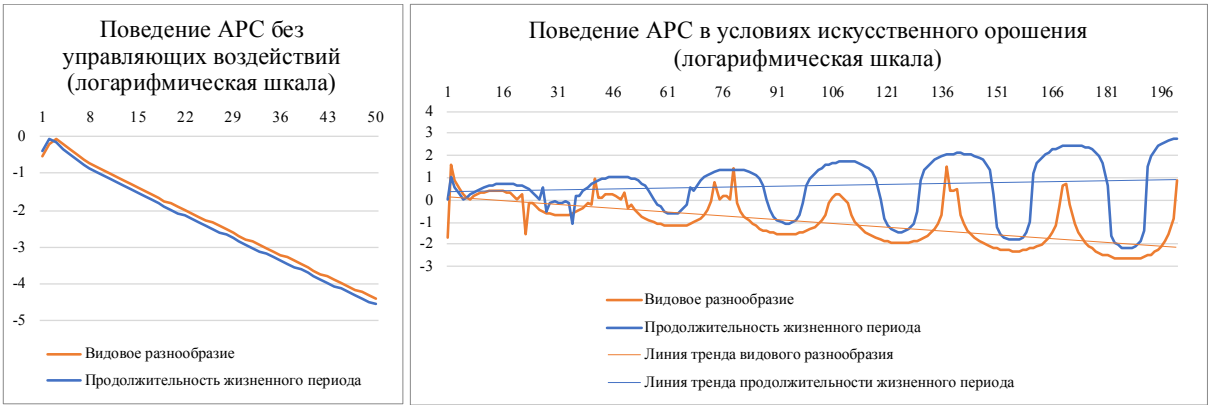



Рис. 2. Поведение АРС без управления и в условиях искусственного орошения

С подобным вторжением можно бороться механическим путём (прополкой). Однако в условиях промышленного земледелия этот способ оказывается слишком дорогим. Анализ поведения АРС при различных управляющих воздействиях показывает, что результативным будет внесение в почву микроэлементов, комплементарных интересующему нас виду. Этот способ существенно дешевле и, к тому же, успешно применяется на практике [10].

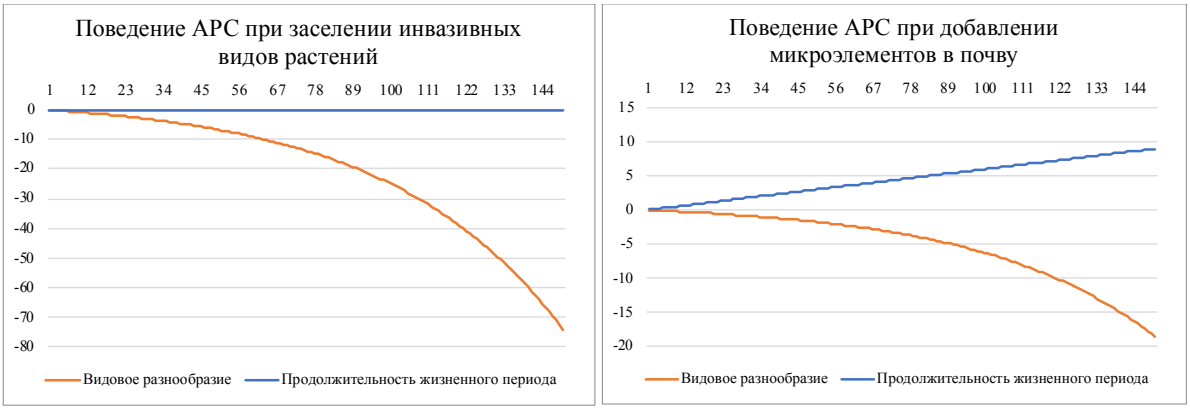



Рис. 3. Поведение АРС в условиях заселения инвазивных видов без управления и при добавлении необходимых микроэлементов в почву

**Заключение.** Таким образом, в результате исследования разработана и апробирована имитационная модель, позволяющая прогнозировать поведение АРС в ответ на различные биогенные управляющие воздействия.

На основе модели получена гипотетическая формула, позволяющая при минимальном воздействии на биосистему АРС целенаправленно изменять её свойства, в частности — неблагоприятное воздействие на прилегающие территории.

Данные, полученные в ходе моделирования, могут быть использованы для управления АРС путём воздействия, например, на состав и свойства почвы для обеспечения необходимого уровня природопользования и достижения оптимального экономического эффекта. Экономическая ценность применённого моделирования предполагает возможность оперативного и low-cost прогнозирования при расчёте возможного ущерба от IPC, а также модуляции происходящих в них процессов с целью снижения негативного воздействия на возделываемые культуры.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Kertész M., Aszalós R., Lengyel A., Ónodi G.** Synergistic effects of the components of global change: Increased vegetation dynamics in open, forest-steppe grasslands driven by wildfires and year-to-year precipitation differences. *PLoS One.* 2017. Vol. 12, № 11. e0188260.
2. **Hudson L.N., Newbold T., Contu S.,** et al. The database of the PREDICTS (Projecting Responses of Ecological Diversity in Changing Terrestrial Systems) project. *Ecology and Evolution.* 2017. Vol. 7. № 1. P. 145–188.
3. **Теймуров С.А., Казбеков Б.И., Казбеков А.Б.** Экзогенный процесс почвенно-растительного покрова в аридной зоне западного Прикаспия. *Проблемы развития АПК региона.* 2018. № 2 (34). С. 92–97.
4. **He M., Dijkstra F.A., Zhang K.,** et al. Influence of life form, taxonomy, climate, and soil properties on shoot and root concentrations of 11 elements in herbaceous plants in a temperate desert. *Plant and Soil.* 2016. Vol. 398, № 102. P. 339–350.
5. I**vantsova E.A., Novochadov V.V., Onistratenko N.V., Postnova M.V.** Ecological aspects of phytosanitary optimization of arid agrobiocenoses of the south of Russia. *Bulgarian J. Agric. Sci.* 2017. Vol. 23, № 5. P. 834–842.
6. **Mahmoud M., Liu Y., Hartmann H.,** et al. A formal framework for scenario development in support of environmental decision-making. Environ Model Software. 2009. Vol. 24. P. 798–808.
7. **Робертс Ф.С.** Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. — М.: Наука, 1986. 496 с.
8. **Кульба В.В., Кононов Д.А., Чернов И.В.** и др. Сценарное исследование сложных систем: анализ методов группового управления. *УБС.* 2010. Т. 30. С. 154–186.
9. **Широкий А.А., Новочадов В.В.** Построение сценарной модели динамики фитоценоза. *XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019*. М.: ИПУ РАН 20*1*9. С. 1622–1627.
10. **Ivantsova E.A., Onistratenko N.V., German N.V., et al.** Targered changes in the natural and semi-artificial arid phytocenoses in the contact zone with the agrocenoses: a system control model-based approach. *Eur. J. Mol. Biotech.* 2018. № 6(1). P. 53–60.


---

**A.A.Shiroky** (V.A.Trapeznikov Institute for Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow), **A.S.Isakov** (Federal Scientific Center of Agroecology of Russian Academy of Sciences, Volgograd), **V.V.Novochadov** (Volgograd State University, Volgograd). **The control model of arid plant communities**

*Abstract.* The paper is devoted to simulation modeling of the arid plant communities (ARS) behavior. Such systems belong to the class of agroecological systems and includes a large number of interacting natural factors that contribute to the system's degradation. We propose a model of ARS behavior based on a weighted oriented graph. The values of weights and other coefficients reflecting the exposure of factors and their mutual relationship are acquired by expert assessments. The proposed model allows predicting the behavior of ARS in response to various biogenic control actions.

Г. Л. ЭПШТЕЙН
(Российский университет транспорта (МИИТ), Москва)

# ЗАДАЧИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЕТРОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ УСТАНОВКАМИ И ВЕТРОЭЛЕКТРОСТАНЦИЯМИ

*Дан обзор задач автоматического управления ветроэлектрическими установками и ветроэлектростанциями. Рассмотрены задачи автоматического выбора режима работы, максимизации или стабилизации мощности. Для ветроэлектростанций внимание сконцентрировано на стабилизации суммарной мощности в условиях нестационарности и неоднородности воздушного потока.*

**Введение.** Основные тенденции развития ветроэнергетики заключаются в увеличении установленной мощности, как единичных агрегатов, так и ветропарков, которые теперь чаще называют ветроэлектростанциями (ВЭС) [1]. Крупнейшей в мире индивидульной ветроэлектрической установкой (ВЭУ) является разработанная компанией General Electric и смонтированная в Ротердаме «Haliade-X» с номинальной мощностью 12 МВт, длиной лопастей 107 метров и диаметром воздушной турбины 220 метров, высотой башни 260 метров [2]. При частоте вращения 7 об/мин верх лопасти имеет линейную скорость 290 км/час.

Самый большой в мире комплекс ветроэлектрических станций «Ганьсу» в Китае к 2015 году достиг установленной мощности 12,71 ГВт, далеко превзойдя 8,21 ГВт – мощность рекордной атомной электростанции «Касивадзаки-карива» в Японии. (При подобных сравнениях надо только не забывать, что в эксплуатации мощность атомных электростанций, как правило, совпадает с номинальной, а фактическая мощность ветроэлектростанций часто оказывается в несколько раз меньше номинального значения.) В 2020 году ожидается, увеличение установленной мощности «Ганьсу» до 20 ГВт [3]. Протяжённости ВЭС могут составлять десятки километров.

Ещё одной заметной тенденцией является внедрение в ВЭУ и ВЭС накопителей энергии, а также совместная скоординированная работа ВЭУ с источниками электроэнергии иной физической природы [4].

По мере увеличения мощностей ВЭУ и их доли в общем балансе электроэнергии расширяется область применения этих устройств, например, для электроснабжения зарядных станций электрических автомобилей, насосных станций магистральных трубопроводов и подстанций электрифицированных железных дорог [5, 6], что особенно важно, когда для питания перечисленных объектов требуются дальние линии электропередачи. Один из главных подходов к обеспечению гарантированной надёжности и уменьшению удельных капитальных и эксплуатационных затрат состоит в оснащении ВЭУ автоматическими системами управления и защиты высокого технического совершенства и многообразной функциональности.

Существенные трудности при разработке подобных систем связаны с нестационарностью и пространственной неоднородностью воздушных потоков по всем трём измерениям, что заставляет разработчиков прибегать к оригинальным решениям, применяя в процессе исследования и разработки почти весь арсенал методов теории автоматического управления.

Доклад содержит обзор технических задач автоматического управления ВЭУ и ВЭС и применяемых методов теории управления для обоснования и исследования конструктивных решений. В качестве примера рассмотрена задача управления коллективом ВЭУ в условиях нестационарности и неоднородности воздушного потока. Также приведены результаты исследования этой системы с помощью имитационной модели ВЭС, содержащей ВЭУ на основе асинхронных генераторов двойного питания.

**Состав оборудования ВЭУ.** Основными силовыми агрегатами ВЭУ являются: воздушная турбина (в подавляющем большинстве случаев трёхлопастная с горизонтальной осью), мультипликатор, генератор (асинхронный двойного питания или синхронный с постоянными магнитами на роторе), силовая управляемая выпрямительно-инверторная система (back-to-back), повышающий трансформатор [7].

К основным исполнительным устройствам относятся привод поворота плоскости вращения лопастей перпендикулярно преимущественному направлению ветра, приводы углов поворота

лопастей относительно их продольных осей, а также сама силовая управляемая выпрямительно-инверторная система.

Естественно, в конструкцию ВЭУ входят башня и гондола, а для прибрежных (офшорных) установок ещё опоры и платформа. Состояние этих конструкций, особенно для офшорных установок, также является предметом мониторинга и учитывается в автоматических системах управления и защиты [8].

Для осуществления автоматического управления используются измерители тока и напряжения, датчики скорости ветра, углового положения валов силовой передачи и лопастей, акселерометры, датчики крутящего момента, тензодатчики на лопастях и опорах (на офшорных ВЭУ).

**Режимы работы и иерархия систем управления ВЭУ.** По мере изменения скорости ветра имеют место четыре режима работы ВЭУ: ожидание запуска при скоростях ниже 5 – 6 м/с, извлечение из кинетической энергии ветра максимальной мощности от 5 – 6 м/с до 12 м/с, стабилизация частоты вращения (или генерируемой мощности) при скоростях выше 12 м/с и не более 25 м/с, остановка вращения турбины при скорости выше 25 м/с.

Системы автоматического управления ВЭУ построены по иерархическому принципу: верхний уровень – выбор одного из указанных выше режимов работы, контроль исправности установки; средний уровень – выполнение основных алгоритмов режима 2 или 3 в зависимости от указаний верхнего уровня, вычисление уставочных значений для автоматических регуляторов подсистем управления тиристорными преобразователями, углом азимута гондолы, углами поворота лопастей; на нижнем уровне непосредственно реализуются стабилизирующие или следящие функции перечисленных подсистем.

**Основные функции систем управления ВЭУ.**

1. Обеспечения качества и управляемости генерируемой электроэнергии. Это подразумевает стабильность напряжения, частоты, активной и реактивной мощности, а также оперативное приведение активной мощности в соответствие требованиям баланса генерации и потребления.
2. Максимизация мощности, извлекаемой из нестационарного воздушного потока, и расширение диапазона рабочих скоростей ветра с целью повышения эффективности ВЭУ.
3. Автоматический контроль и ограничение механических нагрузок, а также контроль и защита от перегрузок в цепях силовой электроники.
4. Автоматическое распознавание событий, угрожающих разрушением механических конструкций и выходом из строя электрических цепей, диагностика исправности силовых устройств и датчиков обратных связей.

**Конструктивные особенности систем автоматического управления.** В докладе подробно разбирается ряд особенностей конструктивных решений систем автоматического управления ВЭУ.

Во многих случаях ВЭУ работают в условиях порывистого ветра, к тому же ещё неравномерно распределённого в пространстве. Для правильной реакции системы в подобных режимах применяют алгоритмы, прогнозирующие скорость ветра и соответствующее положение углов поворота лопастей. Для этого используют встроенные модели ветровой нагрузки [9, 10], фильтры Калмана [11], совмещение коллективного и индивидуального управления углами поворота лопастей [12].

Системы управления вверхнего уровня решают сложную задачу отделения допустимых одиночных порывов от такого изменения скорости ветра, которое требует смены режима.

Начиная с основополагающей работы Альберта Бетца [13], известно, что для извлечения из воздушного потока максимальной механической мощности необходимо подстраивать углы поворота лопастей и частоту вращения в соответствии с экстремальными характеристиками турбины. С этой целью применяют алгоритмы управления экстремальным поиском (Extremum seeking control) [14, 15] или отслеживания точки максимума мощности (Maximum power point tracking) [16 17, 18, 19].

Кроме традиционных методов адаптации в докладе уделено внимание работам, в которых реализация управления углом поворота лопасти основана на использовании переменной аэродинамики по длине лопастей [20], на получении скользящего режима (Sliding Mode) [12, 21], а

также на понятии нечёткой логики (Fuzzy Logic) [22, 23]. Применение последних двух подходов позволяет также компенсировать неопределённость параметров и характеристик воздушной турбины и датчиков, то есть обеспечить робастность систем управления.

**Основные функции систем управления ВЭС.** ВЭС включает в себя некоторое количество ВЭУ, внутреннюю электрическую сеть, и накопители энергии, распределённые по ВЭУ или сосредоточенные в точках присоединения магистральных линий [24, 25, 26].

Автоматическое управление в ВЭС предназначено для стабилизации напряжения и мощности в точках связи с приёмными энергосистемами, для контроля и диагностики внутренних электрических сетей ВЭС, для координации ВЭУ и накопителей энергии, для диагностики событий во внутренней электрической сети и на линиях соединения с приёмными энергосистемами.

Учитывая большую протяжённость мощных ВЭС, одной из важнейшей функций управляющей системы является подавление колебаний суммарной активной мощности, связанных с прохождением порывистого ветра по территории ВЭС. Для выбора структуры и расчёта параметров автоматических систем используют второй метод Ляпунова [27, 28, 29, 30].

Имеется большое число работ, посвящённых имитационным моделям ВЭС. В докладе представлена одна из таких моделей, разработанная автором. На рис. 1 изображено расположение ВЭУ на территории ВЭС. На рис. 2 показано сравнение кривых суммарной мощности при прохождении порыва ветра по территории ВЭС в случаях централизованного управления и отсутствия такового. Подробности построения модели и расчёта параметров на основе теоремы Орландо [31] приведены в докладе.

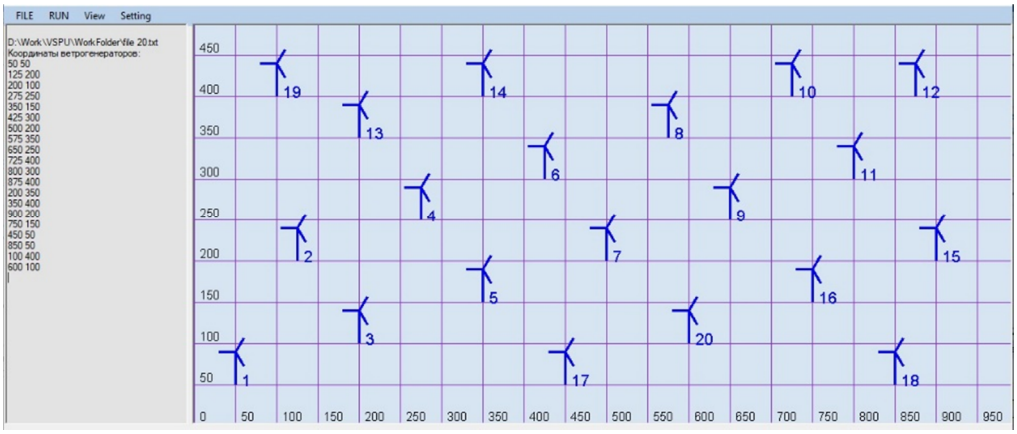



Рис. 1. Интерфейс модели. Расположение ветроэлектрических установок на территории ВЭС. Координаты в метрах.

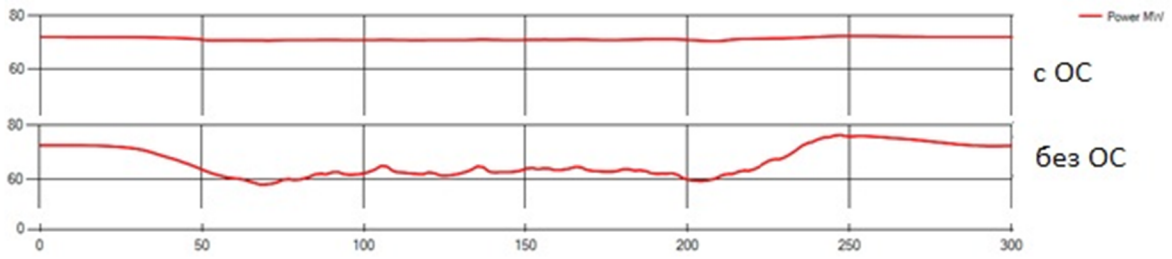



Рис. 2. Кривые суммарной мощности при прохождении порыва ветра по территории ВЭС. Верхняя кривая – с автоматическим поддержанием суммарной мощности. Нижняя кривая – без автоматического поддержания суммарной мощности.

**Заключение.** Несмотря на большое количество публикаций по затронутым в докладе вопросам, остаётся ещё широкое поле деятельности, как для специалистов по теории управления, так и для разработчиков систем управления ВЭУ и ВЭС. Особо ожидают исследования и техниче-

ской реализации ВЭУ, работающие на специализированную нагрузку, например, питающие тяговые подстанции или автоматические зарядные станции для электрического автотранспорта.

ЛИТЕРАТУРА


1. Wind Power in Power Systems. Edited by Thomas Ackermann. Royal Institute of Technology. Stockholm: Sweden John Wiley & Sons, Ltd, 2012. P. 1120.
2. https://www.ge.com/renewableenergy/wind-energy/offshore-wind/haliade-x-offshore-turbine .
3. https://peretok.ru/articles/freezone/17431/.
4. Sarrias R., Fernandez L. M., Garcia C. A., Jurado F. Coordinate operation of power sources in a doubly-fed induction generator wind turbine/battery hybrid power system. Journal of Power Sources. 2012. Vol. 205. May, P. 354 – 366.
5. **Булатов Ю. Н., Крюков А. В., Чан Зюй Хынг.** Интеллектуальные регуляторы для установок распределенной генерации. «Современные технологии. Системный анализ. Моделирование» 2015. Т. 46. №2. С. 83 – 86.
6. **Сытов Е.С., Эпштейн Г.Л.** Математическое моделирование ветроэлектростанции с переменной во времени и пространстве нагрузкой// Мир транспорта. М. 2016. Т. 14, № 2. С. 64 – 68.
7. Pao L. Y., Johnson K. E. Control of Wind Turbines. IEEE Control Systems Magazine. 2011. April. P. 44 – 62.
8. Hazim Namik, Stol K. A. Control Methods for Reducing Platform Pitching Motion of Floating Wind Turbines. https://www.academia.edu/30115634/Control_Methods_for_Reducing_Platform_Pitching_Motion_of_Floating_Wind_Turbines 2014. P. 10.
9. Wai Hou Lio, Rossiter J.A., Jones B. L. Predictive control design on an embedded robust output-feedback compensator for wind turbine blade-pitch preview control. https://ieeexplore.ieee.org/document/7810496. 2017. P. 12.
10. Spencer Martin D., Stol K. A., Unsworth C. P., Cater J. E., Norris S. E. Model predictive control of a wind turbine using short-term wind field predictions. Wind Energy. 2013. Vol. 3. №16: P. 417-434..
11. Girsang I. P., Dhupia J. S. Performance of linear control Methods for Wind Turbines dealing with unmodeled structural Modes. https://www.researchgate.net/publication/260718962. 2012. P. 8.
12. Barambones O. Sliding Mode Control Strategy for Wind Turbine Power Maximization. «Energies». 2012. №5. P. 2310-2330.
13. **Бетц А.** Ветряные двигатели в свете современных исследований. Успехи физических наук. 1930. т. X, вып. 2, С. 165 – 190.
14. Krstic M., Wang H. H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems, Automatica, 2000. Vol. 36, no.4, P. 595–601,
15. Creaby J., Li Y., Seem J. E. Maximizing wind turbine energy capture using multivariable extremum seeking control. Wind Energy. 2009. Vol. 33. No. 4. P. 361–388.
16. Senjyu T ., Ochi Y., Kikunaga Y., Tokudome M., Yona A., Muhando B. E., Urasaki N., Funabashi T. Sensor-less maximum power point tracking control for wind generation system with squirrel-cage induction generator. Renewable Energy. 2009. Vol. 34. No 1. P. 994–999.
17. Howlander A . M., Urasaki N., Uchida K., Yona A., Senjyu T., Kim C.-H., Saber A. Y. Parameter identification of wind turbine for maximum power-point tracking control. Electric Power Compon. Syst. 2010. Vol. No 38. P. 603–614.
18. Lin W.-M., Hong C.-M. Intelligent approach to maximum power point tracking control strategy for variable-speed wind turbine generation system. Energy, 2010. Vol. 35. No 1. P. 2440–2447.
19. Hossam H.H. Mousa , Abdel-Raheem Youssef, Essam E.M. Mohamed. Optimal power extraction control schemes for five-phase PMSG based wind generation systems. Engineering Science and Technology, an International Journal 2020. Vol. 23. February. P. 144-155. https://doi.org/10.1016/j.jestch.2019.04.004.
20. Maldonado V., Farnsworth J., Gressick W., Amitay M. Active control of flow separation and structural vibrations of wind turbine blades. Wind Energy (Special Issue: Smart Blades), 2010. Vol. 13. No. 2-3. P. 221–237.
21. Benbouzid M., Beltran B., Amirat Y., Gang Yao, Jingang Han, Mangel H. Second-Order Sliding Mode Control for DFIG-Based Wind Turbines Fault Ride-Through Capability Enhancement. ISA Transactions. 2014. Vol 53. No 3. P. 827-833.
22 Madhu Sudhan A., Tnvln Kumar, Ravi Nkumar T. Aero Dynamic Power Control of Permanent Magnet Synchronous Generator using Ffuzzy Logic Pitch Angle Controller. International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET). 2017. Vol. 04. Issue 09. Sep. P. 1149 – 1155.
23. Mokryani G., Siano P., Piccolo A., Calderaro V., Cecati C. A Novel Fuzzy System for Wind Turbines Reactive Power Control. IEEE International Conference on Fuzzy Systems. 2011. June 27-30. Taipei, Taiwan. P. 231 – 235.
24. Nihith R., Venkatasubramanian S. Design Of Voltage-Speed Controller For Grid Connected Wind Power Applications. International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET). 2016. Vol. 03. Issue 04. Apr. P. 481 – 486.
25. Upadhyay A., Agrawal A., Kumar Singh D. Study Of Wind Energy Conversion System Connected To Grid Using Doubly Fed Induction Generator. International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication. 2015. Vol.: 3. Issue: 6. P. 3817 – 3820.
26. Tareq Saber Abuaisha. General study of the control principles and dynamic fault behaviour of variable-speed wind turbine and wind farm generic models. Renewable Energy. 2014. Vol. 68. P. 245 – 254.
27. Fernandez R. D., Battaiotto P. E., Mantz R. J., Wind farm non-linear control for damping electr omechanical oscillations of power systems Renewable Energy. 2008. vol. 33. P. 2258 – 2265.
28. Mechter A., Kemih K., Ghanes M. Power Control of the Wind Turbine for Low Wind Speed. Proceedings of The first International Conference on Nanoelectronics, Communications and Renewable Energy. 2013. P. 498 – 504.
29. Sunil Kumar1, Gagan Deep Yadav. A Review on Different Pitch Angle Control Methods for Wind Turbines. International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET). 2016. Vol. 03. Issue 11. Nov. P. 427 – 430.

30 Aman Abdulla Tanvir, Adel Merabet, Rachid Beguenane. Real-Time Control of Active and Reactive Power for Doubly Fed Induction Generator (DFIG)-Based Wind Energy Conversion System. Energies. 2015. No 8. 10389-10408
31 **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. «Наука». 1967. С. 575.

---

**G.L.Epshteyn** (Russian University of Transport «RUT MIIT», Moscow) **Automatic control tasks for wind turbines and wind farms**

*Abstract.* An overview of the problems of automatic control of wind turbines and wind power farms is given. The problems of automatic selection of the operating mode, power maximization or stabilization are considered. For wind farms, attention is focused on stabilizing the total power under conditions of non-stationary and non-uniform air flow in space.

Ф. Т. АЛЕСКЕРОВ, А.Н. РЕЗЯПОВА, В.И. ЯКУБА
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской Академии Наук, Москва)

# ВЛИЯНИЕ СТРАН В МЕЖДУНАРОДНОЙ МИГРАЦИИ

*Предлагается новая модель влияния стран в международной миграции. Сеть международной миграции состоит из вершин (стран) и ребер (потоков миграции между ними). Помимо прямого влияния учитываются индивидуальные характеристики вершин (население стран), групповое влияние и непрямое влияние (влияние по ключевой стране). Результаты расчетов показывают значимость как стран, имеющих большие миграционные потоки, так и других стран, связанных с ними.*

**Введение.** Международная миграция является одним из аспектов глобализации, и уже невозможно воспринимать международные миграционные потоки независимо друг от друга. Однако, в большинстве работ межстрановые миграционные потоки анализируются независимо, т.е. на страновом уровне. Сетевой анализ помогает преодолеть эту проблему. Сетевой анализ является сравнительно новым методом в миграционных исследованиях. Он берет свое начало из социальных наук, а именно, из анализа социальных взаимодействий [1]. В подобных исследованиях узлами графа являются индивиды, а ребрами – отношения между ними. В нашем случае миграционный процесс представлен в виде взвешенного ориентированного графа, где узлами являются страны, а ребрами – миграционные потоки между ними. Сетевые модели помогают изучать процесс миграции комплексно, т.е. страны не являются изолированными элементами, все они связаны потоками мигрантов. В ряде исследований уже был проведен анализ численности международных мигрантов по странам, рассмотрены различные свойства и кластеры сети [2; 3] и изучена сеть миграции между странами ОЭСР [4].

Сетевой анализ международных потоков миграции был предложен в [5], где помимо классических индексов центральности применяются индекс SRIC (Short-Range Interaction Centrality Index), который учитывает влияние ближних взаимодействий в сети, и индекс LRIC (Long-Range Interaction Centrality Index), который основывается на взаимодействиях по дальним путям в сети. Также рассмотрены ранжирования стран по классическим индексам центральности и индексам SRIC, LRIC и проанализирована корреляция между ранжированием стран по данным индексам [6].

**Новые методы анализа влияния в сети международной миграции.** В нашем исследовании проанализировано влияние стран на основе данных о международной миграции ОЭСР и Евростата [7; 8]. В этих базах данных мигрант определяется как лицо, проживающее в стране, отличной от страны его происхождения. Происхождение может быть определено на основе гражданства, места рождения или проживания в зависимости от страны, предоставившей миграционную статистику.

В работе применяется новая концепция влияния в сети к проблеме международной миграции. Рассчитаны новые индексы центральности, разработанные в [9], для миграционных потоков между странами мира. Одним из направлений исследований в сетевом анализе является анализ характеристик вершин сети, в нашем случае – стран, с помощью классических индексов центральности. Однако у них есть несколько недостатков.

Во-первых, они не учитывают индивидуальные характеристики вершин. Это могут быть социально-экономические характеристики, например, валовый внутренний продукт или численность населения. В частности, численность населения стран имеет важное значение с точки зрения международной миграции. Например, существует миграционный поток из 50 тысяч мигрантов, прибывающих в страну А с населением 100 миллионов человек, и такой же миграционный поток, прибывающий в страну В с населением 500 тысяч человек. Поток будет составлять 0,05% населения страны А, однако он будет соответствовать 10% населения страны В, что имеет решающее значение для населения страны В и почти не влияет на население страны А. Поэтому индивидуальные параметры вершин очень важны при анализе индексов центральности, в частности, в применении к процессу международной миграции.

Во-вторых, классические индексы центральности не учитывают групповое влияние. Например, миграционный поток из страны на Ближнем Востоке в страну в Европе может не оказывать влияния на принимающее население. Однако, если информация об условиях в принимающей стране распространится среди других стран Ближнего Востока, то большее число мигрантов рассмотрят возможность переезда туда. В этом случае миграционный приток из большинства стран региона сыграл бы значительную роль для общества принимающей страны. Поэтому групповое влияние – неотъемлемая часть процесса миграции, и важно учитывать его при оценке центральности стран в сети.

В-третьих, классические индексы не учитывают в явном виде косвенное влияние в сети. Косвенное влияние в случае международной миграции может соответствовать процессу "домино" или цепной миграции. Это процесс, когда миграционный поток из одной страны стимулирует отток мигрантов из принимающей страны. На любом этапе этого процесса миграционный поток может стать критическим для страны назначения.

Идея, лежащая в основе влияния международной миграции в этой работе, заключается в следующем. Новые индексы центральности оценивают влияние стран на трех уровнях. Прямое влияние (Copeland Influence) относится к притоку мигрантов в страну, Bundle Influence соответствует групповому влиянию, а Pivotal Influence оценивает влияние ключевой страны внутри каждой группы. Наконец, общее влияние (Total Influence) оценивается как линейная комбинация трех показателей. Индивидуальные страновые характеристики учитываются квотой, которая является процентной долей от населения принимающей страны.

***Результаты.*** Следующие результаты были получены при квоте 0,01% населения принимающей страны и размере группы из трех стран. Во-первых, влияние Копленда (прямое влияние) выделяет Германию, Соединенные Штаты, Великобританию и Южную Корею как страны, принявшие наибольшее количество мигрантов в 2015 году. Во-вторых, Bundle Influence (групповое влияние) выделяет в рейтинге больше европейских стран, таких как Испания, Франция и Италия. Однако, наибольшим влиянием по Bundle Influence обладают Германия, США и Япония. На миграционную ситуацию в данных странах также, как и на ситуацию в Германии повлиял Европейский миграционный кризис, а именно – приток мигрантов и беженцев из Сирии. Pivotal Influence (влияние по ключевой стране) ставит Японию и Польшу выше по сравнению с другими индексами. Япония и Южная Корея имеют значительное влияние, т.к. в 2015 г. в эти страны был приток мигрантов из Китая 100571 и 177001 человек, соответственно. Стоит также отметить, что на США и Германию по индексу Bundle Influence приходится более 90% влияния. Общее влияние (Total Influence) США, Германии, Испании, Франции в сумме составляет около 93% от влияния всех стран при условии равной важности индексов в их линейной комбинации.

Полученные результаты показывают, что помимо прямого влияния важно учитывать групповое влияние и косвенное влияние. Групповое влияние выделило страны, которые важны на уровне сообщества, в основном европейские страны обозначены как наиболее влиятельные в сети. Наибольшее значение Pivotal Influence имеют страны, которые являются важнейшими участниками международной миграции в своем регионе. Действительно, Польша имеет как высокий уровень эмиграции, так и иммиграционные притоки, как и Япония.

**Заключение.** В целом в работе применены новые методы оценки влияния к процессу международной миграции и показаны новые результаты, имеющие важное значение как в области международной миграции, так и в области сетевого анализа. Работа основана на уникальном наборе данных по потокам международной миграции, собранных из открытых источников. Индексы центральности, предложенные в данной работе, показали важность группового влияния и непрямого влияния в сети, а также значимость индивидуальных характеристик вершин (населения принимающей страны). Результаты ранжирования стран на основе их влияния в сети могут быть полезным инструментом при планировании миграционной политики принимающими странами, а динамика индексов по определенным странам позволяет описывать процесс международной миграции с течением времени.

ЛИТЕРАТУРА


1. Newman M.E.J. The Structure and Function of Complex Networks // SIAM Review, 45(2), 2003, pp. 167–256.
2. Davis K. F. et al. Global spatio-temporal patterns in human migration: a complex network perspective //PloS one. – 2013. – Т. 8. – №. 1. – С. e53723.
3. Fagiolo G., Mastrorillo M. International migration network: Topology and modeling //Physical Review E. – 2013. – Т. 88. – №. 1. – С. 012812.
4. Tranos E., Gheasi M., Nijkamp P. International migration: a global complex network //Environment and Planning B: Planning and Design. – 2015. – Т. 42. – №. 1. – С. 4-22.
5. Aleskerov F., Meshcheryakova, N., Rezyapova, A., & Shvydun, S. Network analysis of international migration //International Conference on Network Analysis. – Springer, Cham, 2017. – С. 177-185.
6. Алескеров Ф. Т., Мещерякова, Н. Г., Резяпова, А. Н., & Швыдун, С. В. Анализ влияния стран в сети международной миграции //Политическая наука. – 2016. – №. 4.
7. “OECD.Stat”. 2019. OECD International Migration Database. https://stats.oecd.org/Index.aspx?DataSetCode=MIG Дата обращения: 09.07.2020
8. “Eurostat. Migration and Migrant population Statistics”. 2019. Eurostat. https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Migration_and_migrant_population_statistics. Дата обращения: 09.07.2020
9. Aleskerov F., Yakuba V. Matrix-Vector Approach to Construct Generalized Centrality Indices in Networks //Available at SSRN 3597948. – 2020.


**F.T. Aleskerov, A.N. Rezyapova, V.I. Yakuba** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow) **An Influence of Countries in International Migration**

*Abstract.* This paper provides a new model of influence of countries in international migration using network analysis. The international migration network consists of vertices (countries) and edges (migration flows between them). A new way to assess the impact in the network using centrality indices is proposed. In addition to direct influence, these indices consider individual characteristics of vertexes (population), group influence, and indirect influence (influence by key country). The results show the importance of both countries with large migration flows and other countries connected with them.

С. А. ДУБОВИК
(Севастопольский государственный университет)

# СИНТЕЗ «ВТОРОЙ СИГНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ» РЕГУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

*Рассматривается стохастическая динамическая система, для которой над контуром стабилизации средствами теории больших уклонений и оптимального управления строится система принятия решений, аналог второй сигнальной системы.*

**Введение.** Для задач автономного управления различными движущимися объектами актуально обеспечение мониторинга непрерывно в режиме реального времени с выдачей интегральных характеристик безопасности по всем параметрам движения вплоть до выполнения всей миссии. В конечном счете, такими интегральными характеристиками безопасности и надежности в каждый момент движения могут и должны быть вероятности некоторых пограничных событий (ПС), надлежащее прохождение которых в заданной последовательности обычно и составляет миссию объекта. В этой последовательности ПС можно выделить критические состояния (К-состояния) и целевые (Ц-состояния). Дадим примеры того и другого: в некоторых задачах посадки на корабль летательного аппарата с вращающейся тягой (ЛАВТ) К-состояния – это превышения заданных пределов по углу атаки, по перегрузкам и т.п., уменьшение запаса высоты при прохождении кормового среза, а Ц-состояния – занятие заданной позиции зависания над посадочной площадкой для выбора момента начала снижения, приведение ЛАВТ к касанию посадочной площадки с заданными относительной скоростью снижения и углами крена и тангажа; в задачах контроля мореходности К-состояния – это предельные для данного судна значения по углам крена, дифферента и рыскания – именно такие состояния могут создавать опасности опрокидывания судна, заливаемости палубы (слеминг) и потери управляемости (брочинг); в задаче управления беспилотным автомобилем при опережении на многополосной магистрали К-состояния – это пределы по относительным координатам и скоростям в ближнем окружении и Ц-состояния – положение желаемой точки на соседней полосе, через которую предполагается осуществление маневра опережения (все принципиально то же при обгоне). Теория искусственного интеллекта как бы задает в таких случаях дорожную карту – нужно создавать соответствующую предметную область, которая затем и станет основой базы знаний. Известна и соответствующая теория ситуационного управления, созданная в 70-х годах Д. Поспеловым, правда, в основном, для статических систем. Но проблема в том, чтобы этот порядок, установленный до сих пор только для статических задач, распространить на системы динамические, подверженные возмущениям. Эта проблема и рассматривается в рамках настоящей работы. Точное расщепление динамической задачи управления на части, которые бы можно было представить затем в качестве элементов предметной области, как правило, невозможно, но вполне возможно асимптотически, по параметру $\varepsilon$, характеризующему малую вероятность ПС. Такой подход оказывается продуктивным, когда он применяется не напрямую к вероятности $P$, а к величинам, подвергнутым так называемому идемпотентному преобразованию [1-6]: $v = -\varepsilon \ln P$. Получаемое множество функционалов действия и их экстремалей оказывается адекватным средством описания рассматриваемой предметной области и эффективным инструментом семантизации данных [7], позволяющим построить систему онлайн контроля.

**Процедура принятия решений на основе принципа больших уклонений.** Мы исходим из того, что весь процесс управления может быть разбит на последовательность этапов, на каждом из которых из всего множества ПС одно из Ц-состояний выбирается в качестве состояния равновесия, которое стабилизируется («1-я сигнальная система») и движение в окрестности ко-

торого контролируется по совокупности остальных ПС, имеющих отношение к данному этапу, применительно к которому рассматривается диффузионный процесс

$$\dot{\tilde{x}} = a(\tilde{x}) + \varepsilon\sigma(\tilde{x})\dot{w}, \qquad \tilde{x}(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $\dot{w}$ – $k$-вектор «белого шума», $a,\sigma$ – гладкие матричные функции. Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр и, как будет ясно из дальнейшего, в рассматриваемом случае это означает, что при $x_0 \in D$ события выхода фазовой точки на границу $D$ являются редкими ПС. Наряду с (1) рассматриваются невозмущенная система ((1) при $\varepsilon = 0$, пометим ее (1о)) и система путей:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + \sigma(\varphi)v, \quad \varphi(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $v$ – суммируемая функция, такая что на решениях (2) определен функционал действия [5-7] (ФД):

$$S_{t_0 t_П}(\varphi, v) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_П} v^T v\, dt, \tag{3}$$

который конечен, если решение $\varphi$ на $[t_0, t_П]$ абсолютно непрерывно, и равен бесконечности в противном случае. Полагая однородную систему (1о) асимптотически устойчивой в окрестности 0 и $0 \in D$, а также $x_0 \in D$, будем интересоваться выходом фазовой точки (1) на границу $\partial D$ области $D$ ($t_П$ – момент выхода). Для путей, непрерывных на отрезке, обозначим: $F = \{\varphi \in C_{t_0 t_П}(R^n):\ \varphi_{t_П} \in R^n \setminus D\}$. Упрощая, представим уравнение границы в $R^n$: $Cx = y$, и тогда условие приграничности состояния (1), которое сформулируем для путей, будет:

$$C\varphi(t_П) - y = 0. \tag{4}$$

Задача на минимум (3) при ограничениях (2), (4) (задача (2-4)) является основным средством анализа больших уклонений диффузионного процесса (1); для рассматриваемых систем справедливо равенство [5], связывающее вероятность ПС на момент $t_0$ с минимумом ФД:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln P\{\tilde{x}_t \in R^n \setminus D\} = -\min_{\varphi \in F} S_{t_0 t_П}(\varphi, v), \tag{5}$$

где единственная экстремаль $\varphi = \bar{\varphi}$ (если она существует), на которой достигается минимум, называется профилем ПС [7,8]. По ФД определяется квазипотенциал [5] системы (2) – функция точки $x$ и аттрактора $\chi$: $V(\chi, x) = \inf\{S_{t_0 t_П}(\varphi) : \varphi \in C_{t_0 t_П}(R^n), \varphi_{t_0} = \chi, \varphi_{t_П} = x\}$. Экстремаль, $\bar{\varphi}$ удовлетворяющая (2-4), если она является единственным прообразом квазипотенциала $V(0,x)$, называется А-профилем ПС [7]. Переход к линейным уравнениям (1),(2), когда правая часть (2) $\gamma(\varphi, v)$ имеет вид:

$$\gamma(\varphi, v) = A\varphi + \sigma v, \tag{6}$$

позволяет получить явное решение задачи (2-4) и на этой основе построить алгоритм прогноза КС [7-9] с помощью одного решения задачи (2-4). Это особое решение (А-профиль ПС) – предельная экстремаль $\bar{\varphi}$ в (2-4) при $t_0 \to -\infty$, которая оказывается единственной в случае выполнения следующего условия:

«$\alpha$»: матрицы $A$ гурвицева, а пара $(A, \sigma)$ – управляема [7].

Условие «$\alpha$» существенно слабее обычно применяемого [5] условия равномерной новорожденности для матрицы $\sigma$. Такой результат дает использование вместо классического вероятностного подхода функционально аналитического метода, основанного на аналогии принципа больших уклонений и условий слабой сходимости вероятностных мер [6]. Управление $\bar{v}(t)$ и А-профиль $\bar{\varphi}(t)$ определяются вектором сопряженных переменных $\psi_t = \psi(t)$: при условии «$\alpha$» для системы $\dot{\varphi}_t = A\varphi_t + \sigma v_t$ существует оптимальное в смысле ФД управление [7, 8] $v_t = \bar{v}_t = \sigma^T \psi_t$, где

$$\psi(t) = e^{A^T(t_П - t)}\psi_П, \quad \psi_П = C^T(CDC^T)^{-1}y, \tag{7}$$

и существует А-профиль, определяемый соотношением [7]:

$$\bar{\varphi}(t) = D\,\psi(t), \tag{8}$$

где $D > 0$ – единственное решение матричного уравнения Ляпунова: $\sigma\sigma^T = -AD - DA^T$, а также соответствующий этому решению квазипотенциал:

$$V(0,x) = \frac{1}{2}x^T D^{-1}x, \tag{9}$$

при этом граничные значения по основным $x(t_П) = x_П = \varphi_П$ и сопряженным переменным $\psi_П$ оказываются линейно связанными:

$$x_П - D\psi_П = 0. \tag{10}$$

Указанные результаты следуют из «$\alpha$» и представления решения (2) в случае (6) в виде: $\varphi(t) = e^{A(t-t_П)}x_П + J(t)\psi_П$, где $J(t)$ – грамиан управляемости: $J(t) = \int_{t_П}^{t} e^{A(t-\tau)}\sigma\sigma^T e^{A^T(t_П-\tau)}d\tau$, который также выражается через решение уравнения Ляпунова: $J(t) = De^{A^T(t_П-t)} - e^{A(t-t_П)}D$. Грамиан определяет и ФД (3): $S_{0П} = S_{t_0 t_П} = -\frac{1}{2}\psi_П^T e^{A(t_П-t_0)} J(t_0)\psi_П$; подставляя сюда предыдущее выражение для $J(t_0)$ и учитывая (7) - (10), получаем для минимального значения ФД (и для оценки логарифма вероятности в (5)) следующую формулу:

$$\hat{S}_{0П} = V(0,x_П) - V(0,x_0). \tag{11}$$

В силу (5), можно предложить следующую процедуру мониторинга, которую для упрощения изложим применительно к одному ПС. Имея кривую А-профиля ПС (8) и ее $\varepsilon$-окрестность $O_\varepsilon\{\bar{\varphi}(\cdot)\} = \{(x,t) : \| \bar{\varphi}(t) - x \| \le \varepsilon; -\infty < t \le t_П\}$ («$\varepsilon$ - трубка»), в момент $t_0 = t$ попадания вектора $\tilde{x}(t)$ системы (1) в $\varepsilon$-окрестность точки $\bar{\varphi}(t)$ (аргументы $\tilde{x}$ и $\bar{\varphi}$ выравниваются подходящим сдвигом А-профиля) вычисляется вероятность ПС: $P_{t\,t_П} = P\{\tilde{x}_t = \bar{\varphi}(t);\ \tilde{x}_{t_П} \in R \setminus D\}$ с помощью оценки, следующей из (5) и (11): $P_{t\,t_П} \approx e^{-[V(0,x_П) - V(0,\bar{\varphi}(t))]/\varepsilon}$. При выполнении условия

$$P_{t\,t_П} > \rho > 0 \tag{12}$$

регулятор активирует второй уровень управления, цель которого – предотвратить ПС, если это К-состояние, или реализовать ПС в случае Ц-состояния. В неравенстве (12) пороговое значение $0 < \rho < 1$ выбирается близким к нулю в случае К-состояния и ближе к единице для Ц-состояния; конкретное значение $\rho$ и $\varepsilon$ подбирается в экспериментах. Некоторые примеры применения представленной методики можно найти в [8, 9].

**Заключение.** Эволюция гоминид показывает, что выделение второй сигнальной системы над первой во многом стало решающим фактором уникальных приспособленческих навыков человека как действующего субъекта. Принцип больших уклонений позволяет реализовать нечто подобное (в смысле результата) в мехатронике и роботостроении: удается выделить линии в фазовом пространстве невозмущенной системы (А-профили), движение вдоль которых ведет к росту вероятности нештатного развития процесса; формируемые на этой основе решающие правила в духе Неймана-Пирсона и составляют аналог указанной второй сигнальной системы (в отличие от первой, роль которой – стабилизация системы в данном штатном режиме).

ЛИТЕРАТУРА


1. **Литвинов Г.Л.** Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение / Записки научных семинаров ПОМИ. – Т. 326. – 2005.
2. Idempotent mathematics and mathematical physics : international workshop / G. L. Litvinov, V. P. Maslov, editors. February 3-10, 2003, Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics, Vienna, Austria.
3. **Liptser R. S., Puhalskii A.A.** Limit theorems on large deviations for semimartingales. Stochastic and Stochastics Reports. 38, 201-249. – 1992.
4. **Puhalskii A.** On the theory of large deviations. Theory Probab. Appl., 38, N 3: 553–562, 1993.
5. **Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.** Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424с.
6. **Пухальский А.А.** Большие уклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 512с.
7. **Дубовик С.А.** Асимптотическая семантизация данных в системах управления. Мехатроника, автоматизация, управление. 2019;20(8):461-471.
8. **Дубовик С.А., Кабанов А.А.** Функционально устойчивые системы управления: асимптотические методы синтеза. М.: ИНФРА-М, 2019. – 249с. — www.dx.doi.org /10.12737/monography_5b446a985cf9a5.11626044
9. **Дубовик С.А., Кабанов А.А., Липко И.Ю.** Система оперативного контроля крена судна на волнении. Патент на полезную модель, № RU 195 040 U1. – 2019.


---

**S.A. Dubovik** (Sevastopol State University) **Synthesis of the "second signaling system" of the regulator based on the principle of large deviations**

*Abstract.* A stochastic dynamic system is considered, for which a decision-making system, an analogue of the second signal system, is constructed over the stabilization loop by means of the theory of large deviations and optimal control.

И. П. БОЛОДУРИНА, Л. С. ЗАБРОДИНА
(Оренбургский государственный университет)

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ НЕЙРОСЕТЕВОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

*В данной работе проведено исследование вычислительных особенностей нейросетевого подхода к решению задач оптимального управления с использованием генетического алгоритма, алгоритма гравитационного поиска, а также базового алгоритма роя частиц.*

*Численные эксперименты показали, что для достижения заданной точности эволюционные алгоритмы требуют меньшее количество итераций, при этом время выполнения одной итерации больше для многоагентных методов. Наиболее высокую скорость сходимости, с точки зрения общего времени выполнения, показал генетический алгоритм.*

**Введение.** В настоящее время существует множество задач компьютерного моделирования, требующих сведения к классу задач оптимального управления (ЗОУ) для автоматизации процесса нахождения решения, а также для сокращения трудоемкости вычислений. Наиболее распространенным инструментом решения подобных задач выступают численные методы, в том числе аппарат искусственных нейронных сетей (ИНС). Преимуществом ИНС является возможность построения решения в виде функциональной зависимости с высокой точностью [1, 2]. В то же время, применение других численных методов оптимизации требует проведения последующей интерполяции дискретного решения, которые, в свою очередь, накладывают дополнительную погрешность. Кроме того, эффективность использования нейросетевого подхода для решения ЗОУ выражается в возможности получения решения не только удовлетворяющему необходимым условиям оптимальности, но и условиям гладкости.

В исследовании [3] А. Наземи и Р. Карами представили основные этапы решения ЗОУ со смешанными ограничениями. Основываясь на оптимальных условиях Каруша–Куна–Такера, авторы построили функцию вычисления погрешности и сформулировали задачу нелинейной оптимизации, в которой для функции состояния, управления и множителей Лагранжа определены нейросетевые приближения. Для полученной схемы динамической оптимизации весовых коэффициентов нейросетевого решения проведен анализ устойчивости и сходимости.

Таким образом, на данный момент существуют различные архитектуры НС, позволяющие решать ЗОУ с различными типами ограничений [4,5]. Однако, проведенные исследования не уделяют внимание вычислительным особенностям и характеристикам нейросетевых алгоритмов. Предлагаемый доклад посвящен исследованию нейросетевого подхода к решению ЗОУ на этапе оптимизации структуры функционального представления эволюционными алгоритмами с целью анализа их точности и скорости сходимости.

**Математическая постановка общей задачи оптимального управления.** Рассмотрим математическую постановку задачи оптимального управления некоторой системой, в которой присутствуют смешанные ограничения, свободен правый конец фазовой траектории и зафиксировано временя окончания:

$$\begin{cases} J(\omega) = \int\limits_{t_0}^{t_0} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi(t_1, x(t_1)) \to \min, \\ \dot{x}_i(t) = g_i(t, x(t), u(t)),\ i = 1,...,n, \\ c_i(t, x(t), u(t)) \le 0,\ i = 1,..., p, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где: $x(t) \in R^n$ – фазовая переменная; $u(t) \in R^k$ – управление; $t_0, t_1$ – фиксированное время начала и окончания процесса соответственно.

Построим нейросетевое приближение решения ЗОУ (1) для фазовой траектории, множителей Лагранжа и функции управления:

$$\begin{cases} x_T = x_0 + (t - t_0)n_x, \\ \lambda_T = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_{i_T}}\Big|_{t_f} + (t - t_f)n_\lambda, \\ \mu_T = n_\mu, \\ u_T = n_u, \end{cases} \tag{2}$$

где функции $n_x, n_\lambda, n_\mu, n_u$ имеют структуру:

$$\begin{aligned} n_* &= \sum_{i=1}^{I} v_*^i \sigma(z_*^i), \\ z_*^i &= w_*^i t + b_*^i. \end{aligned} \tag{3}$$

Согласно методу множителей Лагранжа для решения ЗОУ необходимо построить соответствующую задачу минимизации функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} L(t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda_0, \mu(t)) = -\lambda_0 \cdot F(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) \cdot g(t, x(t), u(t)) + \\ + \mu(t) \cdot c(t, x(t), u(t)), \end{aligned} \tag{4}$$

где: $\lambda_0 \in R, \lambda(t) \in R^n, \mu(t) \in R^p$ – множители Лагранжа.

На основании необходимых условий оптимальности первого порядка, а также метода множителей Лагранжа определим задачу конечномерной оптимизации. Представим дискретную постановку задачи: непрерывный интервал $[t_0, t_1]$ поделим на $q$ одинаковых частей точками $t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$, применим метод наименьших квадратов и получим следующую постановку задачи:

$$\min_y E(y) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{q} \{E_1(t_h, y) + E_2(t_h, y) + E_3(t_h, y) + E_4(t_h, y)\}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} E_1(t_h, y) = \sum_{i=1}^{n} [\dot{x}_{T\,i}^h - g_i]^2, \\ E_2(t_h, y) = \sum_{i=1}^{n} [\dot{\lambda}_{T\,i}^h + \dfrac{\partial F_T^h}{\partial x_{T\,i}} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial g_{T\,i}^h}{\partial x_{T\,i}} \lambda_{T\,i}^h + \sum_{l=1}^{p} \dfrac{\partial c_{T\,l}^h}{\partial x_{T\,i}} \mu_{T\,l}^h]^2, \\ E_3(t_h, y) = \sum_{s=1}^{k} [\dfrac{\partial F_T^h}{\partial u_{T\,s}} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial g_{T\,i}^h}{\partial u_{T\,s}} \lambda_{T\,i}^h + \sum_{l=1}^{p} \dfrac{\partial c_{T\,l}^h}{\partial u_{T\,s}} \mu_{T\,l}^h]^2, \\ E_4(t_h, y) = \sum_{l=1}^{p} [\varphi_{FB}^{\varepsilon}(\mu_{T\,l}, -c_{T\,l})]^2, \ \varepsilon \to 0_+. \end{cases} \tag{6}$$

где $y = (w_x, w_\lambda, w_\mu, w_u, b_x, b_\lambda, b_\mu, b_u, v_x, v_\lambda, v_\mu, v_u)^T$ – неизвестные весовые коэффициенты нейросетевого приближения; $\varphi_{FB}^{\varepsilon}(a, b)$ – возмущенная НЛП-функция Фишера Бурмейстера.

Для решения задачи (5)-(6) используют различные методы оптимизации [6,7]. При этом общая схема оптимизации нейросетевого приближения состоит в обновлении весовых коэффициентов до достижения заданной точности. Сходимость представленного нейросетевого подхода зависит от используемого алгоритма оптимизации весовых коэффициентов. В связи с этим, в рамках данного доклада проанализирована сходимость нейросетевого подхода с использованием генетического алгоритма, популяционного алгоритма гравитационного поиска, базового алгоритма роя частиц, кроме того полученные результаты сопоставлены с работой алгоритма градиентного спуска.

***Генетический алгоритм оптимизации.*** Генетический алгоритм проводит поиск по пространству решений оптимизируемой функции с помощью имитационной эволюции. Для применения генетического алгоритма сформируем популяцию размера N наборами случайных значений весовых коэффициентов в нейросетевом приближении. При этом оптимизируемая функция погрешностей (5)-(6) будет выступать фитнес-функцией и обеспечивать выполнение необходимых условий оптимальности.

Скрещивание некоторых особей можно провести с помощью применения одноточечного кроссинговера, а мутацию осуществлять путем случайного изменения весового коэффициента

на некоторый набор значений. При этом селекция особей в новую эпоху проводится сохранением заданной доли наилучших особей в предыдущем поколении.

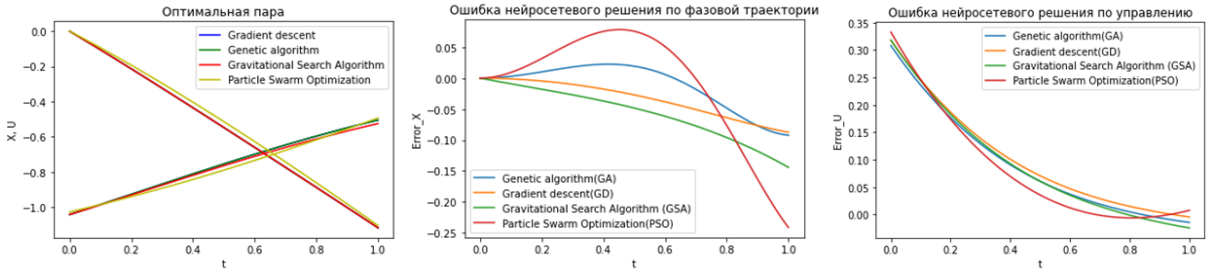
***Базовый алгоритм роя частиц.*** Алгоритм роя частиц основывается на перемещении в пространстве частиц (решений) и преобразовывая популяцию возможных решений в направлении наилучшего найденного положения частиц.

***Алгоритм гравитационного поиска.*** Алгоритм гравитационного поиска аналогично алгоритму роя частиц основывается на развитии многоагентной системы, однако взаимосвязь и влияние частиц рассчитывается по принципам законов гравитации и взаимодействия масс.

**Вычислительный эксперимент.** Рассмотрим частную ЗОУ с квадратичным функционалом относительно управления вида:

$$\begin{cases} J(\omega) = \int_0^1 u^2(t)dt - x(1) \to \min, \\ \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \\ -2 \le u(t) \le -0.4, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Сравним результаты работы нейросетевого подхода решения задачи (7) с использованием представленных алгоритмов оптимизации весовых коэффициентов (табл. 1).




а) б) в)

Рис. 1. а) Нейросетевое решение; б) Погрешность по фазовой переменной; в) Погрешность по управлению

Таблица 1

**Результаты реализации алгоритмов оптимизации нейросетевого приближения**

| Алгоритм оптимизации | *TimeIter* | *TimeAll* | *Count* |
|---|---|---|---|
| Градиентный спуск | 1,58209247 | 72746,193 | 45981 |
| Генетический алгоритм | 3,19506166 | 39350,379 | 10316 |
| Гравитационный поиск | 5,60362151 | 53413,721 | 12532 |
| Оптимизация роя частиц | 5,16283472 | 46160,905 | 13941 |

**Заключение.** В ходе применения представленных алгоритмов оптимизации нейросетевого приближения при решении ЗОУ показано, что эволюционные алгоритмы требуют наименьшее количество итераций для достижения заданной точности, при этом поиск точного глобального минимума затруднен и требует значительных вычислительных ресурсов.

Заметим, что время выполнения одной итерации больше для многоагентных методов, а наиболее высокую скорость сходимости, с точки зрения общего времени выполнения, показывает генетический алгоритм.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-07-01065, а также гранта Президента Российской Федерации на государственную поддержку ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-2502.2020.9).*

ЛИТЕРАТУРА


1. **Колмогоров А. Н.** О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. Докл. АН СССР, 1957. Т.114, № 5. С.953-956.
2. **Васильев А.Н., Тархов Д.А.** Нейронные сети как новый универсальный подход к численному решению задач математической физики. М.: Радиотехника, 2004. С. 111-118.
3. Nazemi A., Karami R. A Neural Network Approach for Solving Optimal Control Problems with Inequality Constraints and Some Applications. *Neural Process Lett*, 2017. Vol. 45. P. 995–1023.
4. Effati S., Pakdaman M. Optimal control problem via neural networks. *Neural Computer and Applications*. 2013. Vol. 23. P. 2093–2100. DOI: doi.org/10.1007/s00521-012-1156-2.
5. Kmet T., Kmetova M. Neural Networks Solving Free Final Time Optimal Control Problem. *Theory and Practice of Natural Computing. Lecture Notes in Computer Science*. 2012. Vol. 7505. P. 174-186.
6. Lagaris I.E. , Likas A., Fotiadis D.I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural Networks*. 1998. Vol. 9. No. 5. P. 987-1000.
7. Meade A.J., Fernandez A.A. The Numerical Solution of Linear Ordinary Differential Equations by Feed-forward Neural Networks. *Mathematical and Computer Modelling*. 1994. Vol. 19. P. 1-25.


---

**I.P. Bolodurina, L.S. Zabrodina** (Orenburg State University). **Comparative Analysis of Optimization Algorithms for Neural Network Solutions of the Optimal Control Problems with Mixed Constraints**

*Abstract.* In this paper, we study the computational features of the neural network approach to solving optimal control problems using the genetic algorithm, the gravitational search algorithm, and the basic particle swarm algorithm.
Numerical experiments have shown that evolutionary algorithms require fewer iterations to achieve a given accuracy, while the execution time for one iteration is longer for multi-agent methods. The genetic algorithm showed the highest convergence rate in terms of total execution time.

В. С. КУЛАБУХОВ
(АО МНПК «Авионика», г. Москва)

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОБЩЕГО ПРИНЦИПА ИЗОМОРФИЗМА

*Излагается новая парадигма в теории систем управления, в которой все основные понятия и свойства систем формализованы на основе единого принципа - общего принципа изоморфизма.*

*Принцип позволил сформулировать и доказать теорему о реализации, на основе которой математически строго определены основные понятия (модель, абстрактная система, простая, сложная, большая система) и формализованы фундаментальные свойства систем и критерии их обеспечения: по-новому, с точностью до изоморфных моделей весьма общего вида, определены понятия и критерии наблюдаемости, управляемости, контролируемости, идентифицируемости систем, а также разработаны новые формализованные методы анализа и синтеза регуляторов, наблюдателей и интегрированных информационно-управляющих систем, приведены примеры приложений теории.*

**Введение.** Одной из прикладных «технических» и вместе с тем фундаментальных проблем является проблема существования и единственности решения задач теории систем, начало анализа которой положено в работах [1, 2], где она сформулирована в виде принципа единственности в задаче реализации (идентификации). Суть проблемы реализации состоит в построении модели, объясняющей (реализующей) некоторые данные о системе.

Принцип единственности в задаче реализации гласит [1]: если данные точные и полные, то существует одна и только одна минимальная система (математическая модель), воспроизводящая эти данные. Следствие: все минимальные объяснения одних и тех же данных суть изоморфные модели. Отметим, что «понятие минимальной реализации, для которой пространство состояний имеет минимальную размерность» [2], является одним из фундаментальных понятий «теории абстрактной реализации» [2] и, в целом, «алгебраической теории линейных систем» [2]. В [1] делается вывод, что общая теорема о реализации, соответствующая принципу единственности, не сформулирована и не доказана, так как математически строго не определены понятия «данные», «система», «полнота данных» и «точность данных», т. е. не решена проблема формализации понятий.

Тематика единственности решения задач теории систем обсуждалась в работах [3-7]. Однако эти и другие работы не сняли проблему формализации понятий, а также, в целом, не содержат формулировку и доказательство общей теоремы о реализации и не позволяют получить единственные в смысле [1,6,7] решения классических задач анализа и синтеза систем в их исходной постановке (без редукции моделей с использованием, например, вложения в односвязные изоморфные системы-образы).

Здесь на основе работ [8-13] рассматривается новая формулировка принципа единственности в форме общего принципа изоморфизма, которая, на наш взгляд, позволяет разрешить как фундаментальные проблемы теории систем, так и проблемы, обусловленные трудностями решения часто встречающихся прикладных задач в их исходной постановке. Как и в [1, 2, 6, 7,11-13], изложение ведется на языке отображений и морфизмов. Исходя из общих положений теории реализации [1,2], на основе общего принципа изоморфизма в работах [8-13] сформулирована и доказана теорема о реализации изоморфизма композицией отображений, утверждающая существование обратных у отображений, образующих эту композицию. Новизна заключается в том, что отображения, составляющие композицию, в общем случае, вне коммутативной диаграммы, не являются изоморфизмами в обычном смысле. В связи с этим задача определения обратных становится нетривиальной. Теорема о реализации позволяет эту задачу решить: в [11-13] показано, что обратные к отображениям, составляющим композицию, реализующую некоторый изоморфизм, можно определить с точностью до этого изоморфизма в соответствующей коммутативной диаграмме. Приводится метод решения этой фундаментальной задачи, проиллюстрированный примерами. Дается обзор приложений теоремы о реализации и указанного

метода к решению задач моделирования и идентификации систем, синтеза и интеграции регуляторов и наблюдателей в информационно-управляющей системе, системного проектирования и интеграции систем общего вида, построения и калибровки интеллектуальных датчиков.

В целом работа посвящена обзору новой парадигмы в области анализа и синтеза систем управления на основе предложенного автором общего принципа изоморфизма. Парадигма содержит цельную систему взглядов на системы и методы их исследования и синтеза, а также общий формально-математический подход к анализу их свойств и опирается на прозрачную, минимально необходимую и строго обоснованную с точки зрения практики аксиоматику.

**Общий принцип изоморфизма и его приложения к анализу и синтезу систем управления.** С практической точки зрения формулировку принципа единственности, данную в [1], следует уточнить. Дело в том, что, наблюдая поведение системы как «черного ящика» (вход и выход), априори неизвестно, полные ли и точные ли данные о системе мы имеем. Кроме того, как указывалось в [1], весьма сложно формально определить сами понятия «полнота» и «точность» данных. Поэтому целесообразно ввести новую формулировку принципа единственности в форме ниже следующего общего принципа изоморфизма.

***Общий принцип изоморфизма в теории систем:*** если существует такое минимальное в смысле [1,2] отображение (модель) $f$, которое однозначно (изоморфно) объясняет некоторые данные о системе, то

a) с точностью до модели-изоморфизма $f$ эти данные являются полными и точными – имеет место изоморфизм данных;

b) модель $f$ единственна в том смысле, что если существуют другие минимальные изоморфные модели-объяснения тех же данных, то эти модели-объяснения изоморфны модели $f$ – имеет место изоморфизм моделей.

Другими словами изоморфизм наблюдается в обе стороны: во-первых, как взаимно-однозначное преобразование друг в друга входных и выходных данных (изоморфизм самой модели-отображения $f$, который назовем изоморфизмом данных); во-вторых, как взаимно-однозначное преобразование друг в друга любого количества «минимальных объяснений» (моделей), построенных на этих данных (такой изоморфизм назовем изоморфизмом моделей). Общий принцип изоморфизма позволил сформулировать и доказать теорему о реализации.

***Теорема о реализации.*** Рассматривается коммутативная диаграмма, показанная на рис. 1. К такой диаграмме приводятся коммутативные диаграммы во многих задачах алгебраической теории систем [8-13]. Для диаграммы справедлива теорема о реализации [12-13], которая здесь приводится без доказательства.

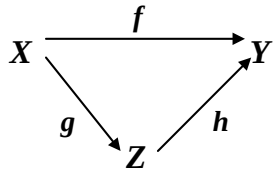


Рис. 1. Коммутативная диаграмма к теореме о реализации

*Теорема о реализации*: Если отображение $f:X\to Y$ есть обычный изоморфизм и существуют отображения $g:X\to Z$ и $h:Z\to Y$, такие, что выполняется композиция $f=hg$, то отображения $g$ и $h$ являются изоморфизмами *с точностью до изоморфизма* $f$.

Про композицию $hg$ отображений $g$ и $h$ можно сказать, что она *реализует, моделирует* отображение-изоморфизм $f$. Отображение $f$ должно быть изоморфным вне коммутативной диаграммы, то есть должно быть обыкновенным, «безусловным» изоморфизмом. Применительно к отображениям $g$ и $h$ теорема утверждает, что даже если они по отдельности, вне композиции и коммутативной диаграммы, не являются изоморфизмами, то в составе композиции $f=hg$, замкнутой изоморфизмом $f$ в коммутативную диаграмму, становятся *изоморфизмами с точностью до изоморфизма* $f$, то есть становятся некоторыми «относительными изоморфизмами» – изоморфизмами относительно (с точностью до) изоморфизма $f$. Это означает, что каждое из отображений $g$ и $h$ является изоморфизмом только в рамках коммутативной диаграммы отображений, показанной на рис. 1. При этих условиях отображения $g$ и $h$ в коммутативной диаграмме удовлетворяют всем свойствам изоморфных отображений, определенным в алгебре [14]. Доказательство приведено в [12].

Сложность заключается в том, что отображения $g$ и $h$, составляющие композицию, в общем случае, вне коммутативной диаграммы, не являются изоморфизмами в обычном смысле. В связи с этим задача определения обратных становится нетривиальной. Теорема о реализации позволяет эту задачу решить. В [12,13] анализируется и иллюстрируется примерами метод реше-

ния этой задачи. Как следует из теоремы о реализации [12,13], обратные $g^{-1}$ и $h^{-1}$ для отображений $g$ и $h$ единственны и применительно к ним в коммутативной диаграмме должны выполняться соотношения

$$e_x^{\text{right}}=f^{-1}f,\ e_y^{\text{left}}=ff^{-1},\ e_x^{\text{left}}=g^{-1}g,\ e_y^{\text{right}}=hh^{-1},\ f^{-1}=e_xf^{-1},\quad f^{-1}=f^{-1}e_y,$$

$$e_x=e_x^{\text{right}}=e_x^{\text{left}}=e_y^{\text{right}}=e_y^{\text{left}}=e_y=e,$$

$$h^{-1}=e_z\,h^{-1},\ h^{-1}=h^{-1}e_y,\ g^{-1}=g^{-1}e_z,\ g^{-1}=e_xg^{-1},$$

$$f^{-1}=g^{-1}h^{-1},\ e_z^{\text{left}}=g\,g^{-1},\ e_z^{\text{right}}=h^{-1}h,$$

$$e_z^{\text{left}}=g\,g^{-1},\ e_z^{\text{right}}=h^{-1}h,\ e_z^{\text{left}}=e_z^{\text{right}}=e_z,\ e_z^{\text{left}}e_z^{\text{right}}=e_z,\ e_z^{\text{right}}e_z^{\text{left}}=e_z,\ (e_z)^{-1}=e_z,\ e_z\,e_z=e_z\ ,$$

(1)

где $e_x^{\text{right}}$, $e_x^{\text{left}}$ – правая и левая единицы на $X$; $e_y^{\text{right}}$, $e_y^{\text{left}}$ – правая и левая единицы на $Y$; $e_z^{\text{left}}$, $e_z^{\text{right}}$ – левая и правая единицы на $Z$. В силу единственности отображения $f^{-1}$ (так как по условию $f$ – обычный изоморфизм), отображения $e_x$ и $e_y$ также единственны и равны $e$, где $e$ – обычное единичное отображение такое, что $e=ee=ee^{-1}=e^{-1}e=e^{-1}$. Отметим, что в общем случае $e_z$ – некоторая единица на $Z$ – не является обычным единичным отображением и не равна $e$. Обратные достаточно просто вычисляются по формулам

$$g^{-1}=f^{-1}h,\quad h^{-1}=gf^{-1},$$

которые прямо следуют из коммутативной диаграммы. Убедиться, что отображения $g^{-1}$ и $h^{-1}$ действительно являются обратными можно путем их подстановки в равенства (1).

***Приложения теоремы о реализации к анализу и синтезу систем управления.*** Ввиду ограниченности объема реферата, здесь даются лишь ссылки на работы, в которых изложена новая парадигма в теории систем и некоторые ее приложения.

Применение теоремы о реализации к формализации базовых понятий теории систем рассмотрено в работе [12]. Здесь же обсуждаются следствия к теореме о реализации: о «первосистемах», об измеримости систем, «постулат» причинности с точностью до изоморфизма, о детерминированности «случайностей», о принципе относительности в теории систем, о фундаментальных свойствах систем, о принципе суперпозиции в теории систем. Алгебраический формализм общих свойств систем (наблюдаемость, контролируемость, управляемость и идентифицируемость систем с точностью до изоморфизма, двойственность управляемости и наблюдаемости) – в работах [8,9,11,12]. Интеграция, парадоксы интеграции и свойства интегрированных систем, а также теорема разделения для синтеза информационно-управляющих систем – в работах [12,15,16]. Приложения к моделированию и идентификации систем, а также к разработке и калибровке интеллектуальных датчиков рассмотрены в [10,17-20]. В работах [21-26] рассмотрены методика и примеры синтеза изоморфных регуляторов, а работах [27-30] - изоморфных наблюдателей. Приложения к системному проектированию рассмотрены в работах [31-36], к интеграции информационно-управляющих систем – в работах [15,16].

**Заключение.** В работе представлен обзор основных положений новой математической теории анализа и синтеза систем управления, разработанной на основе простой аксиоматики, опирающейся на единый и единственный принцип, обоснованный с точки зрения практики, – общий принцип изоморфизма. Практическая реализуемость и значимость теории иллюстрируется примерами ее приложений к решению типовых задач анализа и проектировании информационно-управляющих систем. Демонстрация эффективности разработанных на основе теории прикладных методов синтеза производится в сравнении с известными и традиционно используемыми методами.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Калман Р.Е.** Идентификация систем с шумами // УМН. 1985. Т. 40. Вып.4 (244). С. 27-41.
2. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
3. **Sain M.K.** The Growing Algebraic Presence in Systems Engineering: An Introduction // Proceedings IEEE, Volume 64, Number 1, January 1976.
4. **Месарович М., Такахара Я.** Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978.

5. **Уонэм М.** Линейные многомерные системы управления. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
6. **Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.** Проблема единственности решения задач теории систем // АиТ. 1997. №12. С. 4-17. https://elibrary.ru/item.asp?id=13269728
7. **Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.** Вложение систем // АиТ. 1999. №8. С. 61-73.
8. **Кулабухов В.С.** Алгебраические аспекты некоторых свойств сложных систем // В сборнике научно-методических материалов: Управление техническим состоянием авиационного оборудования. М.: Изд. ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1998. С. 107-118.
9. **Кулабухов В.С.** Принцип изоморфности в теории систем // Международная конференция по проблемам управления (29 июня-2июля 1999г.). Тезисы докладов в 3-х томах. Том 1. ИПУ РАН. Москва. 1999г.
10. **Кулабухов В.С.** Теория реализации и ее приложения к моделированию систем // Моделирование авиационных систем. Матер. Всероссийской научно-практической конф. М.: Изд. ГНЦ РФ ФГУП ГосНИИАС, 2013. С. 13-14. https://elibrary.ru/item.asp?id=21000658
11. **Кулабухов В.С.** Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // XII Всероссийск. совещ. по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 438-448. URL: http://vspu2014.ipu.ru/prcdngs
12. **Кулабухов В.С.** Общий принцип изоморфизма в теории систем // Cloud of Science. 2018. Т.5. №3. С. 400-472. URL: https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_5_400.pdf
13. **Vladimir S. Kulabukhov** A General Principle of Isomorphism: Determining Inverses // Symmetry 2019, 11, 1301; doi:10.3390/sym11101301. URL: https://www.mdpi.com/2073-8994/11/10/1301
14. **Кострикин А.И.** Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.
15. **Кулабухов В.С.** Общий принцип изоморфизма: интеграция регулятора и наблюдателя в следящей системе // Материалы XVI Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» [текст]. Сборник докладов.- М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2019. С. 321-329.
16. **Kulabukhov V.** A General Principle of Isomorphism: Integration of Regulator and Observer in the Control System // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 714 (2020) 012013. doi:10.1088/1757-899X/714/1/012013 URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/714/1/012013
17. **Кулабухов В.С.** Общий принцип изоморфизма и калибровка датчиков на его основе / Материалы V научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [Текст]. Сборник докладов. – М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2018. С.98-105.
18. **Кулабухов В.С., Цацин А.А., Заец В.Ф.** и др. Патент RU 2 714 612 C1 Способ идентификации нелинейных систем. Опубликован 18.02.2020, бюллетень №5. Патентообладатель: АО МНПК «Авионика».
19. **Кулабухов В.С., Цацин А.А., Заец В.Ф.** и др. Патент RU 2 714 039 C1 Система для разработки интеллектуального датчика. Опубликован 11.02.2020, бюллетень №5. Патентообладатель: АО МНПК «Авионика».
20. **Кулабухов В.С.** Общий принцип изоморфизма: идентификация моделей и калибровка датчиков // Материалы XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. Москва, 17-20 июня 2019 г. URL: https://vspu2019.ipu.ru/files/vspu/%D0%94%D0%BE%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D1%8B%20%D0%92%D0%A1%D0%9F%D0%A3-2019/19%20%D0%A3-765/%D0%9A%D1%83%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D1%83%D1%85%D0%BE%D0%B2%D0%92%D0%A1.pdf
21. **Кулабухов В.С.** Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Том 18, №8. С. 507-515. https://elibrary.ru/item.asp?id=29810192
22. **Kulabukhov V.** Linear Isomorphic Regulators // CMTAI2016. MATEC Web of Conf. 2017. Т. 99. С. 03008. URL: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/13/matecconf_cmtai2017_03008.pdf
23. **Булгаков В.В., Кулабухов В.С.** Сравнительный анализ формализованных методов синтеза регулятора для следящей системы // Приборы. 2013. № 1 (151). С. 39-44.
24. **Кулабухов В.С., Булгаков В.В.** Сравнительный анализ некоторых формализованных методов синтеза регулятора в вертикальном канале вертолета / Материалы IV научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [Текст]. Сборник докладов. – М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2017. С.45-53.
25. **Кулабухов В.С., Булгаков В.В.** Сравнительные исследования некоторых алгебраических методов формализованного синтеза регуляторов для следящих систем // Приборы. 2017. №12 (210). С. 13-19.
26. **Кулабухов В.С., Булгаков В.В., Сайганов М.А.** Синтез регулятора для газового привода на основе анализа экспериментальных данных// Приборы. 2020. № 5 (239). С. 32-44.
27. **Кулабухов В.С.** Синтез изоморфных наблюдателей состояния систем // Материалы IV научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [текст] / Сборник докладов.- М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2017. С. 28-36.
28. **Кулабухов В.С.** Изоморфные наблюдатели состояния и робастная фильтрация сигналов систем // Радиотехника. 2017. №8. С. 50-55.
29. **Kulabukhov V.S.** Isomorphic observers of the linear systems state // Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA2017) 15–16 November 2017, Moscow, Russian Federation. doi:10.1088/1757-899X/312/1/012016. p. 012016. URL: http://iopscience.iop.org/issue/1757-899X/312/1
30. **Кулабухов В.С.** Синтез линейных изоморфных наблюдателей // Материалы XIV Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» [текст]. Сборник докладов.- М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2017. С. 271-279.

31. **Кулабухов В.С.** Алгебраическая формализация процедур анализа и синтеза сложных интегрированных систем // 6-я Международная конференция “Авиация и космонавтика – 2007”. 1-4 октября 2007г. Москва. Тезисы докладов. - М.: Изд-во МАИ, 2007.
32. **Буков В.Н., Кулабухов В.С., Косьянчук В.В., Рябченко В.Н., Горюнов С.В., Наумов А.И.** Основы интеграции систем авиационного оборудования. Учебное пособие. - М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2007. - 338с.
33. **Кулабухов В.С.** Некоторые результаты теории интеграции бортового оборудования аэрокосмических эргатических систем // Третий Международный аэрокосмический конгресс. IAC’-2000: Сборник тезисов, Москва, 23-27 августа 2000г. – М: Между-народный фонд попечителей Московского государственного авиационного техно-логического университета им. К.Э. Циолковского; ООО «Научно-техническая компания «Аффинор»; Издательство СИП РИА, 2000. – 360 с.
34. **Кулабухов В.С.** Некоторые результаты алгебраической теории телеоцентрического системного проектирования аэрокосмических эргатических комплексов // Тезисы докладов 6-й международной конференции “Системный анализ и управление аэро-космическими комплексами”, Евпатория, 02.07-08.07.2001г.
35. **Кулабухов В.С.** Алгебраическая формализация телеоцентрического подхода к системному проектированию // Материалы XV Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» [текст]. Сборник докладов.- М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2018. С. 279-287.
36. **Kulabukhov V.** Algebraic Formalization of System Design Based on a Purposeful Approach // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 476 (2019) 012017. doi:10.1088/1757-899X/476/1/012017
URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/476/1/012017/pdf

---

**V.S. Kulabukhov** («Avionica» Joint Stock Company, Moscow, Russia). **Mathematical theory of analysis and synthesis of control systems based on the general principle of isomorphism**

*Abstract.* A new paradigm in the theory of control systems is presented, in which all the basic concepts and properties of systems are formalized on the basis of a single principle - the general principle of isomorphism.
The principle made it possible to formulate and prove the realization theorem, on the basis of which the basic concepts (model, abstract system, simple, complex, large system) are mathematically strictly defined and the fundamental properties of systems and criteria for their provision are formalized: in a new way, up to isomorphic models very general form, the concepts and criteria of observability, controllability, checkability, identifiability of systems are defined, and new formalized methods of analysis and synthesis of regulators are developed, and formalized methods synthesis observers and integrated information-control systems are developed, examples of applications of the theory are given.

В.А. ТАЙНИЦКИЙ, Е.А. ГУБАР
(Санкт-Петербургский государственный университет)

Д.Н. ФЕДЯНИН, И.В. ПЕТРОВ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МУЛЬТИВИРУСНОЙ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ИНФОРМАЦИИ

*Рассматривается обобщенная модель Восприимчивый-Предупрежденный-Зараженный-Восстановленный-Восприимчивый (SWIRS), описывающая иерархический процесс распространение двух типов вредоносных программ в сети и информации о защитных мерах. В статье представлен анализ устойчивости модели SWIRS, сформулирована управляемая модель SWIRS, показана структура оптимального распространения информации о вирусной защите и оптимальном лечении. Проводится серия численных экспериментов, для иллюстрации полученных результатов.*

**Введение.** Последние достижения в области информационных технологий привели к экспоненциальному росту числа устройств, подключенных к Интернету, и большей популярности социальных сетей. Такое повседневное использование устройств создает возможности для более удобного распространения информации, но также создает больше возможностей для вирусных атак, которые используют существующие уязвимости устройств, подключенных к сети Интернет. Контроль распространения вредоносных программ можно рассматривать как задачу оптимального управления, определяющую баланс между стоимостью затратами на разработку антивирусных пакетов и стоимостью восстановления устройств. В данной работе рассматриваются два процесса, которые можно описать с помощью моделей распространения эпидемий: процесс распространения информации о необходимости превентивной защиты устройств сети от вирусных атак, процесс распространения вредоносных программ в сети. Рассматривается обобщенная модель Восприимчивый-Предупрежденный-Зараженный-Восстановленный-Восприимчивый (*SWIRS*), которая описывает распространение двух типов вредоносных программ в сети. В статье представлен анализ устойчивости модели *SWIRS*, сформулирована управляемая модель *SWIRS*, показана структура оптимального распространения информации о вирусной защите и оптимальном лечении. Также проводится серия численных экспериментов, для иллюстрации полученных результатов.

**Математическая модель.** Формулируется двухуровневая модифицированная *SIRS* модель (Восприимчивый-Инфицированный-Восстановленный-Восприимчивый) с двумя различными типами вирусов, циркулирующими в сети размером $N$. Это вспомогательное разделение на уровни позволяет фиксировать два процесса, которые могут происходить как в компьютерных, так и в социальных сетях. Первый процесс – это распространение информации о вредоносных атаках и защита персональных данных, документов, проектов и т.д. Этот процесс распространения рассматривается как иерархия первого уровня в модели Восприимчивый-Предупрежденный-Зараженный-Восстановленный-Восприимчивый (*SWIRS*). Второй процесс, который соответствует физическому распространению антивирусного программного обеспечения, рассматривается как второй уровень модели, представляющей собой модифицированную модель Восприимчивый-Зараженный-Восстановленный-Восприимчивый (*SIRS*) с двумя конкурирующими вирусами, распространяющимися в сети. Таким образом, в отличие от классических *SIRS* моделей, где популяции делятся на три группы: Восприимчивые ($S$), Инфицированные ($I$) и Восстановленные ($R$), здесь зараженная подгруппа делится на две подгруппы: подгруппу узлов, инфицированных вирусом первого типа $V_1$ и подгруппу, инфицированную вирусом второго типа $V_2$. Распространение информации на первом уровне добавляет в рассмотрение новую группу Предупрежденных узлов (W). Эта группа состоит из узлов, которые получили информацию о возможных рисках вирусной атаки и готовы использовать специальные средства защиты.

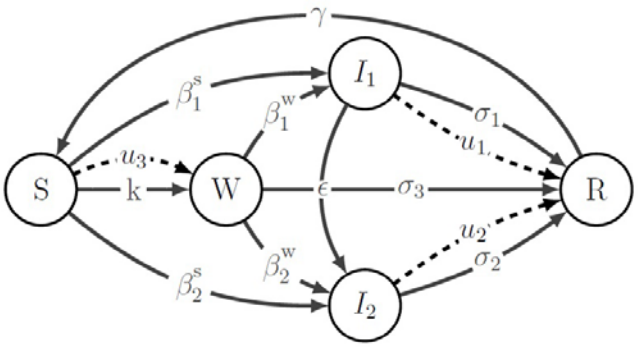



Рис. 1. Схема переходов между состояниями эпидемического процесса.

Эпидемический процесс моделируется как система нелинейных дифференциальных уравнений на интервале от 0 до *T*. Общее число узлов в сети в течение всего процесса остается постоянным. Пусть доля Восприимчивых узлов в момент времени t равна *S(t),* Предупрежденных – *W(t),* Инфицированных первым типом вируса – $I_1(t)$, Инфицированных вторым типом вируса — $I_2(t)$ и доля восстановленных узлов – *R(t).* В начале эпидемии, в момент времени $t$=0, большинство узлов сети находятся в восприимчивом состоянии, и небольшая часть узлов заражена различными типами вирусов.

Изменение системы описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -kWS - \beta_1^S SI_1 - \beta_2^S SI_2 + \gamma R - u_3 S;\\
\frac{dW}{dt} &= kWS - \beta_1^W WI_1 - \beta_2^W WI_2 + u_3 S - \sigma_3 W;\\
\frac{dI_1}{dt} &= \beta_1^S SI_1 + \beta_1^W WI_1 - \varepsilon I_1 I_2 - \sigma_1 I_1 - u_1 I_1; \qquad (1)\\
\frac{dI_1}{dt} &= \beta_2^S SI_2 + \beta_2^W WI_2 + \varepsilon I_1 I_2 - \sigma_2 I_2 - u_2 I_2;\\
\frac{dR}{dt} &= \sigma_1 I_1 + u_1 I_1 + \sigma_2 I_2 + u_2 I_2 + \sigma_3 W - \gamma R;
\end{aligned}$$

где $\beta_i^S$ – скорость заражения восприимчивых узлов вирусом $V_i$, $i$=1,2, $\beta_i^W$ – скорость заражения предупрежденных узлов вирусом $V_i$. На втором уровне эпидемического процесса рассматривается скорость самовосстановления $\sigma_1$ для вируса $V_1$ и $\sigma_2$ для вируса $V_2$ как вероятность того, что зараженные узлы из подгрупп $I_1$ или $I_2$ будут восстановлены от инфекции без каких-либо затрат на нашу систему. На первом уровне узлы, информированные о вирусных атаках, имеют скорость восстановления $\sigma_3$. Не теряя общности, можно сказать, что второй вирус $V_2$ сильнее, чем вирус $V_1$, и с вероятностью $\varepsilon$ второй вирус $V_2$ может вытеснить первый вирус в узле, зараженном первым вирусом.

Применение антивирусного обеспечения уменьшает количество зараженных узлов. Это можно интерпретировать как параметры управления $-u_1(t)$ и $u_2(t)$ в системе (1), где $u_i(t)$ - это доли инфицированных, находящихся на лечении в момент времени $t$, данные параметры находятся в интервале от 0 до 1. Предупрежденные узлы могут избежать эпидемии, приняв специальные карантинные меры. Контрольный параметр $u_3(t)$ – это доля восприимчивых узлов, которые предупреждены о распространении вируса в момент времени $t$.

**Функционал затрат.** Любые меры защиты имеют свои издержки. Пусть целевая функция $J$ является суммой двух функционалов, соответствующих двум уровням модели. На первом уровне функционал $J_1$ описывает затраты на карантинные меры, то есть это затраты на распространение информации об эпидемиях среди восприимчивых узлов. На втором уровне функционал $J_2$ описывает стоимость антивирусного лечения и включает затраты, понесенные зараженными узлами, затраты на распространение антивируса и выгоду от восстановленных узлов.

В любой момент времени *t*, имеются следующие функции затрат: $f_1(I_1(t))$, $f_2(I_2(t))$ – затраты, понесенные зараженными узлами; $L(W(t))$ – польза, полученная от предупрежденных узлов; функция $g(R(t))$ определяет коэффициент полезности для восстановленных узлов; функции $h_1(u_1(t))$, $h_2(u_2(t))$, – затраты на антивирусное лечение, а $h_3(u_3(t))$, – затраты на распространение информации. Функции $f_i(I_i)$ являются неубывающими и дважды дифференцируемыми выпуклыми функциями, $fi(0)=0$, $f_i(I_i)>0$ для $I_i>0$, $i=1,2$; $g(R)$ и $L(W)$ являются неубывающими и дифференцируемыми функциями, а $h_i(u_i(t))$ являются дважды дифференцируемыми и возрастающими функциями по $ui(t)$, $h_i(0)=0$, $h_i(u_i(t))>0$, когда $u_i>0$.

Общие затраты системы на временном интервале [0, T] определяются как сумма двух функционалов $J=J_1+J_2$, где

$$J_1 = \int_0^T \left( h_3\left(u_3(t)\right) - L\left(W(t)\right)\right) dt,$$
$$J_2 = \int_0^T \left( \sum_{q=1}^{2} \left( f_q\left(I_q(t)\right) + h_q\left(u_q(t)\right)\right) - g\left(R(t)\right)\right) dt, \quad (2)$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы подобрать такие структуры управления, чтобы минимизировать эти затраты, т. е., $\min_{u_1,u_2,u_3} J$ .

**Заключение.** В данной работе разработана модифицированная модель *SWIRS* одновременного распространения информации и вредоносного ПО в сети. Получены условия устойчивости стационарных состояний для *SWIR* и *SWIRS* моделей. Получена структура оптимального управления, а также свойства допустимых управлений для специального класса функций затрат. Проведено численное моделирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Altman E., Khouzani M., Sarkar S**. Optimal control of epidemic evolution. Proceedings of INFOCOM., pp.1683-1691, 2011.
2. **Taynitskiy V., Gubar E., Zhu Q.** Optimal Control of Heterogeneous Mutating Viruses. Games, Volume 9,Issue 4, Article number 103, 2018.
3. **Sahneh F.D., Scoglio C., and Mieghem P. V**. Generalized epidemic mean-field model for spreading processes over multilayer complex networks. IEEE/ACM Transactions on Networking. Vol. 21, No. 5. pp. 1609-1620, 2013.
4. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф**. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. - 393 с.

---

**V.A. Taynitskiy, E.A. Gubar** (SPbSU, Saint Petersburg), **D.N. Fedyanin, I.V. Petrov** (ICS RAS, Moscow) **Optimal control in multivirus model with information spreading**

*Abstract.* Nowadays, epidemic models provide an appropriate tool to describe the propagation of biological viruses in human or animal populations, rumors and misinformation in social networks, and malware in both computer and ad hoc networks. It is common that there are multiple types of malware infecting a network of computing devices, and different messages can circulate over the social network and the Internet. Information spreading and virus propagation are interdependent processes. To capture their independencies, we integrate two epidemic models into one holistic framework, entitled as the modified Susceptible-Warned-Infected-Recovered-Susceptible (SWIRS) model. The first epidemic model describes the information spreading regarding the risk of malware attacks and possible preventive procedures. The second one describes the propagation of multiple viruses over the network of devices. To minimize the impact of the virus spreading and improve the protection of the networks, we consider an optimal control problem with two types of control strategies: information spreading among healthy nodes and the treatment of infected nodes. We obtain the structure of optimal control strategies and study the condition of epidemic outbreaks. The main results are extended to the case of the network of two connected clusters. Numerical examples are used to corroborate the theoretical results.

## Секция 4

## ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Р. В. МЕЩЕРЯКОВ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В. К. САРЬЯН
(НИИ РАДИО, Москва)

# ИНДИВИДУАЛИЗИРОВАННАЯ УСЛУГА ПО УПРАВЛЕНИЯ СПАСЕНИЕМ АБОНЕНТОВ ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ КАК ПРИМЕР УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЙ ПРИРОДЫ

*В докладе рассматривается создание основ системы инфокоммуникационных услуг для реализации информационной технологии по управлению спасением людей при возникновении чрезвычайных ситуаций. Особенностью системы предлагается реализация создание механизма ответственности за принимаемые решения, реализуемой в информационно-управляющей системе. Система администрирования услуги предполагает включение подсистему поддержки принятия решений при дефиците времени, остальные ресурсы считаются достаточными для реализации услуги спасения людей. Результатом работы системы является индивидуальная услуга для человека по нахождению пути спасения при возникновение чрезвычайной ситуации, ориентированная на конкретное местоположение.*

**Введение.** Текущий этап развитие информационного общества можно кратко охарактеризовать следующим образом: формирование единой глобальной конвергентной инфокоммуникационной среды (КИС, a single global convergent infocommunication environment (ICE), в которой в реальном времени взаимодействуют уже громадное и все геометрически возрастающее количество объектов: человеко-машинных систем (ЧМС), man-machine systems (MMS), машинных систем (МС) (machine systems, MS), систем искусственного интеллекта (ИИС) (artificial intelligence systems), систем интернет вещей (ИВС, IoT). Так как технология IoT предполагает в соответствии с определением, возможность информационного взаимодействия всех ИВС IoTS в единой КИС (ICE) между собой и с любыми объектами ЧМС (MMS), МС(MS) и ИИС (AIS), то природные объекты приобретают существенное значение. Таким образом, возникает ситуация, когда любое взаимодействие протекает в междисциплинарной среде и этот факт необходимо учитывать при создании и отработке систем управления.

Рис. 1. Системы междисциплинарной природы

В секторе МСЭ-Т в 13 ИК в настоящее время проводятся программы исследований, обозначенных как ITU-T Focus

Group on “Technologies for Network 2030” (FG-NET-2030) and Joint Coordination Activity on IMT2020 (JCA-IMT2020), которые уже предметно заглядывают в будущее, обеспечивая поистине невиданные возможности (КИС (ICE) в ближайшем будущем. Это означает, что в глобальное информационное взаимодействие принципиально могут вступить все косные и живые объекты природы, принадлежащие к одному виду или стоящие на разных ступенях развития. Это означает, что современная ИКС формирует гиперсвязанный мир, который можно рассматривать как глобальную сложно взаимосвязанную междисциплинарную систему. Любые системы (рис.1 – [1]), в том числе и междисциплинарные системы, оказываются «погруженными» в глобальной сложно взаимосвязанной междисциплинарной системе.

Необходимо обратить внимание еще на одну важную тенденцию, которая определяет функционирование организационных систем (человека) в ИКС (см. рис.1), связанную с предоставлением инфокоммуникационных услуг, в том числе и услуг управления организационными системами. Развитие цифровых технологий играет все большую роль в предоставлении массовых инфокоммуникационных (ИК) услуг, в том числе и услуг управления. Предоставление ИК услуг управления организационным системам (человеку) – рис.1 может быть основной целью функционирования и управления в междисциплинарной системе.

**Система управления предоставления услуг.** Среди ИК услуг, которые могут быть востребованы массовым пользователем, присутствуют полезные и востребованные услуги, которые могут иметь важное для жизни социума значение. Однако просто так реализовать такую ИК услугу на максимальном количестве пользователей без государственного управления не получается, так как некачественная (в том числе и неприемлемая по той или иной причине для государства) услуга при массовом внедрении может вызвать негативные социальные последствия, поэтому они могут стать практически значимыми и доступными только при государственном управлении. Это обстоятельство расширяют сферу управления в междисциплинарных системах и переводит управление в область реализации исполнительной власти на новые сферы жизни социума, на которые государственное регулирование еще не распространялось [3].

Рис. 2. Инфраструктура предоставления массовых ИК-услуг (САУ)

За более чем десятилетний период практики рынка ИК услуг для обеспечения регулирования этих услуг выработался некоторый стандарт инфраструктуры, которого стараются придерживаться все участники рынка ИК услуг. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть такую инфраструктуру для индивидуализированной услуги управления спасением абонентов при возникновении ЧС (пока еще обычной ИК услуги) и посмотреть, что в ней надо изменить, чтобы осуществить трансформацию управления в междисциплинарной системе на базе существующей и опробованной системы администрирования услуг (САУ), которая должна сопровождать каждую ИК услугу. (рис2).

Из рис. 2 видно, что САУ содержит все элементы управления ИК услугами. По мере формирования ИКС становится очевидным, что главные критерии ее функционирования — безопасность и достоверность — невозможно выдержать без эффективного администрирования со стороны государства. Структурно-функциональный анализ существующей и апробированной системы администрирования услуг (САУ) показывает, что она имеет комплексный многофункциональный и междисциплинарный характер. На рис. 2 приведена типовая инфраструктура предоставления информационно-коммуникационных и очевидно, что САУ имеет сложную структуру, которая в своих элементах выполняет множество функций.

Перечислим составляющие САУ: СКЗИ (средство криптографической защиты информации) – это программа или устройство, которые шифруют документы и генерируют электронную подпись (ЭП); Биллинговая система – это программное обеспечение, разработанное специально для операторов (провайдеров). Она позволяет считать (учитывать) и тарифицировать оказанные услуги доступа; Авторская платежная система защищает авторское право правообладателя контента; Геоинформационные технологии – системы координатно-временного и навигационного обеспечения (например, ГЛОНАСС или GPS); Сервис центр – определяет порядок доступа к услуге и контролирует достоверность услуги, то есть правильную работу всех составляющих услуги; Система условного доступа обеспечивает порядок взаимодействия разных поставщиков информации в случае конвергентных услуг, которые на рис. для простоты не указаны.

На рис.3 приведена блок-схема одного из примеров реализации востребованной междисциплинарной системы, которая реализует востребованную массовую индивидуализированной услуги управления спасением абонентов (ИУСА) при возникновении ЧС. В этом случае система администрирования услуг (рис.2) может выполнить функцию контроля за соблюдением прав потребителя услуг и за качеством услуг, поэтому эта система должна быть точкой приложения государственного регулирования. На рис. 3 показана блок-схема формирования на абонентском терминале абонента его индивидуальной экспертной системы, которая при возникновении аварийной ситуации начинает управлять его самоэвакуацией из зоны ЧС в ближайшую безопасную для данного типа ЧС зону. Эти исследования и разработки образуют объектные, региональные и глобальные мониторинговые и экспертные системы для различных типов чрезвычайных ситуаций. Более того, что хотя это число рассматриваемых ЧС должно быть ограничено, сюда могут быть включены даже чрезвычайные ситуации с малой долей вероятности возникновения.

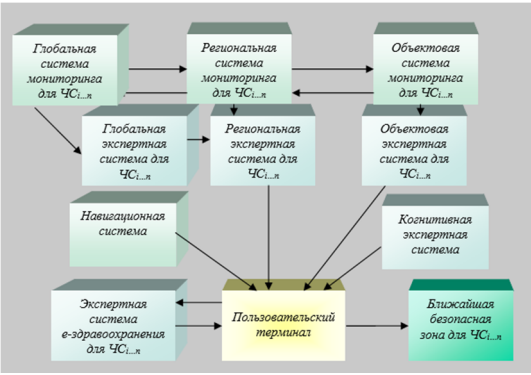



Рис. 2. Блок-схема формирования индивидуальной советующей системы (СППР) – инструмент управления в междисциплинарной системе

Сопоставляя блок – схемы типовой междисциплинарной системы (рис.1 [1] с блок-схемой междисциплинарной системы ИУСА видно сходство по основным функциональным признакам, что позволяет авторам отнести ИУСА к классической междисциплинарной системе, у которой основным инструментом управления поведение организационной системы (человека) является экспертная системы междисциплинарной системы.

Следует отметить отличия: 1) инструментальная часть в предлагаемом случае – это советующие (системы поддержки принятия решения) системы, 2) объекты управления не конкурируют между собой за ресурсы (считается, что необходимых для спасения ресурсов на всех хватает), 3) хотя и у человека есть возможность принять самостоятельное решение, отличающегося от решения по спасению, предложенного ИУСА, но учитывая единственный собственный дефицит по времени в условиях надвигающегося катастрофической фазы ЧС, он должен для своего спасения следовать советам ИУСА. И здесь также отличия ИУСА от блок-схемы [1], так как ставится задача администрирования процессов управления, то есть ответственности за предлагаемые решения по управлению. Тем самым в предложенном случае расширяем класс рассмотренных междисциплинарных систем с управлением.

**Заключение.** Таким образом, ИУСА должна быть в состоянии управлять индивидуализированным управлением самоэвакуации абонента из любой точки пространства на планете Земля, в том числе и тогда, когда происходит несколько чрезвычайных ситуаций одновременно. Мониторинг и контроль системы администрирования услуг, соблюдения критериев государственной и общегражданской безопасности, достоверности информации, реализации функций взаимодействующих госучреждений, обязательств их выполнения, разрешения споров сторон в максимально короткие временны́е, вытекающие из смысла услуги отрезки и недопущение массового нарушения прав пользователей должны стать основной функцией государственных органов надзора и администрирования САУ.

В основе функционирования этих органов должны лежать стандарты и регламенты, которые могут и должны быть выработаны в тесном взаимодействии специалистов и экспертов, компетентных в различных аспектах научного знания в междисциплинарных научных дисциплинах, цифровых технологий и информационных услуг. Таким образом, функция управления в этой междисциплинарной систем конвергируется с государственным регулированием.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 20-011-00749*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новиков Д.А.** Методология управления: монография. М.: Либроком, 2011. 129 с.
2. **Сарьян В.К., Мещеряков Р.В., Назаренко А.П.** Проблемы и возможности гиперсвязанного мира. // 5 международная конференция «Инжиниринг & Телекоммуникации - En&T 2018 С. 57–59.
3. **Назаренко А.П., Сарьян В.К., Ермаков В.В., Любушин А.А., Мещеряков Р.В.** Междисциплинарное и международное сотрудничество в период с 2014 по 2019 г. по формированию массовой услуги по индивидуализированному спасению людей при возникновении ЧС природного и техногенного происхождения / Труды НИИР (Научно-исследовательского института радио), сборник научных статей: Москва, 2019. С. 39–54
4. **Сарьян В. К., Левашов В. К.** Основные тенденции развития информационно-коммуникационных систем принятия государственных управленческих решений // Актуальные проблемы российского права. — 2020. — Т. 15. — № 6. — С. 33—42.

---

**R.V.Meshcheyakov**, (ICS RAS, Moscow), **V.C.Sarian** (NIIR, Moscow) **Individual rescue control service in emergency situations as example of control system of multidisciplinary nature**

*Abstract.* The paper discusses the system foundations creation of infocommunication services for the implementation of information technology to control the rescue of people in emergencies. A systems feature is the implementation of the creation of a mechanism of responsibility for decisions. The service administration system assumes the inclusion of a decision support subsystem in the event of a lack of time, the remaining resources are considered sufficient for the implementation of the rescue service. The result of the system's operation is an individual service for a person to find a way of escape in case of an emergency, focused on a specific location.

В.Н. ПОДОПРИГОРА, Д.Е. СЕЛИВЕРСТОВ, В.В. ЗАВАДСКИЙ
(Российский экономический университет им. Плеханова, Москва)

К.Д. РУСАКОВ
(Институт проблем управления имени А.А. Трапезникова РАН, Москва)

# РАЗРАБОТКА АРХИТЕКТУРЫ ЦИФРОВОЙ ПЛАТФОРМЫ ТАРИФНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ФЕДЕРАЛЬНОЙ АНТИМОНОПОЛЬНОЙ СЛУЖБЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ СРЕДСТВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ

*В статье приводится обоснование актуальности разработки цифровой платформы тарифного регулирования федеральной антимонопольной службы, а также ее архитектура, построение которой предлагается провести с использованием современных средств интеллектуализации управления*

**Введение.** В настоящее время в Российской Федерации одной из функций Федеральной антимонопольной службы (ФАС) является контроль за соблюдением антимонопольного законодательства, в том числе в сфере электроэнергетики, использования земли, недр, водных и других природных ресурсов [1]. При этом, руководством ФАС сформулирован ряд актуальных задач, необходимость решения которых вызвана повсеместной цифровизацией и интеллектуализацией деятельности современного общества [2]. Одной из таких задач, стоящих перед ФАС является внедрение системы контроля, направленной на предупреждение и пресечение нарушений в сфере тарифного регулирования, а также повышение прозрачности тарифов для населения. Разработка современного метода формирования тарифов необходима для исключения тарифной дискриминации, а также для устранения целого ряда проблемных вопросов, таких как: снижение социальной напряженности и выравнивание тарифов, снижение затрат для установления тарифов и исключение получения сверхприбыли, автоматизация и сокращение времени на принятие тарифного решения и др.

В связи с этим становится актуальной задача математического моделирования процесса формирования тарифов и разработки соответствующей цифровой платформы для решения поставленной задачи. В настоящее время решение сформулированной задачи в известной литературе отсутствует. Новизна предлагаемой архитектуры заключается в использовании нейросетевых моделей для реализации отдельных модулей и блоков, а также создании независимого цифрового токена на базе технологии «блокчейн» [3]. Предлагаемый материал посвящен формированию облика концептуальных модулей, образующих архитектуру цифровой платформы тарифного регулирования ФАС.

**Разработка архитектуры цифровой платформы тарифного регулирования.** Целью разработки платформы является повышение эффективности и прозрачности применения системы тарифного регулирования ФАС.

Ключевыми задачами проекта являются:

обеспечение комплексного непрерывного мониторинга тарифов;

вовлечение в формирование тарифной политики всех участников регулируемых видов деятельности;

обеспечение прозрачной структуры управления тарифами;

создание сервисов для разработки стратегий и программ.

Для решения поставленных задач предлагается внедрить ряд технологических решений, представляющих собой в совокупности концептуальное архитектурное решение по созданию цифровой платформы.

***Технологические решения для создания цифровой платформы.***

1. Разработать цифровую платформу тарифного регулирования в состав которой включить государственную информационную систему (ГИС) ФАС России, экспертно-аналитический инструментарий пользователей, инструмент структурирования собираемых данных о фактических и плановых объемах и стоимостях оказываемых услуг в сфере тарифного регулирования с применением нейросетевых моделей, а также инструмент интеграции с ранее цифровизован-

ными регулируемыми видами деятельности. При этом, ГИС ФАС должна представлять собой государственный портал, который в целевой архитектуре сосредоточит в себе структурированные информационные потоки во всех сферах тарифного регулирования, обеспечит ФАС России, включая подведомственных регуляторов и других участников процесса необходимыми аналитическими инструментами и позволит разрешить вопрос качественного хранения и верификации данных. На этапе первого запуска планируется обеспечить взаимную интеграцию ГИС ФАС с порталом Госуслуги, в том числе, для обеспечения автоматизированного доступа к экосистеме ФАС России, предоставление личных кабинетов всем участникам процессов (потребителям услуг, регулируемым организациям, региональным регуляторам, органам Власти и др.), структурированное хранение данных, загружаемых через личные кабинеты пользователей разных уровней; прозрачность данных на всех иерархических уровнях управления ФАС России за счет создания адекватных математических моделей и алгоритмов обработки данных; перевод архивов данных регуляторов всех уровней из статуса «комплект документов по теме» в статус «структурированный массив данных». Первый запуск данного и всех последующих блоков планируется производить начиная со сферы регулирования в электроэнергетике.

2. Разработать цифровой регистр, обеспечивающий сквозное применение технологии распределенного реестра на всех уровнях хранения и верификации данных (непрерывный контроль достоверности данных), а также применение современных методов хранения и обработки данных (базы данных реального времени, распределенные реестры и т.д.). Система цифрового регистра предназначена для обеспечения надежного хранения данных, предоставления данных всем заинтересованным лицам; является технологическим базисом развития платформы и необходимым элементом для системы оборота и управления токенами. Данная система включает в себя базу данных реального времени, блокчейн-платформу для фиксации и верификации данных, поступающих с различных уровней. При этом, система позволит отслеживать корректность данных, направляемых регулируемыми организациями с целью утверждения тарифов, а также обеспечивать привязку этих данных к принимаемым управленческим решениям в области тарифного регулирования и предоставит возможность внедрения цифровых финансовых инструментов, привязанных к выработке продукции на монопольных рынках.

3. Разработать цифровой токен, представляющий собой независимый финансовый контур, базирующийся на стеке цифровых ценностей, привязанных к выпуску продукции на монопольных рынках. Система позволит осуществлять выпуск и оборот токенов, привязанных к различным рынкам, входящих в сферу тарифного регулирования. Принципы выпуска и привязки токенов могут быть различными (например, к выпускаемым продуктам, к объемам продуктов, учтенным при тарифном регулировании и т.д.). Также, предлагается синтезировать модуль поддержки принятия решений, позволяющий на этапе установления тарифов проводить анализ их влияния на экономические показатели регионов в зависимости от изменения управляемых параметров и осуществлять выработку эффективных управляющих воздействий.

**Заключение.** В настоящей статье представлено обоснование актуальности решения научной задачи по разработке цифровой платформы тарифного регулирования в интересах ФАС России. Архитектура цифровой платформы на проводимом этапе исследования представлена тремя основными технологическими решениями, такими как: создание ГИС ФАС России, разработка цифрового регистра, разработка цифрового токена. В качестве современных средств интеллектуализации управления при разработке платформы предлагается использовать нейросетевое моделирование и блокчейн-платформу на отдельных этапах разработки. Направлением дальнейших исследований является расширение количества и функционала модулей платформы, а также их формально-математическое описание и алгоритмизация.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Федеральный закон** «О защите конкуренции» от 26.07.2006 г.

2. **Петрова Н.П., Бондарева Г.А.** Цифровизация и цифровые технологии в образовании. Мир науки, культуры, образования. № 5 (78). 2019. С. 133-137.

3. **Башир И.** Блокчейн: архитектура, криптовалюты, инструменты разработки, смарт-контракты» // Изд-во ДМК-Пресс. 2019. 538 С.

**V.N. Podoprigora, D.E. Seliverstov, V.V. Zavadsky**, (Plekhanov Russian University of Economics, Moscow), **K.D. Rusakov** (V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow). **Development of the architecture of the digital platform for tariff regulation of the Federal Anti-Monopoly Service of the Russian Federation using modern means of intellectualization**

The article provides a rationale for the relevance of the development of a digital platform for tariff regulation of the Federal Antimonopoly Service, as well as its architecture, the construction of which is proposed to be carried out using modern means of intellectualization of management

А.А. ЛАЗАРЕВ, Н.А. ПРАВДИВЕЦ, Е.М. ГРИШИН, С.А. ГАЛАХОВ
(Институт Проблем Управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

# ГЕНЕРАЦИЯ ПРИМЕРОВ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ ДЛЯ ОДНОГО ПРИБОРА, ОЦЕНКА ИХ СЛОЖНОСТИ И МЕРА НЕРАЗРЕШИМОСТИ

*Используется метод ветвей и границ для получения точного решения задачи теории расписаний для одного прибора с целевой функцией максимального временного смещения. Оценки осуществляются при помощи решения двойственной задачи. В качестве сложности примеров используется такая машинно-независимая величина, как количество точек ветвления в дереве поиска.*

*Представлены известные и новые разработанные способы поиска примеров (с большим количеством точек ветвления), а также описаны преимущества и недостатки каждого из них.*

**Введение.** Рассматриваются методы оценки сложности алгоритма решения NP-трудной в сильном смысле задачи теории расписаний для одного прибора с различными моментами поступления требований, продолжительностями обслуживания и директивными сроками $1|r_j|L_{max}$. В качестве целевой функции выбрана минимизация максимального временного смещения. Для ее решения применён метод ветвей и границ, нижние оценки определяются при помощи решения задачи, двойственной к начальной. Алгоритм решения двойственной задачи имеет полиномиальную трудоёмкость. Для оценки эффективности алгоритма на сложных примерах рассмотрены как самые простые методы генерации примеров, так и оригинальные методы, предложенные в литературе. Предложен новый метод генерации примеров, позволяющий находить сложные примеры быстрее.

**Двойственная задача.** Рассмотрим прямую задачу одного прибора. Задано множество $n$ требований $N = \{1,2,\dots,n\}$. Прибор готов к обслуживанию в момент времени $\tau$. Пусть $r_j$ – момент поступления требования $j$, $p_j$ – продолжительность обслуживания, а $p_j$ – директивный срок. Обозначим через $C_j$ момент завершения обработки требования $j$ и введем целевую функцию максимального временного смещения $L_{max} = max_{j=1,\dots,n}\{C_j - d_j\}$. Единовременно может обрабатываться только одно требование. Пусть $L_{j_k}(\pi)$ – значение временного смещения требования $j$, обрабатываемого -ым при расписании $\pi = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$. Тогда введем оптимальное значение целевой функции $\mu^* = min_{\pi\in\Pi(N)} max_{k=1,\dots,n} L_{j_k}(\pi)$, где $\Pi(N)$ – множество всех допустимых расписаний для $n$ требований. В двойственной задаче необходимо построить расписание со значением целевой функции $\nu^* = max_{k=1,\dots,n} min_{\pi\in\Pi(N)} L_{j_k}(\pi)$.

Для решения прямой задачи предложен метод ветвей и границ, в котором нижние оценки получаются решением двойственных подзадач с учетом запрета обслуживание некоторых требований на определенных местах в расписании. Обозначим подзадачу через $(N', \tau', \nu', \pi', B')$ для множества еще не расставленных требований $N' \subseteq N$ с учетом некоторого текущего частичного расписания $\pi'$, $\nu'$ – оценка снизу, полученная при решении двойственной задачи данного примера, $\tau' = C_{\max}(\pi', \tau)$, а $B'$ – это множество требований, которые не могут быть назначены на текущую позицию в расписании.

Для решения задачи методом ветвей и границ будем на каждом шаге корректировать момент возможного начала обслуживания требования с учётом доступности прибора: $r_j = \max\{r_j, \tau\}, r(N,\tau) = \min_{j\in N} r_j(\tau)$. Очередное требование будем выбирать как $f = f(N,\tau) = \arg\min_{j\in N\setminus B}\{d_j | r_j(\tau) = r(N,\tau)\}$. Если $N = \{i\}$, то $f(N,\tau) = i$ для всех $\tau$. Здесь B – это множество требований, которые не могут быть назначены на очередную позицию в расписании, $\pi^*$ – лучшее найденное расписание на текущий момент. Для решения задачи предлагается использовать алгоритм, который с помощью оценок, получаемых при решении двойственной задачи, реализует метод ветвей и границ для получения точного решения исходной задачи $1|r_j|L_{max}$ [1]. Оценкой сложности примеров (различных наборов значений $r_j$, $p_j, d_j$) будет количество точек ветвления в построеном дереве. Нетрудно оценить максимальное количество точек ветвления $V(n) = n \cdot (V(n-1)+1) - 1,$ где $V(1) = 0$.

**Случайные примеры.** Для оценки эффективности предложенного алгоритма его необходимо протестировать на различных примерах. Самый простой способ генерации примеров – случайный. Все параметры требований задаются случайными величинами. Такой способ плох тем, что нет никакой гарантии, что будут рассмотрены различные типы примеров (в силу большого количества переменных), и примеры не будут повторяться. Также необходимо протестировать алгоритм на сложных примерах, а случайным методом гарантированно их получить невозможно. Если представить пример как точку в $3n$-мерном пространстве ($n$ требований с тремя параметрами), то при равномерном распределении невозможно получить точки, достаточно удаленные от начала координат.

Чтобы при случайной генерации примеров была возможность получить точки во всем пространстве, в [2] было предложено использовать нормальное распределение, благодаря чему существует вероятность достаточно сильного отклонения от нормы, что позволяет создавать более “удаленные” друг от друга примеры. Используя сгенерированные примеры, с помощью алгоритма и вариации параметров каждого требования в примере создавался новый пример, требующий больших вычислительных мощностей для нахождения оптимального решения.

**L-примеры в шаре.** В первой главе [3] для получения сложных примеров была предложена следующая схема. В $3n$-мерном шаре с центром в начале координат с заданным радиусом берется некоторое количество точек. После этого находится точка, имеющая самую большую сложность. После этого строится $3n$-мерный шар с центром в этой точке (возможно с радиусом, отличным от начального). После чего опять ищется точка с максимальной сложностью в новом шаре. Процедура продолжается, пока не будет найдена такая точка, что в построенном вокруг неё шаре не будет точек с большей сложностью. В этой схеме тоже используется генерация равномерно распределенных точек в шаре. Однако благодаря поиску сложных примеров существует возможность удалиться от начала координат, как в случае нормального распределения.

Интересный результат получается, если представить точку как вектор из начала координат. При проведении повторных генераций L-примеров с одинаковыми параметрами в сфере с центром в начале координат были получены сложные точки с координатами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, ..., а конечные L-примеры имели координаты $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, ... Было замечено, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, ... имели различное направление, а векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, ... в основном были либо почти коллинеарны, либо ортогональны.

**P-примеры в параллелепипеде.** Заметим, что генерировать примеры $3n$-мерном шаре достаточно затруднительно. Кроме того, не очевидно какого размера выбирать радиусы. Генерировать точки в параллелепипеде с гранями, параллельными осям координат, заметно легче. Общая идея генерации остается прежней. Задаются значения длин сторон начального $3n$-мерного параллелепипеда, и в нем генерируются равномерно распределенные случайные точки. Ищется точка с наибольшей сложностью. После этого строится параллелепипед вокруг найденной точки с координатой $a$ с длинами сторон $(a_{max} - a_{min})/2$, где $a_{max}$ и $a_{min}$ – максимальное и минимальное значения соответствующей координаты среди всех сгенерированных точек в текущем параллелепипеде. Процедура продолжается, пока не будет найдена точка такая, что в построенном вокруг него параллелепипеде не будет точек с большей сложностью. В отличие от L-примеров линейные размеры параллелепипедов динамически меняются в соответствии с удаленностью текущей точки от начала координат, что положительно сказывается на поиске сложных примеров.

**G-примеры на кубе.** Заметим, что от перестановки троек координат $(r_i, p_i, d_i)$ и $(r_j, p_j, d_j)$ в $3n$-мерном пространстве примеров сам пример не изменяется, а оптимальное расписание и значение целевой функции одинаково для $n!$ симметричных точек на поверхности сферы. Следовательно, можно ограничиться рассмотрением всего лишь 3-мерным пространством примеров. Также заметим, что случай, когда существуют требования, моменты поступления которых меньше момента начала готовности прибора к обслуживанию и случай, когда моменты поступления всех требований больше момента начала готовности прибора к обслуживанию идентичны случаю, когда хотя бы одно требование поступает в момент начала готовности прибора к

обслуживанию, принимаемому за 0. Случаи, когда продолжительности обслуживания отрицательны, невозможны. В силу всего вышеописанного предлагается генерация точек на поверхности четверти куба, где значения одной тройки координат $(r_1, p_1, d_1)$ равномерно распределены на поверхности, задаваемой системой неравенств:

$$\begin{cases} r_1 = 1, & 0 \le p_1 \le 1, & -1 \le d_1 \le 1; \\ 0 \le r_1 \le 1, & p_1 = 1, & -1 \le d_1 \le 1; \\ 0 \le r_1 \le 1, & 0 \le p_1 \le 1, & d_1 = \pm 1. \end{cases}$$

А остальные координаты равномерно случайно распределены на интервалах $0 \le r_i \le 1$, $0 \le p_i \le 1$, $-1 \le d_i \le 1, i = 2, \dots, n$.. Это позволяет быстро сузить область поиска сложных примеров на поверхности.

**Мера неразрешимости.** Заметим, что все точки (примеры), лежащие на луче, исходящем из начала координат, имеют одинаковое оптимальное расписание (но различные значения целевой функции). Следовательно, можно рассматривать примеры на поверхности $3n$-мерной единичной сферы. На поверхности этой сферы существуют области полиномиально разрешимых примеров. В качестве меры неразрешимости задачи предлагается нахождение расстояния от точки на поверхности сферы, максимально удаленной от всех областей разрешимости, до этих областей. Однако генерация точек на поверхности $3n$-мерной единичной сферы достаточно сложная задача. На сегодняшний день мера неразрешимости проблемы $1|r_j|L_{max}$ равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$ [4].

**Заключение.** В работе кратко представлен метод ветвей и границ для получения точного решения задачи одного прибора. Нижние оценки получены при помощи решения двойственной задачи. Предложены методы генерации L-примеров в шаре, P-примеров в параллелепипеде, G-примеров на кубе для оценки эффективности алгоритма решения задачи одного прибора, основанной численном количестве точек ветвления в построенном дереве решения. Также предложено понятие меры неразрешимости задачи как расстояние от разрешимых областей до наиболее удаленной от них точки на единичной сфере в пространстве примеров.

*Работа проводилась при поддержке проекта РФФИ 18-07-00656.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Lazarev, A.A.; Pravdivets, N.; Werner, F. On the Dual and Inverse Problems of Scheduling Jobs to Minimize the Maximum Penalty. *Mathematics* 2020, 8, 1131.
2. Hall, N.G.; Posner, M.E. Generating Experimental Data for Computational Testing with Machine Scheduling Applications. *Operations Research.* 2001, 49, 854–865.
3. Лазарев А.А. Теория расписаний Методы и алгоритмы. М.: ИПУ РАН, 2019. – 408 с.
4. Лазарев А.А., Архипов Д.И. Оценка абсолютной погрешности и полиномиальной разрешимости для классической NP-трудной задачи теории расписаний. *Доклады Академии наук.* 2018. Т. 480, № 5. С. 523–527.

**A.A. Lazarev. N.A. Pravdivets, E.M. Grishin, S.A. Galakhov** (V. A. Trapeznikov Institute of Control Science RAS, Moscow). **Generation of Single-Machine Scheduling Problem Instances, Evaluation of Their Complexity and Measure of Unsolvability.**

*Abstract.* The paper provides a brief description of the branch and bound method to obtain an exact solution of a single machine problem with the objective function of maximum lateness. Estimates are based on a solution of the dual problem, which can be obtained in polynomial time. The machine-independent number of branching points is used as a measure of instance difficulty. Known and newly developed methods of searching difficult instances (with a large number of branching points) are presented.

А. А. ЛАЗАРЕВ, Д. В. ЛЕМТЮЖНИКОВА
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

# ПОЛИНОМЫ ЛАГРАНЖА И ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

*В работе показан метрический подход, используемый совместно с интерполяционными полиномами Лагранжа и Чебышева. С помощью данного подхода можно получать приближенное решение с гарантированной погрешностью целевой функции. Особое внимание уделяется специальным случаям задачи теории расписаний, которые являются полиномиально разрешимыми. Обобщить такие случаи представляется возможным с использованием интерполяционных полиномов. Это позволяет выявлять новые специальные случаи, а также находить решения для NP-трудных задач теории расписаний. Данный метод также применим и к псевдополиномиально разрешимым примерам задачи. Он может быть обобщен на другие NP-трудные задачи: задачи маршрутизации, задачи рюкзака, задачи о назначениях и т.д.*

**Введение.** Задачи теории расписаний встречаются во многих областях человеческой деятельности. Расписания необходимы в учебных заведениях [1], для управления транспортными потоками [2], для выполнения стратегических задач в космосе [3] и т.д. Вместе с тем, в современных информационных системах актуализировано создание и оптимизация рекомендательных систем и электронных ассистентов, которые советуют пользователю товары и услуги в определённые моменты времени и маршруты для путешествий в заданный срок [4-7]. В [8] приведён обзор для задач теории расписаний, связанных со статическими, динамическими, детерминированными и стохастическими задачами для различных производственных условий.

С развитием современных технологий, а именно - необходимостью работы системы в режиме реального времени, одним из главных вопросов является представление о сложности задач. Оценки сложности чётко описывают поведение алгоритмов (время исполнения, объём необходимой памяти и т.д.) в зависимости от размера входной информации. Знание абсолютной гарантированной погрешности приближенного решения задачи, а также оценки её полиномиальной неразрешимости определяют нижние границы общего времени выполнения проекта, что особенно актуально для создания и изменения расписаний в режиме реального времени. В случаях большой размерности уместно использовать декомпозиционные подходы, с помощью которых осуществляется распараллеливание и существенно сокращается время вычислений. Метрический алгоритм является универсальным и может быть применён для нахождения приближённых решений широкого спектра задач. Исследования в этом направлении необходимы, чтобы улучшить значение полученной верхней оценки гарантированной погрешности, дополнить метод с помощью использования в нём эвристических алгоритмов, получить значения численной оценки полиномиальной разрешимости других задач теории расписаний и дискретной оптимизации.

**Алгоритмы задач теории расписаний.** На сегодняшний день существует три основных подхода построения алгоритмов решения задач теории расписаний: точный, приближенный и метрический. Точные алгоритмы предполагают получение точного решения, причём задачи теории расписаний могут быть сформулированы и как задачи удовлетворения ограничений, и как задачи целочисленного программирования. Наиболее распространённые методы решений - это метод ветвей и границ и динамическое программирование. Основной недостаток точных алгоритмов заключается в том, что в случае большой размерности для решения задачи требуется много памяти и вычислительного времени, поскольку точные алгоритмы в подавляющем большинстве имеют экспоненциальную сложность. Основной недостаток приближенных алгоритмов заключается в том, что нет гарантированной погрешности значения целевой функции, а значит невозможно проверить, насколько отличается полученное решение от оптимального в худшем случае.

Метрический подход занимает особую роль в теории расписаний. Он базируется на построении метрик, введённых на пространстве примеров задачи, использовать полиномиально разрешимые области для нахождения приближённого решения с гарантированной абсолютной погрешностью целевой функции. Стоит отметить, что нахождение и использование новых поли-

номиально разрешимых множеств примеров повысит эффективность предложенного метода. Если для некоторого примера расстояние по метрике до новой полиномиально разрешимой области будет меньше, чем до любой из ранее использованных в методе, то и гарантированная погрешность решения для него уменьшится. Использование эвристических алгоритмов совместно с метрическим подходом также позволяет сократить значение гарантированной погрешности. Предложенный метод является универсальным и может быть применён для нахождения приближённых решений широкого спектра задач.

**Особенности метрического подхода.** Метрические алгоритмы позволяют с помощью метрики использовать полиномиально разрешимые области для поиска приближённого решения с гарантированной абсолютной погрешностью целевой функции. Важно, что данные алгоритмы используют аппроксимационные схемы, которые являются полиномиальными, что обеспечивает высокую скорость вычислительного процесса. Введение метрик позволяет исследовать меру неразрешимости задачи для аппроксимационных схем, то есть определять оценку гарантированной погрешности сверху. Применение метрического подхода и исследование меры неразрешимости классов примеров интересны с двух сторон. Во-первых это теоретическое исследование свойств задач. Во-вторых это быстрый метод получения решений с возможностью оценки погрешности. Для классических задач данный подход включал в себя три основные составляющие: построение метрики пространства примеров; получение на основе функции метрики оценки погрешности при использовании решения, оптимального для другого примера; описание классов полиномиально разрешимых примеров.

Существует ряд классических задач, для которых не все из данных составляющих могут быть использованы. К примеру, для задачи управления проектом при заданных ограничениях предшествования и ограничениях на ресурсы (RCPSP) с базовой целевой функцией времени завершения проекта (makespan) нельзя построить функцию метрики. Для схожих задач с множествами операций и ресурсов, таких как задача распределения ресурсов (т.н. resource leveling problem), существует возможность построения метрик, но проблематично найти и описать разрешимые классы примеров [9, 10].

**Специальные случаи задач.** К настоящему времени для NP-трудных задач дискретной оптимизации выделены полиномиально разрешимые случаи задач и разработаны соответствующие алгоритмы. Для нахождения приближенного решения с гарантированной абсолютной погрешностью целевой функции NP-трудных задач предлагается двухэтапная схема решения, называемая метрическим подходом. Рассмотрим принципы метрического подхода на задаче минимизации максимального временного смещения для одного прибора, описанную выше для исходного примера с входными параметрами заявок: момент поступления в систему, продолжительность обслуживания и директивный срок. Если параметры данного примера не принадлежат полиномиально разрешимому случаю задачи, то применяется двухэтапная схема нахождения приближенного решения с минимальной гарантированной абсолютной погрешностью целевой функции. Точкой A соответствующего примера задачи теории расписаний A будем называть точку в 3-n - мерном пространстве с координатами, соответствующими значениям параметров задачи. Полиномиальной точкой называется точка, которая соответствует такому примеру, который является полиномиально разрешимым.

На первом этапе для исходного примера A, обычно в 3n-мерном пространстве, где n - количество заявок, находится пример B, принадлежащий полиномиально разрешимому случаю задачи с минимальным расстоянием в метрике, значение которой является оценкой сверху абсолютной погрешности целевой функции в точках (примерах) A и B. То есть, точка B является проекцией исходной точки A на разрешимую область в данной метрике. На втором этапе предлагаемого подхода находится решение примера B (так как точка B принадлежит разрешимой области) и применяется это решение к исходной точке (примеру) A. Рассматриваемая схема подробно изложена в [11, 12].

**Интерполяция для метрического подхода.** Введение метрик позволяет исследовать меру неразрешимости задачи для аппроксимационных схем, то есть определять оценку сверху гарантированной погрешности сверху целевой функции для NP-трудных задач. То есть, количественно

выразить NP-трудность. Каждая качественно новая полиномиально разрешимая область будет сокращать меру неразрешимости задачи. Предлагается применять метрический подход вместе со схемой построения интерполяционных полиномов Лагранжа и Чебышёва. Для построения интерполяционного полинома Лагранжа необходимо обеспечить существование табличной функции. В данном случае в качестве табличной функции выступают полиномиально разрешимые примеры и их решения. Таким образом, с помощью табличной функции, где аргументом являются координаты точек, соответствующих полиномиально разрешимых примеров, а значением функции приближенное значение целевой функции исходной задачи, создаются базисные полиномы Лагранжа. На основании базисных полиномов строится интерполяционный полином в форме Лагранжа. Полином Лагранжа используется для равноотстоящих точек. В противном случае используется полином Чебышёва. Полиномы Чебышёва - это ортогональные друг другу полиномы. Интерполяционный полином Чебышёва зависит от начала и конца интерполяции, числа точек интерполяции и значений функции в полиномиальных точках.

Используя полиномы Лагранжа и Чебышёва можно получать приближенные решения для примеров задач, которые не являются полиномиальными, а также находить большее количество полиномиальных точек и меру неразрешимости, что позволяет количественно оценить NP-трудность задачи. Важным вопросом при использовании этого метода является выбор прямой в 3n-мерном пространстве, на которой подбираются точки интерполирования. Алгоритмов выбора такой прямой к настоящему моменту не существует, их разработка планируется для использования в рамках данной схемы. Также планируется построить схему интерполяции для задач теории расписаний со многими приборами, которые не являются параллельными, как в [13].

**Заключение.** В данной статье показан метрический подход для решения задач теории расписаний, используемый совместно с интерполяционным подходом, основанных на полиномах Лагранжа и Чебышёва. На основе метрического подхода разрабатываются алгоритмы аппроксимации целевой функции. Предлагается использовать схему построения интерполяционных полиномов Лагранжа и Чебышёва для решения задач теории расписаний. Точки интерполирования будут подбираться таким образом, чтобы вычислительная сложность нахождения решения в этих точках была приемлемой. Планируется разработка специальных алгоритмов нахождения интерполяционных прямых и проведение численных экспериментов на тестовых примерах.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 20-58-S52006*

ЛИТЕРАТУРА

1. Клеванский Н. Н. Формирование расписания занятий высших учебных заведений Образовательные ресурсы и технологии. – 2015. – №. 1 (9).
2. Захаров В. В., Мугайских А. В. Динамическая адаптация генетического алгоритма маршрутизации транспорта на больших сетях //Управление большими системами: сборник трудов. – 2018. – №. 73.
3. Анисимов В. Г. и др. Модель и метод оптимизации плана подготовки космических систем //Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. – 2015. – №. 4. – С. 34-39.
4. Cranshaw J. et al. Calendar. help: Designing a workflow-based scheduling agent with humans in the loop //Proceedings of the 2017 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems. – ACM, 2017. – P. 2382-2393.
5. Chiang H. S., Huang T. C. User-adapted travel planning system for personalized schedule recommendation //Information Fusion. – 2015. – V. 21. – P. 3-17.
6. Галямов Р. А. и др. Разработка информационных технологий для решения задач управления и принятия решений в медицинском центре г. Иннополис //Практическая медицина. – 2016. – Т. 2. – №. 4 (96).
7. Назаренко Г., Осипов Г. Основы теории медицинских технологических процессов. Часть 2. – Litres, 2018
8. Allahverdi A. The third comprehensive survey on scheduling problems with setup times/costs //European Journal of Operational Research. – 2015. – V. 246. – №. 2. – P. 345-378.
9. Rieck, J., Zimmermann, J. Exact methods for resource leveling problems // In C. Schwindt, & J. Zimmermann (Eds.), Handbook on Project Management and Scheduling, Cham: Springer International Publishing, 2015. Vol.1, Pp. 361–387. URL:https://doi.org/10.1007/978-3-319-05443-8_17.
10. Bianco, L., Caramia, M., Giordani, S. (2016). Resource levelling in project scheduling with generalized precedence relationships and variable execution intensities // OR Spectrum, 2016, N.38, Pp. 405–425. URL:https://doi.org/10.1007/s00291-016-0435-1
11. Лазарев А. А. Теория расписаний. Оценки абсолютной погрешности и схема приближённого решения задач теории расписаний //М.: МФТИ. – 2008.
12. Лазарев А.А. Теория расписаний Методы и алгоритмы. М.: ИПУ РАН, 2019. – 408 с.

13. Lazarev A., Lemtyuhnikova D., Werner F. A metric approach for scheduling problems with minimizing the maximum penalty, Applied Mathematical Modelling (in print).

---

**A.A.Lazarev** (IPU RAS, Moscow), D.V.Lemtyuzhnikova (IPU RAS, Moscow). **Lagrange and Chebyshev polinonomials for problems in scheduling theory**

*Abstract.* The paper shows a metric approach used in conjunction with Lagrange and Chebyshev interpolation polynomials. Using this approach, an approximate solution with guaranteed error of the objective function may be gets. Special attention is paid to special cases of the scheduling problem that are polynomial solvable. It is possible to generalize such cases using interpolation polynomials. This allows you to identify new special cases, as well as find solutions to NP-hard scheduling problems. This method is also applicable to pseudo-polynomial solvable examples of the problem. It can be generalized to other NP-hard problems: routing problems, backpack problems, assignment problems, and so on.

А. А. БАЛАБАНОВ, В. В. КУНЕВ
(Технический университет Молдовы, г. Кишинёв)

# КРИПТОГРАФИЧЕСКАЯ ЗАЩИТА ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЧАСТОТНОЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТЯХ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ ФОРМАТНОГО АНАЛИЗА (Ч1 ОСНОВЫ ТЕОРИИ)

*Рассматриваются процедуры использования он-лайн криптографических алгоритмов RSA-m, с использованием подходов формантного анализа современной теории чисел. Это позволяет существенно ускорить процедуры крипто защиты цифровой информации и значительно повысить крипто стойкость системы из-за огромного числа возможных вариантов перебора, что особенно важно для крипто систем в случае кибер атак и в связи с грядущей квантовой компьютерной революцией. Также повышаются возможности интероперабельных ИС, упрощая требования к информации, циркулирующей между сопрягаемыми ИС.*

**Введение**. Рассматриваемые в докладе основы и алгоритмы формантного анализа (ФА) теории чисел как эволюционный путь развития средств криптографической защиты информации на основе модифицированного алгоритма RSA-m, позволят использовать существующие подходы к защите информации на фоне экспоненциального роста вычислительной мощности квантовых компьютеров. Сегодня уже существует проблема алгоритма RSA - через некоторое время решение задачи разложения простого числа на множители перестанет являться нерешаемой задачей для текущего уровня вычислительной мощности компьютеров. И это произойдёт в ближайшем будущем (примерно лет через 15-25). Повышение вычислительной сложности процедур шифрования, как средство защиты от надвигающейся катастрофы, решается изменением параметров предлагаемой реализации алгоритмов форматного анализа для шифрации\дешифрации данных. Предлагаемая реализация метода рассматривается применительно к защите голосовой связи, где существуют временные ограничения на процесс шифрации\дешифрации данных, с одной стороны, и требуется обеспечение гарантированной крипто стойкости, с другой стороны.

Развитие информационных систем и технологий в виде Интернета/Интранета, оригинальных, композиционных и интегративных решений – социальных сетей, сайтов, порталов, мобильной аудио- и видео связи и т.п. привело к появлению и последующему развитию концепции открытых систем, предполагающих широкое использование стандартизированных протоколов и интерфейсов. Однако, при этом возникает огромное количество проблем, связанных с несанкционированным доступом к информации, как в мобильной связи, Интернете, компьютерных системах вообще, так и в многочисленных порталах, библиотеках и сайтах и т.п.

Задача защиты информации как часть общей проблемы информационной безопасности возникает и в мобильной связи, и при обмене промышленной информацией, передаче деловой и секретной информации в банковско-коммерческих предприятиях, в государственных структурах и т.д. Информационная безопасность определяет характер, уровень возможностей и средств, препятствующих и предотвращающих разрушение системы в результате несанкционированного доступа, хищения, искажения информации и т.п. и др.

Использование той или иной технологии в ИС не должно означать ослабление информацион-ной защиты системы. Такие свойства, как интероперабельность[1] и мобильность приложений, их переносимость содержат в себе источники уязвимостей для защищённости информации, поэтому защита информации в открытых системах – это особая проблема, решение которой требует разработки специальных механизмов, стандартов, ПО и др.

**1.1.Квантовые компьютеры и криптография.** Представьте себе, что прошло десять-пятнадцать лет, и кто-то объявляет, что он построил большой фантастический квантовый компьютер. Крипто система RSA взломана и мертва. DES, DSA разрушены. Эллиптические кри-

[1] **Интероперабельность** (англ. **interoperability** — способность к взаимодействию) — это способность продукта или системы, интерфейсы которых полностью открыты, взаимодействовать и функционировать с другими продуктами или системами без каких-либо ограничений доступа и реализации.

вые, гиперэллиптические кривые, группы классов, что угодно, мертвые, мертвые, мертвые… В «Нью-Йорк Таймс» или в «Известиях», «Figaro» и т.д. на главной странице появляется статья, в которой сообщается, что все алгоритмы с открытым ключом, используемые для защиты промышленной, банковско-коммерческой информации или Интернета, были взломаны. Пользователи в шоке и панике. Возможно, после того, как квантовые компьютеры уничтожат RSA, DSA и ECDSA, пользователи Интернета придут к выводу, что криптография мертва и уничтожена; что нет надежды на скремблирование информации, чтобы сделать её непонятной и невосприимчивой к атакам; что надёжное хранение и передача информации означает использование только дорогостоящих физических экранов, чтобы предотвратить появление противников/злоумышленников, атакующих информацию, например, скрывая USB-накопители внутри закрытого портфеля, прикованного к запястью доверенного курьера.

Пользователи будут обеспокоены и начнут кричать и говорить: «Боже мой, что же делать?» Но у нас все же еще есть криптография с секретным ключом, и у нас есть защищённые крипто системы с открытым ключом. Есть хэш-деревья. Существуют многовариантные квадратичные системы…, но нам нужно больше опыта работы с ними. Нам нужны алгоритмы, как **OAEP** (англ. Optimal Asymmetric Encryption Padding или Оптимальное асимметричное шифрование с дополнением), нам нужны протоколы. У нас же есть **NTRU** и есть **McEliece**[2]. Мы нуждаемся в программном обеспечении, рабочем программном обеспечении для этих систем. Мы нуждаемся в ускорениях работы криптографических процессов. Мы должны знать, какие типы ключей использовать. Таким образом, нужно уже сейчас думать над этими задачами, пока ещё не поздно и прежде, чем кто-то построит квантовый компьютер.

Совсем недавно, в конце 2015 года, по Интернету разошлась сенсационная новость: в Google построили работающий квантовый компьютер. Квантовые компьютеры - вещь полуфантастическая. В отличие от обычного компьютера, который оперирует битами, способными находиться только в двух состояниях - 0 или 1, квантовый компьютер работает с **кубитами** — квантовыми объектами, которые могут находиться в суперпозиции нескольких состояний, то есть, например, одновременно иметь значение и 1, и 0. Поэтому квантовые компьютеры способны решать задачи, которые на обычных компьютерах выполнить в разумный срок невозможно. Например, **они могут очень быстро взламывать шифры**. Большая часть современных криптографических технологий (например, способы шифрования данных в банковских карточках) основана именно на этом принципе: они оперируют задачами, которые невозможно решить за вменяемое время. Например, перемножить два числа несложно, а вот по результату найти множители очень непросто (точнее, очень долго).

**Квантовый компьютер,** когда он будет создан, позволит решать задачу факторизации за короткое время, что может сделать многие современные технологии шифрования небезопасными. По крайней мере, Агентство национальной безопасности США уже всерьез озабочено будущей «квантовой угрозой» и собирается создавать новые алгоритмы шифрования, которые не будут поддаваться квантовым компьютерам.

Однако универсальный и пригодный для практического применения квантовый компьютер пока еще не создан.

---

[2] **NTRU** (Nth-degree TRUncated polynomial ring или просто Number Theorists aRe Us) была предложена в 1995 году. В отличие от своих именитых предшественников таких как RSA или El Gamal, NTRU работает не над кольцом вычетов по модулю целого числа N, а над кольцом многочленов степени n-1, приведенных по модулю $x^n$-1. Криптосистема NTRU основана на алгебраической структуре полиномиального кольца. Известно, поиск кратчайшего вектора в заданной числовой решетке — трудноразрешимая задача. NTRU относят к быстрым криптосистемам — ее можно использовать в устройствах с ограниченными ресурсами, поэтому она эффективна и возможно ее дальнейшее развитие и применение в пост квантовой криптографии (см. Википедию).

**Криптосистема McEliece** представляет собой асимметричный алгоритм шифрования , разработанный в 1978 году Робертом МакЭличе. Это была первая такая схема, использующая в процессе шифрования рандомизацию, т.е. преобразование исходных данных, перед или во время зашифрования, с помощью генератора псевдослучайных чисел. Алгоритм никогда не получал большого признания в криптографическом сообществе, но является кандидатом на «пост квантовую криптографию», поскольку он невосприимчив к атакам с использованием алгоритма Шора и, в более общем плане, измеряет состояния смежного класса с использованием выборки Фурье. (см. Википедию).

**2.1 Введение в формантный анализ. Определения, свойства, формантная алгебра.** Линейной формантой $F_p(M)$ числа, неизвестного или многочлена $M$ по основанию $p$ называется его/их линейное представление в виде трёхчленной математической конструкции [1]:

$$F_p(M) \equiv F_p = pk + q, \quad (1)$$

где: $p$ **−база** (основание) форманты, $k$ – **ядро**, целая часть от деления на основание $p$, и $q$ - неотрицательный целый **остаток**.

Приведём пример обозначения форманты некоторого математического выражения, а именно бинома $X^2 + 5Y$. Его форманта выглядит так: $F_p(X^2 + 5Y)$, что читается, как «форманта алгебраического двучлена вида $X2 + 5Y$ по основанию *p*». Если $p$ = 5, то форманта заданного бинома будет иметь такой вид

$$F_5(X^2 + 5Y) = 5k + (1,4). \quad (2)$$

Математический смысл форманты, в данном случае, означает следующее: *если $X^2$ не делится на 5, то при любых целых X и Y, остаток от деления этого двучлена на 5 будет равным 1, или 4*. Неотрицательный остаток (он может быть и ноль) называется формантной скобкой (или просто скобка), содержащей одно или более чисел. Количество чисел в скобке определяет размерность форманты. Таким образом,

***форманта полностью определяется тремя величинами: $p, k$ и $q$.***
***Любое число единственным образом определяется формантой по заданному основанию.***

Существуют несколько типов формант, типы и свойства которых используются для ускорения вычислений или преобразования формантных уравнений [1, 2].

**2.2. Защита информации с помощью алгоритмов RSA-mab на основе формантного анализа.** Сравнительная низкая скорость работы криптосистемы RSA, особенно в он-лайн режиме, но высокая её крипто стойкость заставляют разработчиков искать пути для эксплуатации этой системы в обычной поточной передаче информации или для защиты информации в реальном времени. Здесь можно предложить подход, базирующийся не на передаче самой информации по открытому каналу, а в передаче некоторой **специальной информации, объем которой существенно меньше** и, следовательно, может быть уже передан в зашифрованном виде с необходимой скоростью и степенью крипто стойкости с помощью системы RSA в реальном времени.

Суть настоящего подхода лежит в использовании свойств числовых формант, которые были введены в [1] и детально объяснены в [2] и [3], с помощью которых любое число можно представить единственным образом. Причём время разложения и восстановления числа на порядки меньше времени шифрования и дешифрования того же числа с помощью криптосистемы RSA.

Как известно [2], линейная форманта использует всего три параметра, а нелинейная форманта, в зависимости от её мерности $n$, в $3n$ раз больше. Достоинством этого подхода является и то, что основанием (базой) форманты может быть любое число, как простое, так и составное, что значительно расширяет числовое множество, как для выбора (!) базы при шифровании, так и её взлома при крипто анализе, усложняя последний.

Авторы предлагают несколько алгоритмов использования формантного подхода для шифрования информации любой долгосрочности секретности с существенным, при этом, уменьшением времени прямой и обратной операций шифрования, с учётом использования дополнительных кодовых операций по преобразованию сообщения.

Криптографические алгоритмы, если исключить те из них, что являются сущностью закрытия информации (например, алгоритм шифр-замка для RSA), сводятся к нескольким стандартным процедурам. Таковыми стандартными процедурами являются алгоритмы, описывающие процедуру поиска или генерации простого числа, или алгоритмы (тесты) проверки простоты числа, или составления и анализа формантного уравнения. В крипто анализе весьма важную роль играют алгоритмы, описывающие процедуры разложения заданного (большого) числа на множители, отыскание единичных и ложных формант. В силу их стандартности и возрастает проблема уменьшения операционной сложности их алгоритмов.

**2.3. Закрытие информации криптографическими способами на базе RSA-m.** Актуальной задачей криптографии является защита информации промышленного или коммерческого ха-

рактера. Ограничивающим фактором, накладывающим свой отпечаток на способность любой криптосистемы обеспечить закрытие информации от нежелательной утечки или хищения, является длина кода шифрации. При этом не имеет значения, о каких двух криптосистемах идёт речь: одно ключевых (симметричных) или двух ключевых (асимметричных).

Длина ключа при реальной он-лайн передаче закрытой информации от абонента А к абоненту В по открытым (т.е. доступным к «прослушиванию») каналам связи, напрямую связана с пропускной способностью канала связи, точнее, с полосой пропускания всех элементов системы.

Далее, рассмотрим только закрытие информации при её передаче, или, что более точно, режим поточной шифрации в реальном масштабе времени, оставив вопросы блочной шифрации (т.е. шифрация с задержкой во времени) за рамками нашего рассмотрения.

Полоса пропускания криптосистемы, в свою очередь, зависит от скорости изменения информации, собственно, от полосы пропускания (т.е. от динамических характеристик) источника информации. Один из этих факторов и является критическим для определения конечной величины длины ключа. Если быть более точным, то критическим временным параметром является длительность паузы между выборками при дискретизации аналогового сигнала, подлежащего шифрации.

Межвыборочная пауза заполняется импульсами, последовательность которых отражает величину сигнала в двоичной форме (коде). Количество импульсов, которые могут быть размещены на этом интервале определяется, главным образом, двумя факторами: возможностью АЦП по быстродействию, дискретностью съёма информации с АЦП и приемлемым соотношением сигнал-шум в линии связи.

Так, если выбрать для примера, 12-битное АЦП и принять минимально допустимый по длительности информационный импульс в 0,1 микросекунды, то максимально допустимой длиной ключа будет обладать ключ в те же 12 бит ($\mathbf{12}$ бит $\times \mathbf{0,1}\ \boldsymbol{\mu}$с $= \mathbf{1,2}\ \boldsymbol{\mu}$с $= \mathbf{1.2 \cdot 10^{-6}}$ сек).

Радиоканал для передачи такой закрытой информации (с длительностью бита в 0.1 микросекунды) может работать только на частотах, не менее 2 ГГц, что означает использование приёмо-передающих устройств сантиметрового диапазона, близких к существующим на сегодняшний день к устройствам сотовой (мобильной) связи. Понятное дело, что шифро ключ, длиною в 12 бит, не может быть препятствием для его раскрытия. Поэтому напрашивается, само собою, **идеология быстрой смены ключей.**

Оценим полосу пропускания аналогового сигнала, который может быть закрываем таким образом. Поскольку длительность информационного импульса принята равной 0,1 микросекунды, то промежуток времени, заполненный 12 такими импульсами, будет равным 12 бит $\times$ 2 $\times$ 0,1 $\mu$с =2.4 микросекунды (с учётом паузы в 0.1 $\mu$с между импульсами!), что будет соответствовать периоду самой высокой гармоники аналогового сигнала в 4.8 $\mu$с, что и определяет (в соответствии с теоремой Котельникова) полосу пропускания в $f_{max} = \frac{2\pi}{\omega_{max}} = \frac{1}{T_{max}} = 1/(4{,}8\ \mu\text{с}) = 0.208 \cdot 10^6 \approx$ 200 КГц. Такая полоса пропускания может обеспечить или многоканальную речевую связь, или передачу статического изображения (картинки) или рисунков и графиков.

Если эти рассуждения применить для промышленных систем технологического автоматического регулирования объектами, то аналогом может быть управляемая система, обладающая инерционностью, т.е. имеющая постоянную времени переходного процесса в несколько микросекунд. Понятное дело, что такие объекты неактуальны в промышленной области, где инерционные ОУ характеризуются постоянными времени от нескольких долей секунды до десятков секунд.

Поэтому ясно, что в этом случае следует работать над задачей закрытия информации с более инерционными объектами (например, с такими, в которых переходные процессы занимают интервал в несколько секунд). Ясно, что в этом случае можно и следует решать задачу с использованием большей длины ключа шифрации.

Сделаем оценку крипто стойкости такой воображаемой промышленной системы. Примем во внимание, что интервал выборки информации занимает, к примеру, 1 секунду. Использование того же, ранее рассмотренного 12-ти битного АЦП, даёт длительность импульса (бита), примерно, в 40 миллисекунд. (1/24 s = 0,04 s=40 ms)

Если мы работаем по линии связи, имеющей пропускную способность в 100 КГц, то такая

линия способна пропускать импульсы гораздо меньшей длительности, а именно, в 20 микросекунд. Таким образом, на интервале выборки в 1 секунду можно разместить 25 000 импульсов. А это эквивалентно работе криптосистемы на *базе RSA* с ключом в 25 000 бит, что превышает все разумные пределы закрытости информации. Ясно, что такая криптосистемы может и должна работать с системой связи, имеющей гораздо меньшую полосу пропускания, например, 10 000 Гц (телефонная линия), при этом длина ключа останется в пределах 2500 бит, что гарантировано обеспечить высокую крипто стойкость системе защиты информации.

Можно сделать такой вывод по закрытию информации в промышленных системах:

***промышленные технические системы можно эффективно защитить от несанкционированного проникновения, используя как симметричную, так и асимметричную криптосистемы системы.***

Если применить аналогичные рассуждения к коммерческим задачам, то здесь можно говорить о двух аспектах: о закрытии самого факта коммерческой сделки (долгосрочное сохранение тайны) и о невозможности подложных сделок, осуществляемых здесь и сейчас.

Когда же речь идёт о закрытии информации по долгосрочной сделке (о документе сделки, финансовом документе), то это относится уже к вопросу защиты базы данных и находится за рамками нашего рассмотрения. Мы интересуемся таким актуальным вопросом, как подделка акта снятия со счёта какой-то суммы.

Обычно, хакер определяет ключ клиента и делает ложный запрос к банку о снятии денег. Вся процедура (от запроса до выдачи денег банкоматом) занимает несколько секунд (например, 5 секунд). Основное время занимает передача шифрованного сигнала запроса и шифрованной команды на выдачу запрашиваемой суммы, а также время ожидания в очереди к центральному банковскому процессору. Примем, что один акт «запрос-ответ» занимает 2 секунды. Предположим, далее, что банк располагает в пределах города 100 банкоматами. Тогда на обслуживание запроса с одного банкомата приходится промежуток времени в 20 миллисекунд. В один конец – это 10 миллисекунд. На этом интервале можно разместить (используется телефонная линия связи с полосою 10 КГц) 50 двоичных импульсов (10 миллисекунд следует разделить на 50, т.е. $\frac{10^{-3}}{50} = 2 \cdot 10^{-4} = 200 \cdot 10^{-6}$ микросекунд).

Поскольку реальные системы закрытия информации банковского характера строго засекречены, то предположительные рассуждения о работе этой системы можно построить так. От банкомата к центральному банку поступает информация о клиенте, желающему снять некую сумму со своего счёта, включающая, по крайней мере, идентификационный номер клиента, номер банкомата, и, может быть, дату и текущее время. Если шифруется эта информация единым блоком, то ключ, длиною в 50 бит, способен зашифровать только 16-значное число. Навряд ли указанная информация «влезет» в данный интервал, и её придётся разбить на несколько пакетов.

Работая в рассматриваемом случае с ключами в 50- 90 бит (для симметричных систем), оценим возможный риск. Риск взлома определится скоростью раскрытия ключа. Скорость раскрытия ключа в симметричных системах зависит от операционной сложности алгоритма вскрытия, которую можно, весьма приблизительно, оценить как $L = 2^n$, где $n$ есть количество десятичных разрядов ключа.

В нашем случае мы имеем 16-30-значные двоичные коды, что даёт двоичную длину ключа $L = 2^{16-30}$, или откуда десятичная длина ключа $L = 10^5 \cdots 10^{10}$.

Понятно, что такая операционная сложность не даёт никаких гарантий от вскрытия системы. Даже обычный процессор (2.5 ГГц) сможет отработать программу вскрытия шифра, затратив, в худшем случае, несколько секунд.

Но ситуацию с закрытием канала, в рассмотренном случае, можно легко поправить, например, уменьшив число банкоматов на один центральный процессор (допустим, в два раза, то есть взять их 50 штук) и увеличив интервал обслуживания (до 3 секунд, т.е. в 1.5 раза). Это позволит работать с ключами в 3 раза длиннее (т.е. 150-300) бит.

***Общий вывод таков***. Низкоскоростные (промышленные технологические системы) информационные системы весьма просто поддаются закрытию (защите) от кибер атак, независимо от того, какое используется шифрование - симметричное или асимметричное.

**Другая ситуация возникает, когда речь заходит о закрытии высокоскоростных информационных каналов.** →*Продолжение см. Ч2 доклада*

Пример практического использования предложенного способа закрытия информации в сеансе абонентской мобильной связи приводится во 2-й части доклада.

*Рассмотренные алгоритмы и подход к защите информации с использованием формантного анализа защищены патентом РМ «Способ шифрования двоичной информации и устройство для его осуществления» - патент РМ №a 2016 0046.*

ЛИТЕРАТУРА


[1] **Балабанов А.А., Агафонов А.Ф**. Сопоставительный анализ и его приложения. Классические и современные задачи теории чисел и криптографии.- изд.Lambert, Германия, 2016, 197 с., INN 978-3-659-92621-1

[2] **Балабанов А.А., Кунев В.В**. Защищённые IT-системы на основе алгоритмов формантного анализа/- изд.Lambert, Германия, 2016, 215 с., ISBN 978-3-659-94826-8

[3] **Балабанов А.А., Кунев В.В.** Способ шифрования двоичной информации и устройство для его осуществления/ - патент РМ №a 2016 0046,

[4] **Балабанов А.А., Агафонов А.Ф.,Рыку В.А.** Алгоритм быстрой генерации ключей в криптографической системе RSA,/ ВНТР N7_2009 http://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=323; http://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=451

[5] **Молдовян Н.А.,Молдовян А.А., Еремеев.М.А.,** Криптография: от примитивов к синтезу алгоритмов. — издат.:СПб “БХВ-Петербург”, 2004, ISBN 5-94157-524-6

[6] **Сайт** о пост квантовой криптографии https://pqcrypto.org/

[7] **Bernstein** Daniel J., **Buchmann**, Johannes, **Dahmen**, Erik: Post-Quantum Cryptography

[8] **Anderson R., Biham E.** Two Practical and Provably Secure Block Ciphers: BEAR and LION// http://citeseer.ist.psu.edu — 1995.

[9] **Kelsey J.Re:** Chainingciphers//http://cypherpunks.venona.com.


---

**A.A. Balabanov, V.V. Kunev** (Technical University of Moldova, Kishinev). **Encryption of digital data in frequency and spectral domains based on formant analysis algorithms (part 1. Fundamentals)**

*Abstract.* The procedures for application of on-line cryptographic algorithms RSA-m, using the approaches of formant analysis of modern number theory, are considered. This allows you to significantly speed up the procedures of encrypting the digital information and significantly increase the encryption strength of the system due to the great number of possible direct search variants, which is especially important for cryptosystems in the event of cyber attacks and in connection with the upcoming quantum computer revolution. The capabilities of interoperable ICs are also enhanced, simplifying the requirements for information circulating between interconnected ICs.

А. А. КУЛИНИЧ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН)

# ПОДХОД ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ ИЗ ИНТЕРНЕТ

*Предложен метод поддержки принятия решений, основанный на представлении знаний эксперта в виде семиотической модели ситуации и поддержке интерпретации результатов моделирования на основе анализа текстов предметной области, получаемых из сети Интернет, с помощью технологий извлечения информации из текста и его дистрибутивного анализа.*

**Введение.** При принятии решений в плохо определенных социальных и политических ситуациях экспертами создаются субъективные модели, отражающие их мнение о закономерностях предметной области. Результаты моделирования в этих случаях ненадежны, поскольку допускают множественные субъективные интерпретации. Для применения результатов моделирования на субъективных моделях в процессах принятия решений требуется их аргументация, которая, как правило, основана на анализе больших объемов текстов и представляется в виде цитат на естественном языке – прецедентов принятия решений. В этой работе предложен метод поддержки принятия решений, основанный на представлении знаний эксперта в виде семиотической модели ситуации, и поддержке интерпретации результатов моделирования на основе анализа текстов предметной области, получаемых из сети Интернет, с помощью технологий извлечения информации из текста и его дистрибутивного анализа.

**Семиотическая модель ситуации.** В семиотической модели знания о ситуации представляются с помощью знаков-символов, которые определяются тройкой [1]: имя, смысл и значение знака. Имя знака и смысл знака – отражают ментальные представления эксперта – его знания о реальном объекта (денотате), а значение – это объект реального мира. Формально знак представляется тройкой: $Sg_i = \langle d_i, F(d_i), V(d_i)\rangle$, где $d_i$ – имя знака, $F(d_i) = (z_{1j},...,z_{nq})$ – содержание – это вектор значений признаков, $z_{ij} \in Z_i$, заданных на множестве значений $Z_i$, $V(d_i)$– объем понятия – это множество объектов, удовлетворяющих содержанию понятия $F(d_i)$.

Знак $Sg_i$ представляется как целостная структура (образ). Для этого на множестве значений признаков $\underset{i}{\times} Z_i$ определены причинно-следственные отношения: $W: \underset{i}{\times} Z_i \to \underset{i}{\times} Z_i$.

Формальная семиотическая модель сложной ситуации включает синтаксическую (1), семантическую (2) и прагматическую (3) модели и представляется в следующем виде [2]:

$$Synt = \langle (\{d_i\}, Pof); Z(t); V; W\rangle \quad (1)$$

$$Sem = \langle Z^*(t), Sem_i, Pof\rangle \quad (2)$$

$$O = \sum_{ij} \beta_{ij} x_{ij}(t) \quad (3)$$

где

- кортеж (1) – синтаксическая модель, в которой: $(\{d_i\}, Pof)$ - $\{d_i\}$- множество имен подсистем (базовые понятия), $Pof$ – отношение «часть-целое», заданное на этом множестве, $Z(t)$ – вектор значений параметров подсистем, $W$ – причинно-следственные отношения, связывающие эти параметры, $V$– множество денотатов подсистем;
- кортеж (2) – семантическая модель плохо определенной предметной области, в которой: $Z^*(t) = (d_1^{H1},...,d_n^{Hn})$, где $d_1^H \in (\{d_1^{H1}\},\le),...,(\{d_n^{Hn}\},\le)$ - вектор имен классов состояний, характеризующий состояние семантической модели, $Sem_i = (\{d_i^H\},\le)$- концептуальный каркас предметной области, где $\forall d_i^H \Leftrightarrow SS(d_i^H)$, $SS(d_i^H) \subset FS$, - определяет подпространство как класс состояний в пространстве состояний $FS = \underset{ij}{\times} Z_{ij}$;

- кортеж (3) - прагматическая модель сложной системы, где $x_{ij} \in [0,1]$ – определяется как отображение лингвистических значений параметров подсистем $Z_i$ на отрезок числовой оси, т.е. $\varphi: z_{ij} \to x_{ij}$, $z_{ij} \in Z_i$; $\beta_{ij}$ – коэффициенты предпочтений экспертов для параметров системы.

В синтаксической модели ситуация определена множеством имен ее составных частей, вектором параметров частей и их значений, причинно-следственными отношениями, заданными на множествах значений параметров ситуации. В семантической модели ситуации определяется качественная модель предметной области в виде множества имен классов состояний, представленных в виде частично упорядоченного множества классов состояний, которое называется концептуальным каркасом этой области. В прагматической модели определяется оценка состояния синтаксической модели в виде линейной свертки на основе предпочтений экспертов [2]. Синтаксическая, семантическая и прагматическая модели объекта связаны общими параметрами, что приводит к изменению их состояния при изменении состояния любой модели.

Постановка задачи принятия решения в семиотической системе следующая: задана цель управления, необходимо найти новое описание системы в синтаксической и семантической моделях, такое, чтобы их прагматическая оценка была бы лучше существующей [2]. В работе [3] был предложен метод решения этой задачи. Он основан на решении обратной задачи в моделях, путем последовательной передачи результатов решения обратной задачи из прагматической модели в синтаксическую, а затем в семантическую модель. В результате последовательного решения обратных задач в прагматической, синтаксической и семантической моделях в семиотической системе устанавливается состояние - новое описание, соответствующее сформулированной цели. Это формальное решение дает множество имен классов решений, структурированное в виде концептуального каркаса решений. Однако, эти решения - знаки, имеющие имя, содержание, выражены в виде математических символов, не имеют интерпретацию в предметной области. Для решения задачи интерпретации решений в предметной области в работе [2] предложены два метода интерпретации: составных имен; имен прототипов.

В этой работе предложен метод определения имен классов формальных решений на основе анализа текстов, характеризующих предметную область, полученных из сети Интернет.

**Метод интерпретации имен классов решений.** Поиск имен, интерпретирующих имена концептуального каркаса решений, основан на методах анализа текста, получаемого из сети Интернет. Для анализа текста используются готовые программные библиотеки, позволяющие пользователям без специальной лингвистической подготовки применять их своих разработках. Используются: лексико-синтаксические шаблоны [4]; дистрибутивный анализ - word2vec [5].

Дистрибутивный анализ текста не использует сведения о лексическом значении слов в предложениях, что позволяет представить их в виде вектора слов, употребляемых совместно в данном контексте и характеризовать числом, определяющим частоту их совместной встречаемости. То есть, определяется вектор $R_i=(w_i/r_{i1},\ldots, w_n/r_{in})$, который характеризует совместную встречаемость $r_{ij}$ слова $w_i$ с другими словами $(w_i,\ldots, w_n)$ и называется контекстным вектором. Для определения контекстного вектора используется метод word2vec [5], в котором определены операции с векторами слов, позволяющие определить векторы, соответствующие смыслу совместного употребления этих слов. Это операция positive $(w_t,\ldots, w_s)$ определяет вектор слов, характеризующий смысл совместного употребления слов в аргументе операции, и операция negative $(w_q,\ldots, w_n)$ определяет вектор слов, характеризующий новый смысл, в котором не употребляются слова, включенные в аргумент операции. Другими словами определена функция:

$$\text{w2v}(\textit{positive}(w_t,\ldots, w_s); \textit{negative}(w_q,\ldots, w_n))=R^*_w, \quad (4)$$

где $R^*_w = (w_i/r_{i1},\ldots, w_n/r_{in})$ - вектор слов, характеризующий новый смысл совместного употребления слов $(w_t,\ldots, w_s)$, $(w_q,\ldots, w_n) \in W$, $W$- словарь предметной области.

В дистрибутивном анализе мы имеем «мешок» слов без синтаксических связей между словами. Для устранения этого недостатка используются отдельные словари для слов модели и их контекстов. Словарь контекстов включает синтаксическую информацию. Для получения контекстного словаря применяется метод лексико-синтаксических шаблонов [4], позволяющих выделить в корпусе текста родовидовые отношения – гипонимы и геперонимы.

Словарь имеет следующую структуру:

$$\langle \text{HYPER, HYPO, Contex} \rangle. \quad (5)$$

где HYPER, HYPO - это множества гипонимов и гиперонимов предметной области, Contex – это множество предложений, в которых эти родовидовые отношения были определены.

**Семантический калькулятор.** Для определения имен классов решений обратной задачи в семиотической модели (1) (2) (3) строится семантический калькулятор. На вход семантического калькулятора подается решение обратной задачи в виде вектора решения $A=(a_1,\ldots,a_n)$, $a_i \in \{1,0,-1\}$, где $a_i$ – характеризует значение *i-го* параметра: (1) - высокое, (-1) – низкое.

Подставляя вектор решения обратной задачи в выражение (4) имеем:

$$\text{w2v}\ (\textit{positive}(w_t|a_t=1,\ldots, w_s|a_s=1);\ \textit{negative}(w_q|a_q=\ -1,\ldots, w_n|a_n=-1)) = R^*_w \quad (6)$$

где вектор слов $R^*_w = (w_i/r_{i1},\ldots, w_n/r_{in})$ отражает смысл совместного употребления слов, входящих в аргументы функции (6), которые определяют решение обратной задачи.

Для определения имени класса решений из вектора $R^*_w$ нужно выделить слова, которые могут быть гиперонимами (могут определять класс). Для этого используем ранее полученный контекстный словарь (5). Тогда возможные имена класса решений, представим в виде кортежа:

$$\langle (W \cap \text{HYPER});\ \text{Context} \rangle.$$

где пересечение множества $W=\{w_i\} \in R^*_w$ и множества HYPER из словаря (5) дает множество имен классов решений, а Context (текст предложения) поможет выбрать нужное слово.

**Пример и эксперименты.** Для проверки предложенного подхода был разработан программный макет, включающий подпрограммы: извлечения из сети Интернет релевантной информации, построения контекстного словаря на основе лексико-синтаксических шаблонов, базы данных и SQL-запросы для получения имен классов решений с комментариями. Эксперименты показали, что предложенный подход позволяет получить имена классов решений, выработать решение и получить текст, аргументирующий этот выбор. Отметим, что корпус текста включает 28639 предложений, характеризующих разные аспекта предметной области. Применение этого метода позволяет определить возможные имена классов решений, анализируя значительно меньшее число предложений. Это определяет эффективность метода – сокращение рутинной аналитической работы, повышает интеллектуальную продуктивность эксперта.

**Заключение.** Предложен новый подход поддержки принятия решений, основанный на субъективной семиотической модели ситуации и поддержки интерпретации и аргументации, получаемых решений путем извлечения релевантной информации из сети Интернет.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-07-01044А).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Frege G. On sense and nominatum\\Readings in philosophical analysis. (1949).
2. Kulinich A.A. Semiotic Approach in Modeling and Decision-making in Ill-defined Complex Situations / Proc. of the 11-th International Conference "Management of Large-Scale System Development". Moscow: IEEE, pp.1-5. (2018)
3. Kulinich A. A. An Inverse Problem Solution in Semiotic Systems Under Uncertainty, 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, Lipetsk, Russia, pp. 235-240. (2019)
4. Большакова Е.И., Васильева Н.Э., Морозов С.С. Лексико-синтаксические шаблоны для автоматического анализа научно-технических текстов// 10 Национальная конференция по искусственному интеллекту (КИИ-2006). Труды конференции. М.: Физматлит, 2006. Т. 2. С.506-524.
5. Mikolov, et al. Distributed representations of words and phrases and their compositionality. In Advances in Neural Information Processing Systems 26: 27th Annual Conference on Neural Information Processing Systems. Proc. of a meeting held December 5-8, 2013, Lake Tahoe, Nevada, USA, p. 3111–3119.

---

**A.A. Kulinich** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia). **Decision support approach based on extracting information from the Internet.**

*Abstract.* A new method of decision support is proposed, based on the representation of the expert's knowledge in the form of the situation semiotic model, and support for the modeling results interpretation based on the analysis of domain texts obtained from the Internet, using technologies for extracting information from the text and its distributive analysis.

К.С. УЛЬЯНОВ, Ю.С. ФЕДОСЕНКО, А.В. ШЕЯНОВ
(Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород)

# УПРАВЛЕНИЕ ДВУХСТАДИЙНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ПОТОКА ОБЪЕКТОВ

*В рамках конструируемой в работе модели производственно-логистической схемы поставки потребителям массовых грузов водным транспортом ставится оптимизационная задача, управления двухстадийным обслуживанием конечного детерминированного потока объектов. Конструируется решающий алгоритм динамического программирования и выводится оценка его сложности. Приводятся результаты вычислительных экспериментов для практически значимых размерностей потока объектов, позволяющие рекомендовать разработанный алгоритм для штатного использования в системах поддержки управления процессами рассматриваемого типа.*

**Введение.** Рассматривается задача оптимизации управления двухстадийным обслуживанием конечного детерминированного потока объектов транспортного типа. В рамках рассматриваемой в задаче базовой модели описываются типовые логистические схемы доставки потребителям массовых грузов. В качестве наглядного примера кратко опишем технологию поставки потребителям минерально-строительных материалов (МСМ), извлекаемых плавучими добычными земснарядами (ПДЗ) из русловых месторождений, которым весьма богат Волжско-Камский речной бассейн.

Расположенный на судоходном месторождении плавучий высокопроизводительный ПДЗ гидромеханизированным способом осуществляет в непрерывном режиме извлечение и загрузку МСМ в поданное к нему порожнее судна; процесс загрузки считаем первой стадией обслуживания судна.

По завершения загрузки судно направляется в тот или иной определяемый оперативным планом пункт выгрузки; процесс выгрузки судна считаем второй стадией его обслуживания. Для перевозок такого типа используются грузовые суда различных проектов, характеризующиеся существенно различающимися эксплуатационными расходами, в том числе в связи с простоями в ожидании начала погрузки и выгрузки. Отметим, что навигационные объемы грузопереработки МСМ измеряются миллионами тонн и составляют значимый сегмент деятельности водного транспорта страны.

Разработка оперативных планов загрузки в порожние суда, их адресации и последующей выгрузки на определенный производственной спецификой временно́й горизонт (обычно сутки) осуществляется диспетчерской службой согласно тому или иному критерию оценки эффективности, актуальному в условиях складывающейся эксплуатационной обстановки. Таковым обычно являются суммарные эксплуатационные расходы по всем судам, количество которых в очереди на погрузку (и на подходе) может достигать 10 – 13 единиц при такого же порядка количестве пунктов выгрузки в обслуживаемом регионе.

В условиях весьма жесткого временного регламента, отводимого на разработку, возможную корректировку и утверждение оперативного плана последующего периода диспетчерского управления, обосновать оптимальную структуру плана традиционным расчетным способом не представляется возможным, что и послужило основанием для разработки цифровой системы поддержки диспетчерского управления (СПДУ) процессами рассматриваемого типа.

Предлагаемый доклад посвящен изложению результатов разработки лежащего в основе СПДУ модельно-алгоритмического обеспечения, разработанного в рамках дискретного формализма обслуживания конечного детерминированного потока объектов [1].

***Математическая модель обслуживания и постановка оптимизационной задачи.*** Стационарный процессор-источник $H$ должен выполнить обслуживание конечный детерминированный поток $O_n$ поступающих в дискретном времени объектов $o_1, o_2, \ldots, o_n$. Для каждого объекта $o_i$ считается известным момент $t_i$, $i = \overline{1,n}$ его поступления в очередь для обслуживания процессором $H$; полагаем $0 = t_1 \le \ldots t_2 \ldots \le t_n$. В начальный момент времени $t = 0$ процессор считается свободным, находящимся в состоянии готовности к обслуживанию потока $O_n$ Длитель-

ность обслуживания объекта $o_i$ определяется параметром $\tau_i$, $i=\overline{1,n}$. Процессор $H$ не может одновременно обслуживать несколько объектов и его простои запрещены; обслуживание каждого объекта реализуется без прерываний, переналадки не предусмотрены, необслуженный объект не может покинуть очередь к процессору $H$.

Объект $o_i$, $i=\overline{1,n}$ по завершению первой стадии обслуживания направляется к одному из процессоров-потребителей совокупности $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$ для реализации второй стадии обслуживания. К каждому процессору из совокупности $P$ должен быть направлен только один объект из совокупности $O_n$, а каждому объекту должен быть назначен только один процессор из совокупности $P$.

Считается известной $(n\times n)$-матрица $E=\{e_{ij}\}$, где $e_{ij}=1$ для объектов, допустимых к обслуживанию процессором $p_j$, и $e_{ij}=0$ в противном случае, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$. Предполагается, что матрица $E$ обеспечивает существование полных решений определяемой ею задачи, т.е. каждому процессору из совокупности $P$ можно взаимно однозначно определить в совокупности $O_n$ объект для обслуживания.

Для каждого процессора $p_j$ известна функция индивидуального штрафа $\Psi_j(t)$; все функции $\Psi_j(t)$, $j=\overline{1,n}$ считаются монотонно возрастающими от аргумента $t$ – момента завершения второй стадии обслуживания. Полагаются известными $(n\times n)$-матрицы $V=\{v(i,j)\}$ и $W=\{w(i,j)\}$, где $v(i,j)$ – продолжительность перемещения объекта $o_i$ от точки расположения процессора $H$ до точки расположения процессора $p_j$, а $w(i,j)$ – продолжительность обслуживания объекта $o_i$ процессором $p_j$; в случае $e_{ij}=0$ полагаем $v(i,j)=w(i,j)=+\infty$. Все параметры модели считаем целочисленными.

Стратегию $S$ управления обслуживанием потока $O_n$ определим как пару $[\rho, r(j), j=\overline{1,n}]$, где $\rho=(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ − перестановка элементов множества индексов {1, 2, ... , n}, а $r(j)$ –взаимно однозначное отображение множества индексов {1, 2, ... , n} в себя. При реализации стратегии $S$ объект с индексом $i_k$ процессором $H$ обслуживается $k$-м по очереди, $k=\overline{1,n}$; $r(j)$ – индекс процессора из совокупности $P$, которому объект $o_j$ назначен для обслуживания, $j=\overline{1,n}$. Реализации стратегий считаем компактными [1]. Поэтому при любой стратегии $S$ для каждого объекта по перестановке $\rho$ арифметически вычисляется момент завершения его обслуживания процессором $H$. Далее по отображению $r(k)$ определяется момент $t^*(S,j)$ завершения обслуживания процессором $p_j$, $j=\overline{1,n}$ назначенного ему объекта. Таким образом, с каждой стратегией $S$ ассоциируется величина $\sum_{j=1}^{n}\Psi_j(t^*(S,j))$ суммарного штрафа по всем процессорам совокупности $P$, и возникающая оптимизационная задача записывается в виде

$$\min_{S}\sum_{j=1}^{n}\Psi_j(t^*(S,j)). \qquad (1)$$

***Построение решающей процедуры***. Для задачи (1) выведем решающие соотношения динамического программирования. При этом отметим, что управленческие решения принимаются для тех моментов дискретного времени, когда процессор свободен.

Каждое такое решение состоит в определении, какой объект будет обслуживаться процессором $H$ следующим и в адрес какого процессора из совокупности $P$ он должен быть направлен. Очевидно, что текущая ситуация характеризуется тройкой $(t,M,N)$, где $t$ – момент, для которого принимается решение, в этот момент процессор свободен; $M$ – множество номеров объектов, которые на момент времени $t$ остаются необслуженными; $N$ – множество индексов процессоров из совокупности $P$, в адреса которых еще не направлены предназначенные для них объекты.

Введенные тройки называем состояниями дискретной управляемой системы $\{O_n, H, P\}$ и введем в рассмотрение функцию Беллмана $B(t, M, N)$. Её величина равна минимально возможному суммарному штрафу в реализациях стратегий, переводящих систему из состояния $(t, M, N)$ в финальное состояние, т.е. в состояние, в котором множества $M$ и $N$ оказываются пустыми. Как очевидно,

$$B(t, \{i, j\}) = \Psi_j(max(t, t(i) + \tau(i) + v(i, j) + w(i, j)). \quad (2)$$

Для неодноэлементных множеств $M$ и $N$ имеем

$$B(t, M, N) = min[\Psi_j(max(t, t(i) + \tau(i) + v(i, j) + w(i, j)) + B(max(t, t(i) + \tau(i)), M/\{i\}, N/\{j\}]. \quad (3)$$

Формулы (2), (3) суть решающие задачу (1) рекуррентные соотношения. В процессе их выполнения вначале по формуле (3) вычисляются значения функции Беллмана для всех одноэлементных множеств $M$ и $N$ при достаточно больших значениях параметра $t$. Далее вычисления выполняются по формуле (2) в порядке увеличения числа элементов в множествах $M$ и $N$ до тех пор, пока не будет определена величина $B(0, \{1, 2, \ldots, n\}, \{1, 2, \ldots, n\})$ – решение оптимизационной задачи (1).

Вычислительная сложность сконструированного алгоритма определяется числом наборов аргументов, для которых вычисляются значения функции Беллмана. Как очевидно, пара $M$ и $N$ принимает $4^n$ различных наборов значений, что и определяет вычислительную сложность описанной процедуры. *NP*-трудность [2] задачи (1) следует из того, что она является обобщением *NP*-трудной канонической задачи диспетчеризации [1].

Для оценки быстродействия программной реализации сконструированного алгоритма выполнялись вычислительные эксперименты на тестовом наборе данных Камского грузового района. При этом для каждого значения размерности потока $O_n$ ($n$ = 10 – 13) осуществлялось решение 100 задач, определяемых квадратными матрицами численных оценок $V$ и $W$ соответствующей размерности. Целочисленные значения элементов $v(i, j)$ и $w(i, j)$ этих матриц генерировались псевдослучайным образом по равномерному закону распределения на интервале [10, 99]. Длительность отработки каждого алгоритма измерялась с точностью до секунды. Результаты экспериментов приведены в таблице 1.

Таблица 1

**Средняя длительность выполнения алгоритма синтеза в зависимости от размерности потока объектов**

| Значение размерности *n* задачи (1) | Средняя длительность выполнения алгоритма |
|---|---|
| 10 | 24 |
| 11 | 123 |
| 12 | 817 |
| 13 | 2356 |

**Заключение.** Построенная в работе математическая модель адекватно описывает базовую производственно-логистическую схему поставки потребителям массовых грузов. В качестве развития модели просматривается её обобщение на случай двухстадийного обслуживания потоков пакетов объектов [3] – судовых составов. Также в интересах производственно-транспортных приложений целесообразна постановка оптимизационных задач с учетом директивных сроков, других практически значимых, в том числе векторных критериев оценки стратегий управления, а также конструирование алгоритмов синтеза оптимальных и субоптимальных стратегий обслуживания. В силу вычислительной сложности задач данного класса ещё одно направление работ – это разработка и исследование алгоритмов их решения на кластерных системах и с использованием высокопроизводительной облачной инфраструктуры.

*Работа подготовлена по результатам исследований, выполненных при поддержке РФФИ проект № 15-07-03141.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коган Д. И., Федосенко Ю. С.** Задача диспетчеризации: анализ вычислительной сложности и полиномиально разрешимые подклассы. *Дискретная математика*. 1998. Т. 8. №3. С. 135–147.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982, 209 с.
3. **Коган Д.И., Трухина М.А., Федосенко Ю.С., Шеянов А.В.** модели и оптимизационные задачи однопроцессорного обслуживания пакетов объектов. *Автоматика и телемеханика.* , 2016. №11. С. 135-147.
4. **Федосенко Ю.С., Резников М.Б., Пудов А.С.** Опыт оптимизации кластерной вычислительной модели алгоритма дискретного динамического программирования для канонической задачи диспетчеризации. *Супервычисления и математическое моделирование*. Саров: Российский федеральный ядерный центр. ВНИИЭФ, 2018, С. 129.

---

**K.S. Ulyanov, Yu.S. Fedosenko, A.V. Sheyanov** (Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod) **Control of two-stage servicing for flow of objects**

*Abstract.* A model of a production and logistics scheme for the supply of bulk cargo to consumers by water transport is being constructed. Within the framework of this model, an optimization problem is posed to control two-stage servicing of a finite deterministic flow of objects. A solving dynamic programming algorithm is constructed and an estimate of its complexity is derived. The results of computational experiments for practically significant objects flow dimensions are given. This makes it possible to recommend the developed algorithm for regular use in control support systems for processes of the considered type.

Г. А. ЗВЕРКИНА
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Российский университет транспорта (МИИТ), Москва)

# ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МАРКОВСКИ МОДУЛИРОВАННЫХ ПУАССОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Описывается одно простое обобщение марковски модулированных процессов. Для таких процессов доказана эргодичность и указан метод получения верхней оценки скорости сходимости распределения к предельному в метрике полной вариации. Используется понятие обобщённой интенсивности для смешанных (несингулярных) распределений, а также недавно полученное в соавторстве с Э. Ю. Калимулиной обобщение неравенства Лордена.*

**Введение.** Как хорошо известно, марковски модулированные процессы применяются в исследовании поведения сложных систем массового обслуживания и моделей надёжности. Однако область их применения ограничивается только случаем экспоненциальных времён обслуживания и классических цепей Маркова в непрерывном времени.

Фактически марковски модулированный процесс – это «управляющая» цепь Маркова в непрерывном времени и набор ещё нескольких цепей Маркова в непрерывном времени, интенсивность переходов которых и переходные вероятности зависят от поведения «управляющей» цепи Маркова. Весь набор этих Марковских цепей представляет собой многомерный Марковский процесс – см. [1].

Предлагаемый доклад посвящён одному простейшему обобщению этой конструкции, которая после некоторого усложнения может эффективно применяться в теории надёжности и в теории массового обслуживания.

**Определения.** Как правило, время восстановления процесса восстановления задаётся функцией распределения $F(x)$ или интенсивностью $\lambda(x)=\dfrac{F'(t+0)}{1-F(t)}$. $F(x)$ полагается абсолютно непрерывной и

$$F(x)=1-\exp\left(-\int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s\right). \qquad (1)$$

***Обобщённая интенсивность.*** Пусть теперь $F(x)$ – функция смешанного распределения, т.е. имеется не более чем счётное число точек разрыва. В точке $a$ разрыва ф.р. $F(x)$ полагаем $\lambda(a)=-\delta(x-a)\times\ln(F(a+0)-F(a-0))$, где $\delta(*)$ – $\delta$-функция. Т.е. $\lambda(s)\dfrac{F'(s)}{1-F(s)}-\sum_i \delta(s-a_i)\ln\big(F(a_i+0)-F(a_i-0)\big)$, где $\{a_i\}$ – множество точек разрыва функции $F(s)$. Формула (1) остаётся в силе – см [2].

***Обобщённый марковски модулированный процесс.*** Рассматривается многомерный процесс $X_t=\left(x_t^{(0)},x_t^{(1)},x_t^{(2)},\dots x_t^{(m)}\right)$ с пространством состояний $\mathbb{Z}_+^{m+1}$. Переменная $x_t^{(i)}$ переходит в состояние 0 с интенсивностью $\lambda_t^{(i)}$, зависящей от состояния процесса $X_t$. Таким образом, набор процессов $x_t^{(i)}$ представляет собой набор зависимых процессов восстановления.

Предполагаем, что

1. Для всех $X_t$ почти всюду $0\leqslant\lambda_t^{(0)}(X_t)\leqslant\Lambda<\infty$; и для $X_t=\left(0;x_t^{(0)}\right)$ верно $0<\lambda_t^{(0)}(X_t)=\lambda\left(x_t^{(0)}\right)\leqslant\Lambda<\infty$.

2. Существуют две почти всюду положительные (обобщённые) функции $\varphi(t)$ и $Q(t)$ ($Q(t)$ ограничена в окрестности нуля) такие, что для всех $t$ и $i=1,2,\dots m$ верно:

$$\varphi\left(x_t^{(i)}\right)\leqslant\lambda_t^{(i)}(X_t)\leqslant Q\left(x_t^{(i)}\right).$$

3. $\int_0^\infty x^2 \mathrm{d}\Phi(\mathrm{x}) < \infty$, где $\Phi(x) = 1 - \int_0^x \exp\left(\int_0^s -\lambda(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx}$.

В этих условиях для всех *зависимых* процессов $x_t^{(i)}$ выполняется обобщённое неравенство Лордена для перескока любого из этих процессов (см [2,3,4]):

$$\mathbb{E}(b_t)\leqslant\mathbb{E}\eta+\frac{\mathbb{E}\eta^2}{2\mathbb{E}\zeta}, \tag{2}$$

где $\mathbb{E}\eta^k = \int_0^\infty x^k \mathrm{d}\Phi(\mathrm{x})$; $\mathbb{E}\zeta = \int_0^\infty x\mathrm{dG(x)}$; и $G(x) = 1 - \int_0^x \exp^{-\int_0^s Q(t)\mathrm{dt}}\ \mathrm{ds}$. (см. [2])

**Основные результаты.**

***Теорема 1.*** В условиях 1—3 изучаемый процесс $X_t$ — эргодический. Т.е. его распределение $\mathcal{P}_t$ слабо сходится к инвариантному распределению $\mathcal{P}$.

Доказательство опирается на использование обобщённого неравенства Лордена (2).

***Теорема 2.*** В условиях 1—3 можно оценить скорость сходимости распределения $\mathcal{P}_t$ к распределению $\mathcal{P}$ в метрике полной вариации, а именно:

а. Если существует конечный $k$-й момент $\mathbb{E}\eta^k < \infty$, ($k\geqslant 2$) то предложен алгоритм вычисления константы $\mathbb{K}$ такой, что $\|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}\|\leqslant\frac{\mathbb{K}}{t^{k-1}}$. Построение константы $\mathbb{K}$ зависит от выбора некоторого параметра в ходе вычислений, и значение зависит от выбора этого параметра.

б. Если существует конечный экспоненциальный момент $\mathbb{E}e^{\alpha\eta} < \infty$ ($\alpha > 0$), то предложен алгоритм вычисления константы $\mathbb{K}$ и величины $\beta\in(0;\alpha)$ таких, что $\|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}\|\leqslant\mathbb{K}e^{-\beta t}$. Опять же, при доказательстве используется некоторый параметр, и указанная оценка может быть улучшена более качественным выбором параметра.

**Заключение.** Полученные результаты естественным образом распространяются на ситуацию, когда в момент завершения периода «восстановления» каждая из компонент может (с определённой вероятностью) переходить в другое состояние. Например, когда таких состояний всего 2, речь может идти об исследовании поведения сложной системы надёжности, в которой работающие или неработающие элементы влияют своим состоянием на поведение (скорость работы или восстановления) других элементов. Предложенный подход позволяет оценивать поведение таких систем не только в том случае, когда времена работы и ремонта экспоненциальны.

Знание оценки скорости сходимости распределения процесса работы сложной системы позволяет даже в тех случаях, когда предельное распределение неизвестно, достаточно точно оценивать его с помощью имитационного моделирования.

Автор выражает признательность Э. Ю. Калимулиной за поддержку в работе.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 20-01-00575а*

ЛИТЕРАТУРА

1. **WolfgangFischer, KathleenMeier-Hellstern.** The Markov-modulated Poisson process (MMPP) cookbook. Performance Evaluation, Volume 18, Issue 2, September 1993, Pages 149-171; https://doi.org/10.1016/0166-5316(93)90035-S

2. **Зверкина Г.А., Калимулина Э.Ю.** On some generalization of Lorden's inequality for renewal processes / arXiv.org. Cornell: Cornell university library, 2019-2020. 1910.03381v2. С. 1-8.
3. **Д. Р. Кокс, В. Л. Смит** Теория восстановления. Издательство «Советское радио» Москва — 1967 г.
4. **Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.** Введение в теорию массового обслуживания. Издательство: М.: Наука (1966)

---

**G.A.Zverkina**, (ICS RAS, Moscow; RUT(MIIT), Moscow). **On a generalization of Markov-modulated Poisson processes**

*Abstract.* One simple generalization of Markov modulated processes is described. For such processes, ergodicity is proved and a method for obtaining an upper bound for the rate of convergence of a distribution to the limiting one in the metric of total variation is indicated. The concept of generalized intensity for mixed (nonsingular) distributions is used, as well as a generalization of the Lordden inequality recently obtained in collaboration with E. Yu. Kalimulina.

Э. К. КАЛИМУЛИНА
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Российский университет транспорта (МИИТ), Москва)

# УПРАВЛЕНИЕ ОТКАЗАМИ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

*В работе исследуется эргодичность некоторых классов сетей массового обслуживания. Рассматривается динамический механизм управления отказами. Рассматриваются условия, при которых обеспечивается их устойчивость и эргодичность. Основные результаты об эргодичности и оценках скорости сходимости к стационарному распределению доказываются через оценку спектрального зазора.*

**Введение.** Стандартная сеть массового обслуживания характеризуется следующими параметрами (см. Рис.1), см., например [1, 2]:

• сеть состоит из m узлов, $M = \{1,2, ..., m\}$;

• каждый узел является многосерверной системой. с бесконечным залом ожидания;

• алгоритм обслуживания - FCFS (First Come First Served);

• все заявки должны быть неразличимы;

• внешний поток пуассоновский с параметром $\Lambda$ (т.е. рассматривается открытая сеть массового обслуживания).

Обозначим матрицу маршрутизации как $R = (r_{ij})$, $i, j = 0,1, ..., m$; без потери общности $R$ предполагается неразложимой;

• обозначим трафик в узлах как $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$;

• обозначим скорость обслуживания как $\mu = (\mu_1(n_1), ..., \mu_m(n_m))$;

• количество заявок в системе обозначено как $n = (n_1, ..., n_m)$.

Рассматривается следующую модификацию стандартной модели (ненадежная сеть) [3, 4]:

• каждый узел может выходить из строя и ремонтироваться с интенсивностями $\alpha_i$, $\beta_i$, $i$=1,...,$m$;

• в качестве механизма управления отказами применена динамическая маршрутизация.

Принцип динамической маршрутизации заключается в автоматическом выборе альтернативного маршрута, если на основном один из узлов выходит из строя. Альтернативный узел выбирается из ближайшего к неисправному. Данный подход отличает рассматриваемую модель от аналогичных.

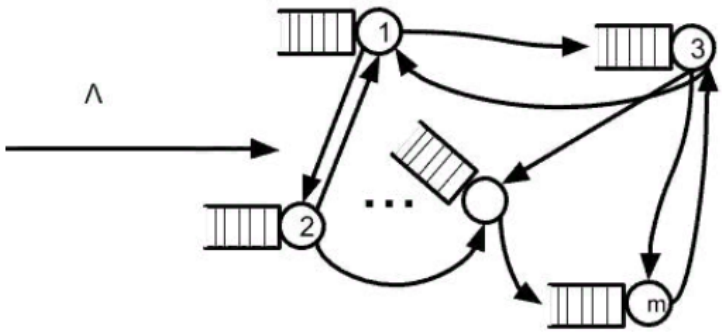



Рис. 1. Стандартная сеть массового обслуживания.

Подобный механизм управления отказами приводит к расширенному пространству состояний процесса. Стандартный подход подразумевает, что структура сети (граф) фиксирован. Восстановление и сбои образуют способ преобразования этого графа в другой в предложенной модели. Количество узлов фиксировано, но узлы могут быть заблокированы (путем удаления / добавления к нему ребер). Эти преобразования показаны на рис.2.

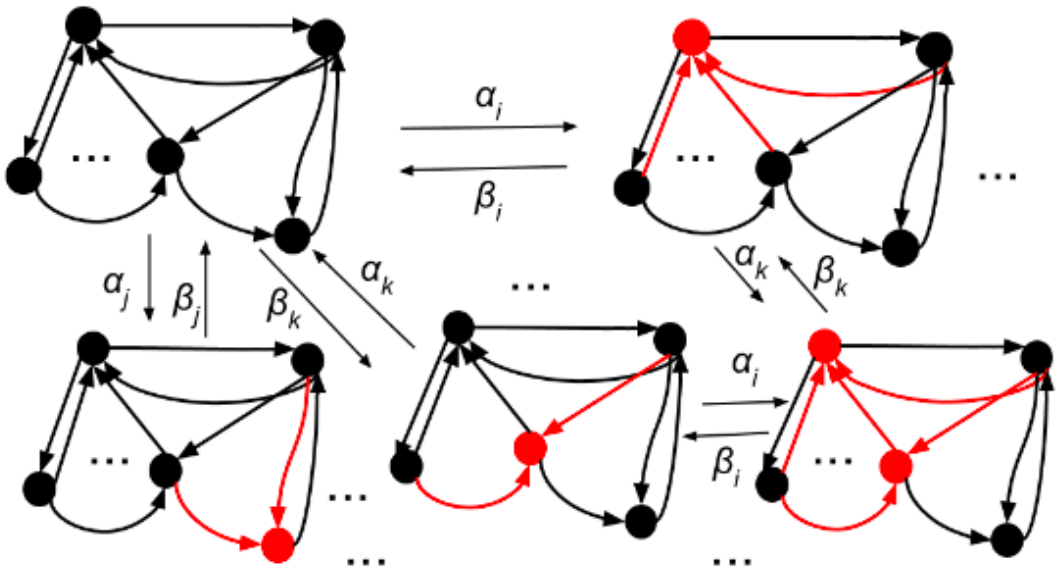



Рис. 2. Процесс изменения графа сети.

**Основные результаты.** Можно показать, что поведение такого процесса есть цепь Маркова в непрерывном времени, включающая в себя вложенную однородную цепь Маркова с положительными вероятностями переходов. Такой процесс сходится к стационарному распределению с экспоненциальной скоростью. Кроме этого, можно показать, что, если $X(t)$ - процесс, описывающий эволюцию нашей сети во времени, а с $Q$ - генератор этого процесса (ограниченный), то при строго положительных интенсивностью обслуживания $\mu > 0$, процесс $X(t)$ имеет строго положительный спектральный зазор.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 20-01-00575 А*

ЛИТЕРАТУРА.

1. **E. van Doorn.** Many papers on the rate of convergence of birth-death processes.
2. **E. van Doorn.** Representations for the rate of convergence of birth-death processes.Theory Probab. Math. Statist, 2002, 65, 37—43.
3. **Elmira Yu Kalimulina.** Analysis of Unreliable Open Queueing Network withDynamic RoutingDCCN, Springer, 2015.
4. **Elmira Yu Kalimulina.** Rate of convergence to stationary distribution for unreliableJackson-type queueing network with dynamic routing. DCCN, Springer, 2016

---

**E.Yu. Kalimulina** (Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Russian University of Transport, Moscow). **Faults-tolerant control in some classes of queuing networks**

*Abstract.* The ergodicity of some classes of queuing networks is considered in this paper. A dynamic control of faults is considered. The conditions ensure stability and ergodicity are introduced. The main results on ergodicity and the rate of convergence to a stationary distribution are proved via an estimation of the spectral gap.

В. С. ВЫХОВАНЕЦ
(Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Москва)

# ПОНЯТИЙНЫЕ МОДЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ЗНАНИЙ

*Определяются понятийные модели для представления и обработки знаний. Понятийная модель состоит из понятийной структуры и описания содержания входящих в нее понятий. Понятийная структура определена как множество понятий, на которых заданы отображения обобщения и ассоциации. Содержание понятий описывается с помощью различного рода перечисляющих и разрешающих процедур. Показано, что благодаря семантической инвариантности используемого формализма улучшаются характеристики систем управления с понятийными моделями предметной области.*

**Введение.** Методы представления и обработки знаний приобретают все больший вес в современной теории управления. Последнее связано с усложнением процессов управления, для адекватного описания которых уже не хватает выразительности классическим математическим теориям и технологических возможностей известных интеллектуальных систем.

С обработкой знаний связывают ожидания в описании сложных предметных областей, обеспечения многократного использования формализованных знаний, повышения надежности и качества систем управления социального и экологического уровней.

Однако в области инженерии знаний накопилось множество нерешенных проблем, затрудняющих внедрение автоматизированных технологий обработки знаний в практику. В частности, далека от решения задача извлечения знаний, модели и формы представления знаний плохо согласуются с ментальными и психическими особенностями человека, а обработка знаний длительна по времени и подвержена возникновению скрытых противоречий.

Некоторые из имеющихся проблем удалось избежать при использовании понятийных моделей. Модели названы понятийными для отличия их от концептуальных. В концептуальных моделях задаются понятия (концепты) и разного рода связи (отношения) между ними. В понятийных моделях связи между понятиями сами являются понятиями, а модель строится на основе задания абстракций, послуживших образованию понятий [1, 2].

**Понятие понятия.** Понятие – вид мысли, которая соотносится с некоторой совокупностью уникальных представлений (сущностей) внутреннего или внешнего мира человека (предметной области).

***Образование понятий***. Понятия образуются (определяются) при абстрагировании путем выполнения умственных операций над сущностями. Выделяются три вида понятий и порождающих их абстракций: понятия-знаки (абстракция отождествления), понятия-обобщения (абстракция обобщения) и понятия-ассоциации (абстракция ассоциации).

***Абстракция отождествления***. При образовании понятия-знака происходит мысленная замена сущности знаком – другим уникальным представлением, другой сущностью, например, именем. Отсюда следует, что любая сущность является понятием. Верно и обратное.

***Абстракция обобщения.*** При образовании понятия-обобщения происходит объединение понятий, когда сущностями понятия-обобщения являются все сущности обобщаемых понятий (объединение сущностей). Абстракция обобщения используется также для образования понятий-признаков, являющихся объединением понятий-знаков.

***Абстракция ассоциации***. При образовании понятия-ассоциации происходит соединение понятий, при котором каждая сущность понятия-ассоциации включает в себя по одной из сущностей ассоциируемых понятий (подмножество декартова произведение сущностей).

**Понятийный анализ**. Понятийный анализ заключается в выявлении понятий в предметной области и способов их абстрагирования. Используемые при этом абстракции отождествления, ассоциации и обобщения рассматриваются как умственные операции, необходимые и достаточные для мысленного выделения и превращения в понятия тех представлений, которые накоплены относительно описываемой предметной области.

***Проблемные области***. В процессе понятийного анализа выделяется одна или несколько проблемных областей. Проблемная область – это предметная область, рассматриваемая в неко-

тором узком аспекте, под углом зрения некоторой активной проблематики. Одно и то же понятие в разных аспектах (в различных проблемных областях) может образовываться по-разному.

***Понятийная структура.*** Основной целью понятийного анализа является получение понятийной структуры предметной области. В понятийной структуре задаются имена и аспекты понятий, способы их абстрагирования, а также множества понятий, через которые понятия определяются. Имя понятия без указания аспекта задает собирательное понятие (понятие-обобщение), объединяющее все конкретизации этого понятия в предметной области.

***Атрибуты понятия***. Любое понятие имеет «Имя» – идентификатор понятия (понятие-знак), «Аспект» – идентификатор проблемной области (понятие-знак), который совместно с «Именем» образует уникальный идентификатор понятия, а также способ образования понятия – понятие-знак, принадлежащий понятию-признаку «Абстракция»: «Значение», «Признак», «Ассоциация», «Обобщение». Другие атрибуты – понятия, из которых образовано понятие, определяются по результатам анализа предметной области.

**Понятийная модель**. Понятийная модель состоит из понятийной структуры и описания сущностей понятий с помощью различных перечисляющих и разрешающих процедур.

***Схема понятия***. Понятийная структура предметной области состоит из схем понятий. Схема понятия – упорядоченное множество атрибутов. Первые три элемента этого множества – общие для всех понятий атрибуты «Имя», «Аспект» и «Абстракция». Далее перечисляются частные атрибуты понятия.

***Сущности понятия***. В информационных системах для задания понятий-знаков используются значения простых типов данных: числа, символы, строки, и т.д., а сами простые типы данных рассматриваются как понятия-признаки.

Понятия-ассоциации задаются как структуры, агрегирующие классы, ассоциативные связи, таблицы баз данных, а понятия-обобщения – как объединения, обобщающие классы, запросы объединения данных из нескольких таблиц баз данных.

***Операции над понятиями***. Семантически инвариантной (не зависящей от предметной области) формой описания решений прикладных задач над понятийными моделями являются процедуры (алгоритмы), состоящие трех элементарных операций: создания, изменения и удаления понятий.

Операция создания понятия возникает при усложнении понятийной модели и состоит в задании имени и аспекта нового понятия, способа его абстрагирования и списка понятий-атрибутов.

Операция изменения понятия используется при необходимости наполнить понятие конкретным предметным содержанием. В этом случае возможны три действия: редактирование сущности, удаление сущности и добавление сущности.

Операция удаления понятия возникает в случае реинжиниринга понятийной модели и состоит в изменении описания всех понятий, в определения которых входит удаляемое понятие.

**Обработка знаний**. Обработка знаний подразумевает наличие форм представления знаний и методов манипулирования ими с целью имитации рассуждений человека. Для представления знаний используются факты (суждения), а для рассуждений – правила вывода, позволяющие на основе имеющихся фактов (посылок) выполнять умозаключения и получать новые утверждения (факты) об имеющихся или вновь вводимых фактах.

***Факты***. Факты – это истинные высказывания с логическим связками «И», «ИЛИ», «НЕ», скобками и двумя видами элементарных высказываний: одноместными предикатами принадлежности сущности $E$ понятию $N$ вида $N(E)$, а также отношениями вида $N[E] \bullet V$, где $N[E]$ – одноместный функтор, возвращающий значение (сущность) атрибута $N$ сущности $E$, $\bullet$ – знак отношения, допустимого между сущностями $N[E]$ и $V$ («равно», «больше», «меньше», и т.п.).

***Отношения***. Универсальным является отношение равенства сущностей, которое определяется рекурсивно: две сущности равны, если и только если наборы значений частных атрибутов этих сущностей поэлементно равны. Другие отношения могут наследоваться от стандартных понятий-признаков, используемых в интеллектуальной.

***Правила вывода***. В понятийной модели правила вывода задаются схемами понятий, а понятийная структура является формальной теорией, сохраняющей истинность всех выводимых в ней следствий.

Из схемы понятия-обобщения следует правило вывода, согласно которому сущность *E* принадлежит понятию-обобщению *N* тогда и только тогда, когда эта сущность принадлежит хотя бы одному обобщаемому понятию.

Из схемы понятия-ассоциации следует правило вывода, согласно которому сущность *E* принадлежит понятию-ассоциации *N* тогда и только тогда, когда существует сущность понятия *N*, имеющая такие же значения частных атрибутов, что и сущность *E*.

**База знаний**. База знаний – это база данных, содержащая понятийную модель, а также механизм вывода, позволяющий выполнять запросы к базе знаний и получать новые знания. База знаний реализует модель открытого мира, так как в процессе ее функционирования нарушается монотонность вывода.

***База данных***. Любая сущность понятийной модели является записью в таблице базы данных с уникальным глобальным идентификатором. Понятия-ассоциации реализуются в виде таблиц со столбцами, соответствующими ассоциируемым понятиям, а понятия-обобщения – в виде представлений, выбирающих сущности из таблиц (представлений) обобщаемых понятий. Понятия-признаки реализуются как встроенные типы данных используемой системы управления базы данных.

Любое понятие само является понятием и для его описания используется те же средства, что и для прикладных понятий. По этой причине правила вывода являются записями в таблице базы данных и указывают на атрибуты понятий, которые сами являются понятиями.

***Запросы***. Запрос к базе знаний – это поиск сущностей понятия, удовлетворяющих заданным условиям на значения атрибутов. Запросы представляются на языке запросов к базе данных. Время выполнения запроса имеет полиномиальную оценку.

**Заключение**. Коренное отличие рассмотренного подхода для представления и обработки знаний заключается в использовании помимо формальной логики, еще одного семантического инварианта – формальной теории понятий. Отказ от описания ассоциаций в виде связей с различной семантической нагрузкой делает формальную теорию понятий семантически инвариантной (не зависящей от предметных областей). Основная трудность использования понятийных моделей – это необходимость освоения новой методологии анализа предметной области и специфической технологии представления и обработки знаний. Однако высокая эффективность, выразительность и надежность реализованных моделей представления и обработки знаний позволяет надеяться на их широкое внедрение на практике создания и использования современных систем управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Выхованец В.С.** Информационная система с понятийной моделью предметной области. *Управление большими системами*. 2017. Вып. 66. С. 25-67.
2. **Vykhovanets V.S.** Large-Scale Information Systems based on Conceptual Models. *Proceedings of 2019 Twelfth International Conference “Management of Large-Scale System Development” (MLSD)*. Russia, Moscow, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, October 1 – 3, 2019.

---

**V.S. Vykhovanets** (Institute of Control Sciences RAS, Moscow) **Conceptual models of knowledge representation and processing**

*Abstract.* Conceptual models of knowledge representation and processing are defined. A conceptual model consists of the conceptual structure and description of the content of the concepts included in it. The conceptual structure is defined as a set of concepts on which generalization and association map are given. The content of concepts is described using various enumerating and resolving procedures. It is shown that due to the semantic invariance of the formalism used, the characteristics of control systems are improved.

## Секция 5

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

М. И. ГЕРАСЬКИН, Е. П. РОСТОВА
(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева)

# ОПТИМИЗАЦИЯ ТАРИФОВ СТРАХОВАНИЯ И УТИЛИЗАЦИИ ЗАГРЯЗНЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ПРОМЫШЛЕННЫМИ РИСКАМИ

*В статье сформулирована задача определения тарифов страховой компании и организации по утилизации загрязнений, участвующих в управлении промышленными рисками. Задача решена по критерию максимизации прибыли промышленного предприятия при следующем условии: страховщик и утилизатор действуют в условиях монополистической конкуренции.*

**Введение.** Исследование проблем риск-менеджмента связано с различными аспектами риска: выявление риск-факторов, определение методов управления риском, прогнозирование ущерба и пр. Вопросы разработки мероприятий по предупреждению рисков становится все более актуальными. Принятие решения по выбору метода управления риском должно базироваться на оценке экономической эффективности предупредительных мероприятий. Решать подобные задачи возможно с помощью двояковыпуклых моделей и алгоритмов (Biconvex Models and Algorithms) [1]. Также в последние годы актуальны исследования различных информационных систем управления рисками [2], [3]. Отметим, что риск-менеджмент рассматривает только процессы внутри фирмы [4], [5] и не рассматривает взаимодействие с другими компаниями по вопросам управления рисками, например, со страховщиками и утилизаторами загрязнений.

Далее исследуется стоящая перед промышленным предприятием проблема оптимального распределения техногенного ущерба между страховым компенсационным механизмом, утилизацией силами специализированных организаций и утилизацией собственными силами в случае различных цен утилизации и страховых тарифов.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим промышленное предприятие, производящее продукцию в объеме $Q$, реализуемую по цене $p$. Введем следующие обозначения: $C_Q$ – издержки на производство продукции данного предприятия, $f$ – добровольные рисковые издержки, $X$ – ущерб, $F=F(X)$ – затраты на утилизацию последствий ущерба, $p_1$ – цена утилизации одной условной тонны загрязнения, зависящая от ущерба $X_1$, переданного на утилизацию и не превышающая максимально возможную цену на рынке данных услуг $\overline{p}_1$, $V=V(X)$ – страховая премия, зависящая от объема ущерба $X_2$, переданного на страхование, $\overline{p}_2$ – предельный размер тарифной ставки на рынке страхования промышленных рисков. Ущерб $X_1$ целиком передается утилизатору, ущерб $X_2$ целиком передается страховщику. Цена возмещения ущерба для предприятия считается равной единице, т.е. цена утилизации и тарифная ставка страхования выражены в относительных единицах. Примем себестоимость утилизации последствий непредвиденной ситуации для промышленного предприятия за 1 ден.ед., тогда страховой тариф $p_2$ и цена утилиза-

ции одной условной тонны загрязнения $p_1$ будут показывать стоимость страхования и утилизации относительно себестоимости для промышленного предприятия, т.е. относительно 1.

Запишем функцию прибыли предприятия:

$$П = Qp - (C_Q + f + X + V + F). \quad (1)$$

Здесь функция затрат промышленного предприятия имеет следующий вид [6], [7]:

$$C_Q(Q) = BQ^{\beta},\ \beta \in (1, \beta^{\max}], \beta^{\max} \in (1, 2], B > 0, \quad (2)$$

функция ущерба [8], [9]:

$$X(Q, f) = \chi(Q)e^{-\xi f},\ \xi \in (0, \xi^{\max}], \xi^{\max} \in (0, 1], \chi'(Q) \geq 0. \quad (3)$$

Функция спроса на услуги утилизаторов и страховщиков имеет вид:

$$X_i = \overline{X}_i(1 - \frac{p_i}{\overline{p}_i}), \quad (4)$$

где $\overline{X}_i$ - предельный размер ущерба, который может принять утилизатор ($i$=1) и страховщик ($i$=2).

Ущерб предприятия $X$ не превышает технологических возможностей других секторов и может быть разделен на три компонента: $X_1$ – часть ущерба, переданная организации по утилизации загрязнений, $X_2$ – застрахованная часть ущерба, $X_0$ – часть ущерба, утилизируемая самим предприятием.

$$X_1 + X_2 + X_0 = X, X_i \in (0, \overline{X}_i), 0 \leq X_0 < \overline{X}_i, i = 1,2. \quad (5)$$

В [10] была решена задача определения оптимальных значений $f$* и $Q$* по критерию максимизации прибыли. Далее будем считать, что промышленное предприятие действует при $f$=$f$* и $Q$=$Q$*, ущерб равен константе $X(Q^*, f^*)$=$X$*. С учетом введенных выше функций и условий получим следующий вид функции прибыли:

$$П(p_1, p_2) = Q^* p - (BQ^{*\beta} + f^* + X_0 + \sum_{i=1}^{2} p_i X_i). \quad (6)$$

Промышленное предприятие выбирает схему распределения ущерба между секторами $X_0$, $X_1$, $X_2$. Это распределение сводится к нахождению оптимальных цен $p_1$, $p_2$. Получаем задачу определения цены утилизации одной условной тонны загрязнения и тарифной ставки страхования промышленного риска по критерию максимизации прибыли промышленного предприятия:

$$(p_1, p_2) = \arg\max_{p_i \in \Omega,\ i = \overline{1,2}} \hat{\Pi}, \quad (7)$$

при ограничениях:

$$\Omega = \left\{ (p_1, p_2) : \left\{ \begin{array}{c} X_0 + X_1 + X_2 = X^*, \\ 0 \leq X_i = \overline{X}_i(1 - \frac{p_i}{\overline{p}_i}) \leq \overline{X}_i,\ i = \overline{1,2}, \end{array} \right. \right\} \quad (8)$$

**2. Результаты.**

***Утверждение 1.*** Прибыль промышленного предприятия (6) в зависимости от аргументов ($p_1$, $p_2$) описывается поверхностью второго порядка, которая является эллиптическим параболоидом с глобальным минимумом в точке $(p_1^*, p_2^*) = \left( \frac{\overline{p}_1}{2}, \frac{\overline{p}_2}{2} \right)$, ограниченным плоскостями $p_1$= 0, $p_2$= 0.

***Утверждение 2.*** Максимум функции прибыли промышленного предприятия (6) при условии (8) достигается в точках (0, $\overline{p}_2$), ($\overline{p}_1$, 0) и равен значению $П^* = K + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2} \overline{X}_i \overline{p}_i$, где

$$K = Q^* p - BQ^{*\beta} - f^* - X^* + \sum_{i=1}^{2} \left[ \overline{X}_i - \frac{\overline{X}_i(1 + \overline{p}_i)^2}{4\overline{p}_i} \right].$$

**Заключение.** В статье решена задача определения тарифов на услуги по страхованию промышленных рисков и утилизации загрязнений по критерию максимизации прибыли промышленного предприятия. В отличие от большинства задач управления риском, представленная в данном исследовании постановка задачи позволяет учесть внешние (по отношению к промышленному предприятию) организации и не ограничиваться внутрифирменным управлением. Доказан вид функции прибыли, определен ее максимум, найденный в угловых точках области допустимых значений. Полученные результаты могут быть использованы промышленным предприятием, а также страховыми компаниями и организациями по утилизации загрязнений, участвующими в управлении промышленным риском.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sherali H. D., Alameddine A., Glickman T. S. Biconvex models and algorithms for risk management problems. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*. 1994. Vol. 14. №. 3-4. P. 197-228.

2. Gorecki S. et al. Risk management and Distributed Simulation in Papyrus tool for Decision Making in industrial context. *Computers & Industrial Engineering*. 2019. Vol. 137. P. 106039.

3. Choi T. M., Chan H. K., Yue X. Recent development in big data analytics for business operations and risk management. *IEEE transactions on cybernetics*. 2016. Vol. 47. №. 1. P. 81-92.

4. Dudin M. N. et al. Methodology of analysis and assessment of risks of the operation and development of industrial enterprises. *Calitatea*. 2016. Vol. 17. №. 153. P. 53.

5. Krokhina J. A. et al. Environmental risk management system projecting of industrial enterprises. *Ekoloji*. 2018. Vol. 27. №. 106. P. 735-744.

6. Donald Hay, Derek Morris The Theory of Industrial Organization. Oxford University Press; Revised edition. – 1991. 700 p.

7. Walters A. A. Production and Cost Functions: An Econometric Survey. Econometrica. The Econometric Society. – 1963. 66 p.

8. **Хохлов Н.В.** Управление риском: учебн. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. 239 с.

9. **Дедков В.К.** Принципы минимизации затрат на повышение надежности сложной системы при ее проектировании // Труды Международного симпозиума «Надежность и качество», 2012. С. 89-92.

10. Elena Rostova, Mikhail Geras'kin Optimization of Costs Function for Prevention of Firms' Industrial Risks With Penalties. *Proceedings of the Third Workshop on Computer Modelling in Decision Making* (*CMDM 2018*). Vol 85. P. 26-30. https://doi.org/10.2991/cmdm-18.2019.5

---

**M.I. Geraskin, E.P. Rostova** (Samara National Research University, Samara). **Optimization of insurance rates and waste recycling in industrial risk management**

*Abstract.* We have formulated the task of determining the rates of an insurance company and the price of the waste utilization firm involved in the management of industrial risks. The problem is solved according to the criterion of maximizing the profit of an industrial enterprise under the following condition: the insurer and the waste utilization firm operate in a monopolistic competition.

М. И. ГЕРАСЬКИН
(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОВЕСИЙ ОЛИГОПОЛИИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЯХ СПРОСА И ИЗДЕРЖЕК АГЕНТОВ НЕФТЯНОГО РЫНКА РОССИИ

*Рассматривается проблема анализа олигополии при нелинейных функциях рыночного спроса и издержек фирм. На основе трендов динамики рынка сырой нефти России исследованы равновесия Курно и Штакельберга в случае одного или нескольких лидеров. Основные инсайты исследования следующие. Во-первых, несмотря на государственное регулирование, рынок сырой нефти России характеризуется убывающей нелинейной кривой спроса. Во-вторых, моделирование показало, что равновесие в игре борьбы за лидерство по Штакельбергу наиболее близко к фактическим показателям рынка, что позволяет сделать заключение об асимметрии информированности фирм. В-третьих, в равновесиях с лидерами второго уровня найдены два аттрактора, т.е. нелинейная модель допускает бифуркации.*

**Введение.** Линейная модель выбора оптимальных действий агентов рынка олигополии, в которой обратная функция спроса и функции издержек агентов являются линейными, широко использовалась [1-5] для анализа равновесий в игре олигополистов, поскольку эта модель допускает простое аналитическое решение в виде равновесия Курно-Нэша [6,7]. Нелинейная модель выбора оптимальных действий, в которой обратная функция спроса линейная, а функции издержек агентов являются нелинейными, использовалась реже [8-11], так как не позволяет найти аналитическое решение. В этом случае особенные сложности возникают при вычислении равновесия с лидерством по Штакельбергу [12].

Вследствие вычислительных сложностей моделирования еще более редко исследователи фокусируются на анализе модели олигополии с нелинейной функцией спроса. Между тем реальные рынки нередко предлагают ситуации с нелинейными функциями спроса и издержек фирм. Недавние исследования доказали интересные последствия нелинейности.

В случае гиперболической функции спроса установлена [12] бифуркация единственной фиксированной точки Курно, которая является резонансным случаем бифуркации Неймарка-Сакера [14,15], а когда фиксированная точка Курно нестабильна, могут существовать устойчивые циклы любого периода. Анализ гиперболической функции спроса для случая дуополии [16,17] на фазовом портрете выпусков фирм продемонстрировал периодические циклы и хаотические аттракторы, между которыми возникают бифуркации. В случае экспоненциальной функции спроса, исследования австралийского рынка электроэнергии также показали высокую степень волатильности цен [18]. В случае тригонометрической функции спроса возможна сложная динамика с двумя типами бифуркации: каскад раздвоенной бифуркации и хаоса и бифуркации Неймарка-Сакера и, как следствие, хаоса [19]. Степенные дробно-рациональные функции спроса могут вести к дестабилизации равновесия Нэшу и бифуркациям, которые вызывают качественные изменения в структуре аттракторов и их областей [20]. Анализ гиперболической функции спроса показал, что возникает множество сложных динамических сценариев, и хаотические траектории, а также мультистабильность, когда сосуществуют различные аттракторы [21]. Интересно, что в случае линейно-неоднородных по выпускам функций спроса фирм [22] были продемонстрированы бифуркации точек равновесия, вариации параметров модели ведут к хаосу, а потеря устойчивости может быть вызвана бифуркациями удвоения периода.

Наше исследование имеет следующие цели. Во-первых, сформулировать ситуацию на внутреннем нефтяном рынке России как игровую модель олигополии. Во-вторых, вычислить равновесие Курно в этой игре, а также равновесия с лидерством по Штакельбергу первого и второго уровней на основе формул [23]. В-третьих, проанализировать последствия нелинейности с точки зрения возможности нескольких аттракторов.

**Постановка задачи.** Модель выбора оптимальных рыночных стратегий (объемов продаж) фирм на рынке олигополии включает в себя целевую функцию (прибыль фирмы)

$$\Pi_i = P(Q)Q_i - C_i(Q_i), Q_i \geq 0, i = 1,\ldots,I, \quad (1)$$

обратную функцию спроса

$$P(Q) = AQ^{\alpha},\ A > 0,\ \alpha < 0,\ |\alpha| < 1,\ Q = \sum_{i=1}^{I} Q_i\ , \tag{2}$$

и степенные функции издержек агентов

$$C_i\ (Q_i) = C_{Fi}\ + B_i\, Q_i^{\beta_i}\ ,\ C_{Fi}\ > 0,\ B_i\ > 0,\ 0 < \beta_i\ < 2,\ i = 1,...,\ I\ , \tag{3}$$

где $Q_i, \Pi_i$ – объем продаж и прибыль *i*-го агента; *I* – число агентов рынка; $P(Q)$ – обратная функция спроса на товар; *A*, α – коэффициенты функции спроса; $B_i, \beta_i, C_{Fi}$ – коэффициенты функций издержек *i*-го агента. Параметры функций издержек имеют следующий смысл: $C_{Fi}$ – постоянные издержки, $B_i$ – предельные издержки при $\beta_i = 1$, $\beta_i$ – характеризует эффект расширения масштаба, положительный $\beta_i \in (0,1)$ или отрицательный $\beta_i \in (1,2)$.

Рассмотрим следующие игровые ситуации, формулы вычисления равновесия в которых были доказаны в [23].

1. Случай равновесия Курно, которое соответствует неинформированности всех агентов (последователей) о действиях окружения; обозначим число последователей $I_0$.

2. Случай равновесия с лидерством по Штакельбергу. В этом случае какой-либо агент (лидер) с номером *k* полагает, что информирован о действиях окружения, т.е. возникает асимметрия предположительной информированности на рынке. Также возможен случай с несколькими лидерами ($I_1$), которые информированы о том, что остальные агенты являются последователями. В этом случае взаимное реагирование лидеров не предполагается, т. е. по отношению друг к другу лидеры являются последователями.

3. Случай равновесия с двухуровневым лидерством по Штакельбергу. В этом случае из множества агентов-лидеров выделяются агенты-лидеры второго уровня (обозначим число этих агентов $I_2$), информированные о том, что остальные $I_1 = I - I_2 - I_0$ лидеров выбирают действия по реакциям лидеров первого уровня.

Мы рассматриваем задачу вычисления коэффициентов функции спроса (2), функций издержек агентов (3) для нефтяного рынка России и на основе этих данных мы рассчитаем равновесия в случаях 1-3 при различных сочетаниях лидеров и последователей.

**Результаты.** На российском рынке сырой нефти наибольшая доля рынка принадлежит компании Татнефть, поскольку другие компании поставляют на внутренний рынок 2-5% от общих объемов продаж нефти, тогда как Татнефть продает на внутреннем рынке 35-50%. В 2019 г. крупнейшие компании Роснефть, Татнефть и Газпромнефть занимали доли рынка 24,5%, 35,1% и 19,6% соответственно, что в совокупности составляет 79,2%. Следовательно, характеристики этих компаний адекватно выражают тренды и факторы состояния нефтяного рынка России.

На основе данных статистики крупнейших фирм нефтяного рынка России (НК Роснефть, Татнефть и Газпромнефть)[1] мы исследуем объемы продаж сырой нефти на внутреннем рынке, цены и издержки в 2009-2019 гг. по кварталам (44 периода). На основе данных о выручке фирм мы рассчитываем средневзвешенную цену. Используя метод наименьших квадратов, мы определим регрессионные модели функции спроса (2) и функций издержек агентов (3) в следующем виде:

$$P(Q) = \begin{cases} 9236\ Q^{-0.91}, t = 2009,...,2012, \\ 264196770\ Q^{-1.96}, t = 2013,...,2019, \end{cases} \tag{4}$$

$$C_1(Q_1) = 1.61Q_1^{1.13}, C_2(Q_2) = 2.65Q_2^{1.15}, C_3(Q_3) = 1.04Q_1^{1.15}, \tag{5}$$

где *t* - год, и введена следующая индексация агентов: 1 – НК Роснефть, 2 – Татнефть, 3 – Газпромнефть. Статистические характеристики регрессионных моделей (8), (9) высокие: коэффициенты детерминации функций спроса равны 0,66-0,71, функций издержек 0,95, за исключени-

[1] www.rosneft.ru, www.tatneft.ru, www.gazprom-neft.ru

ем функции компании Татнефть, для которой этот коэффициент равен 0,65; расчетное значение критерия Фишера не менее чем в 4 раза превышает табличное значение при уровне значимости 0,05. Это подтверждает адекватность и достоверность сформированных моделей.

Анализ динамических рядов средневзвешенных цен и объемов продаж нефти на российском рынке показал два убывающих тренда, первый их которых описывает динамику цены нефти в 2009-2012 гг., а второй – в 2013-2019 гг. Сравнительный анализ трендов издержек агентов показывает, что кривая издержек Татнефть проходит ниже кривой издержек Газпромнефть, которая, в свою очередь, расположена ниже кривой НК Роснефть. Следовательно, относительное преимущество по издержкам имеет Татнефть, затем Газпромнефть, а НК Роснефть проигрывает по издержкам первым двум фирмам.

Расчетное равновесие Курно имеет существенное отклонение от реальных показателей рынка в 2019 г. Поэтому фирмы не следуют классическим стратегиям последователей, т.е. имеет место асимметрия информированности. Анализ равновесия Курно показывает, что распределение объемов продаж соответствует относительному преимуществу по издержкам, т.е. предсказания по модели согласуются с логикой.

В игре борьбы за лидерство по Штакельбергу, в случае если все три агента являются лидерами первого уровня, распределение объемов продаж наиболее близко к фактическому распределению рынка, т.к отклонение расчетного значения суммарного объема продаж от реального значения в 2019 г. составляет 18%. Следовательно, асимметрия информированности агентов выражается в том, что поведение фирм следует принципу восприятия контрагентов как последователей.

Наиболее интересные результаты получены в случае игры с лидерами второго уровня. В частности, в игре лидером второго уровня является Татнефть, а лидерами первого уровня Роснефть и Газпромнефть, найдено два аттрактора, в каждом из которых лидер второго уровня (Татнефть) имеет преимущество по объему продаж и получает наибольшую максимальную прибыль. Во втором аттракторе суммарный объем продаж агентов ниже, а расчетная равновесная цена выше, в результате чего прибыль лидера второго уровня выше, чем в первом. Следовательно, в этом случае имеют место бифуркации траектории нащупывания равновесия. Кроме того, во втором аттракторе отклонение расчетного значения суммарного объема продаж от реального значения в 2019 г. составляет 20%, отклонение по равновесной цене 48-63%, отклонение по выручке 20%, 1% и 69% по агентам 1, 2 3 соответственно. Поэтому второй аттрактор также достаточно близко соответствует реальному рынку, как и игра борьбы за лидерство с лидерами первого уровня.

**Заключение**. Мы исследовали игровые модели олигополии при нелинейных функциях рыночного спроса и издержек фирм. Рассмотрены такие модели поведения агентов, как последователи, т.е. агенты, соответствующие гипотезе Курно, а также лидеры по Штакельбергу первого и второго уровня. Статистический анализ рынка сырой нефти России показал наличие убывающей нелинейной кривой спроса. Следовательно, оказалось возможным моделирование состояний этого рынка в виде агрегативной игры с нелинейными функциями полезности агентов.

Главное отличие равновесий, рассчитанных в этом исследовании в случае нелинейной кривой спроса, от равновесий в случае линейной зависимости спроса [23] проявляется в неединственности решений игры в условиях лидеров второго уровня. Поскольку в игре существует как минимум два аттрактора, то не исключена возможность существования других аттракторов, при переходе между которыми возникают бифуркации. Таким образом, моделирование на основе статистики реального рынка подтвердило теоретические выводы, сделанные ранее на основе тестовых параметров модели, которые описаны в обзор литературы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karmarkar U.S., Rajaram K. Aggregate Production Planning for Process Industries under Oligopolistic Competition. *European Journal of Operational Research*. 2012. Vol. 223 (3). P. 680–689.
2. Ledvina A., Sigar R. Oligopoly Games under Asymmetric Costs and an Application to Energy Production. *Mathematics and Financial Economics*. 2012. Vol. 6(4). P. 261 – 293.
3. Currarini S., Marini M.A. Sequential Play and Cartel Stability in Cournot Oligopoly. *Applied Mathematical Sciences*. 2013. (1-4). P. 197 – 200.

4. Vasin A. Game-theoretic Study of Electricity Market Mechanisms. *Procedia Computer Science*. 2014. Vol. 31. P. 124 – 132.
5. Sun F., Liu B., Hou F., Gui L., Chen J. Cournot Equilibrium in the Mobile Virtual Network Operator Oriented Oligopoly Offloading Market. *IEEE International Conference of Communications, ICC 2016*. 2016. Vol. 7511340.
6. Nash J. Non-cooperative Games. *The Annals of Mathematics*. 1951. Vol. 54. P. 286–295.
7. Cournot A.A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960.
8. Naimzada A.K., Sbragia L. Oligopoly Games with Nonlinear Demand and Cost Functions: Two Boundedly Rational Adjustment Processes. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006. Vol. 29 (3). P. 707 – 722.
9. Askar S., Alnowibet K. Nonlinear Oligopolistic Game with Isoelastic Demand Function: Rationality and Local Monopolistic Approximation. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2016. Vol. 84. P. 15 – 22.
10. Naimzada A., Tramontana F. Two Different Routes to Complex Dynamics in an Heterogeneous Triopoly Game. Journal of Difference Equations and Applications. 2015. Vol. 21 (7). P. 553 – 563.
11. Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F. Nonlinear Dynamics and Global Analysis of a Geterogeneous Cournot Duopoly with a Local Monopolistic Approach Versus a Gradient Rule with Endogenous Reactivity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2015. Vol. 23 (1 – 3). P. 245 – 262.
12. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934).
13. Tramontana F , Gardini L , Puu T . Global bifurcations in a piecewise-smooth Cournot duopoly game. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2010. Vol. 43(1-12). P. 15-24.
14. Neimark Ju.I. On some cases of periodic motions depending on parameters. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1959. Vol. 129. P. 736-739.
15. Sacker R. On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. Report IMM-NYU. 1964. Vol. 333. New York University.
16. Askar, S.S., Alshamrani, A.M., Alnowibet, K. Dynamic Cournot duopoly games with nonlinear demand function. *Applied Mathematics and Computation*. 2015. Vol.259 (20834). P. 427-437.
17. Askar, S.S., Al-khedhairi, A. On complex dynamic investigations of a piecewise smooth nonlinear duopoly game. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. Vol. 139. P. 110001.
18. Masoumzadeh, A., Nekouei, E., Alpcan, T. Impact of a coal power plant closure on a multi-region wholesale electricity market. *2017 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference Europe, ISGT-Europe 2017 - Proceedings 2018-January*. 2018. P. 1-6.
19. El-Wakeel, M.F., Askar, S.S., Alkhunayfir, N.A. Toward investigation of the complex behavior of a monopoly game. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. 2016. Vol. 13(11). P. 8552-8559.
20. Agliari A., Naimzada A.K., Pecora N. Nonlinear dynamics of a Cournot duopoly game with differentiated products. *Applied Mathematics and Computation*. 2016. Vol. 281. P. 1–15.
21. Baiardi L.C., Naimzada A. Imitative and best response behaviors in a nonlinear Cournotian setting. *Chaos*. 2018. Vol. 28(5). P. 055913.
22. Peng Y , Lu Q , Xiao Y , Wu X . Complex dynamics analysis for a remanufacturing duopoly model with nonlinear cost. *Physica A*. 2019. Vol. 514. P. 658–70.
23. Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г. Моделирование структур рынка олигополии при нелинейных функциях спроса и издержек агентов. *Проблемы управления*. 2015. Т. 6. С. 10-22.
24. Жукаускас В.В., Шелкоплясова Н.И., Бабаян Г.Д. Нормативно-правовое регулирование нефтяной отрасли РФ в рамках обеспечения политики экономической безопасности. *Вести научных достижений. Экономика и право*. 2020. Т. 3. С. 120-123.


---

**M.I. Geraskin** (Samara National Research University). **Modeling of oligopoly equilibria in case of nonlinear functions of demand and costs of agents of the Russian oil market**

*Abstract.* The problem of an oligopoly with nonlinear demand function and firms' costs function is considered. On the basis of trends in the Russian oil market, Cournot and Stackelberg equilibria are investigated in the case of one or several leaders. The main research insights are as follows. First, despite government regulation, the Russian oil market is characterized by the declining non-linear demand curve. Second, the modeling showed that the Stackelberg equilibrium in the game of struggle for leadership is closest to the actual market indicators, which allows us to conclude about the asymmetry of firms' awareness. Third, in equilibria with leaders of the second level, two attractors are found, i.e., the nonlinear model allows bifurcations.

Д. А. НОВИКОВ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

# ПРИНЦИП ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

*Предложен общий подход к декомпозиции взаимодействия управляемых субъектов в организационно-технических системах, позволяющий решать для них независимо задачи достижимости и поиска оптимальной траектории.*

**Введение.** Вопросы о достижимости глобальной цели системы при ограниченной коммуникации (координации) между ее частями традиционно относятся к проблематике *управления многоагентными системами* (см. обзор в разделе 3.2 [1]) и *сетевого управления* (см. обзор в разделе 3.3 [1]). Кроме того, декомпозиция аддитивных по компонентам критериев является предметом *распределенной оптимизации* (см. обзоры в [1, 2, 3]). Однако во всех перечисленных научных направлениях компоненты системы пассивны и однозначно следуют предписанным им алгоритмам поведения.

Ниже рассматривается модель *организационно-технической системы* (ОТС), состоящей из активных (обладающих собственными интересами и способных к стратегическому поведению) субъектов: одного управляющего органа – *центра* - и $n$ управляемых субъектов – *агентов*. Предположим, что центр и агенты разыгрывают *иерархическую игру* $\Gamma_2$ с побочными платежами. Напомним, что игрой $\Gamma_2$ называется игра с фиксированной последовательностью ходов [4], в которой управлением, выбираемым игроком, делающим первый ход (центром), является вектор-функция от наблюдаемых им впоследствии действий игроков, делающих второй ход (агентов) одновременно и независимо, т.е. разыгрывающих при известном управлении игру в нормальной форме [5].

Известно [6], что поиск равновесия Нэша игры агентов является NP-трудной задачей. В рассматриваемой модели это равновесие зависит от искомой вектор-функции управления, поэтому «лобовой» поиск оптимального управления в общем случае невозможен аналитически и очень трудоемок численно. Одним из выходов является попытка декомпозиции задачи управления.

Ниже показано, что такая декомпозиция возможна, причем она не только дает простое и содержательно интерпретируемое аналитическое решение, но и не приводит к снижению эффективности. Модель системы управления описана во втором разделе, принцип декомпозиции – в третьем. Четвертый раздел содержит примеры.

**Модель системы управления.** Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, состоящее из конечного числа *n агентов*. Агент $i \in N$ осуществляет выбор *действия* $y_i \in A_i \subseteq \Re^{m_i}$, его *целевая функция* $f_i(y)$, $f_i: A \to \Re^1$, где $A = \prod_{j \in N} A_j$, а $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A$ зависит в общем случае от вектора действий всех агентов (*ситуация игры*). Центр имеет целевую функцию $F(y)$, $F: A \to \Re^1$.

Пусть управление заключается в установлении центром неотрицательных *побочных платежей* агентам (неотрицательность платежей означает, что центр не может «наказывать» агентов), т.е. *функции выигрыша* имеют соответственно вид: $F(y) - \sum_{i \in N} \sigma_i(\cdot)$ и $f_i(y) + \sigma_i(\cdot)$. Величина $\sum_{i \in N} \sigma_i(\cdot)$ называется «*затратами» центра на управление*, а вектор действий, выбираемых агентами при некотором управлении, называется *реализуемым* последним [5] (т.е. *достижимым* при данном управлении). Рациональность поведения центра и агентов заключается в стремлении максимизировать свои целевые функции.

Обозначим через $y_{-i} = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in \prod_{j \in N \setminus \{i\}} A_j$ *обстановку игры* для $i$-го агента. Определим следующие величины (предположим, что все функции и множества таковы, что все

максимумы и минимумы достигаются): $L_i(y_{-i}) = \max_{y_i \in A_i} f_i(y_i, y_{-i})$, $i \in N$, и для произвольного вектора действий агентов $x \in A$, называемого дальше *планом*, построим позиционное *управление*:

$$\sigma_i(x_i, y) = \begin{cases} L_i(y_{-i}) - f_i(x_i, y_{-i}) + \varepsilon_i, \text{ если } y_i = x_i, \\ 0, \text{ если } y_i \neq x_i, \end{cases}, \ i \in N, \quad (1)$$

где $\{\varepsilon_i \geq 0\}$ - некоторые константы. Обозначим $\varepsilon = \sum_{i \in N} \varepsilon_i$.

Предположим, что имеет место *полная информированность* - все целевые функции и множества допустимых действий агентов являются для всех участников *общим знанием* [5].

Содержательные интерпретации – *организационно-технические системы* (ОТС), распределенные энергетические системы, информационно-телекоммуникационные системы (в качестве «платежей» могут фигурировать финансовые, энергетические, информационные и другие ресурсы; в сетевой системе в качестве виртуального (не имеющего собственной целевой функции) центра может быть выбран любой из агентов).

**Принцип декомпозиции.** Утверждение 1. Управление (1) реализует вектор планов $x \in A$.

Доказательство утверждения 1. Подставив выражение (1) в функцию выигрыша *i*-го агента, получим, что при выполнении плана он получает выигрыш $\max_{y_i \in A_i} f_i(y_i, y_{-i}) + \varepsilon_i$, а при выборе любого другого действия – выигрыш $f_i(y_i, y_{-i})$, который при любой (!) обстановке игры не больше (а при строго положительных значениях $\varepsilon_i$ - строго меньше). •

Напомним, что *доминантной стратегией* $z_i \in A_i$ *i*-го агента, имеющего функцию выигрыша $g_i(\cdot)$, называется его действие, удовлетворяющее следующему условию:

$$\forall y_i \in A_i, \forall y_{-i} \in \prod_{j \in N \setminus \{i\}} A_j \quad g_i(z_i, y_{-i}) \geq g_i(y_i, y_{-i}). \quad (2)$$

Вектор доминантных стратегий агентов (если таковые существуют у всех из них) называется *равновесием в доминантных стратегиях* (РДС) [5].

Утверждение 2. При использовании центром управления (1) $x \in A$ - РДС игры агентов. Если $\varepsilon_i > 0, i \in N$, то это РДС единственно.

Справедливость утверждения 2 обосновывается непосредственной подстановкой выражений (1) в функцию выигрыша *i*-го агента и проверкой справедливости при этом условий (2).

Наличие РДС позволяет говорить о том, что взаимодействие агентов *декомпозировано*, т.е. каждый агент принимает решения независимо от остальных агентов, и центр может управлять каждым из агентов независимо. Поэтому использование в ОТС управлений вида (1) называется *принципом декомпозиции*.

Утверждение 3. При использовании центром управления (1) затраты центра по реализации произвольного вектора планов $x \in A$ как РДС $\varepsilon$-минимальны.

Доказательство утверждения 3. Предположим противное - пусть существует управление $\{q_j(y) \geq 0\}$, реализующее вектор $x \in A$ как РДС игры агентов, и существует агент с номером *i*, такой, что $q_i(x) < \sigma_i(x_i, x) - \varepsilon_i$. Из (1) следует, что

$$q_i(x) < L_i(x_{-i}) - f_i(x_i, x_{-i}) - \varepsilon_i. \quad (3)$$

В силу (2) выполнено:

$$\forall y_i \in A_i \quad f_i(x_i, x_{-i}) + q_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}) + q_i(y_i, x_{-i}). \quad (4)$$

Из (4) следует, что

$$q_i(x) \geq L_i(x_{-i}) - f_i(x_i, x_{-i}) + q_i(y_i, x_{-i}). \quad (5)$$

Из (5) и неотрицательности управления $s_i(\cdot)$ следует, что

$$q_i(x) \geq L_i(x_{-i}) - f_i(x_i, x_{-i}). \quad (6)$$

Из (3) и (6) получаем, что $\varepsilon_i < 0$ - противоречие. •

Утверждение 4. Управление (1) $\varepsilon$-оптимально, а *оптимальный план* имеет вид:

$$x^* = \arg \max_{x \in A} [F(x) + \sum_{i \in N} f_i(x) - \sum_{i \in N} L_i(x_{-i})]. \quad (7)$$

Доказательство утверждения 4. То, что управление (1) $\varepsilon$-оптимально, следует из аддитивности функции выигрыша центра и утверждения 3. Справедливость выражения (7) обосновывается непосредственной подстановкой выражения (1) в функцию выигрыша центра. •

Утверждение 5. Если выполнена *гипотеза благожелательности* - если при нахождении $L_i(y_{-i})$ максимум функции выигрыша агента достигается при нескольких его действиях, то он выберет действие, совпадающее с планом [5]), то оптимально управление (1) с $\varepsilon_i = 0, i \in N$, и планом (7).

Утверждения 1-5 дают оценки ограничений на управления, при которых достижим тот или иной вектор действий агентов.

Выражение (7) имеет следующий содержательный смысл: оптимальный план «эффективен по Парето» - он максимизирует разность между суммой целевых функций всех участников системы (и центра, и агентов) и суммарными потерями агентов от выполнения плана по сравнению с выбором действий, наиболее предпочтительных для каждого из них в отсутствии управления со стороны центра. Действительно, в правой части выражения (7) первое слагаемое – целевая функция центра, второе – сумма целевых функций агентов, а третье слагаемое может интерпретироваться как «затраты на согласование интересов». Поэтому содержательно утверждения 4 и 5 гласят, что оптимальным является вектор действий агентов, максимизирующий сумму целевых функций всех участников с учетом затрат на согласование их интересов.

Для систем «без центра» оптимальный план (7) примет вид:

$$x^* = \arg \min_{x \in A} \sum_{i \in N} \{\max_{y_i \in A_i} f_i(y_i, x_{-i}) - f_i(x)\}, \quad (8)$$

а величина $\sum_{i \in N} \{\max_{y_i \in A_i} f_i(y_i, x^*_{-i}) - f_i(x^*)\}$ является оценкой величины внешнего ресурса, необходимой для реализации оптимального состояния. Оценки вычислительной сложности задач типа (8) приведены в [7].

**Пример 1.** Рассмотрим задачу согласования интересов в *многоэлементной ОТС* [5]. В этой задаче $A_i = \Re^1_+$, а целевая функция $i$-го агента представляет собой взятые с обратным знаком затраты этого агента: $f_i(y) = - c_i(y)$, где при любой обстановке $y_{-i}$ игры $c_i(y)$ – неубывающая по $y_i$ функция, которая принимает неотрицательные значения и $c_i(0, y_{-i}) = 0$.

Легко видеть, что в этом случае $L_i(y_{-i}) \equiv 0$; управление (1) имеет вид:

$$\sigma_i(x_i, y) = \begin{cases} c_i(x_i, y_{-i}) + \varepsilon_i, \text{ если } y_i = x_i, \\ 0, \text{ если } y_i \neq x_i, \end{cases}, \ i \in N,$$

а оптимальный план (7): $x^* = \arg \max_{x \in A} [F(y) - \sum_{i \in N} c_i(x)]$. •

**Пример 2.** Рассмотрим задачу согласования интересов в многоэлементной *динамической ОТС*. Пусть в условиях примера 1 центр и агенты функционируют в течение конечного числа $T$ периодов времени, $A_i = \Re^T_+$, $L_i(\overline{y^{1,t}_{-i}}) \equiv 0$, а целевая функция агента аддитивна по периодам. Тогда управление (1) имеет вид (оптимальная траектории легко ищется методом динамического программирования):

$$\sigma^t_i(\overline{x^{1,t}_i}, \overline{y^{1,t}}) = \begin{cases} c_i(\overline{x^{1,t}_i}, \overline{y^{1,t}_{-i}}) + \varepsilon^t_i, \text{ если } \forall \tau = \overline{1,t} \ \ y^\tau_i = x^\tau_i, \\ 0, \text{ если } \exists \tau: y^\tau_i \neq x^\tau_i, \end{cases}, \ i \in N. \bullet$$

**Заключение.** В [5] описаны методы декомпозиции игры агентов в двухуровневой ОТС с веерной структурой, в динамической ОТС, а также в ОТС с сетевой структурой и в ОТС с распределенным контролем. В [8] эти результаты обобщены на случай, когда одновременно имеются несколько взаимодействующих сетевым и/или иерархическим образом агентов, принимающих решения многократно. Так как в утверждении 1 не используется вид взаимодействия агентов, а в утверждениях 2-5 речь идет о РДС, то из утверждений 1-5 непосредственно следуют все вышеперечисленные результаты о декомпозиции игры агентов, периодов функционирования и структуры ОТС.

Таким образом, «рекламный вариант» приведенных результатов звучит следующим образом – если в ОТС центр может использовать побочные платежи, то в условиях полной информированности управление (1), (7) декомпозирует любое взаимодействие агентов и оптимально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория управления (дополнительные главы). - М.: Ленанд, 2019. – 552 с.
2. **Bertsekas D., Tsitsiklis J.** Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989. – 730 с.
3. **Yang B., Johanson M.** Distributed Optimization and Games: A Tutorial Overview / *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. – Heidelberg: Springer, 2010. P. 109 – 148.
4. **Гермейер Ю.Б.** Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
5. **Новиков Д.А.** Теория управления организационными системами. 3-е изд. – М.: Физматлит, 2012. – 604 с.
6. **Nisan N. et al.** (Eds.) Algorithmic Game Theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 776 p.
7. **Новиков Д.А.** Аналитическая сложность и погрешность решения задач управления организационно-техническими системами // *Автоматика и телемеханика*. 2018. № 5. С. 107 – 118.
8. **Белов М.В.** Согласованное управление многоэлементными динамическими организационными системами. Ч. 1. Динамическая организационная система в составе одного центра и множества агентов // *Проблемы управления*. – 2020. – № 1. – С. 39 – 47. Ч. 2. Многоуровневая динамическая организационная система // *Проблемы управления*. – 2020. – № 2. С. 36 – 46.

---

**D.A. Novikov** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow). **Decomposition Principle in Control of Socio-technical Systems**

*Abstract.* For socio-technical systems the general approach to the decomposition of the interaction of controlled entities is proposed, which allows independent solving of attainability problems and the search for the optimal trajectory.

Е. Я. РУБИНОВИЧ
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПООЧЕРЕДНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ТРЕХ ЦЕЛЕЙ ДВУМЯ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯМИ С КРИТЕРИЕМ ТИПА «ВРЕМЯ»

*На плоскости рассматривается дифференциальная игра двух идентичных преследователей против трех согласованно уклоняющихся игроков (целей), образующих коалицию. Движения игроков простые. Скорости преследователей ограничены единицей, скорости целей – заданной константой меньшей единицы. В начале игры преследователи и цели локализованы в двух разных точках плоскости: преследователи в некоторой точке $P^0$, а цели – в точке $E^0$. Игра с полной информацией. В задачу преследователей входит точечная поимка всех целей за минимальное время. Задача уклоняющихся игроков противоположна.*

**Введение.** Рассматриваемая постановка принадлежит к задачам преследования-уклонения на плоскости, в которых преследователей меньше, чем целей. В таких задачах, как правило, используются традиционные в теории дифференциальных игр критерии типа «время» или типа «промах». При простых движениях игроков задачи с одним преследователем против коалиции их двух целей, одна из которых могла быть ложной, исследованы в [1,2] для критериев полное время преследования всех целей и среднее время преследования истинной цели [3]. В последнем случае считались заданными вероятности классификации целей (истинная или ложная). В [4] решена аналогичная задача с критерием промах по истинной цели. Следует подчеркнуть, что решения упомянутых задач поочередного преследования обладают общей спецификой, а именно: при определенных начальных позициях игроков этапу собственно поочередного преследования всегда предшествует этап совместного проследования одним преследователем группы целей. Физический смысл наличия этого этапа состоит в том, что в течение совместного преследования преследователь держит цели в условиях дополнительной неопределенности относительно предстоящей последовательности встреч, которая выбирается преследователем случайным образом в момент окончания этапа совместного преследования. Таким образом, стратегия преследователя – смешанная.

В предлагаемом докладе два преследователя, стартующих из какой-то одной точки $P^0$, должны за минимальное время переловить (точечно) трех одинаковых убегающих, стартующих из какой-то другой точки $E^0$ и имеющих противоположные интересы. Движения игроков простые. Игра с полной информацией. Найдены оптимальные траектории игроков и показано, что в отличие от упомянутой выше аналогичной постановки «один против двух» [2,3], в данной игре этап совместного преследования отсутствует.

**Постановка задачи.** На плоскости рассматривается дифференциальная игра преследования-уклонения двух преследователей $P_1$ и $P_2$ против трех согласованно уклоняющихся идентичных целей $E_1$, $E_2$ и $E_3$, имеющих одинаковые максимальные скорости, ограниченные заданной константой $\beta < 1$. Движения игроков простые. Скорости преследователей ограничены единицей. Платой служит время точечной поимки преследователями всех целей.

Предполагается, что в начальный момент $t_0 = 0$ все три цели находятся в одной точке $E^0$ оси $OX$ на расстоянии $\varrho_0 = 1$ от преследователей, расположенных в точке $P^0$, совпадающей с началом координат $O$ некоторой декартовой системы координат $XOY$.

Через $Z_{ji}(t)$ обозначим двумерный вектор направленный в момент $t$ от $P_i$ к цели $E_j$, $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3)$. Индекс 3 закрепим за последней по порядку преследования целью, а индекс 1 – за первой. Пусть $T_i$ – момент встречи игроков $P_i$ и $E_i$, а $T$ – момент окончания игры. В предположении $T_1 \le T_2$ математическая модель задачи имеет следующий вид.

*Уравнения движения игроков* (аргумент $t$ опущен):

$$\begin{array}{l|l|l} t\in[0,T_1] & t\in[T_1,T_2] & t\in[T_2,T] \\ \dot Z_{11}=v_1-u_1 & \dot Z_{11}=0 & \dot Z_{11}=0 \\ \dot Z_{31}=v_3-u_1 \quad ; & \dot Z_{31}=v_3-u_1 \quad ; & \dot Z_{31}=v_3-u_1 \quad . \\ \dot Z_{22}=v_2-u_2 & \dot Z_{22}=v_2-u_2 & \dot Z_{22}=0 \\ \dot Z_{32}=v_3-u_2 & \dot Z_{32}=v_3-u_2 & \dot Z_{32}=v_3-u_2 \\ \dot Z=1 & \dot Z=1 & \dot Z=1 \end{array}$$

*Начальные условия*:

$$Z_{11}(0)=Z_{22}(0)=Z_{31}(0)=Z_{32}(0)=z^0=\{1,0\},\quad Z(0)=0.$$

*Поверхности разрыва правых частей уравнений движения*:

$$Z_{11}(T_1)=0,\quad Z_{22}(T_2)=0.$$

*Фазовые ограничения*:

$$|Z_{31}|\ge|Z_{11}|,\quad |Z_{32}|\ge|Z_{22}|.$$

*Терминальное условие*:

$$|Z_{31}(T)|\cdot|Z_{32}(T)|=0.$$

*Ограничения на управления*:

$$P_i:\quad |u_i|\le 1,\qquad E_j:\quad |v_j|\le\beta<1.$$

*Критерий (плата)*:

$$G=Z(T)\to\min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2,v_3}.$$

**Решение задачи.** Поставленная задача решается применением принципа максимума Л.С.Понтрягина для задач с игровой ситуацией [5]. При этом устанавливаются следующие факты.

1. На интервалах $[0,T_1]$, $[T_1,T_2]$, $[T_2,T_3]$ игроки движутся вдоль прямых с максимальными по модулю скоростями.
2. Движения игроков симметричны относительно оси $OX$.
3. Движение цели $E_3$ осуществляется вдоль оси $OX$.
4. Имеет место равенство моментов встреч: $T_1=T_2$.
5. Этап совместного преследования отсутствует.

Утверждения 1–5 определяют структуру оптимальных траекторий игроков (рис. 1). На рис. 1: $P^0$ и $E^0$ – точки старта преследователей и целей соответственно, $P_1^{T_1}=E_1^{T_1}$ и $P_2^{T_2}=E_2^{T_2}$ – точки встреч с первой и второй целями соответственно, $P^T=E_3^T$ – точка поимки преследователями третьей цели. Точка $C=\{\beta^2/(1-\beta^2),0\}$ – центр окружности Апполония (геометрического места точек встреч игроков при параллельном сближении) радиуса $R=\beta/(1-\beta^2)$.

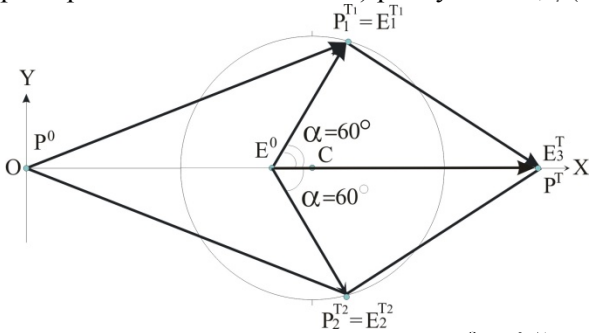



Рис. 1. Оптимальные траектории игроков при $\beta=0.5$.

Из рис. 1 видно, что преследователи с момента $t_0=0$ сразу переходят на поочередное преследование целей $E_1$ и $E_2$ по траекториям параллельного сближения. После момента $T_1=T_2$ преследователи одновременно разворачиваются на поимку цели $E_3$, совершая своего рода «обходной» маневр, не позволяющий цели $E_3$ покинуть ось $OX$. Оказывается справедлива следующая теорема.

*Теорема 1.* Углы $\alpha$ разбегания целей $E_1$ и $E_2$ при любых значениях $\beta$ постоянны и равны $60^o$.

*Доказательство.* Зная структуру оптимальных траекторий игроков (кусочная прямолинейность и симметричность относительно оси $OX$), легко вывести в явном виде значения критерия $G$, как функцию косинуса $c$ угла $\alpha$ разбегания целей $E_1$ и $E_2$:

$$G(c) = \frac{1 - \beta^2 c + \beta\sqrt{2(1-c) - \beta^2(1-c^2)}}{\sqrt{1-\beta^2(1-c^2)} - \beta c},$$

где $c = \cos\alpha$. Решение уравнения $dG(c)/dc = 0$ дает корень $c^o = 1/2$. Откуда $\alpha^o = \pm 60^o$. Теорема 1 доказана.

**Заключение.** Полученные результаты могут быть распространены на случай, когда из трех целей только одна является истинной, а две другие – ложные с заданными вероятностями классификации истинной и ложной цели. Преследователям в этом случае требуется минимизировать математическое ожидание времени поимки истинной цели. Однако в такой постановке задача допускает лишь численное решение.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Ольшанский В.К., Рубинович Е.Я.** Простейшие дифференциальные игры преследования системы из двух объектов. *Автомат. и телемех.* 1974. № 1. С. 24–34.
2. **Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.** Простейшая дифференциальная игра поочередного преследования. *Автомат. и телемех.* 1980. № 8. С. 5–15.
3. **Rubinovich E.Ya.** Alternate Pursuit of two Targets, one of which is a False. *Proc. Int. Conf. "Stability, Control, Differential Games"* (SCDG2019). Berlin: Springer Int. Publ., 2020. P. 107–116**.**
4. **Рубинович Е.Я.** Дифференциальная игра поочередного преследования с критерием «Промах по истинной цели» // *Известия ЮФУ. Технические науки.* 2019. № 1(203). С. 165–177.
5. **Летов А.М.** Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969, – 360 с.


---

**E.Ya.Rubinovich** (Trapeznikov Institute of control sciences of Russian academy of sciences, Moscow). **Differential game of alternate pursuit three targets by two pursuers with a "Time" criterion.**

*Abstract.* On the plane, we consider the differential game of two identical pursuers against three consistently evading players (targets) forming a coalition. Players' movements are simple. The speed of the pursuers is limited by a unit, and the speed of the targets is limited by a given constant of less than one. At the beginning of the game, the pursuers and targets are localized at two different points on the plane: the pursuers at a certain point *P0*, and the targets at a point *E0*. A game with a complete information. The task of the pursuers is to pinpoint all the targets in the shortest possible time. The task of evading players is the opposite.

Д. А. КОСЯН, Л. А. ПЕТРОСЯН
(Санкт-Петербургский государственный университет)

# ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР НА ГИПЕРГРАФЕ

*Рассматривается кооперация в играх с коммуникационной структурой заданной гипеграфом. Коммуникационные возможности игроков описываются гиперграфом, в котором вершинами являются игроки, а гиперребрами - взаимодействующие подгруппы игроков. На выигрыш каждого игрока влияют действия других игроков, в зависимости от расстояния между ними на гиперграфе. Предложен новый подход к построению характеристической функции для таких игр. Новый подход не требует использования операций maxmin, что существенно упрощает вычисления. Доказано, что построенная характеристическая функция удовлетворяет свойству выпуклости.*

**Введение.** Коммуникационная структура, заданная гиперграфом, является расширением подобной структуры, определенной графом, где каждое гиперребро может содержать более двух игроков. Гиперребро можно описать как модель для групп людей входящих в различные команды, компании и т.д. Также хорошим примером для применения подобной модели могут служить социальные сети. В современных реалиях любой чат может быть представлен гиперребром. Таким образом кооперацию между клубами, ассоциациями или различными группами в социальных сетях можно описать с помощью кооперативной игры на гиперграфе. Решения для такого класса игр были изучены в работах [1], [2].

**Постановка задачи.** Гиперграф это пара $(N, \mathcal{H}), \mathcal{H} \subseteq \{H \in 2^N \mid |H| \geq 2\}$, где $N$ это конечное множество, а $\mathcal{H}$ заданное множество подмножеств $N$. Мощность множества $H$ должна быть больше или равна двум. Отметим, что когда размерность всех подмножеств равна двум, такая структура будет графом. $H \in \mathcal{H}$ будем называть гиперребром, а элементы множества $N$ вершинами.

Расстоянием между двумя вершинами будем называть количество гиперребер в кратчайшем пути между гиперребрами содержащими эти вершины. Вершины, находящиеся на расстоянии $k$ от вершины $i$ будем называть соседями этой вершины с уровнем $k$.

В условиях игры, множество вершин $N$ гиперграфа задается множеством игроков. Таким образом $N := \{1, \dots, n\}$ является множеством игроков, где каждый игрок представлен вершиной. Назовем игроков связанными, если существует путь между гиперребрами, в которых они находятся.

Зададим функцию выигрыша для каждого игрока $i$ следующим образом:

$$K_i(u) = \sum_{m=1}^{l_i} \sum_{j \in N_i^m} \delta^{m-1} h_i^j(u_i, u_j), \tag{1}$$

$$\delta \in (0,1), \qquad h_i^j(u_i, u_j) \geq 0, \qquad i, j \in N$$

где: $l_i$ расстояние до самого удаленного соседа для игрока $i$, $N_i^m$ множество соседей вершины $i$ уровня $m$, $\delta$ - дискаунт фактор и $h_i^j(u_i, u_j)$ функция дохода игрока $i$ при взаимодействии с игроком $j$ и выбранных ими соответственно стратегий $u_i$ и $u_j$.

Как видно из определения функции выигрыша, выигрыш игрока $i$ зависит от всех связанных с ним игроков, но дисконтирован в соответствии с расстоянием до них.

Рассмотрим кооперативную версию данной игры. Пусть все игроки выбирают стратегии, которые максимизируют суммарный выигрыш.

$$\max_u \sum_{i \in N} K_i(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i \in N} K_i(u_1^*, \dots, u_n^*) \tag{2}$$

Характеристическая функция в классической кооперативной теории [3] имеет ряд недостатков для представленного класса игр. Одним из них является сложность вычисления такой функции, так как она требует разрешения задачи максимина. В работе предлагается иной подход к определению характеристической функции.

Для каждой коалиции $S$ построим сужение гиперграфа над $S$. Если игрок $i$ не входит в коалицию он не будет взаимодействовать с игроками из нее, также он не будет выступать в качестве связующего между игроками из $S$. Таким образом, мы можем просто удалить игрока $i$ из коммуникационной структуры. Для каждой коалиции $S$ новая структура получается путем удаления всех игроков, которые не входят в $S$.

Зададим характеристическую функцию следующим образом:

$$\vartheta(\emptyset) = 0$$
$$\vartheta(\{i\}) = 0$$
$$\vartheta(S) = \sum_{i \in S} \sum_{m=1}^{l_i^S} \sum_{j \in S_i^m} \delta^{m-1} h_i^j(u_i^*, u_j^*) \quad (3)$$
$$\vartheta(S) = \sum_{i \in N} \sum_{m=1}^{l_i} \sum_{j \in N_i^m} \delta^{m-1} h_i^j(u_i^*, u_j^*) \quad (4)$$

где: $l_i^S$ – расстояние до самого удаленного соседа входящего в коалицию $S$ для игрока $i$, $S_i^m$ – множество соседей игрока $i$ входящих в $S$.

Данная форма характеристической функции имеет сходство с предложенной в работе [4].

Как видно из определения, значение характеристической функции для каждой коалиции аддитивно зависит от попарного взаимодействия игроков из $S$, при выборе ими кооперативных стратегий.

**Заключение.** Такой вид характеристической функции значительно упрощает вычисления для последующего решения игры. Также было доказано, что данная функция выпукла, что гарантирует попадание вектора Шепли в С-ядро и С-ядро игры непустое.

ЛИТЕРАТУРА


1. **van den Nouweland A., Borm P. Tijs S.** Allocation rules for hypergraph communication situations. Int. J. Game Theory. 1992. Vol. 20. P. 255–268.
2. **Shan E., G. Zhang, X. Shan,** The degree value for games with communication structure. Int. J. Game Theory. 2018. Vol. 47. P. 857–871.
3. **Von Neumann J., Morgenstern O.** Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press. 1994.
4. **Булгакова М.Ф., Петросян Л.А.** Об одной многошаговой неантагонистической игре на сети. Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.10. Прикл. матем. Информ. Проц. Упр., 2019. Vol. 15 С.603–615. Наука, 1985. С. 57–59.


---

**D.A.Kosian, L.A.Petrosyan** (Saint-Petersburg State University). **Characteristic function for cooperative games of hypergraph**

*Abstract.* Cooperation in the games with hypergraph communication structure is considered. As usual in cooperative game theory, to define the allocation rule, the characteristic function is used. The communication possibilities are described by the hypergraph in which the nodes are players and hyperlinks are the communicating subgroups of players. The payoff of each player is influenced by actions of other players dependent from a distance between them on hypergraph. The new approach for constructing the characteristic function in the game is proposed. This approach does not require the use of maxmin operations which substantially simplifies the calculations. It is proved that the constructed characteristic function satisfies the convexity property.

Е.З. МОХОНЬКО
(ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)

# ОПТИМУМ ПО САЛЕЙТЕРУ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

*Достаточные условия существования оптимальных по Слейтеру стратегий формулируются с использованием понятия стабильного моста. Это позволило найти дискретный режим получения информации о порожденных оптимальными стратегиями траекториях.*

**Введение.** Данная работа посвящена поиску оптимального режима получения информации в многокритериальной дифференциальной игре. Многокритериальные динамические модели принятия решений на основе дискретной информации являются обычно более точным отображением реальности по сравнению с однокритериальными моделями, в которых используется непрерывно поступающая информация. Так что тема работы важна и актуальна.

Ряд математиков [1], [2] рассмотрел игровые модели, в которых дискретная информация, получаемая в специально подобранные моменты времени, оказывалась столь же эффективной, что и информация, получаемая непрерывным образом. Многокритериальные дифференциальные игры тоже уже рассматривались, например, в [3].

В данной работе соединены эти два направления. В этом ее новизна.

Представление одних и тех же структур оптимальных решений может быть сделано поразному.

Так, например, в [4] структура равновесия по Нэшу в дифференциальной игре представлена с использованием дельта - трубочки. В [1] для цели поиска оптимальных режимов получения информации в описании оптимального решения оказалось удобнее пользоваться конструкциями пересечения стабильных мостов. В данной работе, в отличие от [4], структуры различных оптимальных по Слейтеру решений представлены тоже с использованием стабильных мостов.

Даны определения максимального, минимального и гарантированного решения по Слейтеру. Найдены достаточные условия их существования в позиционных стратегиях и построены эти оптимальные решения. То же самое сделано и для $r$ - стратегий. $r$ - стратегии позволяют получать информацию как дискретным, так и непрерывным способами.

Во всех определениях оптимальных решений по Слейтеру присутствует требование единственности порождаемого стратегиями движения. В оптимальных $r$ - стратегиях получение информации об этом движении дискретно. Рассмотрен пример.

Так достигается цель данной работы – найти дискретный режим получения информации о траектории, порождаемой гарантированным по Слейтеру решением.

**Гарантированное решение в позиционных стратегиях.** Рассмотрим многокритериальную задачу принятия решений при неопределенности

$$< \bar{U}, \bar{V}, (I^1(u,v) = g^1\left(x(T)\right), ..., I^N(u,v) = g^N\left(x(T)\right) > ,$$

$$\dot{x} = f\left(x,t,u,v\right), t_0 \le t \le T , \tag{1}$$

$$x(t_0) = x^0 , \tag{2}$$

$$u \in P , v \in Q ,$$

$$I^1(u,v) = g^1\left(x(T)\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \; I^N(u,v) = g^N\left(x(T)\right).$$

есь $x$ - $n$ - мерный вектор состояния, $u$ и $v$ - $p$ - и $q$ - мерные вектор – функции. $u$ - управление, значения которого выбираются лицом, принимающим решения (ЛПР), с целью сделать как можно **меньше** $N$ своих функций целей $I^1(u,v) = g^1\left(x(T)\right), \ldots, I^N(u,v) = g^N\left(x(T)\right)$, при том, что неопределенность (помеха) $v$ может быть любой, $v \in Q$. $g^1\left(x(T)\right)$, …, $g^N\left(x(T)\right)$ непрерывны.

$N$ - количество компонент в вектор - функции цели.

Множества $P$ и $Q$ - компактны в соответствующих векторных пространствах. Вектор-функция $f(x,t,u,v)$ непрерывна по всем своим аргументам и удовлетворяет ограничениям из [5]. Выполняется условие существования седловой точки в маленькой игре [5].

Множеством допустимых стратегий ЛПР и помехи $\bar{U},\bar{V}$ является множество измеримых по всем своим аргументам позиционных $u(x,t), v(x,t)$ и программных $u(t), v(t)$ управлений, удовлетворяющих включению $u \in P$, $v \in Q$, а также $r-$стратегии $\bar{u}, \bar{v}$ [1]. Используется формализм ломаных Эйлера [5] и модифицированных А.Ф.Кононенко движений [4].

$X[t*, x*, u(x,t), v(x,t)]$ - множество движений, исходящих из $x*, t*$, если ЛПР применяет стратегию $u(x,t)$, а стратегия неопределенности описывается $v(x,t)$. $X[t*, x*, u(x,t)]$ - множество движений, исходящих из $x*, t*$, если ЛПР применяет стратегию $u(x,t)$. И мы не интересуемся, из каких соображений выбирает свое управление помеха. $X[t*, x*, u(x,t)] \supset X[t*, x*, u(x,t), v(x,t)] \quad \forall v(x,t)$. Аналогично определяются пучки движений, порожденные $r-$стратегиями $\bar{u}, \bar{v}$.

Пусть $u^* \in \bar{U}$ - некоторая фиксированная стратегия из множества допустимых стратегий ЛПР. Пусть $v^* \in \bar{V}$ - некоторая фиксированная стратегия из множества допустимых стратегий помехи (неопределенности).

Следуя [6] многокритериальной задаче при неопределенности

$$< \bar{U}, \bar{V}, (I^1(u,v) = g^1(x(T)), ..., I^N(u,v) = g^N(x(T)) > \tag{3}$$

поставим в соответствии две многокритериальные задачи

$$< \bar{V}, (I^1(u^*,v) = g^1(x(T)), ..., I^N(u^*,v) = g^N(x(T)) > \tag{4}$$

и

$$< \bar{U}, (I^1(u,v^*) = g^1(x(T)), ..., I^N(u,v^*) = g^N(x(T)) > . \tag{5}$$

Для этих задач, опираясь на [1] ,[3],[4].[6], определим понятия векторного максимума и векторного минимума.

**Максимум по Слейтеру.** Неопределенность $v^S \in \bar{V}$ называется *максимальной Слейтеру* для задачи (4), если выполнены два требования. Они такие.

1. Пара $(u^*, v^S)$ порождает решение $x^0(t), t \in [t_0, T]$ задачи (1),(2), которое является и единственным движением.
2. Несовместна система неравенств

$$\begin{cases} I^1(u^*, v^S) < \max\limits_{X[t, x^0(t), u^*]} g^1(x(T)) \\ \quad\quad ... \quad\quad . \\ I^N(u^*, v^S) < \max\limits_{X[t, x^0(t), u^*]} g^N(x(T)) \end{cases}$$

Пусть $\exists k, k \in \{1, ..., N\}$ такое, что $G_u^k$ - максимальный $u$ - стабильный мост [5] к множеству $\{x, T \mid g^k(x(T)) \le g^k(x^0(T))\}$, $\partial G_u^k$ - его граница. $u^{ext}(x,t)$ - экстремальная [5] стратегия к этому мосту.

Пусть $x^0(t), t \in [t_0, T]$ порождено кусочно-постоянными управлениями $u^0(t), v^0(t)$, $x^0(t) \in (G_u^k \setminus \partial G_u^k), t \in [t_0, T]$.

$$u^0(x,t) = \begin{cases} u^0(t), (x,t) \in G_u^k \\ u^{ext}(x,t), (x,t) \notin G_u^k \end{cases}.$$

Тогда неопределенность $v^0(t)$ является максимальной по Слейтеру в задаче (4), где $u^* = u^0(x,t)$, то есть в задаче

$< \bar{V}, (I^1(u^0(x,t),v) = g^1(x(T)), ..., I^N(u^0(x,t),v) = g^N(x(T)) >$.

Это следует из свойств $u$ - стабильного моста $G_u^k$ и экстремальной стратегии $u^{ext}(x,t)$.

Действительно, $\forall v \in \bar{V}, \forall t \in [t_0, T]$ любое движение из пучка движений $X[t, x^0(t), u^0(x,t)]$ в момент $T$ будет находиться во множестве $\{x, T \mid g^k(x(T)) \le g^k(x^0(T))\}$. Значит, несовместна система неравенств

$$\begin{cases} I^1(u^0(x,t),v^0(t)) < \max\limits_{X[t,x^0(t),u^0(x,t)]} g^1(x(T)) \\ \quad ... \\ I^k(u^0(x,t),v^0(t)) < \max\limits_{X[t,x^0(t),u^0(x,t)]} g^k(x(T)) \\ \quad ... \\ I^N(u^0(x,t),v^0(t)) < \max\limits_{X[t,x^0(t),u^0(x,t)]} g^N(x(T)) \end{cases},$$

где $I^k(u^0(x,t),v^0(t)) = g^k(x^0(T))$.

Т.е. неопределенность $v^0(t)$ является максимальной по Слейтеру в задаче (4).

Достаточным условием существования максимальной по Слейтеру неопределенности является

требование $x^0(t) \in (G_u^k \setminus \partial G_u^k), t \in [t_0, T]$.

Минимум по Слейтеру для задачи (5) определяется аналогично.

Гарантированное решение по Слейтеру определяется на основе минимума и максимума по Слейтеру. Оно является аналогом седловой точки из обычных, не многокритериальных игр.

Достаточные условия существования минимума по Слейтеру и гарантированного решения также определяются.

**Применение ЛПР $r$ - стратегий.** Напомним определение $r-$ стратегий [1].

**Определение:** $r-$стратегией $\bar{u}$ игрока 1 называется пара $\bar{u} = (r, u(.))$, ставящая в соответствие каждой точке $(x,t)$

1)неотрицательное число $r \ge 0$,

2) если $r > 0$, то измеримую функцию $u(\theta)$, $u(.) = \{u(\theta) = u(x,t;\theta) \in P \mid t \le \theta < t + r(x,t)\}$, если $r = 0$, то управление в точке $(x,t): u(.) = u(x,t)$.

Аналогично определяется $r-$стратегия $\bar{v}$ игрока 2.

Найдена пара $v^0(t), \bar{u}^0$, в которой $v^0(t)$ является максимальной по Слейтеру неопределенностью в задаче (4). $\bar{u}^0$ - $r$ - стратегия, которая обеспечивает ЛПР не более чем счетное число моментов получения информации об $x^0(t)$. Счетное число моментов возникает из-за того, что в $\bar{u}^0$ в окрестности $x^0(t)$ $r(x,t) > 0$ и $r(x^0(t),t) > 0$.

В окрестности $x^0(t)$ величина $r$ выбирается как разность между минимальным из всех возможных моментов достижения помехой границы моста $\partial G_u$ из точки $(x,t)$ и моментом $t$. Эта разность не равна нулю из-за того, что $x^0(t) \in (G_u \setminus \partial G_u), t \in [t_0, T]$.

Для минимума по Слейтеру для задачи (5) и для гарантированного решения для задачи (3) можно получить аналогичные результаты.

**Заключение.** Основными результатами данной работы являются формулировка достаточных условий существования максимальных, минимальных и гарантированных по Слейтеру решений с применением конструкций стабильных мостов. Максимальная по Слейтеру неопре-

деленность и сконструированная позиционная стратегия ЛПР порождает ту же траекторию $x^0(t)$, что и максимальная по Слейтеру неопределенность и сконструированная $r$ - стратегия ЛПР. В то же время найденная $r$ - стратегия позволяет получать ЛПР информацию об $x^0(t)$ дискретным образом. То же самое можно сказать и для минимального и гарантированного решения по Слейтеру.

Развитый в данной работе подход можно применить и для изучения других принципов оптимальности для многокритериальных дифференциальных задач.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Кононенко А.Ф., Мохонько Е.З.** О процессе получения информации в неантагонистических дифференциальных играх. М.:ВЦ АН СССР,1982.20с.
2. **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.270 с.
3. **Жуковский** В.И.,**Салуквадзе М.Е.** Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: «Мецниереба»,1996.475с.
4. **Кононенко А.Ф.** Структура оптимальной стратегии в динамических управляемых системах//Ж. вычисл. матем. и матем. физ.1980.20,№5.С.1105–1116.
5. **Красовский Н.**Н**., Суботин А.Н.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука,1974. 456с.
6. **Жуковский В.И., Жуковская Л.В.** Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. М.: Издательство ЛКИ,2010.272 с.


**E.Z. Mokhonko** (CC FRC CSC of RAS, Moscow). **Slater optimum in the multi criteria differential decision making problem under uncertainty**

*Abstract.* Sufficient conditions of existence of the Slater optimum strategies are formulated using the notion of the stable bridge. It permits to find the sample data way of the information reception about trajectories, which were born by the optimum strategies.

И. М. ОРЛОВ, С. Ш. КУМАЧЕВА
(Санкт-Петербургский государственный университет)

# ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОРРУПЦИИ: ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПОДХОД

*В работе представлена модель хищения и взяточничества, выполненная в форме субиерархической игры, построен и решен частный пример и предложены условия, минимизирующие коррупцию.*

**Введение.** Коррупция является одной из самых острых проблем в создании эффективного аппарата управления. Идея ее моделирования с помощью теории игр не нова: исследователи рассматривают как игры двух [1] и трёх [2] агентов, так и взаимодействия в иерархии со многими агентами [3, 4]. Оригинальность данной работы заключается в более глубоком рассмотрении иерархии: помимо разделения на типы (центр, инспектор и чиновник), множество агентов-чиновников предполагается не однородным, а также состоящим в некоторой субиерархии отношений «начальник-подчиненный», что позволяет открыть новые сценарии взаимодействия и приблизить модель к реальности. Предлагаемый доклад посвящен проблеме моделирования коррупции в иерархии с субиерархией с помощью теоретико-игрового аппарата.

**Основная часть.** Задачей работы является построение модели иерархической коррупции, разбор частного случая и нахождение условий, при которых коррупция в нем минимальна.

***Иерархия.*** Иерархия организации чиновников представляется деревом, в корне которого находится центр – не ворующий «высший» чиновник. У одного подчиненного может быть не более одного начальника, количество подчиненных у одного начальника не ограничено (но конечно). На самом нижнем (нулевом) уровне располагаются подрядчики, с которыми чиновники первого уровня договариваются напрямую. Уровень коррупции измеряется разностью между количеством денег, выделенных на высшем уровне, и количеством денег, дошедших до подрядчиков. Инспектор находится вне иерархии. Все агенты, за исключением центра и подрядчиков, максимизируют свой выигрыш и получают некоторую зарплату $W$. Цена инспекции взимается с инспектора.

***Хищение.*** На первой стадии игры деньги идут от начальников к подчиненным, с высшего уровня к низшему. Каждый чиновник имеет возможность присвоить себе часть проходящих через него денег, для простоты все чиновники в пределах одного уровня выбирают кражу одновременно. На каждом уровне $n$ есть условное значение отсечки $M_n$ – минимальное количество денег, которое необходимо для того, чтобы создать хотя бы видимость работы.

Оптимальная кража $S^*_{n,i}$ определяется как разность между количеством денег, которые пришли на уровень, и его значением отсечки, поровну разделенная между чиновниками на этом уровне. Любое меньшее значение уменьшает общий выигрыш чиновника, а любое большее значение либо нарушает условие отсечки, либо забирает часть денег, которая должна была достаться другому чиновнику, что даёт последнему возможность раскрыть это большее хищение в случае проверки. Следует отметить, что ненулевая кража является оптимальной только в случаях, когда вероятность проверки достаточно мала, либо есть возможность подкупить инспектора, либо есть информация о том, кто украл больше (чаще всего это начальник).

***Инспекция.*** На второй стадии инспектор проверяет уровни сверху вниз. Вероятность проверки уровня ($0 \le a_n \le 1$) равна отношению количества расхищенных вплоть до этого уровня средств (включительно) к количеству выделенных средств, то есть вероятность не убывает с уменьшением номера уровня. В пределах одного уровня все чиновники идентичны: если инспектор проверяет уровень, он выбирает случайного чиновника с него. Пойманный на хищении чиновник может: не давать взятку, дать взятку, раскрыть хищение укравшего больше.

В первом случае чиновник $i$ с уровня $n$ сможет укрыть некоторую долю украденного ($0 \le \kappa_{n,i} \le 1$), но будет обязан заплатить штраф, зависящий от суммы украденного и его зарплаты. Инспектор получает награду за раскрытие коррупции.

Во втором случае возможны два варианта: в случае принятия взятки инспектор скрывает хищение (и несет за это издержки), чиновник теряет только взятку, но оставляет себе все укра-

денное; в случае неприятия чиновник теряет взятку и платит штрафы за хищение и дачу взятки, инспектор получает награду за раскрытие коррупции. Предложить взятку можно один раз, ее размер $B$ выбирается произвольно (из соображений рациональности, меньше, чем кража).

В третьем случае игра переходит к чиновнику, на которого указал проверяемый, ему предоставляется тот же выбор (вплоть до предпоследнего уровня, так как там нельзя раскрыть не ворующего начальника). В случае удачного подкупа инспектора указавший чиновник оставляет себе все украденное, инспектор укрывает обе кражи; в случае неудачного подкупа или отказа дать взятку он укрывает долю своего хищения и платит некоторую долю штрафа ($0 \le \theta_{n,i} \le 1$), остальное ему прощают за содействие, инспектор получает награду за каждый раскрытый случай коррупции.

***Частный случай.*** Рассмотрим пример с 6 чиновниками на 3 уровнях.

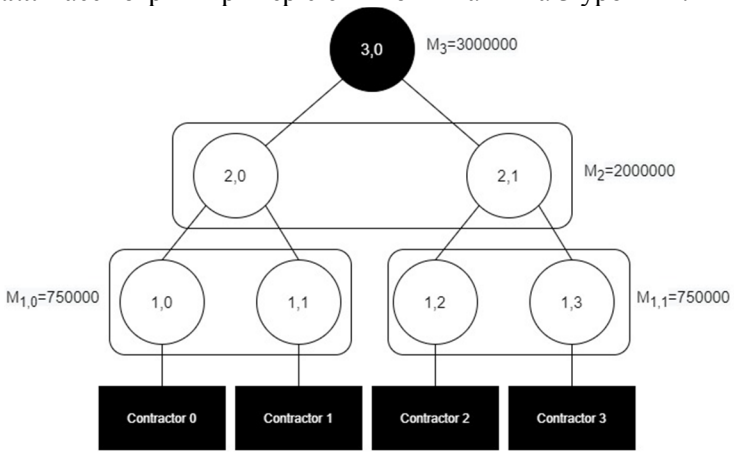



Рис. 1. Иерархия чиновников

Таблица 1

**Характеристики чиновников**

| Чиновник | W | S | к | θ | α | B | F(W,S) | F(B) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,j | 90000 | 500000 | 0,6 | | 0,167 | 125000 | 1620000 | 5625000 |
| 1,i | 40000 | 125000 | 0,3 | 0,01 | 0,125 | 62500 | 720000 | 2812500 |

Таблица 2

**Характеристики инспектора**

| $W_I$ | $R_I(S_{1,i})$ | $R_I(S_{2,j})$ | $Ci_1$ | $Ci_2$ | $Cu_1$ | $Cu_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 70000 | 40000 | 75000 | 10000 | 25000 | 5000 | 12500 |

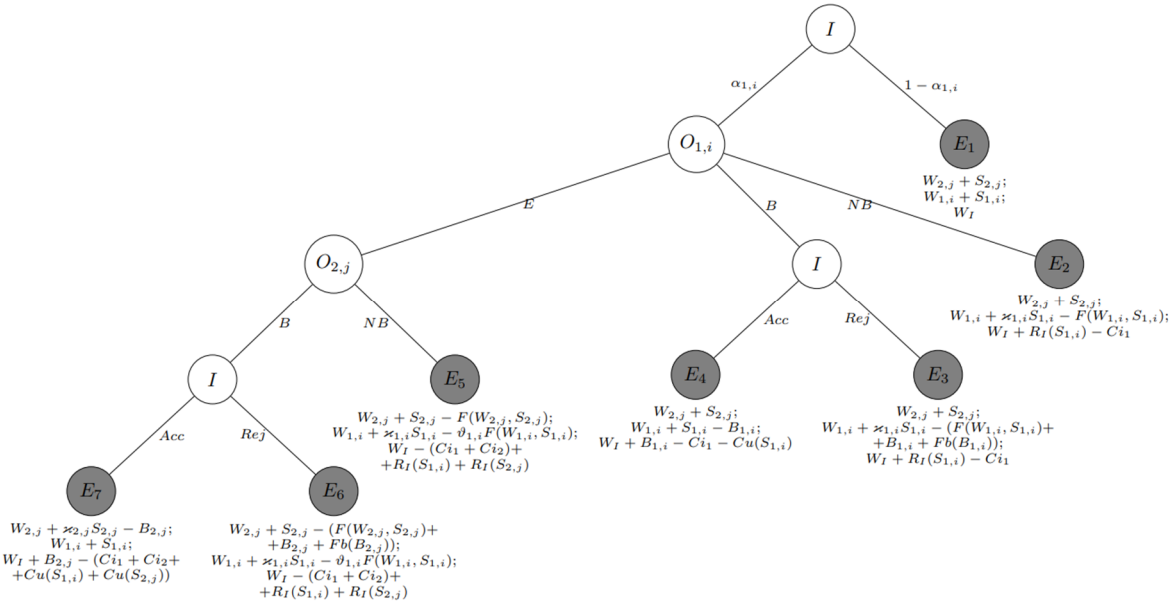



Рис. 2. Граф игры при инспекции чиновника первого уровня

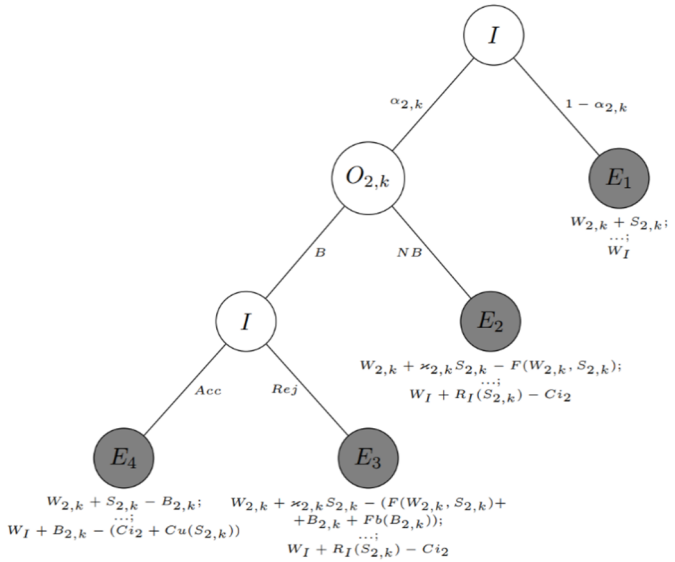



Рис. 3. Граф игры при инспекции чиновника второго уровня

***Равновесие.*** Игра решается с помощью обратной индукции, решением является абсолютное равновесие по Нэшу. В нем при инспекции чиновник первого уровня раскрывает кражу своего начальника, который дает достаточную взятку. Похожая ситуация происходит при инспекции чиновника второго уровня: он дает взятку достаточно большую, чтобы инспектор её принял. Равновесие является пессимистичным, так как хищение не наказывается, а провоцирует взяточничество.

***Условия минимизации коррупции.*** Уменьшить коррупцию можно через увеличение затрат инспектора на сокрытие преступление и наград за раскрытие до величин, при которых необходимая взятка превысит размер хищения, в таком случае чиновнику будет выгоднее не воровать вовсе, а это избавит его от необходимости давать взятку.

**Заключение.** В работе рассмотрена иерархическая модель коррупции, построен и решен частный случай такой модели. В дальнейшем планируется введение кооперативного элемента (сговор чиновников) и исследование более крупного примера с различными характеристиками чиновников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shenje T. Investigating the mechanism of corruption and bribery behavior: a game-theoretical methodology // Dynamic Research Journals. Journal of Economics and Finance. 2016. No 1. P. 1-6.
2. Attanasi G., Rimbaud C., Villeval M. Embezzlement and guilt aversion // IZA Discussion Papers 11956. Bonn: Institute of Labor Economics. 2016.
3. Kumacheva S. The Strategy of Tax Control in Conditions of Possible Mistakes and Corruption of Inspectors // Contributions to Game Theory and Management. 2013. Volume 6. P. 264-273
4. Горбанева О. И., Угольницкий Г. А., Усов А.Б. Модели коррупции в иерархических системах управления // Пробл. управл. 2015. No 1. С. 2–10

---

**I.M. Orlov, S.Sh. Kumacheva** (SPbSU, Saint Petersburg). **Hierarchical Model of Corruption: Game-Theoretic Approach**

*Abstract.* A subhierarchical two-stage game model of embezzlement and bribery is presented, the particular example is solved and suggestions for corruption minimizing are given.

А.Л. ГРИНИХ, Л.А. ПЕТРОСЯН
(Санкт-Петербургский государственный университет)

# ВЕКТОР ШЕПЛИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИЛЕММЫ ЗАКЛЮЧЁННОГО n-ЛИЦ

*В работе рассматривается динамическая постановка игры типа «дилемма заключённого n-лиц». Статическая игра, разыгрываемая на каждом шаге этой игры зависит от стратегий, выбранных игроками на предыдущем шаге. Для данной постановки найден вектор Шепли. Представленная работа является продолжением результатов, опубликованных ранее в статье Гриних А. Л. «Stochastic n-person Prisoner's Dilemma: the Time-Consistency of Core and Shapley Value» (2019).*

**Введение.** Постановку «дилеммы заключённого» для n игроков впервые рассмотрел Г. Гамбургер в статье «N-person prisoner's dilemma» (1973), однако, функции выигрыша игроков в ней были заданы в неявном виде. Дальнейшие работы, рассматривающие данную игру, исследовали её в такой же постановке. В данной работе будет использоваться функция выигрыша, рассмотренная ранее в статье Гриних А. Л. «Stochastic n-person Prisoner's Dilemma: the Time-Consistency of Core and Shapley Value» (2019).

Рассматривается стохастическая постановка игры типа «дилемма заключённого n-лиц». Данная игра представляет собой конфликт интересов n заключённых, каждый из которых находится под следствием за соучастие в общем преступлении. Игроки обладают информацией об участии каждого из остальных членов организованной преступной группы. Суд готов учесть признательные показания каждого из членов группы тем самым сократив срок отбывания наказания задержанным, который будет готов сотрудничать со следствием. Однако, эти показания помогут доказать факт участия в преступления остальных членов группы, так что каждый «сознавшийся» увеличивает срок заключения всех задержанных.

Набор игроков представлен множеством $N$, мощность которого равна $|N| = n$. Многошаговая игра заключается в разыгрывании на каждом шаге игр типа «дилеммы заключённого $n$-лиц», где коэффициенты модели зависят от стратегий игроков, разыгранных на предыдущем шаге. В данной интерпретации на каждом этапе игры соблюдены условия классической постановки задачи:

- каждый из игроков имеет две возможные чистые стратегии $x_i$: «кооперироваться» (далее – стратегия «$C_i$») и «отклоняться» (далее – стратегия «$D_i$»), $x_i \in \{C_i, D_i\}$;
- равновесие по Нэшу в чистых стратегиях в одношаговой игре достигается только при выборе каждым из игроков стратегии $D_i$, что не даёт Парето-оптимального исхода;
- выигрыши каждого из игроков $h_i^{\gamma_j}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ на каждом шаге игры выше в случае выбора всеми игроками стратегии «$C_i$», чем при выборе каждым из них стратегии «$D_i$»;
- стратегия «$D_i$» строго доминирует стратегию «$C_i$» у всех игроков $i \in N$.

**Постановка задачи.** Строится статическая игра типа «дилемма заключённого» n-лиц, $\gamma_j$. Множество игроков в данной игре задано, как N, мощность которого равна $n$. Каждый из игроков имеет две доступные чистые стратегии $x_i \in \{C, D\}, \forall i \in N$. Пусть $x$ – количество игроков, выбравших стратегию $C$. Тогда функция выигрыша $i$-го игрока, $h_i^{\gamma_j}(x_1, \dots, x_n)$, в статической игре $\gamma_j \in \{\gamma_1; \gamma_2\}$ будет иметь вид:

$$h_i^{\gamma_j}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \mathrm{C}_\mathrm{i}^{\gamma_j}(x) = a_1^{\gamma_j} x + b_1^{\gamma_j}, \; if \; x_i = C \\ D_\mathrm{i}^{\gamma_j}(x) = a_2^{\gamma_j} x + b_2^{\gamma_j}, \; if \; x_i = D \end{cases} \quad (1)$$

Построим динамическую игру $\Gamma_K$, в которой то, какая игра будет сыграна на следующем этапе, зависит от стратегий игроков, выбранных на предыдущем этапе. На каждом из $K$ этапов разыгрывается одна из двух возможных игр $\gamma 1$ или $\gamma 2$, каждая из которых удовлетворяет статической модели «дилеммы заключённого $n$ лиц», причём последовательность этих игр зависит от профиля стратегий, разыгранного на предыдущем этапе, следующим образом:

Разыгрывается статическая игра $\gamma_1$, если на предыдущем этапе игры $(n-x) \geq x$, то есть количество игроков, выбравших стратегию «молчать» не превысило количество игроков, выбравших стратегию «предать»;

Разыгрывается статическая игра $\gamma_2$, если на предыдущем этапе игры $(n-x) < x$, а, значит, количество игроков, выбравших стратегию «молчать» превысило количество игроков, выбравших стратегию «предать».

В данном случае, функция выигрыша игрока $H_i^{\Gamma_K}(z_1, \dots, z_K)$ в динамической игре $\Gamma_K$ будет являться суммой выигрышей данного игрока на каждом из этапов динамической игры. Построим вектор Шепли для различных вариантов данной игры.

**Вектор Шепли.** Пусть в игре $\Gamma_K$ найдены стратегии, максимизирующие сумму выигрышей всех игроков, $\overline{X} = (\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$. Тогда путь $\overline{z} = (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_K)$, реализованный данной ситуацией $(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$, будем называть кооперативной траекторией игры $\Gamma_K$:

$$\max_{z_1,\dots,z_K} \sum_{i=1}^{n} H_i^{\Gamma_K}(z_1, \dots, z_K) = \sum_{i=1}^{n} H_i^{\Gamma_K}(\overline{z}). \quad (2)$$

При заданных условиях развития динамической игры $\Gamma_K$, возможны три варианта оптимальной траектории игры:

- На всех этапах игры разыгрывается игра $\gamma_1$;
- На первом этапе игры разыгрывается игра $\gamma_1$, а на втором и далее разыгрывается игра $\gamma_2$;
- На всех нечётных этапах игры разыгрывается игра $\gamma_1$, а на всех чётных - $\gamma_2$.

**Случай 1**. Оптимальные количества кооперирующихся игроков для статических игр $\gamma_1$ и $\gamma_2$ определим, как $\overline{x}_{\gamma_1}$ и $\overline{x}_{\gamma_1}$, соответственно.

1. В случаях, если $a_1^{\gamma_j} \geq a_2^{\gamma_j}$ или $\frac{a_2^{\gamma_j} n + b_1^{\gamma_j} - b_2^{\gamma_j}}{2a_2^{\gamma_j} - 2a_1^{\gamma_j}} \geq n$, $\overline{x}_{\gamma_j} = \left[\frac{a_2^{\gamma_j} n + b_1^{\gamma_j} - b_2^{\gamma_j}}{2a_2^{\gamma_j} - 2a_1^{\gamma_j}}\right]$;
2. В противном случае, $\overline{x}_{\gamma_j} = n$.

Если $0 < \overline{x}_{\gamma_1} \leq \frac{n}{2}$ и $V^{\gamma_1} > V^{\gamma_2}$, то на всех этапах кооперативной траектории будет разыгрываться игра $\gamma_1$, причём количество игроков, выбирающих стратегию $C$, составит $\left[\frac{a_2^{\gamma_1} n + b_1^{\gamma_1} - b_2^{\gamma_1}}{2a_2^{\gamma_1} - 2a_1^{\gamma_1}}\right]$.

В таком случае, вектор Шепли будет равен:

$$Sh_i(V^{\Gamma_K}) = K\left(a_1^{\gamma_1}\frac{\overline{x}_{\gamma_1}^2}{n} + b_1^{\gamma_1}\frac{\overline{x}_{\gamma_1}}{n} + a_2^{\gamma_1}\left(1 - \frac{\overline{x}_{\gamma_1}}{n}\right)\overline{x}_{\gamma_1} + b_2^{\gamma_1}\left(1 - \frac{\overline{x}_{\gamma_1}}{n}\right)\right). \quad (3)$$

В рассматриваемом случае $\overline{x}_{\gamma_1}$игроков на первом шаге кооперативной траектории игры получат:

$$C_i(\overline{x}_{\gamma_1}) = a_1^{\gamma_j}\overline{x}_{\gamma_1} + b_1^{\gamma_j}, \quad (4)$$

а остальные игроки:

$$D_i(\overline{x}_{\gamma_1}) = a_2^{\gamma_j}\overline{x}_{\gamma_1} + b_2^{\gamma_j} \quad (5)$$

Значение вектора Шепли оставшейся части игры $\Gamma_{K-1}$ для каждого из игроков будет равно:

$$Sh_i(V^{\Gamma_{K-1}}) = (K-1)\left(a_1^{\gamma_1}\frac{\overline{x}_{\gamma_1}^2}{n} + b_1^{\gamma_1}\frac{\overline{x}_{\gamma_1}}{n} + a_2^{\gamma_1}\left(1 - \frac{\overline{x}_{\gamma_1}}{n}\right)\overline{x}_{\gamma_1} + b_2^{\gamma_1}\left(1 - \frac{\overline{x}_{\gamma_1}}{n}\right)\right). \quad (6)$$

*Определение:* Конечный набор векторов $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^i, \dots, \beta^n)$ называется *процедурой распределения дележа* в $\Gamma_K$ для дележа $d(\Gamma_K) = (d_1(\Gamma_K), \dots, d_n(\Gamma_K))$, если $d_i(\Gamma_K) = \sum_{z=0}^{K-1} \beta_{K-z}^i$, где $\beta^i = (\beta_1^i, \dots, \beta_z^i, \dots, \beta_K^i)$.

*Определение:* Решение $D(\Gamma_K)$ называется *сильно динамически устойчивым* в $\Gamma_K$, если:

$D(\Gamma_{K-1}) \neq \emptyset$;

Для каждого дележа из $D(\Gamma_K)$ существует процедура распределения дележа, такая что:

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_j, \dots, \beta_K) : \mathrm{D}(\Gamma_K) \supset \sum_{j=1}^{z} \beta_j \oplus D(\Gamma_{K-z}). \quad (7)$$

В нашем случае, вектор Шепли будет динамически неустойчивым, поскольку:

$$Sh_i(V^{\Gamma_{K-1}}) + C_i(\overline{x}_{\gamma_1}) \neq Sh_i(V^{\Gamma_K}); \quad (8)$$

$$Sh_i(V^{\Gamma_{K-1}}) + D_i(\overline{x}_{\gamma_1}) \neq Sh_i(V^{\Gamma_K}). \quad (9)$$

Введём следующую процедуру распределения дележа такую, чтобы добиться динамической устойчивости модели:

$$\beta_i^z = Sh_i(V^{\gamma_1}), \quad (10)$$

т.е на каждом шаге игры каждый из игроков получает значение вектора Шепли для одношаговой игры.

$$z \cdot Sh_i(V^{\gamma_1}) + Sh_i\left(V^{\Gamma_{K-z}}\right) = z \cdot Sh_i(V^{\gamma_1}) + (\mathrm{K} - \mathrm{z}) \cdot Sh_i(V^{\gamma_1}) = K \cdot Sh_i(V^{\gamma_1}) = Sh_i\left(V^{\Gamma_K}\right) \quad (11)$$

Следовательно, данное распределение дележа будет сильно динамически устойчивым.

**Пример**. Рассмотрим пример, в котором выполняются условия $0 < \overline{x}_{\gamma_1} \leq \frac{n}{2}$ и $V^{\gamma_1} > V^{\gamma_2}$. Игра разыгрывается на пяти шагах, $K$ =5. Пусть выигрыши игроков в играх $\gamma_1$ и $\gamma_2$ заданы следующими функциями:

$$h_i^{\gamma_1}(x_1, \ \ldots, \ x_4) = \begin{cases} \mathrm{C}_\mathrm{i}^{\gamma_1}(x) = 1\,500x, \ if \ x_i = C \\ D_\mathrm{i}^{\gamma_1}(x) = 3\,500x + 5\,000, \ if \ x_i = D \end{cases}$$

$$h_i^{\gamma_2}(x_1, \ \ldots, \ x_4) = \begin{cases} \mathrm{C}_\mathrm{i}^{\gamma_2}(x) = 1\,700x + 500, \ if \ x_i = C \\ D_\mathrm{i}^{\gamma_2}(x) = 1\,400x + 5\,000, \ if \ x_i = D \end{cases}$$

Тогда, можно рассмотреть сумму выигрышей игроков на каждом из возможных статических этапах игры при различных комбинациях игроков, выбравших стратегию молчать, то есть при различных значениях $x$ (см. Таблица 1).

Таблица 1.

**Суммарный выигрыш всех игроков для каждой из статических игр $\gamma_1$ и $\gamma_2$.**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sum_{i \in N} h_i^{\gamma_1}$ | 20 000 | 27 000 | 30 000 | 29 000 | 24 000 |
| $\sum_{i \in N} h_i^{\gamma_2}$ | 20 000 | 21 400 | 23 400 | 26 000 | 29 200 |

$$Sh_i\left(V^{\Gamma_K}\right) = \frac{30\,000K}{4} = 7\,500\,K = 37\,500.$$

$$Sh_i\left(V^{\Gamma_K}\right) = \frac{30\,000K}{4} = 7\,500\,K = 7\,500 \cdot 5 = 37\,500.$$

В рассматриваемом примере:

- $Sh_i(V^{\gamma_1}) = 7\,500 = \beta_z^i$ - процедура распределения дележа;
- $\mathrm{C}_\mathrm{i}^{\gamma_1}\left(\overline{x}_{\gamma_1}\right) = 1\,500 \cdot 2 = 3\,000$;
- $\mathrm{D}_\mathrm{i}^{\gamma_1}\left(\overline{x}_{\gamma_1}\right) = 3\,500 \cdot 2 + 5\,000 = 12\,000$;

Так как $Sh_i(V^{\gamma_1}) \neq \mathrm{C}_\mathrm{i}^{\gamma_1}\left(\overline{x}_{\gamma_1}\right)$, $Sh_i(V^{\gamma_1}) \neq \mathrm{D}_\mathrm{i}^{\gamma_1}\left(\overline{x}_{\gamma_1}\right)$, то $Sh_i(V^{\gamma_1}) \neq h_i\left(\overline{x}_{\gamma_1}\right)$. Следовательно, вектор Шепли для всей динамической игры не является сильно динамически устойчивым, в то время, как вектор Шепли для каждой из статических игр, разыгрываемых на различных этапах игры является процедурой распределения дележа в соответствие с данным принципом оптимальности.

**Случай 2.** Если $\frac{n}{2} < \overline{x}_{\gamma_1}, \frac{n}{2} < \overline{x}_{\gamma_2}$ и $V^{\gamma_1} < V^{\gamma_2}$, то на первом этапе будет разыграна игра $\gamma_1$, а на всех остальных этапах кооперативной траектории будет разыгрываться игра $\gamma_2$. В таком случае, вектор Шепли будет равен:

$$Sh_i\left(V^{\Gamma_K}\right) = \left(a_1^{\gamma_1}\frac{\overline{x}_{\gamma_1}^2}{n} + b_1^{\gamma_1}\frac{\overline{x}_{\gamma_1}}{n} + a_2^{\gamma_1}\left(1 - \frac{\overline{x}_{\gamma_1}}{n}\right)\overline{x}_{\gamma_1} + b_2^{\gamma_1}\left(1 - \frac{\overline{x}_{\gamma_1}}{n}\right)\right) + (K-1)\left(a_1^{\gamma_2}\frac{\overline{x}_{\gamma_2}^2}{n} + b_1^{\gamma_2}\frac{\overline{x}_{\gamma_2}}{n} + a_2^{\gamma_2}\left(1 - \frac{\overline{x}_{\gamma_2}}{n}\right)\overline{x}_{\gamma_2} + b_2^{\gamma_2}\left(1 - \frac{\overline{x}_{\gamma_2}}{n}\right)\right). \quad (12)$$

**Заключение.** Для данной постановки задачи был найден вектор Шепли при различных комбинациях коэффициентов модели. Приведен пример нахождения конкретных значений для игры данного типа с тремя игроками.

*Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 17-11-01079)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Grinikh A. L. Stochastic n-person prisoner’s dilemma: the time-consistency of core and Shapley value // Contributions to Game theory and Management, 2019. No XII. P. 151-158.
2. Hamburger H. N-person prisoner’s dilemma // Journal of Mathematical Sociology. 1973. No 3. P. 27–48.
3. Straffin P. D. Game Theory and Strategy. Washington: The Mathematical Association of America, 1993. 244 p.

---

**A.L.Grinikh, L.A.Petrosyan** (Saint Petersburg State University). **Shapley value for stochastic n-person prisoner’s dilemma**

*Abstract.* Stochastic n-person prisoner’s dilemma includes a number of static games that are realized corresponding of players' previous strategies. The Shapley value was found for this statement. This work is a continuation of the results published earlier in the article by Grinich A. L. " Stochastic n-person Prisoner's Dilemma: the Time-Consistency of Core and Shapley Value».

**Секция 7 (ПРИГЛАШЕННАЯ)**

## НАУЧНЫЕ ШКОЛЫ В.А. ЯКУБОВИЧА И Г.А. ЛЕОНОВА: 50 ЛЕТ КАФЕДРЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Б.Р. АНДРИЕВСКИЙ
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербургский государственный университет, Балтийский государственный технический университет)

Ю.С. ЗАЙЦЕВА
(Санкт-Петербургский государственный университет)

# ОПТИМИЗАЦИЯ КОНТУРА УПРАВЛЕНИЯ ПИЛОТИРУЕМОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПО ТАНГАЖУ

*Рассматривается нелинейная система управления полетом с пилотом в замкнутом контуре. Задача ручного пилотирования по продольной оси исследуется при условии наступления ограничения скорости привода органа управления летательного аппарата. На основе свойства адаптации пилота к переменным задачи управления проводится оптимизация параметров его математической модели поведения. Вычисляются функции чувствительности нелинейной системы для гармонического и прямоугольного входных сигналов. Приводятся результаты моделирования оптимизированной системы; по полученным параметрам оцениваются динамические и пилотажные характеристики объекта управления.*

**Введение**. Пилот является важной и неотъемлемой частью системы управления полетом. При выполнении задач непрерывного управления он формирует и отрабатывает управляющие действия [1]. Выбор характеристик своих действий пилот осуществляет целенаправленно, выполняя функции регулирующего звена. Параметры модели поведения пилота зависят от динамических характеристик объекта управления и ширины спектра входного воздействия, поэтому моделирование при различных переменных задачи может выявить его нежелательное поведение или аномальное взаимодействие между летчиком и самолетом. Благодаря свойству адаптации пилота характеристики системы самолет-пилот сохраняют относительное постоянство. Это позволяет предположить, что в процессе слежения пилот стремится оптимизировать свойства образуемой им системы. Создание оптимальной системы управления пилотом является одной из мер для предотвращения возникновения скрытых колебаний в замкнутом контуре управления [2-5]. В данной работе в качестве критерия предлагается выбрать быстродействие системы; рассмотреть характеристики оптимизированной системы при различных значениях насыщения скорости привода; оценить с помощью полученных значений параметров модели пилота динамические и пилотажные характеристики летательного аппарата.

**Постановка задачи оптимизации.** Рассмотрим нелинейную систему вида:

$$\dot{x}(t) = f(x, r)$$
$$y(t) = h(x, r), \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n -$ вектор состояния, $y(t) \in R -$ выход системы, $r(t) -$ опорный сигнал, $e(t) -$ ошибка управления, $e(t) = r(t) - y(t)$. Положим, что для $r(t) = Asin(\omega t)$ система (1) имеет равномерную сходимость, тогда у системы (1) существует единственное периодическое решение $\bar{x}(t)$, с выходом $\bar{y}(t)$ и ошибкой управления $\bar{e}(t)$.

Рассмотрим структурный подход к описанию модели пилота, отражающий процессы переработки информации и выработки стратегий действий, включающий следующие этапы.

***Задание математической модели пилота.*** Передаточная функция для режима одноконтурного компенсаторного слежения, описывающая отклонение стабилизатора в зависимости от ошибки стабилизации в диапазоне частоты среза [6] имеет вид:

$$\mathrm{W_p(s)} = \mathrm{K_p}\,\frac{(T_L s+1)}{(T_I s+1)}\,\mathrm{e}^{-\tau_p s}, \qquad (2)$$

где $K_p$ – коэффициент усиления пилота, $T_L$, $T_I$ – постоянные времени опережения и запаздывания, вводимые пилотом, $\tau_p$ – постоянная времени запаздывания, учитывающая задержку восприятия и формирования действий в центральной нервной системе пилота. Для хороших пилотажных характеристик параметры модели (2) должны иметь значения: $T_L, T_I < 1$, $\tau_p = 0{,}1 \ldots 0{,}3$ с [7].

***Выбор критерия оптимизации.*** Задача оптимизации параметров модели пилота состоит в минимизации быстродействия системы. Целевая функция выражена через зависимость частоты $\omega$ от максимально допустимого показателя колебательности $M_{max}$ с точностью переходного процесса $\Delta \le 0{,}05$:

$$\mathrm{J} = \min(-\omega(M_{max})) \qquad (3)$$

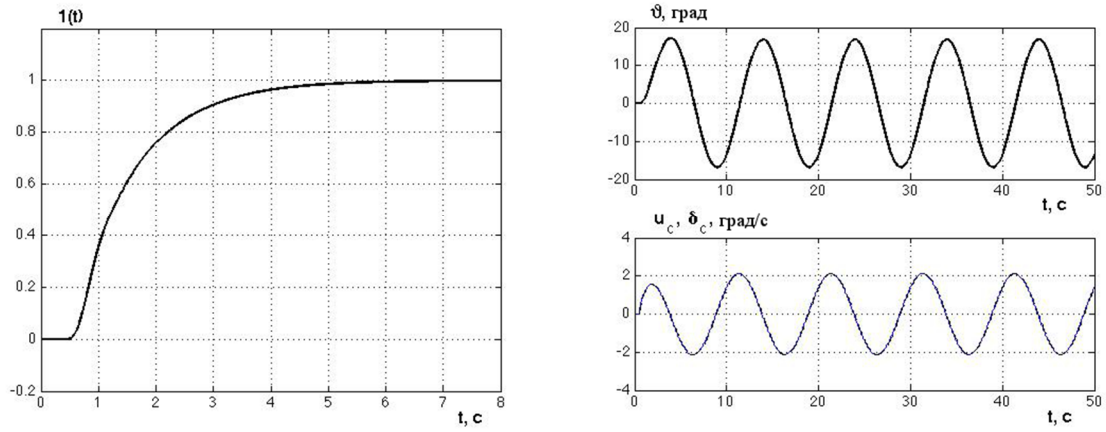
Зависимость между вещественной частотной характеристикой (ВЧХ) и переходной функцией системы позволяет приближенно оценить качество процесса регулирования [8]. Согласно сформулированному в [9] критерию отсутствия перерегулирования, ВЧХ должна представлять собой положительную не возрастающую непрерывную функцию частоты. Для ВЧХ принято ограничение: d$P$/d$\omega$ < 0,15. Ограничения для остальных характеристик: $M < 1{,}25$, $0{,}001 \le T_L, T_I \le 1$, $K_p \le 0{,}001$, условие отрицательности вещественной части корней характеристического уравнения замкнутой системы.

***Реализация критерия.*** Автоматизированная процедура выбора параметров модели пилота реализована в виде компьютерной программы средствами пакета для моделирования Matlab Simulink. Модель системы соответствует структуре компенсаторного слежения [6,10], блок времени запаздывания в тракте управления представлен с помощью аппроксимации Паде [11]. Значения начальных параметров оптимизации зависят от задачи и направления движения в пространстве параметров. Их численные значения приняты: $K_{p0} = 1$, $T_{L0} = 0{,}02$, $T_{I0} = 0{,}002$.

**Результаты моделирования.** В качестве объекта управления рассмотрим передаточную функцию от угла отклонения руля высоты к углу тангажа с учетом динамики привода органа управления и времени запаздывания в тракте управления [12]:

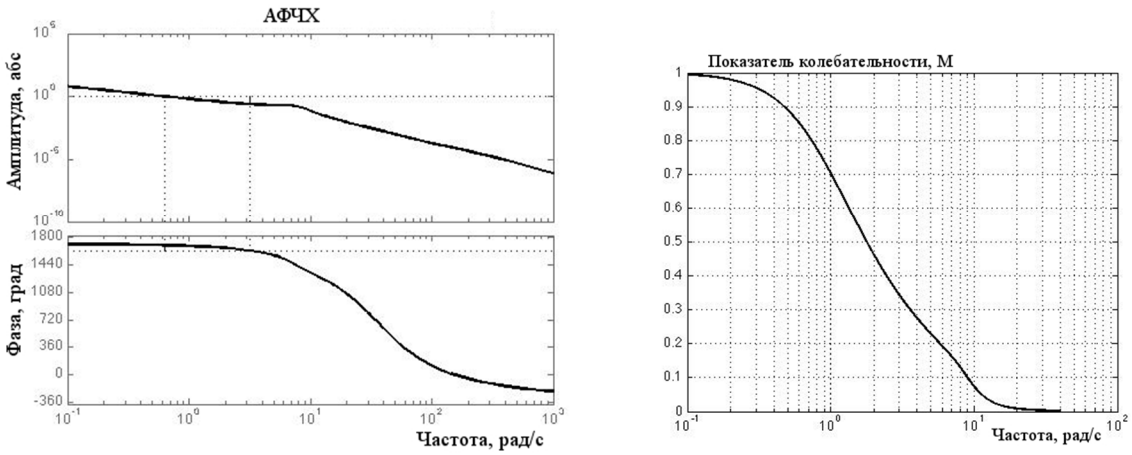
$$\mathrm{W_{0y}(s)} = \mathrm{e}^{-0{,}17s}\,\frac{1}{0.076\mathrm{s}+1} \times \frac{29.1(\mathrm{s}+4.35)}{\mathrm{s}^2+7.3\mathrm{s}+25.6}$$

Рассмотрим систему при ограничении скорости привода 120 град/с, входным сигналом $r(t) = 20\sin(\frac{\pi}{5})$. В результате моделирования были получены следующие параметры модели пилота (2): $T_L = 0{,}0237, T_I = 0{,}0021, K_p = 0{,}2105$. Малые значения $T_L, T_I$ указывают на то, что пилота при отсутствии возмущающих воздействий способен компенсировать свою инерционность, не подавая упреждающие и форсирующие сигналы, и действовать максимально просто как коэффициент усиления [13]. Характеристики оптимизированной системы, иллюстрирующие доставление минимума критерию (3) представлены на рис. 1 и рис. 2. Реакция замкнутой системы на единичный импульс (рис.1,а) без перерегулирования с заданной точностью. Выходные сигналы по углу тангажа системы представлен на рис. 1,б, где $\vartheta$ – фактический угол тангажа, $u_c$, $\delta_c$ – угловые скорости по тангажу на входе и выходе нелинейного привода. Качество АФЧХ (рис. 2,а) соответствует хорошо демпфированной системе [7,8], запас устойчивости по амплитуде и фазе равны 12,2 дБ и 73,1° соответственно. Показатель колебательности (рис. 2,б) не превышает 1. Также по виду АФЧХ с помощью уточненного критерия оценки пилотажных характеристик [14] система самолет-пилот получает высокую оценку.




а) б)

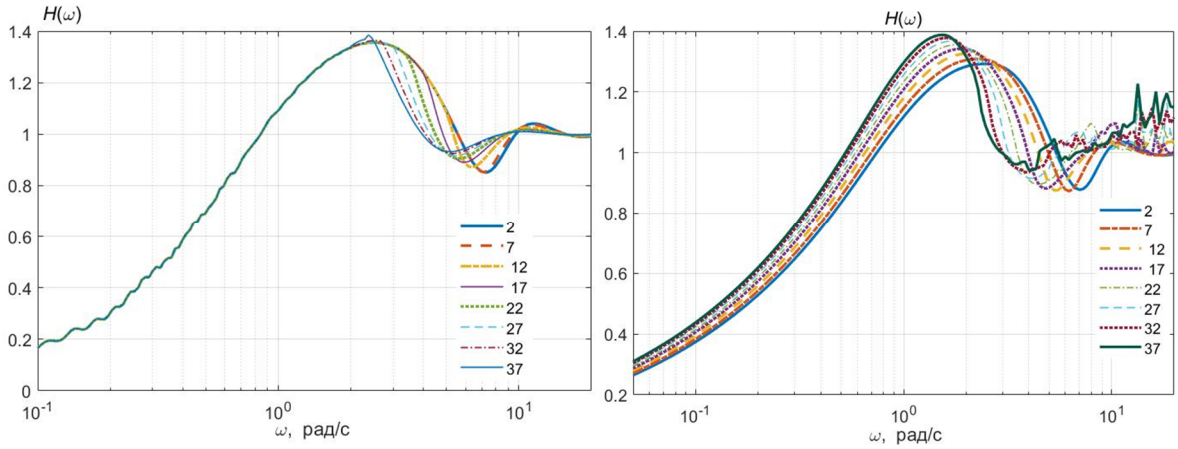
Рис. 1. а) Изменение во времени отклонения угла тангажа, б) сигналы по углу тангажа




а) б)

Рис. 2. АФХ замкнутой системы

Введем ограничение скорости привода равное 12 град/с. На рис. 3а,б показана функция чувствительности [15,16] для гармонического и прямоугольного входного сигнала для различных значений амплитуд.




а) б)

Рис. 3. Функция чувствительности для гармонического сигнала (а), для меандра (б)

Рис. 3,а иллюстрирует рост ошибки на высоких частотах, а из рис. 3,б видно, что ошибка управления возрастает уже при малых амплитудах и частотах входного сигнала.

**Выводы**. В результате оптимизации параметров модели пилота были получены численные значения этих параметров, построены АФЧХ и переходные процессы по углу тангажа. Анализ этих результатов говорит о том, что динамические и пилотажные характеристики у исследуемого объекта управления хорошие до определенного порога ограничения скорости привода. После него частотные методы, разработанные для линейных систем, не дают адекватной оценки качества системы. Результаты оптимизации можно применять как компьютерную имитацию поведения летчика в условиях различных задач управления, что существенно сокращает процесс разработки системы управления летательного аппарата. В качестве другого применения – в области безопасности полетов – представленный алгоритм может использоваться для анализа качества пилотирования или обучения пилотов [17].

*Работа выполнена при поддержке программы Ведущие научные школы РФ на 2020-2021 (НШ-2624.2020.1)*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ефремов А.В., Оглоблин А.В., Предтеченский А.Н., Родченко В.В.** Летчик как динамическая система. М.: Машиностроение, 1992. С. 336.
2. **Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.**. Методы подавления нелинейных колебаний в астатических системах автопилотирования летательных аппаратов. Известия РАН. Теория и системы управления, №3, 2017, с. 105-121.
3. **Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Кузнецова О.А., Леонов Г.А., Мокаев Т.Н..** Локализация скрытых колебаний в системах управления полетом. Труды СПИИРАН, 6(49), 2016, с. 5-31.
4. Andrievsky B.R., Kudryashova E. V., Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A. Aircraft wing rock oscillations suppression by simple adaptive control // Aerospace Science and Technology. 2020. Vol. 105. p. 106049.
5. Kuznetsov N. V. Theory of hidden oscillations and stability of control systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2020. Vol. 59(5). p. 647-668.
6. McRuer D., Krendel E. Mathematical Models of Human Pilot Behavior. *AGARD AG-188*, 1974.
7. **Пашковский И.М.** Устойчивость и управляемость самолета. М.: Машиностроение. 1975. С. 328.
8. **Бесекерский В.А., Попов Е.П.** Теория систем автоматического регулирования.М.: Наука, 1975. С. 768.
9. **Солодовников В.В.** Метод частотных характеристик в теории регулирования (обзор). Автоматика и Телемеханика. 1947. Т. 8(2). С. 65–88.
10. McRuer D.T., Warner J.D. Aviation safety and pilot control: understanding and preventing unfavorable pilot-vehicle interactions. National Academics Press. 1997.
11. **Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.** Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке Matlab. М.: Наука, 2000. С. 471.
12. Mandal T.K., Gu Y. Analysis of pilot-induced-oscillations and pilot vehicle system stability using UAS flight experiments // Aerospace-MDPI. 2016. Vol. 3(4), p. 42.
13. **Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.** Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1979.
14. **Ефремов А.В., Коровин А.А.** Модификация критериев оценки пилотажных характеристик и явления раскачки самолета летчиком. Труды МАИ. 2012. No. 55. с. 2
15. Pavlov, A., van de Wouw, N., Pogromsky, A., Heertjes, M., and Nijmeijer, H. 2007. Frequency domain performance analysis of nonlinearly controlled motion systems. In Proc. 46th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, New Orleans, LA, USA. P. 1621–1627.
16. Andrievsky B., Pogromsky A. Yu., Rooda J.E. Observer-based production control of manufacturing machines. 2009. Proc. 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing. P. 264–269.
17. **Бутырин О.А., Клещенко С.В.** Методика количественной оценки качества техники пилотирования летчика в рейсовых условиях. Проблемы безопасности полетов. 2008. No 9. С. 17–30.

---

**I.S.Zaitceva** (St. Petersburg State University), **B.R.Andrievsky** (St. Petersburg State University, Baltic State Technical University, Institute for Problems in Mechanical Engineering of Russian Academy of Sciences). **Manned aircraft pitch control optimization.**

*Abstract.* A nonlinear closed-loop pilot-vehicle system in the compensatory control mode is considered. The manual pilot task on the longitudinal axis under the actuator rate limit is investigated. Based on the pilot's adaptation to the control problem variables, the optimization of the pilot model parameters is carried out. The sensitivity functions of nonlinear system with the harmonic and squarewave input are calculated. The optimized system simulation results are given; the obtained parameters are used to evaluate the dynamic characteristics and handling qualities of the control object.

М. М. АНИКУШИН
(Санкт-Петербургский государственный университет)

# КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ЛЯПУНОВА В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ, ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ТЕОРИИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

*Предлагается относительно простая теория, включающая в себя многие результаты по теории устойчивости (типа кругового критерия для неавтономных систем), теории инерциальных многообразий (в частности, теорию К. Фояша, Р. Темама и Г. Р. Селла) и обобщениям теории Пуанкаре-Бендиксона (в частности, работы Р. А. Смита) для многомерных и бесконечномерных систем. Основной подход заключается в использовании квадратичных функционалов Ляпунова, которые в приложениях строятся с помощью различных вариантов частотной теоремы. Детали будут изложены в докладе.*

**Введение.** Оказывается, что результаты многих работ по нелинейной динамике со второй половины прошлого века могут быть получены с использованием квадратичных функционалов Ляпунова. Эта возможность открывается благодаря недавним успехам в развитии частотной теоремы А. В. Проскурниковым [1] и настоящим автором [2], а также благодаря полученным им обобщениям работ Р. А. Смита [3,4]. При этом общее изложение становится чисто геометрическим и расширяет класс систем, для которых те или иные результаты могут быть применены. Также использование частотной теоремы приводит к более тонким условиям, усиливающим уже имеющиеся результаты. В рамках доклада планируется разобраться с некоторыми теоретическими и прикладными аспектами этой теории.

**Построение инерциальных многообразий коциклов.** Рассмотрим некоторое вещественное банахово пространство $\mathbb{E}$. Пусть задан некоторый поток $\vartheta^t: \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, где $t \in \mathbb{R}$, в некотором метрическом пространстве $\mathcal{Q}$. Коциклом в $\mathbb{E}$ над потоком $\vartheta$ называется семейство отображений $\psi^t: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, где $t \geq 0$, которое удовлетворяет свойствам:

1. $\psi^0(q, v) = v$ и $\psi^{t+s}(q, v) = \psi^t(\vartheta^s(q), \psi^s(q, v))$ для всех $q \in \mathcal{Q}$, $v \in \mathbb{E}$ и $t, s \geq 0$.

2. Отображение $(t, q, v) \mapsto \psi^t(q, v)$ непрерывно как отображение из $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q} \times \mathbb{E}$ в $\mathbb{E}$.

Для краткости коцикл будем обозначать как $\psi$. Понятие коцикла является удобным формализмом для изучения неавтономных дифференциальных уравнений.

Предположим теперь, что $\mathbb{E}$ непрерывно вложено в некоторое гильбертово пространство $\mathbb{H}$. Мы будем отождествлять элементы $\mathbb{E}$ и $\mathbb{H}$ при таком вложении. Пусть $\langle v, f \rangle$ обозначает естественное спаривание между вектором $v \in \mathbb{E}$ и функционалом $f \in \mathbb{E}^*$.

Пусть $P: \mathbb{E} \to \mathbb{E}^*$ есть ограниченный линейный оператор, т. е. $P \in \mathfrak{L}(\mathbb{E}; \mathbb{E}^*)$. Будем говорить, что $P$ *симметричный* если $\langle v_1, Pv_2 \rangle = \langle v_2, Pv_1 \rangle$ для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$. Для заданного подпространства $\mathbb{L} \subset \mathbb{E}$ будем говорить, что $P$ *положительный* (соотв. *отрицательный*) на $\mathbb{L}$, если $\langle v, Pv \rangle > 0$ (соотв., $\langle v, Pv \rangle < 0$) при всех $v \in \mathbb{L}$ с $v \neq 0$.

Рассмотрим следующие предположения относительно коцикла $\psi$.

**(H1)** Найдется оператор $P \in \mathfrak{L}(\mathbb{E}; \mathbb{E}^*)$, симметричный и такой, что $\mathbb{E}$ распадается в прямую сумму некоторых подпространств $\mathbb{E}^+$ и $\mathbb{E}^-$, т. е. $\mathbb{E} = \mathbb{E}^+ \oplus \mathbb{E}^-$, таких что $P$ положительный на $\mathbb{E}^+$ и отрицательный на $\mathbb{E}^-$.

**(H2)** Для некоторого целого $j \geq 0$ мы имеем $\dim \mathbb{E}^- = j$.

**(H3)** Для квадратичной формы $V(v) := \langle v, Pv \rangle$ и некоторых чисел $\delta > 0$, $\nu > 0$, $\tau_V \geq 0$ выполнено неравенство

$$e^{2\nu r}V(\psi^r(q,v_1)-\psi^r(q,v_2))-e^{2\nu l}V(\psi^l(q,v_1)-\psi^l(q,v_2)$$
$$\le -\delta\int_l^r e^{2\nu s}|\psi^s(q,v_1)-\psi^s(q,v_2)|_{\mathbb{H}}^2 ds$$

*для всех* $q\in\mathcal{Q}$, $v_1,v_2\in\mathbb{E}$ и $r,l\ge 0$ таких, что $r-l\ge\tau_V$.

В силу конечномерности $\mathbb{E}^-$ и знакопостоянства $V$ на $\mathbb{E}^-$ можно считать, что подпространства $\mathbb{E}^+$ и $\mathbb{E}^-$ из условия **(H1)** являются $V$-ортогональными в том смысле, что $V(v) = V(v^+) + V(v^-)$, где $v = v^+ + v^-$ есть единственное разложение с $v^+\in\mathbb{E}^+$ и $v^-\in\mathbb{E}^-$. Соответствующий проектор $\Pi\colon\mathbb{E}\to\mathbb{E}^-$ будем называть $V$-ортогональным проектором на $\mathbb{E}^-$.

Пусть $\nu(\cdot)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{E}$ есть непрерывная функция. Будем говорить, что $\nu(\cdot)$ является *полной траекторией* коцикла $\psi$, если найдется $q\in\mathcal{Q}$ такой, что $\nu(t+s)=\psi^t(\vartheta^s(q),\nu(s))$ для всех $t\ge 0$ и $s\in\mathbb{R}$. Также в этом случае мы говорим, что $\nu(\cdot)$ проходит через $\nu(0)$ в $q$ (или просто, $\nu(\cdot)$ есть полная траектория в $q$). В рамках **(H3)** полную траекторию $\nu(\cdot)$ назовем *интересной*, если выполнено условие

$$\int_{-\infty}^0 e^{2\nu s}|\nu(s)|_{\mathbb{H}}^2 ds<\infty.$$

Нам потребуются также следующие два предположения.

**(COM)** Найдется такое $t_{com}>0$, что отображение $\psi^{t_{com}}(q,\cdot)\colon\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ компактно для всех $q\in\mathcal{Q}$.

**(ULIP)** Существует такое $t_{emb}\ge 0$, что для всех $T>0$ найдутся константы $C'_T>0$ и $C''_T>0$ такие, что при всех $t\in[t_{emb},t_{emb}+T]$, $q\in\mathcal{Q}$ и $v_1,v_2\in\mathbb{E}$ мы имеем $\|\psi^t(q,v_1)-\psi^t(q,v_2)\|_{\mathbb{E}}\le C'_T|v_1-v_2|_{\mathbb{H}}$ и для всех $v_1,v_2\in\mathbb{E}$ и $t\in[0,T]$ мы имеем $\|\psi^t(q,v_1)-\psi^t(q,v_2)\|_{\mathbb{E}}\le C''_T\|v_1-v_2\|_{\mathbb{E}}$.

Определим $\mathfrak{A}(q)$ как множество всех $\nu(0)$, где $\nu(\cdot)$ есть интересная траектория в $q$. Имеет место следующая теорема (первая её часть для случая $\mathbb{E}=\mathbb{H}$ доказана в [3]).

**Теорема 1**. *Предположим, что коцикл $\psi$ в $\mathbb{E}$ удовлетворяет условиям **(H1)**,**(H2)**, **(H3)**, **(ULIP)** и **(COM)**. Пусть $\Pi$ есть $V$-ортогональный проектор на $\mathbb{E}^-$. Если $\mathfrak{A}(q)$ не пусто при некотором $q\in\mathcal{Q}$, то отображение $\Pi:\mathfrak{A}(q)\to\mathbb{E}^-$ является гомеоморфизмом. Кроме того, в последнем случае мы также имеем*

1). *Множество $\mathfrak{A}(q)$ есть липшицево подмногообразие в $\mathbb{E}$ и отображение $\psi^t(q,\cdot):\mathfrak{A}(q)\to\mathfrak{A}(\vartheta^t(q))$ обратимо при всех $t\ge 0$.*

2). *Существует константа $C_{tr}>0$ такая, что для всякого $v_0\in\mathbb{E}$ и $q\in\mathcal{Q}$, найдется $v_0^*\in\mathfrak{A}(q)$ такой, что $\|\psi^t(q,v_0)-\psi^t(q,v_0^*)\|_{\mathbb{E}}\le C_{tr}e^{-\nu t}$.*

При естественных дополнительных предположениях можно показать гладкость (класса $C^1$) многообразия $\mathfrak{A}(q)$ [4]; получить уравнения динамики и её линеаризации на нем [4]; получить оценки размерности с использованием условия **(H3)** [4], обобщающие известные частотные оценки размерности [5,6].

Семейство подмножеств $\mathfrak{A}(q)$ будем называть $j$-мерным инерциальным многообразием для коцикла $\psi$.

При $j=0$ это семейство одноточечных подмножеств, соответствующих единственной полной траектории (не обязательно ограниченной!), которая экспоненциально притягивает все остальные полутраектории. В случае, если же эта траектория ограничена и $\vartheta$ на $\mathcal{Q}$ есть минимальный периодический или почти периодический поток, то эта траектория периодическая или почти

периодическая. Это обобщает соответствующие результаты, получаемые с помощью кругового критерия для ОДУ [7].

Для $j = 1$ и в случае, когда $\vartheta$ на $Q$ есть минимальный периодический поток, в рамках теоремы легко получить сходимость всякого ограниченного решения к периодическому, что обобщает теорему конвергентности Массеры для скалярных периодических ОДУ. Этот случай включает и обобщает результаты некоторых работ Р. А. Смита (см., например, [8]).

При $j = 2$ и $Q = \mathrm{pt}$ (одноточечное множество) коцикл $\psi$ есть полупоток, а теорема гарантирует существование двумерного инерциального многообразия. В этом случае выводится обобщение теории Пуанкаре-Бендиксона. Этот случай включает и обобщает результаты серии работ Р. А. Смита по теории Пуанкаре-Бендиксона (см., например, [9,10]).

Для произвольного $j$ и случая, когда $\psi$ это полупоток (т. е. $Q = \mathrm{pt}$) представленная теория охватывает теорию К. Фояша, Р. Темама и Г. Р. Селла по построению инерциальных многообразий для полулинейных параболичских уравнений с использованием условия спектрального скачка [11,12].

К возможности указанных обобщений приводят различные варианты частотной теоремы [1, 2,13], которые в рамках условий упомянутых результатов гарантируют существование оператора $P$ и выполнение условий **(H1)**, **(H2)** и **(H3)**.

**Заключение.** Использование квадратичных функционалов Ляпунова позволяет объединить и обобщить результаты многих работ по теории устойчивости, теории колебаний и теории инерциальных многообразий.

*Работа выполнена при поддержке программы Ведущие научные школы РФ на 2020-2021 (НШ-2624.2020.1) и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90008.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Proskurnikov A. V. A new extension of the infinite-dimensional KYP lemma in the coercive case, IFAC-PapersOnLine, 48(1), 246–251 (2015).
2. Anikushin M. M. Frequency theorem for the regulator problem with unbounded cost functional and its applications to nonlinear delay equations. arXiv preprint, arXiv:2003.12499v2 (2020).
3. Anikushin M. M. A non-local reduction principle for cocycles in Hilbert spaces. J. Differ. Equations, **269**(9),6699–6731 (2020).
4. Anikushin M. M. Nonlinear semigroups for delay equations in Hilbert spaces, inertial manifolds and dimension estimates, arXiv preprint, arXiv:2004.13141v2 (2020)
5. Kuznetsov N. V., Reitmann V. Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation. Switzerland: Springer International Publishing AG (2020).
6. Леонов Г. А, Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний, Изд-во СПбГУ,1992.
7. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, Наука, 1978.
8. Smith R. A. Convergence theorems for periodic retarded functional differential equations. P. Lond. Math. Soc., **3**(3), 581–608 (1990).
9. Smith R. A. Orbital stability for ordinary differential equations. J. Differ. Equations, **69**(2), 265–287 (1987).
10. Smith R. A. Orbital stability and inertial manifolds for certain reaction diffusion systems. P. Lond. Math. Soc., **3**(1), 91–120 (1994).
11. Foias C., Sell G. R., Temam R. Inertial Manifolds for Nonlinear Evolutionary Equations (1986).
12. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer (1997)
13. Лихтарников А. Л., Якубович В. А. Частотная теорема для сильно непрерывных однопараметрических полугрупп. Известия Российской академии наук. Серия математическая, **41**(4), 895–911 (1977).

---

**M. M. Anikushin** (St. Petersburg State University, St. Petersburg). **Quadratic Lyapunov functionals in stability theory, oscillation theory and inertial manifolds theory**

*Abstract.* We present a relatively simple theory, which unifies and generalizes many results on the stability theory (in the spirit of the circle criterion), inertial manifolds theory (especially, the theory due to C. Foias, R. Temam and G. R. Sell) and

the Poincaré-Bendixson theory (especially, from the papers of R. A. Smith) for high- and infinite-dimensional systems Our approach is based on the use of quadratic Lyapunov functionals, which are derived in applications from various versions of the frequency theorem. Some nuances of this theory will be revealed during our talk.

И.М. БУРКИН
(Тульский государственный университет)

Н. В. КУЗНЕЦОВ, Т. Н. МОКАЕВ
(Санкт-Петербургский государственный университет, Институт проблем машиноведения РАН)

# МЕТОД "ПЕРЕХОДА В ПРОСТРАНСТВО ПРОИЗВОДНЫХ": АНАЛИЗ, СИНТЕЗ И УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ

*В докладе представлена история развития "метода перехода в пространство производных", являющегося эффективным частотным критерием существования нетривиального периодического колебания у многомерных моделей систем автоматического регулирования с одной дифференцируемой нелинейностью. История развития данного метода описываете в рамках его связи с обобщенным принципом Пуанкаре-Бендиксона, а также в рамках решения ряда задач математической теории управления.*

**Введение.** В 1975 году Г.А. Леоновым и И.М. Буркиным был предложен “метод перехода в пространство производных” – эффективно проверяемый частотный критерий существования нетривиального периодического колебания у многомерных моделей систем автоматического регулирования с одной дифференцируемой нелинейностью [1-4]. Предложенный метод, использующий в основе классический принцип тора [5-14], позволил, с одной стороны, перейти на “частотный” язык и вообще избежать каких-либо построений в фазовом пространстве исследуемой системы, а с другой – расширить класс систем, для исследования которых он может быть применен.

В докладе дан обзор результатов, представляющих обобщение и развитие "метода перехода в пространство производных". Продемонстрирована связь метода перехода в пространство производных с широко известным в настоящее время обобщенным принципом Пуанкаре-Бендиксона, развитым Р. Смитом [15-21], а также результатами современных авторов, работающих в области теории колебаний в многомерных системах [22-25]. Изложены полученные в последние годы авторами доклада частотные критерии существования орбитально устойчивых циклов в многосвязных системах автоматического регулирования (MIMO системах), а также методы синтезирования многомерных систем, имеющих единственное состояние равновесия и обладающих любым наперед заданным числом орбитально устойчивых циклов [26-29]. Приведено распространение обобщенного принципа Пуанкаре-Бендиксона на многомерные системы с угловой координатой [30, 31].

В докладе также демонстрируется эффективное применение излагаемых методов исследования колебательных процессов в многомерных динамических системах к решению известной задачи С. Смейла из теории химической кинетики биологических клеток [32], конструированию систем-хамелеонов [33], анализу мультиустойчивости и поиску скрытых колебаний [34, 35] в системах управления в форме Лурье

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma),\ \ \sigma = c^*x,\ x \in R^n,\ \ A \in R^{n\times n},\ b \in R^{1\times n},\ c \in R^{n\times 1}$$

с полиномиальными, а также тригонометрическими нелинейностями $\varphi(\sigma)$ [4, 28, 36, 37].

*Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки Ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-2624.2020.1).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Буркин И.М. Леонов Г.А. Частотные условия существования нетривиального периодического решения у нелинейной системы с одной стационарной нелинейностью. Методы и модели управления. 1975. Вып. 9. РПИ, Рига, с. 175-177.
2. Буркин И.М., Леонов Г.А. О существовании нетривиальных периодических решений в автоколебательных системах. Сиб. мат. журнал. 1977, №2,. с.251-262.
3. Г.А. Леонов, И.М. Буркин, А.И. Шепелявый. Частотные методы в теории колебаний. Изд-во С.-Петербургского университета. 1992, 366 с.

4. Burkin I.M. Method of “transition into space of derivatives”: 40 years of evolution. Differential Equations, 2015, no. 15, pp. 1717–1751.
5. Friedrichs D.O. On nonlinear vibrations of third order. Studies in Nonlinear Vibration Theory. Institute of Mathematics and Mechanics, New York University Press, 1946, pp.65-103.
6. Rauch L.L., Oscillation of a third order nonlinear autonomous system, Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations. Univ. Press, 1950, pp. 39-88.
7. Широкорад Б.В. О существовании цикла вне условий абсолютной устойчивости трехмерной системы. Автоматика и телемеханика. 1958. Т.15, №10, с. 953-967.
8. Sherman S. A third-order nonlinear system arising from a nuclear spin generator, Contr. Dif. Eqns. 1963. no. 2, pp.197-227.
9. В.А.Плисс. Нелокальные проблемы теории колебаний. 1964. М. "Наука", 367 с.
10. Виноградов Н.Н. Некоторые теоремы о существовании периодических решений одной автономной системы шести дифференциальных уравнений. Диф. уравнения. 1965, т.1, №3, с. 330-334.
11. Mulholland R.J., Nonlinear oscillations of a third-order differential equation. J. nonlinear Mech. 1971, no 6, pp. 279- 294.
12. Леонов Г.А. Частотные условия существования нетривиальных периодических решений в автономных системах. Сиб. мат. журнал. 1973, Т.14, № 6, с. 1505-1506
13. Williamson D., Periodic motion in nonlinear systems. IEEE trans. Automat. Control 1975, AC-20, no. 4, pp. 479-486.
14. Noldus E. A counterpart of Popov’s theorem for the existence of periodic solutions. Int. J. Control 1971, vol.13, no.4, pp. 705- 719.
15. Smith R.A. The Poincare-Bendixson theorem for certain differential equations of higher order. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 1979, Sect. A 83, pp.63-79
16. Smith R.A. Existence of periodic orbits of autonomous ordinary differential equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1980, Sect. A 85, pp.153-172.
17. Smith R.A. An index theorem and Bendixson's negative criterion for certain differential equations of higher dimension. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1981, A91, pp.63-77.
18. Smith R.A. Certain differential equations have only isolated periodic orbits. Ann.Mat.Pura.Appl.1984,vol.137,pp.217-244.
19. Smith R.A. Poincaré index theorem concerning periodic orbits of differential equations. Proc. London Math. Soc. 1984, vol.48, pp.341-362
20. Smith R.A. Massera's Convergence Theorem for Periodic Nonlinear Differential Equations. J. Math. Analysis and Appl.. 1986 vol.120, pp. 679-708.
21. Smith R.A. Orbital stability for ordinary differential equations. J. Diff. Eq. 1987, vol. 69. no. 2, pp. 265 -287.
22. Mallet-Paret J., Smith H.L., The Poincaré–Bendixson theorem for monotone feedback systems, J. Dynam. Diff. Eq. 1990, vol. 2, no. 4, , pp. 367–421.
23. Mallet-Paret J., Sell G.R., The Poincaré–Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay, J. Diff. Eq. 1996, 125, pp. 441–489.
24. Sanchez L.A. Cones of rank 2 and the Poincaré–Bendixson property for a new class of monotone systems, J. Diff. Eq. 2009, 216, pp. 1170–1190.
25. Sanchez L.A. Existence of periodic orbits for high-dimensional autonomous systems. J. Math. Anal. Appl. 2010, 363, pp. 409–418
26. Буркин И.М., Соболева Д.В. О структуре глобального аттрактора многосвязных систем автоматического регулирования. Известия ТулГУ. Естественные науки. Изд-во ТулГУ, 2012, вып. 1, с. 5-16.
27. Буркин И.М., Буркина Л.И. Частотный критерий существования циклов у многосвязных систем автоматического регулирования. Вестник ТулГУ. Серия «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи», 2010, вып.1. ТулГУ,. с. 3-14.
28. Burkin I.M., Nguen N.K. Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dynamical Systems. Differential Equations, 2014, vol. 50, no. 13, pp. 1695–1717.
29. Burkin I.M. The Buffer Phenomenon in Multidimensional Dynamical Systems. Differential Equations, 2002, vol. 38(5), pp.615-625.
30. Буркин И.М. Частотный критерий орбитальной устойчивости предельных циклов второго рода. Дифференциальные уравнения, 1993, т. 29, №6,. с. 1061-1063.
31. Буркин И.М. Обобщенный принцип Пуанкаре-Бендиксона для динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством. Вестник ТулГУ. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи", 2009, Вып. 1. Тула, с. 3-20.
32. Смейл С. Математическая модель взаимодействия двух клеток, использующая уравнения Тьюринга. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., 1980, 360 с.
33. Burkin I.M., Kuznetsova O.I. On some dynamical chameleon systems. Journal of Physics Conference Series,2018, 973(1):012052
34. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Hidden attractors in dynamical systems: From hidden oscillation in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. Int. J. Bifurcation and Chaos, 2013, vol.23, no.1.1330002.
35. Кузнецов Н.В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления, Известия РАН. Теория и системы управления, 2020, №5, с. 5-27.
36. Burkin I.M., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. An elegant jerk system with an infinite number of coexisting attractors. Nonlinear Dynamics, 2020 (in preparation).
37. Буркин И.М., Буркина Л.И., Нгуен Н.Х. О структуре минимального глобального аттрактора обобщенной системы Льенара с полиномиальной нелинейностью. Известия ТулГУ. Естественные науки ТулГУ. Изд-во ТулГУ, 2014, вып. 2, с. 46-58.

**I.M. Burkin** (Tula State University), **N.V. Kuznetsov, T.N. Mokaev** (Saint Petersburg State University, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences). **Method of "transition into space of derivatives": analysis, synthesis and control of oscillations**

*Abstract.* This report presents the history of the development of the method of “transition into space of derivatives", which is an effective frequency criterion for the existence of a nontrivial periodic oscillation in multidimensional models of automatic control systems with one differentiable nonlinearity. The history of the development of this method is described in the framework of its connection with the generalized Poincaré-Bendixson principle, as well as in the framework of solving a number of problems of mathematical control theory.

Н.В. КУЗНЕЦОВ, М.Ю. ЛОБАЧЕВ, М.В. ЮЛДАШЕВ, Р.В. ЮЛДАШЕВ
(Санкт-Петербургский государственный университет,
Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

# АНАЛИЗ ГРАНИЦ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ ТИПА 2

*В докладе рассматривается проблема оценки границ глобальной устойчивости в пространстве параметров классической модели фазовой автоподстройки частоты типа 2.*

**Введение.** Схемы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) являются нелинейными системами управления, которые были изобретены в 1930-х годах и получили широкое распространение в системах связи, распределенных компьютерных архитектурах, глобальных навигационных спутниковых системах, энергетических системах и других приложениях [1]-[3]. Для проектирования систем ФАПЧ во второй половине прошлого века были разработаны математические методы нелинейного анализа. Однако, в основном они были сфокусированы на ФАПЧ с устойчивыми фильтрами (ФАПЧ типа 1). В настоящее время на практике наиболее часто используются ФАПЧ с погранично устойчивыми фильтрами, имеющими один нулевой полюс передаточной функции (ФАПЧ типа 2) [3]. В настоящее время в связи с развитием технологий такие фильтры могут быть реализованы с высокой точностью, обеспечивая устойчивую работу и широкую полосу захвата, что делает их наиболее используемыми на практике. Предлагаемый доклад посвящен оценке границ глобальной устойчивости в пространстве параметров аналоговой системы ФАПЧ второго типа.

***Схема системы ФАПЧ и анализ границ глобальной устойчивости.***

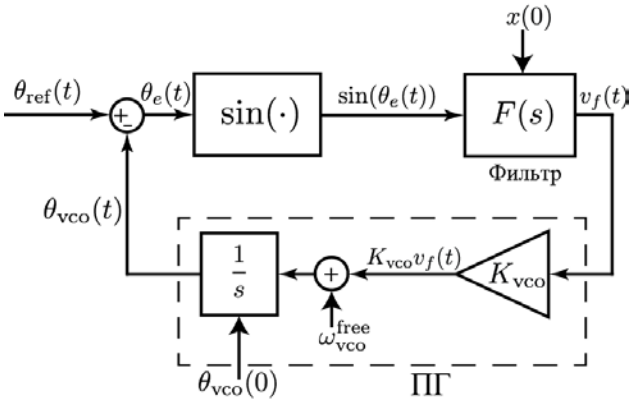



Рисунок 1. Схема классической системы ФАПЧ в пространстве фаз сигналов.

Важной характеристикой схемы ФАПЧ является полоса захвата [3,6] – максимальная разность частоты эталонного генератора и собственной частоты подстраиваемого генератора (ПГ) такая, что математическая модель глобально устойчива. Известно, что в зависимости от значений параметров полоса захвата системы ФАПЧ типа 2 либо пуста, либо бесконечна [3]. Поэтому для таких систем задача оценки полосы захвата состоит в определении параметров системы, гарантирующих притяжение любой траектории к какому-либо состоянию равновесия (глобальная устойчивость).

Тогда как системы ФАПЧ типа 2 второго порядка глобально устойчивы при любых параметрах схемы [2],[4], анализ границ глобальной устойчивости систем высокого порядка – нетривиальная задача. В 1981 году американский инженер В. Иган выдвинул гипотезу о том, что *системы ФАПЧ типа 2 имеет бесконечную полосу захвата* [5], то есть что соответствующая система имеет асимптотически устойчивые состояния равновесия и глобально устойчива при любых значениях параметров и для любой разности частот. В случае справедливости гипотезы анализ глобальной устойчивости такого класса систем мог бы проводиться с использованием исключительно линейных методов. Для систем управления с единственным состоянием равновесия аналогичные гипотезы, выделяющие такие классы систем, были выдвинуты М.А. Айзер-

маном и Р. Калманом [9,10]. В случае системы второго порядка гипотеза Игана справедлива, но уже для системы третьего порядка допускает построение контрпримеров [7,8].

Естественным образом возникает задача определения класса систем ФАПЧ типа 2, для которых из существования асимптотически устойчивых состояний равновесия (локальный анализ) следует глобальная устойчивость системы. В данной работе на основе частотных методов получаются достаточные условия глобальной устойчивости и проводится анализ переходных процессов (консервативная оценка полосы быстрого захвата), с использованием аналитико-численных методов проверяются границы выполнимости гипотезы Игана.

**Заключение.** В докладе получены достаточные условия глобальной устойчивости систем ФАПЧ типа 2 высоких порядков, с помощью частотных методов получена оценка полосы быстрого захвата. Границы справедливости гипотезы Игана проанализированы с помощью аналитико-численных методов.

БЛАГОДАРНОСТИ

*Работа выполнена при поддержке программы Ведущие научные школы Российской Федерации (НШ-2624.2020.1).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахгильдян, В.В., Ляховкин, А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты, М.: Связь, 1966.
2. Viterbi, A. Principles of coherent communications, New York, McGrawHill, 1966.
3. Gardner, F. Phaselock techniques, New York, John Wiley & Sons, 2005.
4. Бакаев, Ю.Н. Устойчивость и динамические свойства астатической системы фазовой автоподстройки. Радиотехника и электроника, 8(3):513-516, 1963.
5. Egan, W.F. Frequency synthesis by phase lock, New York: John Wiley & Sons, 1981.
6. Кузнецов, Н.В., Лобачев, М.Ю., Юлдашев, М.В., Юлдашев, Р.В. О проблеме Гарднера для систем управления фазовой автоподстройкой частоты. Доклады Академии наук, 489(6):541–544, 2019.
7. Kuznetsov, N.V., Lobachev, M.Y., Yuldashev, M.V., Yuldashev, R.V., Kolumbán, G. Harmonic balance analysis of pull-in range and oscillatory behavior of third-order type 2 analog PLLs. IFAC-PapersOnLine, 2020 (21st IFAC World Congress, 2020)
8. Kuznetsov, N.V., Lobachev, M.Y., Yuldashev, M.V., Yuldashev, R.V. The Egan problem on the pull-in range of type 2 PLLs. IEEE Transactions on Circuits and Systems - II: Express Briefs, 2020. (submitted).
9. Кузнецов, Н.В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления. Известия РАН. Теория и Системы Управления, №5: 5-27, 2020.
10. Leonov, G.A., Kuznetsov, N.V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits, International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 23(1), 2013.

---

**N.V. Kuznetsov, M.Y. Lobachev, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev** (Saint Petersburg State University, Saint Petersburg)
**Analysis of global stability boundaries in type 2 phase-locked loops**

*Abstract.* In this report, the problem of estimation of global stability boundaries of classical type 2 phase-locked loop model in the parameters' space is considered.

Т.А. АЛЕКСЕЕВА
(Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург)

И. ЗЕЛИНКА
(Технический университет Остравы, Острава, Чешская республика)

Т.Н. МОКАЕВ
(Санкт-Петербургский государственный университет)

Ю.А. ПОЛЬЩИКОВА
(Научно-исследовательский финансовый институт Министерства финансов Российской Федерации,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва)

# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛИ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ПОКОЛЕНИЙ

*Управление и стабилизация нерегулярного поведения динамических систем, включая хаотические процессы, является междисциплинарной проблемой. Прогнозирование динамики неустойчивых экономических процессов позволяет изменять поведение экономической системы для достижения ее максимальной эффективности. Мы применяем метод управления с обратной связью с задержкой по времени, предложенный К. Пирагасом, и, опираясь на алгоритмы искусственного интеллекта, решаем задачу подбора оптимального параметра управления для стабилизации неустойчивых периодических орбит и подавления хаоса в модели перекрывающихся поколений.*

**Введение.** Одной из основных задач при изучении экономических процессов является прогнозирование их динамики с целью дальнейшей оптимизации и управления этими процессами. Эта задача лежит в области математической теории управления и рассматривается в приложениях для различных динамических систем (см., например, [1-5]). Неустойчивая, в том числе хаотическая, динамика, которая может возникать в экономической системе, снижает точность прогнозов и создает картину непредсказуемого развития событий, что значительно усложняет, а иногда делает невозможным, управление соответствующим процессом. Поэтому разработка и применение эффективных методов подавления хаоса и приведения динамики модели к устойчивому режиму с помощью малых корректировок параметров модели является важной задачей. В рамках этой задачи мы изучаем свойства динамики (выявляем устойчивые и неустойчивые режимы, в том числе хаотические) в дискретной модели перекрывающихся поколений (overlapping generations model – OLG [6,7]). Хорошо известно, что стабилизация неустойчивых орбит успешно реализуется с помощью метода обратной связи с запаздыванием (time-delayed feedback control), предложенного К. Пирагасом [8]. В то же время подбор параметров управления в методе Пирагаса является нетривиальной задачей (см., например, [5,9]). Для эффективного решения этой проблемы мы применяем технологии искусственного интеллекта, а именно алгоритм дифференциальной эволюции (см., например, [10,11]), оптимизируя поиск управляющего параметра в методе Пирагаса. Сочетание эволюционных алгоритмов с методами стабилизации неустойчивой динамики в данной модели существенно повышает эффективность управления хаотическим поведением и позволяет значительно быстрее и точнее настраивать управляющей параметр для достижения желаемого состояния системы.

***Динамика и управление в OLG-модели***. Мы рассматриваем модификацию известной двумерной дискретной OLG-модели [12] с производством и агентами, живущими два периода (молодые и пожилые). Экономика в OLG-модели представлена фирмами, максимизирующими свою прибыль и производящими единый товар, используя труд и капитал, и домохозяйствами, которые максимизируют свою полезность $U_t(c_t, c_{t+1}, l_t)$, предоставляя рабочую силу. Сбережения превращаются в капитал, который становится продуктивным в следующем периоде, а выплата процентов по капиталу обеспечивает потребление домашних хозяйств, когда агенты не могут работать во втором периоде своей жизни. Мы решаем задачу динамической оптимизации для потребителя и фирм с ресурсными и бюджетным ограничениями, вводя государственные расходы через пропорциональный налог, в результате чего получаем следующую систему

$$\begin{cases} c_{t+1} = \left( l_t^{\gamma} - c_t^{\theta} \right)^{1/\alpha}, \\ l_{t+1} = b\left( \beta l_t - c_t - g_t \right), \end{cases} \tag{1}$$

где $c_t, c_{t+1}$ - потребление и $l_t, l_{t+1}$ - труд молодых в момент времени $t$ и в момент времени $t$+1, когда они будут пожилыми, соответственно; $g_t$ - государственные расходы в момент времени $t$; $\gamma > 1, \theta > 1, \alpha > 1, b > 1, 0 < \beta < 1$ - параметры модели.

При определенных значениях параметров система (1) демонстрирует хаотическую динамику. Для подавления хаоса и стабилизации неустойчивых состояний (неустойчивых периодических орбит с периодом 5, вложенных в хаотический аттрактор) системы (1) мы применяем метод Пирагаса. Управление вводится в модель через переменную $g_t$, которая включает в себя пропорциональный налог $\tau_t$ и труд $l_t$: $g_t = \tau_t \beta l_t$, что позволяет реализовать управление естественным образом.

Для понимания экономической политики в рамках рассматриваемой модели важно учитывать следующие моменты. Во-первых, переход от неустойчивых орбит к другим типам (например, к периодическим орбитам) на аттракторе может означать выбор иного (в частности, предсказуемого) поведения экономической системы. Во-вторых, небольшие изменения параметров и наличие множества апериодических орбит могут сигнализировать об экономии ресурсов в экономической системе и о возможности выбора между различными компромиссами в экономической политике. Таким образом, подавление хаоса за счет добавления в модель управляющей переменной позволяет прогнозировать желаемую динамику экономической системы и конструировать оптимальный выбор экономической политики без изменения исходных фундаментальных характеристик системы.

***Оптимизация настройки управляющих параметров.*** Система (1) при $\theta = \alpha$ после замены координат $c_t := c_t^{1/\alpha}$, $l_t := l_t$ и параметра $\lambda := \frac{1}{\alpha}$, а также после введения управления по Пирагасу, может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} c_{t+1} = l_t^{\gamma} - c_t, \\ l_{t+1} = b\left( \beta l_t - c^{\lambda} + k_1 \left( l_t - l_t^{(5)} \right) \right), \\ l_{t+1}^{(1)} = l_t + k_2 \left( l_t - l_t^{(5)} \right), \\ l_{t+1}^{(2)} = l_t^{(1)}, l_{t+1}^{(3)} = l_t^{(2)}, \\ l_{t+1}^{(4)} = l_t^{(3)}, l_{t+1}^{(5)} = l_t^{(4)}. \end{cases} \tag{2}$$

Соответствующая матрица Якоби линейной части (2) имеет вид

$$J(c_t, l_t) = \begin{pmatrix} -1 & \gamma l_t^{\gamma-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda b c_t^{\lambda-1} & b(\beta + k_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & -bk_1 \\ 0 & 1 + k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Для оптимального выбора управляющих параметров $k_1$, $k_2$, стабилизирующих неустойчивую периодическую траекторию, нами предложено использовать алгоритм дифференциальной эволюции со схемой DE/rand/1/bin (см., например, [11]) и целевой функцией

$$\mathrm{CF}(k_1, k_2) = \begin{cases} \infty, & \mathrm{CF}_{temp}(k_1, k_2) > 1, \\ \mathrm{CF}_{temp}(k_1, k_2), & \text{иначе}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\mathrm{CF}_{temp}(k_1,k_2)=\max\left\{\left|\lambda_1[\Phi]\right|,\ldots,\left|\lambda_7[\Phi]\right|\right\}$ - спектральный радиус следующей фундаментальной матрицы

$$\Phi=\Phi(c_t,l_t)=J(c_{t+4},l_{t+4})\cdot J(c_{t+3},l_{t+3})\cdot J(c_{t+2},l_{t+2})\cdot J(c_{t+1},l_{t+1})\cdot J(c_t,l_t). \quad (5)$$

Используя такой подход, можно, например, эффективно подобрать значения управляющих параметров $k_1=-0.18808852$, $k_2=-0.95598289$ и стабилизировать неустойчивую периодическую орбиту периода 5:
(0,49786228048149456, 0,9336025046020485) → (0,433817924634687, 1,2333289032631394) →
(0,807294938247322, 1,7546020061352825) → (0,9771534043359568, 1,8648192605089056) →
(0,9228564283533333, 1,4062615940651981), вложенную в хаотический аттрактор системы (1) при $\lambda=3;\beta=0,99;\gamma=1,03;b=1,54$ .

**Заключение.** Существуют различные подходы к решению задач прогнозирования динамики и управления для нелинейных систем с хаотическим поведением (см., например, [1-3,13,14]), в том числе локализация хаотического аттрактора для получения приблизительного прогноза (см., например, [1,2,4]) или введение управления неустойчивыми периодическими орбитами, вложенными в хаотический аттрактор (см., например, [5,9]). В последнем случае использование эволюционных алгоритмов позволяет выполнить тонкую настройку управления и достичь стабилизации неустойчивых орбит значительно быстрее. Для оптимальных значений управляющего параметра OLG-модели мы стабилизируем ее хаотическую динамику, что позволяет не только контролировать поведение соответствующей экономической системы, но и выбирать предпочтительные периодические решения, то есть повысить предсказуемость воздействий выбранной экономической политики.

*Работа выполнена при поддержке программы Ведущие научные школы Российской Федерации (НШ-2624.2020.1).*

ЛИТЕРАТУРА


1. Kuznetsov N., Leonov G., Mokaev T., Prasad A., Shrimali M. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 92. P. 267–285.
2. Kuznetsov N., Mokaev T., Kuznetsova O., Kudryashova E. The Lorenz system: hidden boundary of practical stability and the Lyapunov dimension. *Nonlinear Dynamics*. 2020.
3. Кузнецов Н.В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления. *Известия РАН. Теория и Системы управления*. 2020. №5. С. 5–27.
4. Alexeeva T.A., Barnett W.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. Dynamics of the Shapovalov mid-size firm model. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. Vol. 140, art. num. 110239.
5. Alexeeva T.A., Barnett W.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. Time-delay control for stabilization of the Shapovalov mid-size firm model. *IFAC-PapersOnLine. 21th IFAC World Congress 2020* (*1st Virtual IFAC World Congress*).
6. Diamond P. National debt in a neoclassical growth model. *American Economic Review.* 1965. Vol. 55. №5. P. 1126–1150.
7. Samuelson P.A. An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money. *Journal of Political Economy*. 1958. Vol 66. №6. P. 467–482.
8. Pyragas K. Continuous control of chaos by selfcontrolling feedback. *Physics Letters A*. 1992. Vol. 170, №6. P. 421-428.
9. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Shumafov M.M. A short survey on Pyragas time-delay feedback stabilization and odd number limitation. *IFAC-PapersOnLine.* 2015. Vol. 48. №11. P. 706-709.
10. Storn R., Price K. Differential evolution–a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of global optimization*. 1997. Vol. 11, №4, P. 341-359.
11. **Zelinka I., Celikovsky S., Richter H., Chen G.** Evolutionary algorithms and chaotic systems. *Springer*. 2010. Vol. 267. 560 p.
12. Mendes D.A., Mendes V. Control of chaotic dynamics in an OLG economic model. *Journal of Physics*: *Conference Series*. 2005. №23. P. 158–181.
13. Kuznetsov N. The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method. *Physics Letters* A. 2016. Vol. 380. №25–26. P. 2142–2149.
14. Kuznetsov N., Alexeeva T., Leonov G. Invariance of Lyapunov characteristic exponents, Lyapunov exponents, and Lyapunov dimension for regular and non-regular linearizations. *Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 85. №1. P. 195–201.

**T.A. Alexeeva** (National Research University Higher School of Economics, St.Petersburg), **I. Zelinka** (Technical University of Ostrava (VŠB-TU), Czech Republic), **T.N. Mokaev** (St.Petersburg University), **I.A. Polshchikova** (Financial Research Institute of the Ministry of Finance of the Russian Federation, National Research University Higher School of Economics, Moscow). **Forecasting and control in an overlapping generations model: artificial intelligence algorithms approach.**

*Abstract.* Controlling and stabilizing the non-regular behavior of dynamical systems, including chaotic processes, is an interdisciplinary problem. Forecasting the dynamics of unstable economic processes allows one to change the behavior of the economic system to achieve its maximum efficiency. We apply the time-delayed feedback control method proposed by Pyragas, and, relying on artificial intelligence algorithms, we solve the problem of selecting the optimal control parameter to stabilize unstable periodic orbits and suppress chaos in the overlapping generations model.

Н.В. КУЗНЕЦОВ, М.В. ЮЛДАШЕВ, Р.В. ЮЛДАШЕВ, М.Ю. ЛОБАЧЕВ
(Санкт-Петербургский государственный университет,
Институт проблем машиноведения РАН)

С.И. ВОЛЬСКИЙ, Д.А. СОРОКИН
(Московский авиационный институт, ООО «Трансконвертер»)

# АВТОПОДСТРОЙКА ИНВЕРТОРОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ: ДИАПАЗОН ЗАХВАТА И ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕ ЦИКЛОВ

*В докладе рассматривается один из вопросов взаимодействия инверторных электрических систем с системами управления на основе специальных моделей фазовой автоподстройки частоты Enhanced Phase-Locked Loop .*

**Введение.** В электроэнергетике синхронизация с сетью часто применяется в системах с ведомыми инверторами и выпрямителями (например, в решениях компаний ООО “Трансконвертер” и SIEMENS AG). Ведомые сетью инверторы применяются как согласующие преобразователи солнечных батарей и ветряных установок с сетью [1,2], как существенная часть привода при рекуперативном торможении железнодорожного состава и как вспомогательный преобразователь в составе электронной нерассеивающей нагрузки.

Применение транзисторных выпрямителей – корректоров коэффициента мощности [3-5], обеспечивающих как синусоидальность фазных токов, так и их синфазность соответствующим фазным напряжениям, связано с широким распространением нелинейных нагрузок, искажающих форму потребляемого тока, одновременно с существованием стандартов меж- дународной электротехнической комиссии, жёстким образом ограничивающих эмиссию выс- ших гармонических составляющих в сеть. Рост востребованности в корректорах коэффициен- та мощности связан с развитием автономного электротранспорта, осуществляющего быструю зарядку аккумуляторных батарей, а также железнодорожного транспорта с питанием от контактной сети переменного тока. В последнее время к корректорам коэффициента мощности проявляют внимание разработчики авиационного электрооборудования полностью электрифицированных самолетов (АО “Аэроэлектромаш”, АО “Технодинамика”).

Прямое использование классических ФАПЧ [6-10] для задач синхронизации инверторов и корректоров коэффициента мощности встречается редко, в частности из-за достаточно низкой частоты по сравнению с частотами в задачах беспроводной связи, традиционных для ФАПЧ. Кроме того характер шумов и требования синфазности вносят дополнительные сложности. Для решения этих и других задач была предложена схема Enhanced Phase-Locked Loop (EPLL) позволяющая в дополнение к синхронизации по частоте и фазе определять амплитуду входного сигнала.

**Математический анализ EPLL.** Рассмотрим блок-схему Enhanced PLL на Рисунке 1 и соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{v} = \frac{\mu}{2}\left(-v + u\cos\theta_e - u\cos\left(2\omega_{ref}\,t - \theta_e\right) + v\cos\left(2\omega_{ref}\,t - 2\,\theta_e\right)\right),$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2\tau_1}u\sin\theta_e + \frac{1}{2\tau_1}\left(u\sin\left(2\omega_{ref}\,t - \theta_e\right) - v\sin\left(2\omega_{ref}\,t - 2\,\theta_e\right)\right),$$

$$\dot{\theta_e} = \omega_e^{free} - K_{vco}\left(x + \frac{\tau_2}{2\tau_1}\left(u\sin\theta_e + u\sin\left(2\omega_{ref}\,t - \theta_e\right) - v\sin\left(2\omega_{ref}\,t - 2\,\theta_e\right)\right)\right),$$

где $u\sin\theta_{ref}$ – входной сигнал с амплитудой $u$, фазой $\theta_{ref}$ и частотой $\omega_{ref}$, $v$ – оценка входной амплитуды, $x$ – состояние фильтра, $K_{vco}$ – входное усиление управления подстраиваемого генератора (VCO, инвертер), $\theta_{vco}$ – фаза подстраиваемого генератора, $\theta_e = \theta_{ref} - \theta_{vco}$ расфазировка, $\omega_e^{free}$ – начальная разность частот, $\tau_1, \tau_2, \mu$ – параметры.

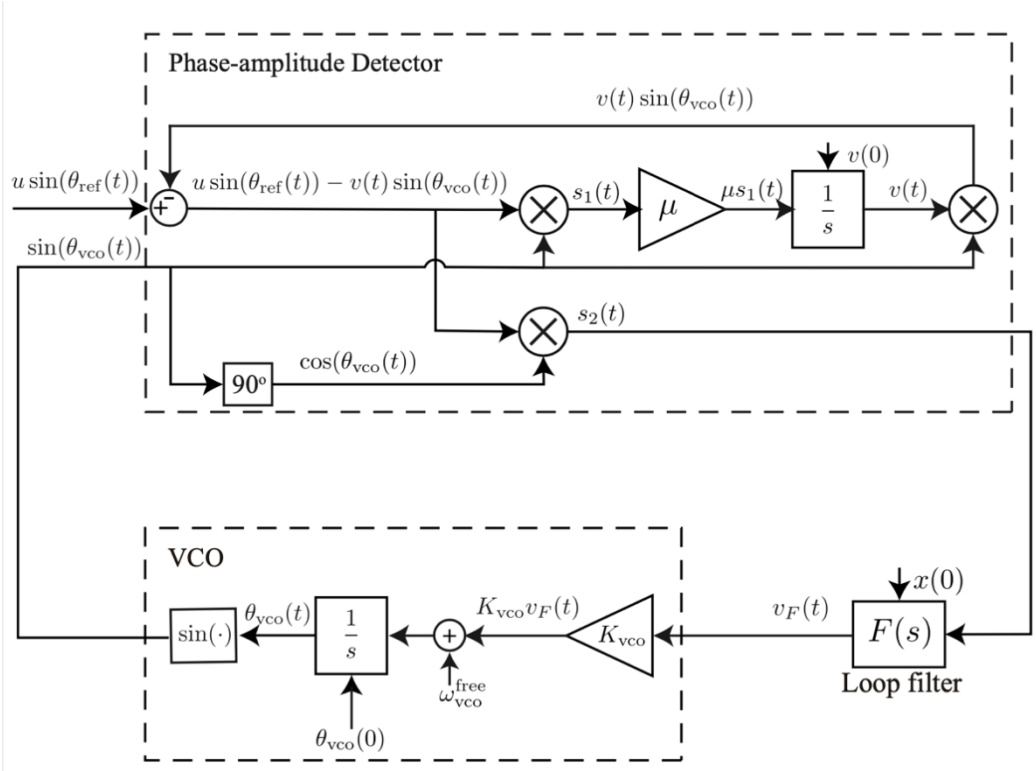



Рисунок 1. Схема Enhanced Phase-Locked Loop.

Полученная система неавтономных нелинейных дифференциальных уравнений затрудняет применение методов теории управления для определения устойчивости и диапазонов захвата и захвата без проскальзывания. Для решения этой проблемы оказались эффективными методы классической теории усреднения Крылова-Боголюбова [11], развиваемые в школе Г.А. Леонова для систем фазовой автоподстройки [12-14]. Такой подход позволяет перейти к автономной нелинейной системе дифференциальный уравнений классической ФАПЧ, при выполнении условий медленно меняющейся входной частоты.

Следующим шагом после усреднения, необходимо исследовать глобальную и локальную устойчивость полученной системы, имеющей бесконечное число состояний равновесий, которые могут быть разбиты на два класса – неустойчивые и устойчивые, чередующиеся друг с другом. Глобальный анализ может быть проведен с помощью функции Ляпунова для случая пропорционально-интегрирующего фильтра [15], который показывает бесконечность полосы захвата.

В приложении к электрическим сетям понятие проскальзывания циклов приобретает особое значение: при соединении двух электрических сетей с большой разностью фаз может произойти короткое замыкание, возникают дополнительные шумы и другие нежелательные эффекты. Для определения полосы частот, исключающих эти эффекты определения данные в [16] обобщаются для произвольны предельных значений фаз, которые могут быть отличны от $\pm\pi$. В этом случае, вычисление указанных диапазонов происходит либо численно, аналогично классической PLL, либо с помощью аналитических оценок с помощью функций Ляпунова и различных приближений первыми членами ряда Фурье.

**Заключение.** В работе описана задача автоподстройки инверторов в электрических сетях, описаны основные подходы к анализу диапазона захвата и диапазона захвата без проскальзывания. Дальнейший анализ фильтров более высокого порядка возможен с помощью применения частотных методов [17], компьютерного моделирования и практической реализации прототипов.

*Работа выполнена при поддержке программы Ведущие научные школы Российской Федерации (НШ-2624.2020.1).*

ЛИТЕРАТУРА


1. Burton T., Jenkins N., Sharpe D., Bossanyi E. Wind energy handbook. John Wiley & Sons, 2011.
2. Karimi-Ghartemani M. Enhanced phase-locked loop structures for power and energy applications. John Wiley & Sons, 2014.
3. Розанов Ю.К, Рябчицкий М.В., Кваснюк А.А. Силовая электроника. Изд. дом МЭИ, 2009.
4. Мелешин В.И. Транзисторная преобразовательная техника. ТЕХНОСФЕРА, 2005.
5. Kolar J.W., Friedli T. The essence of three-phase pfc rectifier systemsвЂ”part i. IEEE Transactions on Power electronics, 28(1):176–198, 2012.
6. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты, М.: Связь, 1966.
7. Viterbi A. Principles of coherent communications, New York, McGrawHill, 1966.
8. Gardner F. Phaselock techniques, New York, John Wiley & Sons, 2005.
9. Бакаев Ю.Н. Устойчивость и динамические свойства астатической системы фазовой автоподстройки. Радиотехника и электроника, 8(3):513-516, 1963.
10. Egan W.F. Frequency synthesis by phase lock, New York: John Wiley & Sons, 1981.
11. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1963. – 407 с.
12. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldahsev M.V., Yuldashev R.V. Computation of phase detector characteristics in synchronization systems Doklady Mathematics 84 (1), 586-590
13. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev. Analytical method for computation of phase-detector characteristic. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs 59 (10), 633-637
14. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Phase-detector characteristic of classical PLL for general case of linear filter IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)
15. Aleksandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Neittaanmäki P, Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Computation of the lock-in ranges of phase-locked loops with PI filter, IFAC-PapersOnLine, Volume 49, Issue 14, 2016, pp. 36-41
16. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 62, no. 10, pp. 2454-2464, Oct. 2015, doi: 10.1109/TCSI.2015.2476295.
17. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. Москва. «Наука». 1978 г.


---

**N.V. Kuznetsov, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev, M.Yu. Lobachev** (St. Petersburg State University, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences), **S.I. Volskiy, D.A. Sorokin** (Moscow Aviation Institute, LLC «Ttansconverter»)**. Automatic control of inverters in electrical networks: capture range and cycle slipping**

*Abstract.* The report discusses one of the issues of interaction of inverter electrical systems with control systems based on special models of the phase-locked loop, called Enhanced Phase-Locked Loop.

Н.В. КУЗНЕЦОВ, Е.Д. АКИМОВА, Р.Н. МОКАЕВ
(Санкт-Петербургский Государственный Университет)

И.М. БОЙКО
(Университет науки, технологий и исследований имени Халифы, Абу-Даби)

# АНАЛИЗ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ В РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМАХ ЛУРЬЕ: ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ УСТОЙЧИВОСТИ, ГАРМОНИЧЕСКИЙ БАЛАНС, ГОДОГРАФ ЦЫПКИНА

*Анализ глобальной устойчивости разрывных систем с помощью классических методов теории колебаний может быть достаточно трудной, а в некоторых случаях невыполнимой задачей. Благодаря появлению частотных критериев, применимых к разрывным системам, и развитию аналитико-численных методов, были найдены новые подходы к определению границ устойчивости в системах с разрывной правой частью. В рамках настоящего доклада мы рассматриваем один из таких подходов на примере модели регулятора Уатта, учитывающей саморегулирование объекта и воздействие по производной и проводим анализ полученных результатов.*

**Введение.** Стремительное развитие аналитико-численных методов в последние годы сделало возможным выявление предельных динамических режимов, связанных с теорией скрытых колебаний, которые не могли быть обнаружены ранее. Классификация колебаний как скрытых и самовозбуждающихся была предложена в [1]: если колебание может быть визуализировано численно с помощью траектории, выпущенной из окрестности неустойчивого состояния равновесия, его называют *самовозбуждающимся*, в противном случае – *скрытым*. В связи с этим появилась необходимость пересмотра границ применимости классических методов определения устойчивости и наличия колебаний в нелинейных системах управления, а также разработки специальных аналитико-численных методов поиска скрытых колебаний в таких системах.

Одним из методов определения границ устойчивости в разрывных системах является метод точечных отображений Андронова, который позволяет провести строгий анализ фазового пространства системы. Несмотря на то, что с его помощью можно получить необходимые и достаточные условия глобальной устойчивости, во многих случаях его применение может быть затруднительным, в частности для систем высоких порядков. Также стоит отметить, что метод применим только к системам с кусочно-линейными нелинейностями.

Благодаря развитию теории глобальной устойчивости и перенесению классических результатов на случай разрывных систем, в настоящее время, используя частотные критерии, которые разрабатывались А.Х. Гелигом, В.А. Якубовичем, Г.А. Леоновым и их последователями, стало возможным получать достаточные условия глобальной устойчивости в общем виде для систем любого порядка. Среди инженеров одним из наиболее часто используемых методов поиска и анализа колебаний в нелинейных системах управления является метод гармонического баланса (МГБ). Для систем Лурье с нелинейностью типа реле также применимы методы Цыпкина и годографа возмущённой релейной системы (locus of a perturbed relay system, LPRS), которые являются дальнейшим развитием метода гармонического баланса для релейных систем и дают более точные результаты. Таким образом, объединив частотные методы и методы поиска периодических колебаний, можно получить оценку границы глобальной устойчивости.

Предлагаемый доклад посвящён изучению границ глобальной устойчивости нелинейной модели регулятора Уатта с учётом сухого трения и саморегулирования объекта и сравнению полученных результатов с уже имеющимися (математическая постановка данной задачи была предложена А.А. Талем[1] в [2]).

**Колебания и устойчивость релейных систем.** Рассмотрим систему Лурье с одной скалярной нелинейностью типа реле

[1] А.А. Таль – известный советский учёный в области теории управления и пневматических средств автоматизации, после окончания МГТУ им. Баумана работал в московском отделении НПО ЦКТИ им. Ползунова, а затем в ИПУ АН СССР.

$$\dot{x} = Px + q\text{sign}(\sigma), \quad \sigma = -r * x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $q \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $r \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Решение системы будем понимать по Филиппову [3]. Передаточной функцией системы (1) является $W(s) = r * (P - Is)^{-1}q$.

***Метод гармонического баланса.*** Классический метод гармонического баланса был одним из первых приближённых аналитических методов анализа колебаний в нелинейных системах управления. Он был разработан в первой половине 20 века в работах Б. ван дер Поля [4] и Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [5].

Предположим, что входом системы (1) является некоторый гармонический сигнал $a\cos(\omega_0 t)$. Частота $\omega_0$ и коэффициент гармонической линеаризации $k$ определяются следующим образом:

$$\text{Im}W(j\omega_0) = 0,$$
$$k = -\big(\text{Re}W(j\omega_0)\big)^{-1}.$$

Амплитуду $a$ можно найти из уравнения гармонического баланса

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \Big(\text{sign}\big(a\cos(\omega_0 t)\big)\cos(\omega_0 t) - k\cos^2(\omega_0 t)\Big)\,dt = 0.$$

Несмотря на то, что МГБ является приближённым, для некоторых систем он даёт точный ответ о наличии или отсутствии в них колебаний, например, для модели Вышнеграского, описывающей динамику машины и движение регулятора Уатта с учётом вязкого и кулоновского трения [6, 7, 8]. Однако известны примеры, в которых применение МГБ может приводить к неправильным выводам о наличии или отсутствии колебаний. Так, в применении к двумерной модели подавления флаттера органов управления самолета при помощи гидравлического демпфера с сухим трением, предложенной М.В. Келдышем [9], при некоторых значениях параметров метод говорит о наличии периодических колебаний в фазовом пространстве системы, но на самом деле они отсутствуют [10]. С другой стороны, для четырёхмерной модели подавления флаттера, МГБ не обнаруживает периодические колебания, но их удаётся локализовать с помощью других методов [8].

***Методы Цыпкина и LPRS.*** Методы Цыпкина и LPRS, разработанные Я.З. Цыпкиным и И.М. Бойко и описанные в [11] и [12] соответственно, являются развитием МГБ для релейных систем и могут давать более точные результаты. В рамках этих методов необходимо построить специальные функции $J_{Tsyp}(\omega)$ и $J_{LPRS}(\omega)$:

$$J_{Tsyp}(\omega) = \frac{4}{\pi}\left(\sum_{l=1}^{\infty} \text{Re}W(j(2l-1)\omega)\right) + j\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l-1}\text{Im}W(j(2l-1)\omega);$$

$$J_{LPRS}(\omega) = -\frac{1}{2}r * \left[P^{-1} + \frac{2\pi}{\omega}\left(I - e^{\frac{2\pi}{\omega}P}\right)^{-1} e^{\frac{\pi}{\omega}P}\right]q + j\frac{\pi}{4}r * \left(I + e^{\frac{\pi}{\omega}P}\right)^{-1}\left(I - e^{\frac{\pi}{\omega}P}\right)P^{-1}q,$$

в случае трёхпозиционного реле без гистерезиса, значения частот периодических решений могут быть найдены из соответствующих уравнений:

$$\begin{cases}\text{Im}\, J_{Tsyp}(\omega_0) = 0,\\ \text{Re}\, J_{Tsyp}(\omega_0) < 0;\end{cases}$$
$$\text{Im}\, J_{LPRS}(\omega_0) = 0.$$

Методы Цыпкина и LPRS позволяют сделать более точные выводы о наличии или отсутствии периодических колебаний в фазовом пространстве системы. Например, с их помощью можно локализовать симметричное периодическое решение в четырёхмерной модели подавления флаттера [8], которое не может быть найдено с помощью МГБ. При этом и у этих методов есть свои ограничения: с их помощью невозможно обнаружить асимметричные периодические решения. Несмотря на это, идеи, на которых был основан метод LPRS, можно использовать для поиска таких решений [13].

***Модель Таля.*** Модель, рассмотренная А.А. Талем в [2] является обобщением модели регулятора Уатта, описанной Вышнеградским. Строгий глобальный анализ нелинейной модели регулятора Уатта и обоснование полученных Вышнеградским условий отсутствия колебаний стали возможны во многом благодаря развитию А.А. Андроновым и сотрудниками его школы математической теории колебаний [14]. Таль, следуя результатам, полученным А.А. Андроновым

и А.Г. Майером [7], провёл аналогичные рассуждения и получил условия глобальной устойчивости рассматриваемой им модели для некоторых значений параметров.

Рассмотрим уравнения, описывающие динамику машины и движение регулятора Уатта с учётом саморегулирования объекта управления, воздействия по производной регулируемого параметра, вязкого и кулоновского трения, приведённые в [2]. При введении безразмерных они принимают следующий вид:

$$\ddot{x} + B\dot{x} + (A + D)x = (1 - DC)y - \frac{1}{2}\mathrm{sign}(\dot{x}), \dot{y} + Cy = -x,$$

где $A$ – параметр неравномерности регулятора, $B$ – параметр вязкого трения, $C$ – параметр саморегулирования объекта, $D$ – параметр воздействия по первой производной. Запишем эту систему в форме Лурье (1), матрицы $P$, $q$, и $r$ имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(A+D) & -B & 1-CD \\ -1 & 0 & -C \end{pmatrix}, q = -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

С помощью частотного критерия для разрывных систем [15, с. 206] нами были получены достаточные условия глобальной устойчивости системы (2), которые были уточнены с помощью описанных выше методов и численного анализа. Тем самым была получена более точная оценка границы глобальной устойчивости для набора параметров системы, которые не были рассмотрены в [2].

**Заключение.** В настоящем докладе было проведено сравнение результатов двух подходов к определению границы глобальной устойчивости разрывных систем управления. В то время как с помощью метода точечных отображений Андронова можно получить те же результаты, как и с помощью современных методов, он достаточно сложен в применении к системам высоких порядков.

*Работа выполнена при поддержке программы Ведущие научные школы Российской Федерации (НШ-2624.2020.1).*

ЛИТЕРАТУРА


1. **Брагин В.О., Вагайцев В.И, Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.** Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи Чуа. Известия РАН. Теория и Системы Управления. 2011. №4, С. 3-36.
2. **Таль А.А.** Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования (с учетом саморегулирования объекта и воздействия по производной регулируемого параметра). Автоматика и телемеханика, 14, 1953.
3. **Филиппов А.Ф**. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
4. **van der Pol B.** On relaxation-oscillations. Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 7, №2, 1926, p. 978–992.
5. **Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н**. Введение в нелинейную механику. К.: Изд-во АН УССР, 1937.
6. **Вышнеградский И. А.** О регуляторах прямого действия, Изв. Санкт-Петербургского технологического института 1877, С. 21–62.
7. **Андронов А.А. Майер А.Г.** Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей. Доклады АН СССР, Т. 32, 1944, С. 58–60.
8. **Kuznetsov N.V., Mokaev R.N., Akimova E.D., Boiko I.M.** Harmonic balance method, Tsypkin hodograph, and LPRS: comparison and counterexamples. 2020 19th European ControlConference (ECC), 2020, p. 781-786.
9. **Келдыш М.В.** О демпферах с нелинейной характеристикой. Тр. ЦАГИ, Т. 557, 1944, С. 26–37.
10. **Леонов Г.А., Кузнецов Н.В.** О подавлении флаттера в модели Келдыша. Доклады Академии наук, Т. 428, вып. 1, 2018, С. 33–37.
11. **Цыпкин. Я.З.** Теория релейных систем автоматического регулирования. Гостехиздат, Москва, 1955.
12. **Boiko I.M.** Discontinuous Control Systems: Frequency-Domain Analysis and Design. Springer London, Limited, 2008.
13. **I. M. Boiko, N. V. Kuznetsov, R. N. Mokaev, E. D. Akimova.** On asymmetric periodic solutions in relay feedback systems. Journal of the Franklin Institute, 2020 (в печати).
14. **Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.** Теория колебаний. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
15. **Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, Наука, 1978


---

**Kuznetsov N.V., Akimova E.D., Mokaev R.N.** (Saint Petersburg University, Saint Petersburg), Boiko I.M. (Khalifa University of Science and Technology, Abu Dhabi). **Analysis of global stability and oscillations in discontinuous Lurie systems: frequency criteria of stability, harmonic balance, Tsypkin locus**

*Abstract.* Analyzing the global stability of discontinuous systems using classical methods of the theory of oscillations can be quite difficult and, in some cases, impossible. Due to the emergence of frequency methods for discontinuous systems analysis and the development of analytical-numerical methods, it became possible to find new approaches to determine stability boundaries in systems with discontinuous right-hand sides. In this report we apply one of such approaches to the model of Watt's regulator that takes account of the self-regulation of the plant and the derivative action and compare obtained results with those already available.

В. Б. СМИРНОВА
(Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет)

А. В. ПРОСКУРНИКОВ
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

Н. В. УТИНА
(Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет)

# РАЗВИТИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА В ПРИМЕНЕНИИ К СИСТЕМАМ СИНХРОНИЗАЦИИ

*Исследуется асимптотическое поведение систем типа Лурье с одной дифференцируемой периодической нелинейностью. С помощью нового класса функций Ляпунова и теоремы Калмана-Якубовича-Попова устанавливаются новые частотно-алгебраические критерии устойчивости по Лагранжу и глобальной асимптотической устойчивости.*

**Введение.** В докладе изучается асимптотическое поведение систем типа Лурье с критической линейной частью и периодической нелинейной функцией. Простейшими примерами таких систем являются математический маятник и система фазовой автоподстройки частоты с интегрирующим фильтром. Поэтому рассматриваемые системы носят название маятникоподобных систем или систем синхронизации. В силу своей специфики системы синхронизации часто обладают счетным множеством положений равновесия, как устойчивых в малом по Ляпунову, так и неустойчивых. Подробное изучение уравнения математического маятника показало, что системам синхронизации присущ особый тип устойчивости, когда каждое решение стремится к какому-нибудь положению равновесия. Такое поведение называется глобальной асимптотической устойчивостью.

К изучению нового типа устойчивости аппарат классических функций Ляпунова оказался неприменимым. Поэтому в рамках второго метода Ляпунова были разработаны новые методы, позволяющие получать условия глобальной асимптотической устойчивости систем синхронизации. Существенный вклад в развитие прямого метода Ляпунова для систем синхронизации внес Г.А. Леонов. С его именем связаны два эффективных метода исследования глобальной асимптотики: метод периодических функций Ляпунова и метод нелокального сведения [1]. Метод периодических функций Ляпунова использует модифицированные (с помощью специальной процедуры [2]) функции Лурье-Постникова. Метод нелокального сведения основан на “принципе сравнения” [3]. В состав функции Ляпунова вводятся траектории устойчивой системы низкого порядка – системы сравнения. С помощью леммы Калмана-Якубовича-Попова для обоих методов получены легко проверяемые достаточные частотно-алгебраические условия устойчивости. Каждый из методов имеет свои преимущества при оценке областей устойчивости различных механических и электротехнических систем.

Доклад посвящен разработке обобщенной функции Ляпунова, сохраняющей преимущества как метода периодических функций Ляпунова, так и метода нелокального сведения Леонова.

**Асимптотическое поведение систем синхронизации.**

***Постановка задачи.*** Рассматривается каноническая форма системы синхронизации со скалярным входом

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= Az(t) + b\varphi(\sigma(t)), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= c^T z(t) + \rho\varphi(\sigma(t)), \end{aligned} \tag{1}$$

где $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{m}}$, $b,c \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, $\rho \in \mathbf{R}$, $z:\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, $\sigma:\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $\varphi:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Предполагается, что матрица $A$ гурвицева, пара $(A,b)$ управляема, пара $(A,c)$ наблюдаема. Предполагается также, что функция $\varphi(\sigma) \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R})$, $\Delta$-периодична и имеет на периоде $[0, \Delta)$ два простых нуля $\sigma_i$ ($i$ = 1,2).

Система (1) имеет бесконечно много положений равновесия $\{z_{eq} = 0, \sigma_{eq} = \sigma_i + \Delta k \ (i = 1,2; k \in \mathbf{Z})\}$.

Целью исследования является получение условий устойчивости системы (1) по Лагранжу (любое решение системы ограничено при $t \in \mathbf{R}_+$), а также условий глобальной асимптотической устойчивости.

Все результаты формулируются в терминах передаточной функции линейной части системы (1) от входа $\varphi$ к выходу $(-\dot{\sigma})$

$$K(p) = -\rho + c^T (A - pI_n)b \quad (p \in \mathbf{C})$$

где $I_n$ – $n \times n$-единичная матрица.

***Устойчивость по Лагранжу.*** Сопоставим системе (1) систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -az - \varphi(\sigma) \quad (a > 0), \\ \dot{\sigma} &= z \end{aligned} \tag{2}$$

Известно [4], что для параметра $a$ существует бифуркационное значение $a_{cr}$ такое, что при $a > a_{cr}$ система (2) глобально асимптотически устойчива.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\sigma) = \sqrt{\left(1 - \alpha_1^{-1}\varphi'(\sigma)\right)\left(1 - \alpha_2^{-1}\varphi'(\sigma)\right)},$$

где $\alpha_1 \le \mu_1 = \inf\limits_{\sigma \in [0,\Delta)} \varphi'(\sigma)$, $\alpha_2 \ge \mu_2 = \sup\limits_{\sigma \in [0,\Delta)} \varphi'(\sigma)$ $(\alpha_1\alpha_2 < 0)$ и постоянную

$$\nu = \frac{\int\limits_0^\Delta \varphi(\sigma)\, d\sigma}{\int\limits_0^\Delta \Phi(\sigma)\left|\varphi(\sigma)\right| d\sigma}.$$

Пусть $\lambda_0 = \min\limits_i \left|\operatorname{Re}\lambda_i\right|$, где $\lambda_i$ – собственные значения матрицы $A$.

***Теорема 1.*** Пусть существуют такие числа $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$, $\delta > 0$, что выполняются условия:

1) $\operatorname{Re}\left\{K(i\omega - \lambda) - \tau\left(K(i\omega - \lambda) + \alpha_1^{-1}(i\omega - \lambda)\right)^* \left(K(i\omega - \lambda) + \alpha_2^{-1}(i\omega - \lambda)\right)\right\} -$
$- \varepsilon\left|K(i\omega - \lambda)\right|^2 \ge \delta, \quad \forall\, \omega \ge 0$
(символом $^*$ обозначено комплексное сопряжение);

2) $4\varepsilon\lambda > \alpha_{cr}^2\left(1 - \dfrac{2\sqrt{\tau\delta}}{|\nu|}\right)$;

3) $\max \Phi(\sigma) \le |\nu|^{-1}$.

Тогда система (1) устойчива по Лагранжу.

***Глобальная асимптотическая устойчивость.***

***Теорема 2.*** Пусть выполнены все условия теоремы 1 и существуют такие числа $\varepsilon' > 0$, $\tau' > 0$, $\delta' > 0$ $\alpha_1' \le \mu_1$, $\alpha_2' \ge \mu_2$, что

$$\operatorname{Re}\left\{K(i\omega) - \tau'\left(K(i\omega) + \alpha_1'^{-1} i\omega\right)^* \left(K(i\omega) + \alpha_2'^{-1} i\omega\right)\right\} - \varepsilon'\left|K(i\omega)\right|^2 \ge \delta', \quad \forall\, \omega \ge 0.$$

Тогда система (1) глобально асимптотически устойчива.

***Теорема 3.*** Пусть $\rho \le 0$. Пусть для $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$, $\delta > 0$, $\alpha_2 \ge \mu_2$ и $\lambda \in (0, \lambda_0)$ выполнены условия 2), 3) теоремы 1 и условие

$$\operatorname{Re}\left\{(1 + \tau\alpha_2^{-1}(i\omega + \lambda))\, K(i\omega - \lambda)\right\} - (\varepsilon + \tau)\left|K(i\omega - \lambda)\right|^2 \ge \delta, \quad \forall\, \omega \ge 0.$$

Тогда система (1) глобально асимптотически устойчива.

***Пример***. Рассмотрим систему фазовой автоподстройки частоты с передаточной функцией

$$K(p) = T\frac{Tsp+1}{Tp+1} \quad (T>0, s=0,2) \tag{3}$$

и

$$\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \beta \ \ (\beta \in (0,1)). \tag{4}$$

К системе (3),(4) была применена теорема 2. Полученные оценки области глобальной асимптотической устойчивости на плоскости $\{T^2, \beta\}$ при $T^2 \geq 1$ оказались лучше, чем оценки, установленные применением метода нелокального сведения [1] и метода периодических функций Ляпунова [5].

**Заключение.** В докладе установлены новые частотно-алгебраические условия устойчивости систем типа Лурье с периодическими нелинейными функциями. Новые критерии позволяют улучшать оценки областей устойчивости в пространстве параметров системы. С помощью метода априорных интегральных оценок Попова сформулированные в докладе теоремы легко могут быть распространены на системы синхронизации с распределенными параметрами, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра.

*(Работа проводилась при поддержке гранта РНФ 16-19-00057)*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. **Бакаев Ю.Н., Гуж А.А.** Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Доплера. *Радиотехника и электроника.* 1965. Том 10. № 1. С. 175–196.
3. Habets P. and Peiffer K. Classification of stability--like concepts and their study using Lyapunov functions. *J. Math. Anal. Appl.* 1973. Vol. 43. P. 537—570.
4. Leonov G.A., Ponomarenko D. and Smirnova V. B. Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore– New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific, 1996. 498 p.
5. Smirnova V.B. and Proskurnikov A.V. Volterra equations with periodic nonlinearities: multistability, oscillations and cycle slipping. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2019. Vol. 29, N. 5, 1950068, 26 p .

---

**V.B.Smirnova** (Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering**), A.V.Proskurnikov** (The Institute for Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg), **N.V.Utina** (Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering). **The Development of Lyapunov Direct Method in Application to Synchronization Systems**

*Abstract.* The asymptotic behavior of Lurie-type system with a periodic differentiable nonlinearity is considered. By new type of Lyapunov function and Kalman-Yakubovich-Popov lemma new frequency-algebraic criteria for Lagrange stability and for gradient-like behavior are established.

А. Н. ЧУРИЛОВ, Э. Р. САЛАХОВА
(Санкт-Петербургский государственный университет)

# КОЛЕБАНИЯ В НЕЙРОЭНДОКРИННОЙ СИСТЕМЕ: МОДЕЛЬ РЕГУЛЯЦИИ, ОСНОВАННАЯ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ СОБЫТИЙ

*Предложена новая импульсная модель нейроэндокринной регуляции. Для моделирования импульсов, генерируемых в ядрах гипоталамуса, используется схема «интегрировать-и-сработать»: импульсы возникают при достижении интегрированным мембранным потенциалом порогового значения, после чего происходит сброс. Получаемые при анализе модели гормональные профили выглядят достаточно реалистично и позволяют описать как ультрадианные, так и циркадные колебания уровней гормонов.*

**Введение.** Биологические ритмы различной периодичности очень важны для здоровья людей. Существенную роль в их поддержании играют гормоны – сигнальные молекулы, несущие управляющую информацию в различные органы. Некоторые центры выработки гормонов (эндокринной секреции) располагаются в отделах головного мозга – в гипоталамусе и гипофизе. Секреция гормонов гипоталамуса тесно связана с работой специальных ансамблей нейронов – ядер гипоталамуса – и носит выраженный импульсный характер. В здоровом организме нейроны ядра синхронизированы и работают как единый импульсный генератор. Гормоны, секретированные ядром, (либерины) стимулируют секрецию гормонов гипофиза, а те, в свою очередь, стимулируют секрецию гормонов регулируемой эндокринной железы. Напротив, гормоны эндокринной железы, поступающие в головной мозг с потоком крови, подавляют работу эндокринных мозговых центров (ингибируют секрецию гормонов гипоталамуса и гипофиза). Тем самым возникает отрицательная обратная связь. Система в целом работает как биологический осциллятор и находится в динамическом равновесии (гомеостазе), генерируя устойчивые колебания уровней гормонов. Кроме того, на процесс гормональной секреции влияет воздействие окружающей среды (например, смена дня и ночи, стресс). Период колебаний может составлять несколько часов (ультрадианный ритм) или сутки (циркадный ритм). Исследуемая схема нейроэндокринной регуляции изображена на рис. 1. Здесь $x(t)$ – концентрация либерина, $y(t)$ – концентрация гормона гипофиза и и $z(t)$ – концентрация регулируемого гормона. Знак «плюс» обозначает стимуляцию, а знак «минус» – ингибирование. Цель исследования – изучение периодических режимов, отвечающих эндокринным биологическим ритмам.

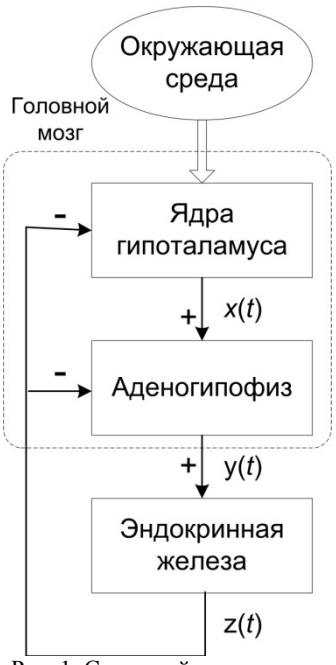


Рис. 1. Схема нейроэндокринной регуляции

**Импульсная модель.** Импульсы, генерируемые в гипоталамусе, модулируются уровнем гормона регулируемой эндокринной железы: чем выше этот уровень, тем меньше частота и амплитуда импульсов (имеет место ингибирующий эффект). Еще в [1] было предложено рассматривать синхроиизированный ансамбль нейронов гипоталамуса как единый импульсный элемент с амплитудно-частотной модуляцией. Было установлено, что при подходящем выборе параметров системы вид полученных колебаний хорошо согласуется с результатами медицинских экспериментов. В [1] и ряде последующих публикаций использовалась частотно-импульсная модуляций первого класса [2], которая позволяет простыми методами проводить математические исследования. В то же время, с точки зрения физиологии использование этого простейшего вида модуляции не выглядит достаточно обоснованным. В данной работе применяется схема интегральной частотно-импульсной модуляции [2], которая имеет более содержательную биологическую интерпретацию. Применительно к отдельному нейрону, она отвечает известной модели «интегрировать-и-сработать». Однако, с целью уменьшения сложности описания мы применяем ее не к одному нейрону, а к син-

хронизированному ядру гипоталамуса. Отметим, что для традиционно используемых в технике модуляторов более высокий уровень модулирующего сигнала влечет за собой увеличение значений модулируемых параметров (частоты, амплитуды). В рассматриваемом в этой работе биологическом модуляторе влияние модулирующего сигнала обратное – с увеличением его уровня значения модулируемых параметров уменьшаются.

Математическое моделирование показало, что при подходящем выборе параметров и нелинейностей такая система может демонстрировать периодические колебания с разным числом импульсов на периоде, а также детерминированный хаос. Другое направление моделирования относится к исследованию циркадных (суточных) колебаний. Внешнее воздействие, связанное со сменой дня и ночи, моделировалось гармоническим сигналом с периодом 24 часа, который возбуждает параметры импульсного модулятора. Были обнаружены различные режимы колебаний: режим захвата, при котором ядро гипоталамуса генерирует колебания с частотой циркадного сигнала, а также режим с более сложной динамикой, при которой захвата не происходит.

**Заключение.** Предложенная простая математическая модель основана на механизмах импульсной обратной связи, которые лежат в основе управления эндокринными процессами. При этом исследование частоты гормональных колебаний выглядит не менее значимым, чем одномоментное измерение уровней гормонов, обычно используемое в медицинской практике. В качестве дальнейшего направления исследования предполагается рассмотреть возможности импульсного терапевтического воздействия на нейрогормональную систему.

*Работа выполнена при частичной поддержке программы Ведущие научные школы Российской Федерации (НШ-2624.2020.1).*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Churilov A.**, Medvedev A., Shepeljavyi A. Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback // Automatica (IFAC journal). 2009. V.45. №1. P.78-85.
2. Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. С. 59-62.
3. **Churilov A.N.**, Milton J., **Salakhova E.R.** An integrate-and-fire model for pulsatility in the neuroendocrine system. *Chaos (AIP Journal).* 2020.Vol. 30. №8. P.083132.

---

**A.N. Churilov, E.R. Salakhova** (Saint Petersburg State University, Saint Petersburg). **Oscillations in the neuroendocrine system: An event-based regulation model**

*Abstract.* A novel impulsive model of the neuroendocrine regulation is proposed. An “integrate-and-fire” scheme is used to model impulses generated in hypothalamic nuclei. Namely, impulses are fired when the integrated membrane potential reaches a threshold, after the firing the potential resets to zero. The hormonal profiles obtain by the model’s analysis look realistic, they allow to describe both ultradian and circadian oscillations of the hormonal levels.

А.Л. ФРАДКОВ
(Санкт-Петербургский государственный университет)

# К ПЯТИДЕСЯТИЛЕТИЮ КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ СПбГУ

*В докладе представлен творческий путь кафедры теоретической кибернетики, созданной в 1970 г В.А.Якубовичем в Ленинградском государственном университете. Описывается история развития основных научных направлений кафедры, совпажающих с областями научных интересов ее основателя В.А.Якубовича:*

- *- Линейные периодические гамильтоновы системы (1950-е годы)*
- *- Устойчивость и колебания нелинейных систем (1960-1970-е годы)*
- *- Адаптивные системы (1960-1980-е годы)*
- *- Оптимальное управление (1970-1990 годы)*
- *- Универсальные регуляторы (1990-2000-е годы)*

*Обсуждаются более поздние исследования учеников В.А.Якубовича: качественная теория гибридных систем управления (А.С.Матвеев, А.В.Савкин),*

- *- управление с информационными ограничениями (А.С.Матвеев, А.В.Савкин)*
- *- управление хаосом и кибернетическая физика (А.Л.Фрадков),*
- *- математическая робототехника (А.С.Матвеев, С.В.Гусев, А.С.Ширяев) и другие.*

В статье используются материалы публикаций по истории кафедры [1,2]. Началом истории кибернетики в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете можно считать 1956-й год, когда на математико-механический факультет пришел 30-летний кандидат наук Владимир Андреевич Якубович. Было время больших перемен в обществе и в науке, начало "оттепели". Стали появляться первые электронно-вычислительные машины (ЭВМ) и первые публикации, реабилитирующие кибернетику [3,4]. Повсюду читались лекции и велись дискуссии о кибернетике. При Ленинградском Доме ученых организовалась первая в стране секция кибернетики, которую возглавил академик и будущий нобелевский лауреат Л.В.Канторович. В Ленинградском университете стал создаваться Вычислительный центр, а вместе с ним - научно-исследовательские лаборатории, призванные освоить и использовать новые, фантастические по тем временам возможности ЭВМ. Начиная с выхода в 1948 г. основополагающей книги Н.Винера [5], кибернетика стала восприниматься как научная основа применений вычислительной техники и автоматических устройств. Поэтому неудивительно, что когда руководство факультета предложило В.А.Якубовичу собрать группу исследователей в области математических методов автоматики и систем управления, "кибернетический" флаг оказался наиболее подходящим для ее названия. В 1959 г. в ВЦ ЛГУ была образована лаборатория теоретической кибернетики.

В первые годы исследования в лаборатории теоретической кибернетики ЛГУ сосредоточились на задачах распознавания образов. Было предложено несколько подходов к математической теории распознавания образов, развиты обобщения популярной в те годы концепции перцептронов Розенблатта [6,7,8]. Теоретическое обобщение полученных результатов привело В.А.Якубовича к понятиям рекуррентных систем неравенств и конечно-сходящихся алгоритмов их решения [9]. Был решен целый ряд прикладных задач: обучение распознаванию почерков, аэрофотоснимков, выделение сигналов из шума, описание и анализ сцен [10,11,12,13]. Разработанный метод был позже назван "методом рекуррентных целевых неравенств" [14]. Он позволяет найти решения бесконечного числа заранее не показанных неравенств, построенных по заданной цели функционирования системы.

Следующим шагом было установление связей новых, "кибернетических" задач с более традиционными задачами автоматического регулирования и управления. В те годы выдающийся московский ученый Я.З.Цыпкин предложил установить такие связи на основе понятий адаптации и адаптивной системы управления, а также методов статистического оценивания и, в частности, методов стохастической аппроксимации [15,16]. В.А.Якубович развил оригинальный общий подход к решению задач управления в условиях неопределенности на основе метода

рекуррентных целевых неравенств, не требующий привлечения вероятностных понятий. Он впервые дал общее математическое определение адаптивной системы [17,18].

В статье [17] на основе метода рекуррентных целевых неравенств была рассмотрена также задача о самообучении робота-манипулятора [53]. Это была первая статья, опубликованная в Докладах академии наук, в которой использовалось слово «робот», употреблявшееся до этого только в научной фантастике. В начале 70-х годов во всем мире возник большой интерес к применению манипуляторов для автоматизации производства. В США начались работы по созданию транспортного робота с элементами искусственного интеллекта. В 1973 г. в лаборатории теоретической кибернетики была организована группа робототехники, которую возглавил А.В.Тимофеев, а затем С.В.Гусев.

В коллективе была построена достаточно развитая математическая теория адаптивных систем и теория обучения машин (роботов) сложному целесообразному поведению [19,20,21]. В качестве примеров были решены задачи обучения робота-велосипедиста и других адаптивных роботов: "кузнечик", "ястреб", "глаз-рука". В 1972 году полученные результаты были представлены В.А.Якубовичем на Всемирном конгрессе по автоматическому управлению в Париже [22] (тогда шутили, что В.А. съездил в Париж на велосипеде). В те же годы были рассмотрены задачи адаптивного управления робото-техническими системами, описываемыми уравнениями Лагранжа [23, 24, 25,26]. Эти работы были пионерскими в области адаптивных роботов как в нашей стране, так и за рубежом. Основные результаты по методу рекуррентных целевых неравенств и решению задач адаптивного управления изложены в монографиях [27,28]. Обзоры последующих работ имеются в [29,30,31].

В начале 70-х годов в лаборатории теоретической кибернетики была создана группа бионики под руководством Р.М.Грановской. Ее задачей было изучение механизмов памяти живых сушеств, исследование феноменов восприятия и узнавания. Группой был проведен большой объем экспериментальных и теоретических исследований. Полученные результаты широко внедрялись в заинтересованных организациях.

В 1970 году на базе лаборатории теоретической кибернетики была образована кафедра теоретической кибернетики. Ее первый выпуск состоялся в 1971 г и состоял из трех специалистов: Г.С. Аксенова, Б.Д. Любачевского и автора этих строк. Область научных интересов сотрудников лаборатории и преподавателей кафедры, кроме чисто кибернетического направления (распознавание, адаптивные системы, роботы) включала и включает и более традиционные разделы прикладной математики и теории управления: теорию устойчивости и колебаний в нелинейных системах (Г.А.Леонов), теорию устойчивости и колебаний в импульсных системах (А.Х.Гелиг, А.Н. Чурилов) теорию оптимального управления (А.С.Матвеев, А.Е.Барабанов, В.А.Якубович), теорию оценивания и фильтрации (В.Н.Фомин, А.Е.Барабанов), теорию гибридных и сетевых систем (А.С. Матвеев).

Еще до создания лаборатории и кафедры В.А.Якубович получил ряд фундаментальных результатов в области устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и параметрического резонанса. Им доказана гипотеза И.М.Гельфанда о том, что в функциональном пространстве коэффициентов двумерных гамильтоновых систем множество коэффициентов, соответствующее устойчивым системам, распадается на счетное число связных областей и показано, что известный критерий Ляпунова относится к одной такой области. В.А.Якубович получил критерии устойчивости для каждой области, которые, как и критерий Ляпунова, неулучшаемы в естественном смысле. Эти результаты перенесены В.Н.Фоминым и В.А.Дергузовым на бесконечномерные системы. Фундаментальная монография [32], подытоживающая развитие этого направления, до сих пор активно цитируется в трудах не только математиков, но и физиков и инженеров.

Среди многих научных результатов коллектива, пожалуй, наиболее известными являются связанные с так называемой «частотной теоремой» или «Леммой Якубовича-Калмана» или «Леммой Калмана-Якубовича-Попова», доказанной и впервые опубликованной В.А. Якубовичем в 1962 году [33]. Значение частотной теоремы определяется тем, что она является матричным аналогом теоремы Виета о дискриминанте квадратного трехчлена. В дальнейшем частотная теорема была распространена на более широкие классы систем [34,35] и применена к решению многочисленных задач. Ее использование позволило получить разнообразные частотные критерии абсолютной устойчивости, неустойчивости, колебаний в нелинейных системах, но-

вые методы оптимального и адаптивного управления. Эти результаты, придавшие «второе дыхание» методу функций Ляпунова, изложены в 1978 году в монографии [36]. Книга [36] до сих пор вызывает интерес ученых разных стран, о чем говорит издание ее перевода на английский в 2004 году. Частотная теорема – один из краеугольных камней современной теории управления. Иногда ее называют «Великая лемма теории систем». Статья [33] была включена в специальный том «Twenty Five Seminal Papers in Control» (Wiley---IEEE Press, 2000), в котором представлены 25 статей, оказавших, по мнению международной комиссии из ведущих ученых, созданной Обществом систем управления международного Института инженеров по электротехнике и электронике (IEEE), наибольшее влияние на развитие теории управления в XX веке. История и современное состояние работ этого направления изложены в обзорах [37,38]. Отметим недавно обнаруженную тесную связь частотной теоремы с так называемой теоремой об S-процедуре, установленной В.А. Якубовичем в 1971 году. Теорема об S-процедуре выражает соотношения двойственности в экстремальных задачах, вообще говоря, невыпуклых, и также широко применяется в различных разделах теории управления. Как сказано в [38], «долгое время эти две теоремы жили, образно выражаясь, как дружные соседи и вот, спустя столько лет, все узнали, что они еще и родственники».

Частотная теорема оказалась эффективным средством решения разнообразных линейно-квадратичных задач оптимизации. В частности, синтез оптимального регулятора в непрерывных и дискретных линейно-квадратичных задачах осуществлен на основе частотной теоремы в работах В.А. Якубовича, В.А.Андреева, А.И.Шепелявого, С.Г.Семенова. В 90-х годах эти методы были распространены на аналогичные задачи с квадратичными ограничениями, в том числе невыпуклые задачи глобальной оптимизации В отличие от большинства известных методов невыпуклой глобальной оптимизации, которые в основной массе являются вычислительными, часто основаны на эвристических идеях и не всегда сопровождаются гарантией сходимости, упомянутые алгоритмы основаны на математической теории, являются в наиболее существенной части аналитическими и гарантированно приводят к нахождению глобального оптимума. Обсуждаемый метод был предложен В.А.Якубовичем в 1992 году [39].

В конце 70-х годов В.А.Якубовичем был предложен оригинальный «абстрактный» подход к построению теории оптимального управления. Его особенность состоит в разработке общей схемы, позволяющей единообразно и относительно просто получать необходимые условия оптимальности программных управлений (как правило, в виде «принципов максимума», аналогичных принципу максимума Понтрягина) для широкого класса систем, описываемых самыми разными уравнениями (дифференциальными, интегральными, в частных производных, с запаздывающим аргументом и другими) при разных типах ограничений. Развитию упомянутого подхода посвящен обширный цикл работ В.А.Якубовича и его учеников. Итоги этого развития подведены в монографиях А.С.Матвеева и В.А.Якубовича [40,41].

А.Х.Гелигом разработан подход к анализу динамики импульсных систем с широтной, частотной, амплитудной и другими видами модуляции, основанный на синтезе метода усреднения и методов теории абсолютной устойчивости непрерывных нелинейных систем. На импульсные системы распространены круговой критерий и критерий В.М. Попова абсолютной устойчивости непрерывных нелинейных систем, получены критерии устойчивости колебательных режимов. Результаты подытожены в монографии А.Х. Гелига и А.Н. Чурилова [42], переведенной на английский язык.

В начале и середине 80-х годов А.Е.Барабановым решена задача синтеза оптимального регулятора при равномерно ограниченных возмущениях. На ее основе построена новая теория $L_1$-оптимального управления. [43,44]. Пионерская работа А.Е. Барабанова и О.Н. Граничина по этой тематике [43] намного опередила аналогичные зарубежные публикации.

В монографиях В.Н.Фомина, безвременно ушедшего из жизни в 2000 г. [45-47] изложены основные понятия теории оптимального оценивания случайных процессов и полей и разработаны методы синтеза оптимальных фильтров при обработке пакета случайных плоских волн на фоне распределенных шумов. Задачи оценивания и обнаружения полезных сигналов в наблюдаемых электромагнитных и акустических полях имеют важные приложения в теории радарных и коротковолновых средств связи, в подводной акустике, радиоастрономии, сейсмологии, геофизике и в системах телевизионного слежения.

Начиная с 1997 года А.С.Матвеевым проводились исследования по качественной теории гибридных динамических систем (ГДС). Заложены основы качественной теории для достаточно общего класса ГДС. Эти результаты опубликованы в ведущих международных журналах а также в монографии [48], по-видимому, первой в мире по этой тематике. Изучен общий класс гибридных динамических систем переключательного типа, то есть систем, для которых «непрерывные» переменные состояния не претерпевают скачков. Получены необходимые и достаточные условия сильной детерминированности системы, а также инвариантности заданной области. Работоспособность разработанной общей теории продемонстрирована при исследовании целого ряда представляющих самостоятельный интерес моделей информационных, компьютерных и др. сетей, гибких производственных систем, биотехнологических и других процессов.

Плодотворно развивается научное направление, возглавляемое Г.А. Леоновым. За фундаментальными результатами по теории устойчивости и синхронизации нелинейных колебаний в фазовых системах [36,49-51] последовали пионерские работы и книги по теории управления и стабилизации линейных управляемых систем [52,53] и качественному исследованию глобальных аттракторов динамических систем: неустойчивость, бифуркации, синхронизация, оценки размерностей [54,55]. В 2007 году Г.А. Леонов создал и возглавил кафедру прикладной кибернетики на математико-механическом факультете СПбГУ.

Выпускники кафедры преподают в различных вузах города. Среди них декан математико-механического факультета СПбГУ, лауреат Государственной премии СССР, член-корреспондент Российской академии наук Г.А. Леонов, профессора А.В.Тимофеев (СПбГУАП), А.Н.Чурилов (ГМТУ), В.Б.Смирнова (СПбГИСА), Н.Е.Барабанов (СПбГЭТУ), заведующие лабораториями академических институтов А.В.Тимофеев (СПИИРАН), А.Л.Фрадков (ИПМаш РАН). В 1970-е и в1990-е годы ряд талантливых выпускников кафедры уехали из страны, среди них Б.Г.Питтель, М.В.Левит, Б.Д.Любачевский, Ю.В.Казаринов. Некоторые из них стали профессорами в зарубежных университетах: А.Мегрецкий (Массачусетский технологический институт, США), Н.Е.Барабанов (университет Северной Дакоты, США), А.Савкин (ун-т Нового Южного Уэльса, Австралия), А.Ширяев (университет г. Умеа, Швеция и Норвежский технический университет, г.Трондхейм). Многие выпускники стараются поддерживать постоянные контакты с кафедрой, вести совместные работы.

Значительную роль в развитии и признании научной школы В.А.Якубовича играла и играет научно-организационная работа. Начиная с 1967г. он был заместителем председателя Ленинградской Территориальной группы Национального комитета по автоматическому управлению (НКАУ), возглавляемой ректором ЛЭТИ А.А.Вавиловым. В территориальной группе Владимир Андреевич был председателем секции "Теория адаптивных систем управления". Важное значение для популяризации идей адаптации, развиваемых В.А.Якубовичем и его учениками имели Ленинградские симпозиумы по теории адаптивных систем, проводившиеся под его руководством, начиная с 1970-х годов. В 1972 г. в Доме ученых был проведен Первый ленинградский симпозиум по теории адаптивных систем, где было сделано 38 докладов и собралось более 50 специалистов из ведущих научных центров страны. Пленарные доклады делали ведущие отечественные ученые Я.З.Цыпкин, А.А.Красовский, Ю.И.Неймарк. Пленарный доклад сделал также д.т.н., экс-чемпион мира по шахматам М.М.Ботвинник, рассказавший о разработке алгоритма и программы шахматной игры. За первым симпозиумом последовали и другие: в 1974-м (146 докладов), в 1976-м (около 280 докладов), в 1979-м (около 250 докладов). В 1982 году была проведена Первая (оказавшаяся впоследствии единственной) Всесоюзная конференция "Теория адаптивных систем и ее применения". Она собрала около 500 участников - преподавателей и исследователей из научных, промышленных организаций и вузов СССР, выступивших более, чем с 300 докладами.

Перечисленные события явились знаками признания научной общественностью заслуг школы В.А.Якубовича в области теории адаптивных систем. Они стали также важными вехами в развитии этой теории, которая в те годы была одной из главных точек роста теории автоматического управления и кибернетики и привлекала интерес как талантливой молодежи, так и маститых ученых. На симпозиумах выступали лидеры отечественной науки: академики Я.З.Цыпкин, А.А.Красовский, Е.П.Попов, Н.Н.Моисеев, доктора наук Д.А.Поспелов, В.Ю.Рутковский и другие. Ученым секретарем симпозиумов был доцент кафедры САУ Ленин-

градского механического института (ЛМИ) Д.П.Деревицкий, а впоследствии и автор этих строк, в те годы работавший в ЛМИ.

В 1990-е годы стали проводиться, как правило, международные научные мероприятия. В апреле 1991 года в Доме Ученых прошел 5-й Ленинградский симпозиум по теории адаптивных систем и ее применениям. Среди 150 участников 5-го Симпозиума впервые были иностранные гости: Дж. Бартолини (Италия), С. Биттанти (Италия), В. Резван (Румыния), А. Халанай (Румыния), Л. Льюнг (Швеция). Пленарные доклады сделали Л. Льюнг, А.А. Первозванский, Я.З. Цыпкин, Р.М. Юсупов, В.А. Якубович и автор этих строк (совместно с А.А. Стоцким, являвшимся также ученым секретарем Симпозиума). Наконец, 7-9 сентября 1999 года состоялся 6-й, уже Санкт-Петербургский симпозиум по теории адаптивных систем и ее применениям. Он был посвящен памяти безвременно ушедшего в 1997 году Я.З.Цыпкина. В симпозиуме приняло участие около 80 человек, из них около 30 иностранных ученых, в том числе Я.Ландо (Франция), А.Линдквист (Швеция), Л.Льюнг (Швеция), Д.Шильяк (США), К.Фурута (Япония).

В проведении международных конференций активно участвует лаборатория управления сложными системами Института проблем машиноведения РАН, организованная в 1990 году автором этих строк и возглавляемая им по настоящее время. Она тесно связана с кафедрой как научными интересами, так и по учебной работе.

Начиная с середины 1990-х годов, Владимир Андреевич со своим молодым учеником А.В. Проскурниковым и другими опубликовал около 20 работ по оптимальному гашению колебаний, оптимальному отслеживанию сигналов и теории инвариантности [56-61]. Им разработана концепция «универсального регулятора», обеспечивающего оптимальность управления при заранее неизвестных помехах и отслеживаемых сигналах, а также инвариантность выхода системы относительно внешнего возмущения. Основополагающая работа [56] получила премию Международной академической издательской компании «Наука» за лучшую публикацию 1995 года, а на Европейской конференции по управлению 1995 года В.А. Якубович выступал на эту тему с пленарным докладом [57]. В 2008 г. А.В.Проскурников был награжден медалью и премией РАН для молодых ученых за цикл работ «Синтез инвариантных линейных систем управления».

С середины 1990-х годов развиваются новые и актуальные направления на стыке физики и теории управления: управление колебательными и хаотическими системами, управление молекулярными и квантовыми системами. На основе метода скоростного градиента, найдено решение задач управления и синхронизации для широкого класса колебательных, в том числе хаотических систем. Эти результаты открывают новые перспективы в вибрационной технике, лазерных и химических технологиях, системах передачи информации. Опубликованные в 1998-1999 годах книги [62,63] явились первыми в мире монографиями по математической теории управления хаотическими системами. Они заложили основы новой области на стыке физики и теории управления, направленной на исследование свойств физических систем кибернетическими методами и названной «Кибернетической физикой». Обзорная статья [64] получила премию Международной академической издательской компании «Наука» за лучшую публикацию 2003 года. Систематически задачи и методы кибернетической физики изложены в книгах [65,66]. Знаками ее международного признания явились проведение в 2003-2005 годах в Санкт-Петербурге первых в мире международных конференций по физике и управлению, а также образование международного Общества по физике и управлению (IPACS) со штаб-квартирой в Санкт-Петербурге.

Ведутся работы по аналитическому синтезу управления нелинейными системами. Задачи устойчивости и стабилизации решены для непрерывных, импульсных и дискретных систем как в случае управления по состоянию системы, так и в случае управления по ее выходу [67].

Одним из центральных направлений в кибернетике начала XXI века стало объединение теорий управления, вычислений и связи. В нем реализуется стремление к возвращению целостного взгляда на процессы управления и обработки информации, свойственного первым годам развития этой науки. Кафедра не осталась в стороне от мирового научного процесса. А.С. Матвеев совместно со своим австралийским коллегой, также выпускником кафедры А.В. Савкиным опубликовал серию пионерских работ, посвященных управлению и оцениванию при ограничениях на пропускную способность (емкость) каналов связи [68-71] и подытоженных в монографии [72].

В 2006 году в коллективе отмечались славные юбилеи: 80-летие В.А.Якубовича, 75-летие А.Х.Гелига, 50-летие творческой деятельности В.А.Якубовича в университете. К юбилею подготовлены специальные тематические выпуски российских и международных научных журналов [73-75], сборник статей [76], выпущен CD-ROM с записью более 300 основных трудов В.А. Якубовича. Научная продукция членов коллектива исчисляется многими сотнями публикаций, среди которых более шести десятков книг. Воспитанники кафедры плодотворно работают во многих российских и зарубежных научно-педагогических учреждениях, ими защищено свыше сотни диссертаций по физико-математическим и техническим наукам, в том числе 18 докторских. Подробнее о современном состоянии проблематики научных направлений кафедры можно прочесть в журналах [73-75], в сборнике статей [76] и на сайте кафедр: http://tcyber.ru / . В 2012 г не стало В.А.Якубовича. Его творческой биографии и научным достижениям посвящено несколько публикаций и выступлений, а также проводившаяся в Санкт-Петербурге в 2015 г. 1-я международная конференция ИФАК «Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems”(MICNON 2015) [77-79]

## ЛИТЕРАТУРА


1. **А.И. Шепелявый.** Кафедра теоретической кибернетики на математико-механическом факультете СПбГУ // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2000. Сер.1. Вып. 1. С. 3–15
2. **А.Л.Фрадков**. Научная школа по теоретической кибернетике В.А.Якубовича в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете. В кн: История информатики и кибернетики в Санкт-Петербурге (Ленинграде). Под.ред. Р.М.Юсупова. 2008, с. 79-83.
3. **С. Л. Соболев, А. И. Китов, А. А. Ляпунов**. Основные черты кибернетики // Вопросы философии, 1955, N 4, с. 136-148.
4. **А. Н. Колмогоров.** Кибернетика // Большая советская энциклопедия, 2-е изд., т. 51. М.: Большая советская энциклопедия, 1958, с. 149-151.
5. **Н. Винер**. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.: Сов. радио, 1958. (N.Wiener. Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine, Cambridge: MIT Press, 1948).
6. **В.А. Якубович**. Машины, обучающиеся распознаванию образов // Сб. ВЦ ЛГУ. 1963. Вып.~2. С.~95--131.
7. **В.А. Якубович**. Некоторые общие принципы построения обучаемых опознающих систем. I // Вычислительная техника и вопросы программирования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. С.~3--71.
8. **В.А. Якубович**. Три теоретические схемы обучающихся систем // Самообучающиеся автоматические системы. М.: Наука, 1966.
9. **В.А. Якубович**. Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // ДАН СССР. 1966. Т.~166. No~6. С.~1308--1312.
10. **Б.Н. Козинец, Р.М.Ланцман, В.А. Якубович**. Криминалистическая экспертиза близких почерков при помощи электронно-вычислительных машин // ДАН СССР. 1966. Т.~167. No~8. С.~1008--1011.
11. **А.Х. Гелиг, В.А. Якубович**. Применение обучаемых опознающих систем для выделения сигнала из шума // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. \No~5. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968, С.~95-100.
12. **А.А. Шмидт, В.В. Харичев, В.А. Якубович**. Об одной новой задаче распознавания образов // Автоматика и Телемеханика. 1973. No~1. С.~109—122.
13. **Б.Н. Козинец, Р.М. Ланцман, В.А. Якубович**. К задаче распознавания и описания сложных изображений // Тр. Междунар. симпозиума ИФАК. Тбилиси, 1975, С.~207—250.
14. **В.А. Якубович**. Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем. // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.-Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1976. С.~32--64.
15. **Я.З.Цыпкин**. Автоматика и Телемеханика 1966
16. **Я.З.Цыпкин**. Адаптация и обучение в автоматических системах. М. Наука, 1968.
17. **В.А. Якубович** К теории адаптивных систем // ДАН СССР, 1968, No~3. С.~518--522.
18. **В.А. Якубович** Адаптивные системы с многошаговыми целевыми условиями // ДАН СССР. 1968. Т. 183. No~2. С.~303--306.
19. **В.А. Якубович** Об одной задаче самообучения целесообразному поведению // Автоматика и Телемеханика. 1969. No~8. С.~119--139.
20. **Б.Д. Любачевский, В.А. Якубович**. Адаптивное управление устойчивыми динамическими объектами // Автоматика и Телемеханика. 1974. No~4. С.~116—127.
21. **В.А. Якубович** Об организации «мозга» адаптивных систем с одношаговым целевым условием // Проблемы бионики. М.: Наука, 1973. С.~355--360.
22. V.A. Yakubovich. On a method of adaptive control under conditions of great uncertainty // Preprints of the 5th World Congress IFAC (Paris). 1972. V.~37. No~3. P.~1--6.

23. **Б.А. Беленков, С.В. Гусев, Ю.К. Зотов, В.И. Ружанский, А.В. Тимофеев, Р.Б. Фролов, В.А. Якубович**. Адаптивная система управления автономным подвижным роботом // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1978. No~6, С.~52—63.
24. **А.В.Тимофеев, В.А. Якубович**. Адаптивное управление программным движением робота-манипулятора. // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.-Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1976, С.~170—174.
25. **Гелиг А.Х.** Адаптивная система управления роботом «глаз-рука» // Вопросы кибернетики: Адаптивные системы. М.: Научный совет по комплексн. проблеме «Кибернетика» АН СССР. 1976. С. 162--163.
26. **Г.С. Аксенов, В.Н.Фомин**. К задаче адаптивного управления манипулятором. Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.-Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по по комплексной проблеме «Кибернетика», 1976, С.~165--168.
27. **В.Н.Фомин**. Математическая теория обучающихся опознающих систем. Л.: Изд-во ЛГУ. 1976.
28. **В.Н. Фомин, А.Л. Фрадков, В.А. Якубович**. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
29. **В.А. Якубович**. Метод рекуррентных целевых неравенств в адаптивном управлении. // Гл. 11 в книге "Справочник по теории автоматического управления". М.: Наука, 1987, С.~501--526.
30. V.~A. Bondarko, V.A. Yakubovich. The method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // Int. J. Adaptive Control and Signal Proc. 1992. V.~6. P.~141--160.
31. **Бондарко В.А.** Адаптивные субоптимальные системы с переменной размерностью вектора настраиваемых параметров. Автоматика и Телемеханика, 2006, 11.
32. **В.А. Якубович, В.М. Старжинский**. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. 1972. 720 с.
33. **В.А. Якубович**. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. // ДАН СССР. 1962. Т.~143. \No~6. С.~1304--1307.
34. **В.А. Якубович** Частотная теорема в теории управления // Сиб. мат. журн. 1973. Т.~14. No~2. С.384--420.
35. **А.Л.Лихтарников, В.А.Якубович**. Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // Сибирск. математ. журн. 1976. Т.17. N5. С.1069--1085.
36. **Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с. (Английский вариант: V.A.Yakubovich, G.A.Leonov and A.Kh. Gelig. Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. World Scientific, Singapore, 2004).
37. **Барабанов А.Е., Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Лихтарников А.Л., Матвеев А.С., Смирнова В.Б., Фрадков А.Л.** Частотная теорема (лемма Якубовича-Калмана) в теории управления //Автоматика и телемеханика, 1996. N10. С. 3–40.
38. **Гусев С.В., Лихтарников А.Л.** Очерк истории леммы Калмана-Попова-Якубовича и S-процедуры //Автоматика и телемеханика, 2006. N11, С. 77-121.
39. Yakubovich V.A. Nonconvex optimization problem // Systems and Control Letters, 1992. V. 19. pp. 13--22.
40. **Матвеев А.С., Якубович В.А.** Абстрактная теория оптимального управления. СПб.: Изд-во СПбГУ. 1994.
41. **Матвеев А.С., Якубович В.А.** Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи: Учеб. пособие. Изд-во СПбГУ, 2003.
42. **Барабанов А.Е., Граничин О.Н.** Оптимальное управление линейным объектом с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика. 1984. N 5. С.39-46.
43. **Барабанов А.Е.** Синтез оптимальных регуляторов. СПб.: Изд-во СПбГУ. 1996. 224 с.
44. **Гелиг А.Х., Чурилов А.Н**. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: СПбГУ, 1993, 265 с. (Английский вариант: Gelig A. Kh., Churilov A.N. Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems. Boston/Basel/Berlin: Birkhauser. 1998. 362 p.)
45. **Фомин В.Н.** Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. 336 с. (Английский вариант: Discrete Linear Control Systems. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers. 1991. 310 pp.)
46. V. Fomin. Optimal Filtering. V.1: Filtering of Stochastic Processes. Kluwer Acad. Publ., V.481, 1998, 375 p. , V. 2: Spatio-Temporal Fields. Kluwer Acad. Publ., V.481, 1999, 359 p.
47. **В.Н.Фомин**. Оптимальная и адаптивная фильтрация. СПб, изд-во С.-Петербургского университета, 2001, 400с.
48. Matveev A.S.. Savkin A.V. Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems, Birkhauser, Boston, 2000.
49. **Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.** Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. 1ч. - 368с., 2ч.- 164с. (Английский вариант: Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I. Frequency Methods in Oscillations Theory. Dortrecht: Kluwer. 1996, p. 416).
50. **Г.А.Леонов, В.Б.Смирнова**, Математические проблемы теории фазовой синхронизации, СПб, Наука, 2000.
51. **Г.А. Леонов, С.М. Селеджи**, Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике, Невский диалект, 2002.
52. **Г.А. Леонов, М.М. Шумафов.** Методы стабилизации линейных управляемых систем, СПб, Изд-во СПбГУ, 2005.
53. G.A. Leonov, Mathematical problems of control theory, World Scientific, 2001.
54. **Г.А. Леонов**, Теория управления, Изд-во СПбГУ, 2006.
55. **Г.А. Леонов**, Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. Москва - Ижевск, 2006.
56. **Якубович В.А**. Универсальные регуляторы в задачах инвариантности и отслеживания. // Докл. РАН, 1995, Т.343, N 2, С.172-175.

57. Yakubovich V.A. Universal Regulators in Linear-Quadratic Optimization Problem. // Trends in Control: European Perspective. Alberto Isidori (Ed.) 1995, P.53--67.
58. **А.В.Проскурников, В.А.Якубович**. Задача об инвариантности системы управления // Доклады РАН. 2003. Т.389. N6. С.742--746.
59. **А.В.Проскурников, В.А.Якубович**. Задача об абсолютной инвариантности для систем управления с запаздыванием // Доклады РАН. 2004. Т.397. N5. С.610--614.
60. **А.В.Проскурников, В.А.Якубович**. Универсальные регуляторы для оптимального отслеживания полигармонических сигналов в системах с запаздыванием // ДАН. 2006. Т. 406. N2. С.109--174.
61. **А.В.Проскурников, В.А.Якубович**. Универсальный регулятор для отслеживания стохастических сигналов с неизвестной спектральной плотностью // ДАН. 2006. Т.409. N4. С.461--466.
62. Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu., Introduction to control of oscillations and chaos. World Scientific Publishers, Singapore, 1998, 391p.
63. Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O. Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1999, 510p.
64. **Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.** Управление хаосом: Методы и приложения. I. Методы. Автоматика и телемеханика, 2003, N 5. с.3-45.
65. **Фрадков А.Л**. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб:Наука, 2003, 208с.
66. Fradkov A.L.Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control. Springer-Verlag, 2007, 242p.
67. **Гелиг А.Х., Зубер И.Е. , Чурилов А.Н.** Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. 270 с.
68. A. S.Matveev and A. V. Savkin. The problem of state estimation via asynchronous communication channels with irregular transmission times. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(4):670–676, 2003.
69. A. S. Matveev and A. V. Savkin. An analogue of Shannon information theory for networked control systems. Stabilization via a noisy discrete channel. In *Proc. 43th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4491–4496, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 2004.
70. A. S. Matveev and A. V. Savkin. Optimal control via asynchronous communication channels. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 122(3):539–572, 2004.
71. A. S. Matveev and A. V. Savkin. An analogue of Shannon information theory for detection and stabilization via noisy discrete communication channels. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(4):1323–1361, 2007.
72. A. S. Matveev and A. V. Savkin. Estimation and Control over Communication Networks. Springer-Verlag, 2008, 518p.
73. Автоматика и Телемеханика, N 10, 2006, N 11, 2006.
74. Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия» N 4, 2006.
75. International Journal of Robust and Nonlinear Control. Special Issue: Frequency-domain and Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Dedicated to the 80th Birthday of V.A. Yakubovich, V. 17 Is. 5-6, 2007.
76. Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства. Под ред. А.Х. Гелига, Г.А.Леонова, А.Л.Фрадкова. Физматлит, М., 2008.
77. **Фрадков А. Л.** Научная биография В.А. Якубовича и его школа в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете. Специальная сессия "Владимир Андреевич Якубович и его научная школа". XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, 16-19 июня 2014 г.
78. . Fradkov, Alexander; Gelig, Arkady; Leonov, Gennady. Vladimir Andreevich Yakubovich. Obituary. :. IEEE Control Systems Magazine, 2013, Vol.: 33, Is. 2 pp. 89-91.
79. Fradkov A.L.Scientific School of Vladimir Yakubovich in the 20th century. IFAC-PapersOnLine, Volume 50, Issue 1, July 2017, Pages 5231-5237.


---

**A.L. Fradkov** (Saint Petersburg State University). **To the fifty years of the department of theoretical cybernetics of SPbSU**

*Abstract.* The paper presents the creative path of the Department of Theoretical Cybernetics, created in 1970 by V.A. Yakubovich at the Leningrad State University. The history of the development of the main scientific directions of the department, coinciding with the areas of scientific interests of its founder V.A. Yakubovich, is described:

- Linear periodic Hamiltonian systems (1950s)
- Stability and oscillations of nonlinear systems (1960-1970s)
- Adaptive systems (1960-1980s)
- Optimal control (1970-1990)
- Universal regulators (1990-2000s)

Later studies of V.A. Yakubovich's students are discussed: a qualitative theory of hybrid control systems (A.S. Matveev, A.V. Savkin),

- management with information restrictions (A.S. Matveev, A.V. Savkin)
- chaos management and cybernetic physics (A.L. Fradkov),
- mathematical robotics (A.S. Matveev, S.V. Gusev, A.S. Shiryaev) and others.

Н.В. КУЗНЕЦОВ
(Санкт-Петербургский государственный университет, Институт проблем машиноведения РАН)

# ГЕННАДИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ЛЕОНОВ И ЕГО НАУЧНАЯ ШКОЛА

*Доклад посвящен члену-корреспонденту РАН Геннадию Алексеевичу Леонову и его научной школе.*

23 апреля 2018 г. на 72-м году жизни после тяжелой болезни скончался декан математико-механического факультета СПбГУ, заведующий кафедрой прикладной кибернетики СПбГУ, заведующий лабораторией информационно-управляющих систем Института проблем машиноведения РАН, член-корреспондент РАН, иностранный член Финской академии наук и литературы, доктор физико-математических наук, профессор Геннадий Алексеевич Леонов.

spbu.ru/news-events/novosti/issledovateli-iz-spbgu-voshli-v-spisok-samyh-citiruemyh-uchenyh-mira

Г.А. Леонов в своем кабинете декана в здании Мат.-мех. факультета СПбГУ в историческом центре города (14-ая линия ВО, д. 29).

Геннадий Алексеевич Леонов закончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета в 1969 году и был принят в аспирантуру. В своих первых научных работах Г.А. Леонов развивал подходы В.А. Якубовича, В.А. Плисса и Горьковской научной школы А.А. Андронова. В 1971 г. он защитил кандидатскую диссертацию на тему "Некоторые вопросы динамики нелинейных систем регулирования", а в 1983 – докторскую диссертацию "Устойчивость в целом". С 1971 года Г.А. Леонов работал в ЛГУ ассистентом, доцентом, профессором. В 1986 году он получил звание профессора и был назначен на должность проректора ЛГУ. С 1988 года и до последних дней жизни Геннадий Алексеевич Леонов был деканом математико-механического факультета.

Г.А. Леонов – специалист в области математической теории управления, теории устойчивости, нелинейных колебаний и теории синхронизации электромеханических и электронных систем, автор более 470 научных работ, в том числе 22 монографий. Им создана всемирно известная научная школа в области математической теории управления и нелинейной динамики, где разработаны новые математические методы и решены трудные математические задачи, важные для создания новых технологий в системах управления, электронных и информационных системах, аэрокосмической технике [1-4]. Среди известных теоретических задач в области математической теории управления можно выделить решение Г.А. Леоновым в 2000 году проблемы нестационарной стабилизации, которую поставил известный ученый Роджер Брокетт (Гарвардский университет, США) в книге “*Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*” (1999 г.). Среди практических задач можно отметить исследование Г.А. Леоновым и его учениками причины аварии Саяно-Шушенской ГЭС, в рамках которого, была построена замкнутая нелинейная динамическая модель турбоагрегата (учитывающая совместную работу генератора, турбины и системы управления Саяно-Шушенской ГЭС), в которой была показана возможность возникновения нежелательных опасных колебаний.

Г.А. Леонов является ярким представителем Петербургской школы теории автоматического управления, становление которой связано с именами таких выдающихся ученых, как И.А. Вышнеградский (1831-1895), А.И. Лурье (1901-1980), В.А. Якубович (1926-2012), В.И. Зубов (1930-2000). В течение многих лет Г.А. Леонов был членом бюро Национального комитета по автоматическому управлению, и в 2011-2017 гг. представлял Российскую Федерацию в Совете Международной федерации по автоматическому управлению (IFAC).

Г.А. Леонов – лауреат университетской премии ЛГУ (1985 г.) за цикл научных работ по устойчивости нелинейных динамических систем, Государственной премии СССР (1986 г.) за математическую теорию фазовой синхронизации, премии Технического университета Дрездена

(1989 г.) за работы по хаотической динамике, премии им. А.А. Андронова РАН (2012 г.) за цикл работ «Развитие методов синхронизации и анализа периодических и хаотических колебаний в коллективных системах автоматического фазового управления», премии им. П.Л. Чебышева Правительства Санкт-Петербурга и Санкт-Петербургского научного центра РАН (2015 г.) за фундаментальный вклад в разработку понятий и методов анализа динамических систем. Заслуженный работник Высшей школы РФ (1999 г.), в 2005 г. получил благодарность Президента РФ за большой вклад в подготовку высококвалифицированных специалистов и многолетнюю плодотворную деятельность, награжден Орденом Дружбы (2007 г.), в 2011 г. получил Медаль Университета Ювяскюля (University of Jyväskylä, Finland) за выдающиеся достижения в области математики, награжден Орденом Почета (2014 г.).

СВИДЕТЕЛЬСТВО

Ведущая научная школа
НШ-2858.2018.1

является победителем конкурса 2018 года на право получения грантов Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ в области знания

Математика и механика

Руководитель
Кузнецов
Николай Владимирович

Председатель Совета по грантам Президента Российской Федерации — академик РАН А. И. Рудской

Г.А. Леонов всегда много и плодотворно работал, успешно сочетая научную работу с административной. Как в своей научной работе Г.А. Леонов особое внимание уделял известным классическим задачам и их решению с помощью современных подходов, так и в административной работе он сочетал сохранение традиций с острым чувством необходимости перемен и развития [5]. В 90-х годах Г.А. Леонов вместе с директором ПОМИ РАН академиком Л.Д. Фаддеевым и вице-президентом Санкт-Петербургского математического общества А.М. Вершиком был инициатором создания на Математико-механическом факультете СПбГУ специальной программы подготовки по фундаментальной математике [6-7], которая “*показала свою безусловную эффективность*” [8,9] (ПОМИ-группа формировалась по результатам экзаменов первого семестра, а затем был возможен переход как из ПОМИ-группы в обычную (свободно), так и из обычной в ПОМИ-группу (при условии успешной сдачи предыдущей сессии по усиленной программе)).

СВИДЕТЕЛЬСТВО

Ведущая научная школа
НШ-8580.2016.1

является победителем конкурса 2016 года на право получения грантов Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ в области знания

Математика и механика

Руководитель
Леонов
Геннадий Алексеевич

Председатель Совета по грантам Президента Российской Федерации — академик РАН А. И. Рудской

В 2000-х годах Г.А. Леонов при поддержке руководства СПбГУ сумел организовать для Математико-механического факультета дополнительную научно-образовательную площадку в историческом центре города – отдельное здание на 14-ой линии Васильевского острова, дом 29, что существенно повысило привлекательность факультета и открыло новые возможности для привлечения на факультет ведущих преподавателей, представителей компаний и талантливой молодежи из Санкт-Петербурга. В этом же здании под его руководством долгие годы успешно функционировал Центр переподготовки специалистов по математике и информатике СПбГУ. В 2013 году коллектив Математико-механического факультета СПбГУ под руководством Г.А. Леонова стал основой для Центра мирового уровня в области информационных технологий на базе СПбГУ по результатам конкурсного отбора Министерства связи и массовых коммуникаций РФ. С 2016 года он возглавлял Федеральное учебно-методическое объединение в сфере высшего образования по компьютерным и информационным наукам. А в 2018 году в составе авторского коллектива Г.А. Леонов был выдвинут Ученым советом СПбГУ на соискание Премии Правительства Российской Федерации в области образования за работу «*Создание инновационных структур для обучения информационным технологиям на платформе современной математики*» [10-11].

Одним из заметных этапов деятельности Г.А. Леонова, является создание Кафедры прикладной кибернетики на Математико-механическом факультете СПбГУ. В декабре 2005 года член-корреспондент РАН В.А. Якубович и профессор Г.А. Леонов обратились в Ученый совет Математико-механического факультета с ходатайством об открытии на Кафедре теоретической кибернетики новой специализации “*Нелинейная динамика, информатика и управление*”, а в 2006 году после избрания Г.А. Леонова в члены-корреспонденты РАН Ученый совет факультета ходатайствовал о создании кафедры под руководством Г.А. Леонова. В 2007 году приказом ректора СПбГУ Л.А. Вербицкой путем выделения из Кафедры теоретической кибернетики была создана Кафедра прикладной кибернетики для реализации обучения в рамках специализации “Нелинейная динамика, информатика и управление”, а первыми сотрудниками кафедры стали

член-корреспондент РАН Г.А. Леонов (заведующий кафедрой) и автор доклада, доцент Н.В. Кузнецов (ученый секретарь кафедры). В 2008 году объединенный коллектив кафедр прикладной и теоретической кибернетики под руководством член-корр. РАН Г.А. Леонова и член-корр. РАН В.А. Якубовича получил статус Ведущей научной школы Российской Федерации (НШ-2387.2008.1). В дальнейшем под руководством член-корр. РАН Г.А. Леонова коллектив Кафедры прикладной кибернетики был удостоен статуса Ведущей научной школы РФ в 2014 (НШ-3384.2014.1) и 2016 (НШ-8580.2016.1) годах. В 2018 году профессор Н.В. Кузнецов стал заведующим Кафедрой прикладной кибернетики (после смерти Г.А. Леонова) и под его руководством коллектив кафедры получал статус Ведущей научной школы РФ в 2018 (НШ-2858.2018.1) и 2020 (НШ-2624.2020.1) годах [12-13].

ЛИТЕРАТУРА


1. Kuznetsov N. V., Abramovich S., Fradkov A. L., Chen G. In Memoriam: Gennady Alekseevich Leonov, International Journal of Bifurcation and Chaos, 28(5), 2018, art. num. 1877001
2. Abramovich S., Kuznetsov N.V., Neittaanmäki P. Obituary: Gennady Alekseevich Leonov (1947-2018), Open Mathematical Education Notes, Vol. 8, 2018, pp. 15-21.
3. Памяти Геннадия Алексеевича Леонова. Вестник Санкт-Петербургского университет. Математика. Механика. Астрономия, 5(63), 2018, стр. 701-704
4. Научная школа Г.А. Леонова. Фильм цикла «Матрица науки» (подготовлен по заказу Комитета по науке и высшей школе Санкт-Петербурга в 2016 году): https://www.youtube.com/watch?v=X3bla8IYcvk
5. Леонов Г.А. О математическом образовании в России и Санкт-Петербурге. Прошлое, настоящее, будущее. Дифференциальные уравнения и процессы управления, №2, 2012, стр. 4-8:
6. Фаддеев Л.Д., Основное богатство России — это не природные ресурсы, а интеллектуальный капитал, Журнал Санкт-Петербургский Университет, 30.03.2009 (http://faddeev.com/page/3/)
7. Вершик А.М., Взгляд на университет сквозь призму математики. В сборнике “Матмех ЛГУ - СПбГУ от истоков до дней недавних. Дополнительные главы”, СПб, 2015 (http://www.mathsoc.spb.ru/history/mm_ad_15.pdf)
8. Назаров А.И., Об учебном плане бакалавриата по направлению Математика в Санкт-Петербургском госуниверситете, Математика в высшем образовании, №11, 2013, стр. 63-66 (http://www.mvo.unn.ru/files/2020/03/nom11_009_nazarov.pdf)
9. Материалы заседания учебно-методической комиссии мат.-мех. факультета СПбГУ 09/04/2015: выступление декана Леонова Г.А. *о необходимости и своевременности появления образовательной программы бакалавриата по направлению “Математика” в СПбГУ*; выступление Смирнова С.К. *об истории ПОМИ-потока* (https://spbu.ru/sites/default/files/20150409_protocol_umk_math.pdf)
10. Итоги заседания Ученого совета СПбГУ. «СПбГУ» (28 января 2018): Выдвижение на соискание премии правительства Российской Федерации в области образования (https://spbu.ru/openuniversity/documents/itogi-zasedaniya-uchenogo-soveta-spbgu-70). Научно-практическая разработка. «Создание инновационных структур для обучения информационным технологиям на платформе современной математики» (руководитель: Леонов Г.А, авторский коллектив: Терехов А.Н., Новиков Б.А., Крук Е.А., Нестеров В.М.): материалы к выдвижению (https://spbu.ru/sites/default/files/20180129_povestka_us_spbu_materials_zayavka.pdf)
11. Леонов Г.А., Терехов А.Н., Новиков Б.А., Крук Е.А., Нестеров В.М., Создание на математико-механическом факультете СПбГУ научно-образовательного ИТ-кластера на базе современной фундаментальной математики, Компьютерные инструменты в образовании, №2, 2017, стр. 42-57
12. Выступление Г.А. Леонова с докладом “В.А. Якубович и Санкт-Петербургская математическая школа” на совместном заседании Санкт-Петербургского математического общества и Санкт-Петербургского семинара по теории управления 23 июня 2015 года (https://youtu.be/bXzXAxutiyM). По материалам статьи: S. Abramovich, N. Kuznetsov, G. Leonov, V.A. Yakubovich - mathematician, “father of the field”, and herald of intellectual democracy in science and society, IFAC-PapersOnLine, 48(11), 2015, pp. 1–3)
13. Выступление декана Математико-механического факультета СПбГУ, проф. А.И. Разова и проф. Н.В. Кузнецова о Ведущих научных школах РФ на Ученом совете Математико-механического факультета СПбГУ 13 февраля 2020 г. (https://spbu.ru/sites/default/files/20200213_protocol_us_math.pdf)


**N.V. Kuznetsov,** (Saint Petersburg State University, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg):

*Abstract.* The presentation is prepared in memoriam of G. A. Leonov – the corresponding member of the Russian Academy of Science (1988-2018).

М. М. ШУМАФОВ
(Адыгейский государственный университет, г. Майкоп)

# МЕТОД ЛЕОНОВА НЕСТАЦИОНАРНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

*Дан краткий обзор по проблеме стабилизации линейных систем управления. Рассматривается стабилизация систем нестационарной обратной связью с запаздыванием по Пирагасу и нестационарной обратной связью по выходу. Даны постановки проблем Пирагаса и Брокетта о стабилизации линейных систем управления соответственно обратной связью с запаздыванием и нестационарной обратной связью. Указаны алгоритмы Леонова нестационарной стабилизации для решения проблемы Пирагаса и проблемы Брокетта. Даны необходимые и достаточные условия стабилизируемости двумерных и трёхмерных систем.*

**Введение.** Задача о стабилизации динамических систем является одной из важнейших в теории управления. Интерес к проблемам стабилизации мотивируется как запросами практики управления, так и формулировками открытых проблем известными учёными. Теории и практике стабилизации систем управления и смежным вопросам посвящено большое количество статей и книг (см., например, обзоры [1–10]).

Три десятилетия назад в теории управления динамических систем возникло новое направление – стабилизация хаоса. Начало этому направлению положила работа Э. Отта, С. Гребоги и Дж. Йорке [11], в которой на примере дискретной системы Хенона компьютерным моделированием с помощью «малого» входного управления была показана возможность стабилизации одной из неустойчивых периодических орбит, содержащихся в странном аттракторе системы.

Новый метод стабилизации, основанный на обратной связи с запаздыванием, был предложен К. Пирагасом в статье [12], стимулировавшей много дальнейших исследований. Управление по Пирагасу представляет собой разность текущего состояния системы и состояния с задержкой по времени, равной (или кратной) периоду стабилизируемой периодической орбиты, с некоторым постоянным коэффициентом усиления. С момента выхода работы [12] опубликовано более тысячи работ, посвящённых вопросам стабилизации обратной связью по Пирагасу неустойчивых состояний равновесия и неустойчивых периодических орбит, встроенных в странные аттракторы различных непрерывных и дискретных динамических систем (см. обзоры [6–10]). Хотя метод Пирагаса оказался весьма эффективным и мощным средством для стабилизации хаоса, но, тем не менее, было обнаружено, что его возможности существенно ограничены. Это обстоятельство впервые было указано в работах Т. Ушио [13] (для дискретных систем), Х. Накаджима [14] и У. Джаст и др. [15] (для непрерывных систем). Позже аналогичные результаты для других классов систем были установлены в работах [16–20].

Ограничение, которому подчиняется обратная связь по Пирагасу, для непрерывных систем состоит в том, что никакая неустойчивая периодическая орбита (никакое неустойчивое состояние равновесия) с нечётным числом вещественных мультипликаторов Флоке линеаризованной относительно цикла системы бóльших, чем единица (нечётным числом положительных собственных значений матрицы Якоби) не может быть стабилизирована обратной связью с запаздыванием и постоянным коэффициентом усиления. Эта проблема «нечётного ограничения» (в англоязычных публикациях – «odd number limitation») интенсивно обсуждалась во многих работах с целью его преодоления (см., например, обзор [7] и [21–29]). Однако предложенные алгоритмы в основном являются приближёнными, основанными на численно-аналитическом подходе. В работе Г. А. Леонова [30] разработан основанный на строгих математических выводах алгоритм, позволяющий преодолеть «нечётное ограничение» при стабилизации неустойчивых периодических орбит в непрерывных системах. Алгоритм Леонова использует *нестационарную* обратную связь Пирагаса, в которой управление формируется с помощью запаздывающей обратной связи с периодическим коэффициентом усиления. В [31] данный алгоритм перенесён на дискретный случай, в [32] – для стабилизации неустойчивых состояний равновесия в непрерывных системах с «нечётным ограничением».

Другой проблемой в теории управления, стимулировавшей немало публикаций, была сформулированная в 1999 году Р. Брокеттом проблема о стабилизации линейной стационарной си-

стемы *нестационарной* обратной связью [33]. Для решения проблемы Брокетта в работах Леонова [34–37] предложены алгоритмы низкочастотной стабилизации. В скалярном случае (когда вход и выход системы управления являются скалярами) алгоритмы высокочастотной стабилизации были предложены в [38–40]. В [41] рассмотрен дискретный аналог проблемы Брокетта. Позже в [42] были получены общие необходимые и достаточные условия существования классов стабилизирующих матриц произвольного вида, решающих проблему Брокетта.

Предлагаемый доклад посвящён краткому обзору работ по проблеме нестационарной стабилизации линейных систем управления.

**Нестационарная стабилизация. Проблема Пирагаса. Проблема Брокетта.** Здесь вкратце рассматривается нестационарная стабилизация неустойчивых орбит и неустойчивых состояний равновесия в задачах Пирагаса и Брокетта.

***Проблема Пирагаса.*** С математической точки зрения, проблема Пирагаса состоит в следующем. Пусть $\xi(t)$ – неустойчивая периодическая траектория с периодом $T > 0$ системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + u \tag{1}$$

при $u = 0$. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления. В систему (1) вводится обратная связь вида [12]

$$u(t) = K\left[x(t) - x(t-\tau)\right],\ \tau > 0, \tag{2}$$

где $K$ – некоторая вещественная постоянная $n \times n$ - матрица.

Замкнутая система (1), (2) принимает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + K\left[x(t) - x(t-\tau)\right]. \tag{3}$$

Задача состоит в том, чтобы найти матрицу $K$ и число $\tau > 0$ такие, чтобы периодическая траектория $\xi(t)$ системы (3) оказалась орбитально асимптотически устойчивой.

В работе Леонова [30] для преодоления «нечётного ограничения», которому подчиняется обратная связь (2), в систему (1) вводится нестационарная обратная связь (2), где $K = K(t)$ – некоторая периодическая матрица, которую следует выбрать подходящим образом. В [30] доказано, что существует вещественная периодическая матрица $K(t)$ с периодом $6T$ ($T$ – период цикла $\xi(t)$) такая, что обратная связь (2) с $K = K(t)$ и $\tau = 2T$ стабилизирует неустойчивую орбиту $\xi(t)$, для которой имеет место «нечётное ограничение». В [31] в дискретном случае неустойчивая периодическая орбита стабилизируется с импульсным периодическим коэффициентом в обратной связи, период которого в два раза больше периода цикла. Этот же алгоритм, несколько видоизменённый, позволяет стабилизировать неустойчивые состояния равновесия с «нечётным ограничением» [32].

***Проблема Брокетта.*** Дана линейная система управления

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu\ ,\ y = Cx\,, \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u \in \mathbb{R}^m$ – управление, $y \in \mathbb{R}^l$ – выход, $A$, $B$ и $C$ – постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей.

Требуется найти нестационарную обратную связь $u = K(t)y$ такую, чтобы замкнутая система

$$\frac{dx}{dt} = \left(A + BK(t)C\right)x \tag{5}$$

была асимптотически устойчивой.

В случае постоянной матрицы $K(t) = K = const$ задача стабилизации системы (5) изучалась многими авторами, и продолжает оставаться в центре внимания многочисленных исследовате-

лей (см., например, обзоры [1–5]). По существу в проблеме Брокетта требуется выяснить, насколько введение в обратную связь зависимых от $t$ матриц $K(t)$ расширяет возможности стационарной стабилизации?

Решение проблемы Брокетта в классе кусочно-непрерывных периодических матриц $K(t)$ с достаточно большим периодом дано в работах [34–37], а в скалярном случае $(m=l=1)$ в классе непрерывных периодических функций с достаточно малым периодом – в работах [38–40]. В [42] предложен алгоритм построения семейства стабилизирующих матриц $K(t)$.

В [34–40], в частности, даны необходимые и достаточные условия стабилизируемости двумерных и трёхмерных управляемых систем нестационарной обратной связью. Эти условия хорошо показывают преимущества нестационарной стабилизации по сравнению со стационарной. Действительно, необходимым и достаточным условием стабилизируемости в двумерном случае системы (4) $(n=2)$, $y=c_1x_1+x_2$, $x=(x_1,x_2)$ нестационарной обратной связью является выполнение хотя бы одного из условий: 1) $c_1>0$ или 2) $c_1\le 0$, $c_1a_2<a_1+c_1^2$,где $a_1$ и $a_2$ – коэффициенты характеристического многочлена $\det(pI-A)=p^2+a_2p+a_1$ матрицы $A$. Стационарная стабилизация даёт более «стеснительные» условия: 1) $c_1>0$ или 2) $c_1\le 0$, $c_1a_2<a_1$. В трёхмерном случае система (4) $(n=3)$, $y=x_1$, $x=(x_1,x_2,x_3)$ стабилизируема нестационарной обратной связью тогда и только тогда, когда $a_3>0$, где $\det(pI-A)=p^3+a_3p^2+a_2p+a_1$, а при стационарной стабилизации соответствующими условиями являются: $a_2>0$, $a_3>0$. При $y=x_2$ и $y=x_3$ необходимыми и достаточными условиями стабилизируемости системы (4) $(n=3)$ нестационарной обратной связью являются $a_1\ne 0$, $a_3>0$ и $a_1<0$, $a_2>0$ соответственно, а стационарной обратной связью являются: $a_1>0$, $a_3>0$ и $a_1>0$, $a_2>0$ соответственно. Результаты работ [34–41] подробно изложены в [43] и монографиях [44,45].

ЛИТЕРАТУРА


1. Bernstein D.S. Some Open Problems in Matrix Theory Arising in Linear Systems and Control. *Linear Algebra and its Applications.* 1992. Vol. 162-164. P. 409-432.
2. Blondel V., Gevers M., Lindquist A. Survey on the state of the systems and control. *European J Contol.* 1995.Vol.1.P.5–23.
3. Syrmos V.L., Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K. Static Output Feedback. - A Survey. *Automatica.* 1997. Vol. 33, No. 2. P. 125-137.
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению. *Автоматика и телемеханика.* 2005.– № 5. С. 7-46.
5. Шумафов М.М. Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор. Вестник С.-Петербургского университета. Сер. Математика, механика и астрономия. 2019 Т.6 (64). Вып. 4. С. 534-591.
6. Fradkov A.L., Evanse R.J. Control of Chaos: Some Open Problems. *Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control,* Orlando, Florida, USA, December 2001. P.698-704.
7. Tian Yu., Zhu J., Chen Gu. A survey on delayed feedback control of chaos. *Journ. of Contr. Theory and Appl.* 2005. No. 4. P. 311–319.
8. Pyragas K. A Twenty-Year Review of Time-Delay Feedback Control and Recent Developments. *Intern. Sympos. on Nonlin. Theory and its Appl.* Spain. 2012. P. 683–686.
9. Leonov G.A., Shumafov M.M., Kuznetsov N.N. A short survey of delayed feedback stabilization. *1st IFAC Conference on Modeling, Identification and Control of Nonlinear Systems,* S-Petersburg, June 24–26, 2015. P. 716–719.
10. Shumafov M.M. Stabilization of unstable steady states of dynamical systems. *Вестник Адыгейского государственного университета.* Сер. Естественно-математические и технические науки. Part 1: 2015. Вып. 4. С. 13-21; Part 2: 2016. Вып. 2. С. 11-33; Part 3: 2016. Вып. 4. С. 13-27.
11. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling Chaos. *Phys. Rev. Lett.* A. 1990. P. 1196-1199.
12. Pyragas K. Continuos control of chaos by self controlling feedback. *Phys. Lett. A.* 1992. Vol. 170. P. 421–428.
13. Ushio T. Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* I. 1996. Vol. 43 (9). P. 815-816.
14. Nakajima H. On analytical properties of delayed feedback control of chaos. *Phys. Lett. A.* 1997. Vol. 232. P. 207-210.
15. Just W., Bernard T., Ostheimer M., Reibold E., Benner H. Mechanism of time-delayed feedback control. *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 203–206.
16. Kokame H., Hirata K., Konishi K., Mori T. Difference feedback can stabilize uncertain steady states [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control.* 2001. Vol. 46 (12). P. 1908-1913.
17. Hino T., Yamamoto Sh., Ushio T. Stabilization of unstable periodic orbits of chaotic discrete-time systems using prediction-based feedback control. *Intern. Journ. Bifurcation and Chaos.* 2002. Vol. 12(2). P. 439–446.

18. Tian Y.P., Zhu J. Full characterization on limitation of generalized delayed feedback control for discrete-time systems [J]. *Physica D*. 2004. Vol. 198(3–4). P. 248–257.
19. Morgül Ö. On the stability of delayed feedback controllers [J]. *Physics Letters A*. 2003. Vol. 314(4). P. 278–285.
20. Hooton E.W., Amann A. An analitical limitation for time-delayed feedback control in autonomous systems. 2012, *arXiv*: 1109.1138v2 [nlin.CD].
21. Konishi K. and Kokame H. Observer-based delayed feedback control for discrete-time chaotic systems [J]. *Physics Letters A*. 1998. Vol. 248(5–6). P. 359–368.
22. Ushio T. Prediction-based control of chaos [J]. *Physics Letters A*. 1999. Vol. 264(1). P. 30–35.
23. Nakajima H. Delayed feedback control with state predictor for continuous-time chaotic systems [J]. *Intern. Journ. Bifurcation Chaos*. 2002. Vol. 12(5). P. 1067–1077.
24. Pyragas K. Control of dynamical systems via time-delayed feedback and unstable controller. Synchronization: Theory and Application / eds. A. Dikovsky, Yu. Maistrenko. Dordrecht: Kluwer, 2003. P. 187–219.
25. Fiedler B., Flunkert V., Georgi M., Hövel P., Schöll E. Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control. *Phys. Rev. Lett.,* 2007. Vol. 98, 114101.
26. Just W., Fiedler B., Georgi M., Flunkert V., Hövel P., Schöll E. Beyond the odd number limitation: A bifurcation analysis of time-delayed feedback control. *Phys. Rev. E.,* 2007. Vol. 76, 026210.
27. Fiedler B., Flunkert V., Hövel P., Schöll E. Beyond the odd number limitation of time-delayed feedback control of periodic orbits. *Eur. Phys. J. Special Topics,* 191. 2010. P.53-70.
28. Hooton E.W., Amann A. An odd number limitation of extended time-delayed feedback control in autonomous systems. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2013, Vol. 371, 20120463.
29. Pyragas K., Pyragas V. Time-Delayed Feedback Control Design Beyond the Odd Number Limitation. *Phys. Rev. E.,* 2013. Vol. 88, 012903.
30. Leonov G.A. Pyragas Stabilizability via delayed feedback with periodic control gain. *Systems and Control Letters.* 2014. Vol.69. P.34-37.
31. Леонов Г.А., Звягинцева К.А. Стабилизация по Пирагасу дискретных систем запаздывающей обратной связью с периодическим импульсным коэффициентом усиления. *Вестник Санкт-Петербургского университета*. Сер. Математика, механика и астрономия. 2015. Т. 2 (60). Вып. 3. С. 342-353.
32. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Стабилизируемость неустойчивых состояний равновесия систем по Пирагасу нестационарной обратной связью с запаздыванием. *Автомат. и телемех.,* 2018. №. 6. С. 87-98.
33. Brockett R. A stabilization problem. In book: Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Springer, 1999. P. 75-78.
34. Leonov G.A. The Brockett stabilization problem. *Proc. of Intern. Conference Control of Oscillations and Chaos*. St. Petersburg. 2000. P.38-39.
35. Леонов Г.А. Проблема Брокетта в теории устойчивых линейных дифференциальных уравнений. *Алгебра и анализ.* 2001. Т. 13.Вып. 4. С. 134–155.
36. Леонов Г.А. Стабилизационная проблема Брокетта. *Автомат. и телемех.,* 2001. № 5. С. 190–193.
37. Leonov G.A. The Brockett Problem in the Theory of Nonstationary Stabilization of Linear Differential Equations. *Amer. Math. Soc.* Transl. 2002. Vol. 205, No. 2. P. 163–173.
38. Moreau L., Aeyels D. Stabilization by means of periodic output feedback. *Proc. of the 38th IEEE conference on Decision and Control (CDC)*. Phoenix, Arizona, USA. December 7–10, 1999. P. 108–109.
39. Moreau L., Aeyels D. A note on stabilization by periodic output feedback for third-order systems. *Proc. of the 14th Intern. Symp. of Mathematical Theory of Networks and Systems* (MTNS). Perpignan, France. June 19–23, 2000.
40. Moreau L., Aeyels D. Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree. *Systems & Control Letters*. 2004. Vol. 51, No. 5. P. 395–406.
41. Леонов Г.А. Проблема Брокетта для линейных дискретных систем управления. *Автомат. и телемех.* 2002. № 5. С. 92–96.
42. Бойков И.В. К стабилизационной проблеме Брокетта. *Автомат. и телемех.*, 2005. № 5. С. 76–82.
43. Leonov G.A., Shumafov M.M. Vibrational Stabilization and the Brockett Problem. *Differential Equations.* 2011. V.47. №13. P.1853-1915.
44. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. 420 с.
45. Leonov G.A., Shumafov M.M. Stabilization of Linear Systems. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2012. 408 pp.


---

**M.M. Shumafov** (Adyghe State University, Maykop). **Leonov's Method of Nonstationary Stabilization in the Theory of Linear Control Theory**

*Abstract.* A brief review on stabilization problem for linear control systems is presented. Stabilization of systems by nonstationary Pyragas' time-delay feedback control and time-varying output feedback is considered. The statements of Pyragas' and Brockett's problems for stabilization of linear control systems by time-delay feedback control and time-varying output feedback respectively are given. Leonov's algorithms of nonstationary stabilization for solutions of Pyragas' and Brockett's problems are presented. Necessary and sufficient conditions of stabilizability of two - and three - dimensional systems are given.

О.Н. ГРАНИЧИН
(Санкт-Петербургский государственный университет, Институт проблем машиноведения РАН)

# РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ И АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ: НАУЧНЫЕ ШКОЛЫ В.Н. ФОМИНА И А.Е. БАРАБАНОВА

*Существенную роль в становлении кафедры Теоретической кибернетики сыграла стратегия В.А. Якубовича на привлечение преподавателей и сотрудников из разных областей. Среди нескольких выпускников физического факультета на кафедру пришел Владимир Николаевич Фомин (1937-2000) и на основе глубокого понимания физических процессов регистрации и обработки сигналов обогатил тематику кафедры новыми постановками задач и подходами. Принципиально новые постановки задач требовали разработки нового математического аппарата. В конце 70-х годов в тематику исследований Фомина В.Н. окунулся замечательный математик - Барабанов А.Е. (1956-2017). В докладе анализируется вклад в развитие теоретической кибернетики двух научных школ В.Н. Фомина и А.Е. Барабанова.*

Доклад на приглашенную секцию «Научные школы В.А. Якубовича и Г.А. Леонова: 50 лет кафедре теоретической кибернетики СПбГУ».

**Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация.** Существенную роль в становлении кафедры Теоретической кибернетики сыграла стратегия В.А. Якубовича на привлечение преподавателей и сотрудников из разных областей. Среди нескольких выпускников физического факультета на кафедру пришел Владимир Николаевич Фомин (1937-2000) [1] и обогатил разрабатываемые новые теории глубоким физическим пониманием процессов регистрации и обработки сигналов. К моменту создания кафедры в мире уже было получено много замечательных результатов по кибернетике в идеальных условиях при отсутствии помех и неопределенностей в модельном описании систем. Однако роль кибернетики все еще недооценивалась. Именно начало систематического изучения систем с помехами и неопределенностями показало безальтернативность кибернетического подхода, при котором неопределенности в системе снижаются за счет использования канала обратной связи. В некотором смысле обратные связи позволяют добиться резонанса в системе, который «подавляет» помехи и неопределенности. С успешного решения таких задач В.Н. Фомин начал свой путь в кибернетике [2]. Другая актуальная сейчас тематика – машинное обучение. В 1976 году В.Н. Фомин опубликовал одну из первых научных монографий на русском языке о математической теории обучающихся опознающих систем [3], получив за нее в 1977 г. Университетскую премию I степени.

Показателем роста уровня и влиятельности исследований кафедры явилась публикация основополагающей коллективной монографии [4], в которой новые адаптивные подходы к автоматическому управлению были представлены, формализованы и обоснованы. В то же время уже в этой монографии видны существенно различные направления развития исследований на кафедре. Далее Владимир Николаевич сфокусировался на наименее изученной, но более всего близкой ему тематике рекуррентного оценивания и адаптивной фильтрации [5], сквозь призму которой он рассматривал и задачи управления дискретными объектами в условиях существенных неопределенностей [6]. Им был внесен заметный вклад в теорию адаптивного управления и фильтрации, были получены многочисленные оригинальные результаты в исследованиях стохастической линейно-квадратичной задачи оптимального управления, параметризации передаточных функций, рандомизированных стратегий управления, минимаксного управления, рекуррентного оценивания, спектральной факторизации. С конца 80-х гг. XX века Владимир Николаевич был увлечен разработкой операторного подхода к задачам фильтрации и управления [7], в рамках которого ему удалось построить единую теорию линейной фильтрации, включающую как составные части теории оптимальной фильтрации стационарных процессов Винера-Колмогорова и рекуррентной фильтрации Калмана-Бьюси. Этот подход оказался плодотворным и при исследовании линейно-квадратичной задачи оптимального управления и ее абстрактных аналогов. Результаты были опубликованы и на английском языке в двухтомнике «Optimal Filtering» [8,9].

Всего В.Н. Фоминым опубликовано более 200 научных работ, в том числе 13 монографий. Последняя из них [10] вышла в свет после его кончины при существенной помощи его учеников – Андрея Барабанова и Юлии Гель.
За тридцать лет работы на кафедре под руководством Владимира Николаевича защитилось 39 кандидатских диссертаций, многие из его учеников позже защитили и докторские диссертации.

**Синтез минимаксных регуляторов.** После публикации первых работ по синтезу минимаксных стабилизирующих регуляторов для устойчивых по управлению объектов управления в конце 70-х гг. XX века казалось, что и в общем случае решение задачи будет близким к уже активно развивающемуся направлению синтеза оптимальных линейно-квадратичных регуляторов, в котором среди полученных на кафедре теоретической кибернетики результатов заметную роль играла кандидатская диссертация А.Е. Барабанова. Но оказалось, что похожие по постановке задачи о синтезе оптимальных минимаксных стабилизирующих регуляторов приводят к совершенно другим структурам и результатам [11,12]. Принципиально новые постановки задач требовали разработки нового математического аппарата. К концу XX века Андрей Евгеньевич разработал совершенно новую оригинальную теорию для управления системами с практически произвольными помехами (unknown-but-bounded). Кроме того, существенный вклад А.Е. Барабанов внес и в теорию H∞-управления и в решение проблем чаттеринга [13,14]. Уже в новом XXI веке на основе новой теории вместе со своими учениками А.Е. Барабанов реализовал много прикладных проектов [15-24], включая автопилот для вертолета и системы распознавания человеческих голосов и звуков дельфинов. Научную школу А.Е. Барабанова сейчас представляют его многочисленные дипломники, аспиранты и семь защитившихся кандидатов наук.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Барабанов А.Е., Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Шепелявый А.И., Якубович В.А** Фомин Владимир Николаевич (1937-2000 гг.) // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2007. № 3. С. 167-168.
2. **Фомин В.Н.** Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. - Л., Изд-во ЛГУ, 1971.
3. **Фомин В.Н.** Математическая теория обучаемых опознающих систем. - Л., Изд-во ЛГУ. 1976.
4. **Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.** Адаптивное управление динамическими объектами. - М. Наука, 1981. 448 с.
5. **Фомин В.Н.** Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. - М. Наука, 1984. 288 с.
6. **Фомин В.Н.** Методы управления линейными дискретными объектами. - Л., Изд-во ЛГУ. 1985. 336 с.
7. **Фомин В.Н.** Операторные методы управления линейными дискретными объектами. - Л., Изд-во ЛГУ. 1996. 308 с.
8. **Fomin V.N.** Optimal Filtering. Kluwer, vol. 1. 1998.
9. **Fomin V.N.** Optimal Filtering. Kluwer, vol. 2. 1999.
10. **Фомин В.Н.** Оптимальная и адаптивная фильтрация. – СПб, Изд-во СПбГУ, 2003. 430 с.
11. **Барабанов А.Е., Граничин О.Н.** Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика, 1984, № 5, с. 39-46.
12. **Барабанов А.Е.** Синтез минимаксных регуляторов – СПб, Изд-во СПбГУ, 2003. 224 с.
13. **Барабанов А.Е., Первозванский А.А** Оптимизация по равномерно-частотным показателям (H-теория) // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 3.
14. **Johansson K.H., Åström K.J., Barabanov A.E.** Limit cycles with chattering in relay feedback systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2002. Vol. 47. № 9. PP. 1414-1423.
15. **Barabanov A.**, **Gel Y.R** Strong consistency of the regularized least-squares estimates of infinite autoregressive models // Journal of Statistical Planning and Inference. 2007. Vol. 137. № 4. PP. 1260-1277.
16. **Barabanov A.**, **Ortega R., Escobar G.** On ultimate boundedness around non-assignable equilibria of linear time-invariant systems // Automatica. 2008. Vol. 44. № 1. PP. 286-288.
17. **Dib W., Ortega R., Lamnabhi-Lagarrigue F., Barabanov A.** A "globally" convergent controller for multi-machine power systems using structure-preserving models // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. Vol. 54. № 9. PP. 2179-2185.
18. Barabanov A.E., Romaev D.V. Helicopter modeling and autopilot design // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2011. P. 3015.
19. Barabanov A., Evdokimova V., Skrelin P. Estimation of vowel spectra near vocal chords with restoration of a clipped speech signal // Lecture Notes in Computer Science. 2015. Vol. 9319. PP. 209-216.
20. **Барабанов А.Е.** Линейная фильтрация с адаптивной подстройкой матриц ковариаций возмущений в объекте и шумов измерения // Автоматика и телемеханика. 2016. № 1. С. 30-49.
21. **Melnikov A., Barabanov A.** Guaranteed estimation of speech fundamental frequency with bounded complexity algorithm // Cybernetics and Physics. 2016. Vol. 5. № 1. PP. 21-35.
22. **Petrosian O., Barabanov A.**, Looking forward approach in cooperative differential games with uncertain stochastic dynamics // Journal of Optimization Theory and Applications. 2017. Vol. 172. № 1. pp. 328-347.

23. **Salishev S., Barabanov A., Klotchkov I.** Microphone array post-filter in frequency domain for speech recognition using short-time log-spectral amplitude estimator and spectral harmonic/noise classifier // Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol. 10458 LNAI. PP. 525-534.
24. Барабанов А.Е., Ромаев Д.В. Оценка частоты вращения несущего винта вертолета по показаниям бортовых сенсоров и ее использование при синтезе автопилота // Информатика и системы управления. 2018. № 1 (55). С. 119-129.

---

**O.N. Granichin** (Saint Petersburg State University, IPME RAS) **Recurrent estimation and adaptive filtration: V.N. Fomin's and A.E. Barabanov's scientific schools.**

*Abstract.* A significant role in the formation of the Department of Theoretical Cybernetics was played by the strategy of V.A. Yakubovich of attracting teachers and staff from different fields. Among several graduates of the Faculty of Physics, Vladimir Nikolaevich Fomin (1937-2000) came to the department. His deep understanding of the physical processes of registration and signal processing allowed to enrich the scope of department research topics with new problem statements and approaches. Fundamentally new formulations of problems required the development of a new mathematical tools. At the end of the 70s, a wonderful mathematician - A.E. Barabanov. (1956-2017) involves into Fomin's research fields. This report analyzes the contribution to the development of theoretical cybernetics of two scientific schools of V.N. Fomin and A.E. Barabanov.

А.С. МАТВЕЕВ
(Санкт-Петербургский государственный университет,
Национальный исследовательский университет ИТМО, Санкт Петербург, РФ)

А. Ю. ПОГРОМСКИЙ
(Технический университет Эйндховена, Эйндховен, Нидерланды)

# ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА БИТОВУЮ СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ: КРАТКИЙ ОБЗОР

*Дается краткий обзор основных результатов, полученных за последние два десятилетия в области математической теории управления и наблюдения при ограничении битовой скорости передачи данных. В фокусе обзора - линейные системы в сочетании со стохастическими моделями каналов связи, распределенные сетевые системы с детерминированными каналами связи, а также фундаментальная характеристика нелинейных систем и связанные специализированные концепции энтропии.*

Современные достижения микроэлектроники и информационных технологий предопределили бурное развитие крупномасштабных систем управления, в которых решение задач управления распределено между массой индивидуальных модулей (сенсоров, регуляторов, процессоров, эффекторов), связанных цифровой коммуникационной сетью. Такие сетевые системы интегрируют процессы управления, вычисления, коммуникации и управляемой эволюции объекта в единое целое, чья динамика является результатом взаимодействия дискретных и непрерывных компонент и в этом смысле гибридна.

Сетевая архитектура отмечена многими достоинствами. Вместе с тем разработка сетевых технологий управления связана с необходимостью преодоления ряда специфических проблем, вытекающих из определяющей черты таких технологий: деления ресурсов сети между многими пользователями. Среди этих проблем ограничение количества информации (в битах), которое можно передать/принять/обработать в данном узле сети за определенный отрезок времени, их ненадежное, нерегулярное или лимитированное обслуживание, непредсказуемые задержки в каналах связи и вычислительных модулях, потери пакетов, необходимость квантования данных, рассинхронизация элементов и др. Отмеченные неидеальности все чаще проявляются в степени, существенной для процессов управления, образуя своего рода «узкое место». Сценарии такого рода возникают на регулярной основе например, ввиду того, что многие факторы, стимулирующие применение сетевых технологий (удешевление компонент, их доступность, простота инсталляции, и т. п.), одновременно стимулируют рост числа компонент и связей сети и приводят к ситуации, когда общие ресурсы сети, сами по себе значительные, делятся между не менее значительным числом «пользователей». Впрочем, ограничения битовой скорости передачи данных могут иметь и иное происхождение. Например, надежная беспроводная связь под водой остается сложной проблемой, а дальняя космическая связь поглощает много энергии, что стимулирует решение задачи на счет передачи минимально необходимого для этого числа бит информации. В качестве другой иллюстрации приведем соображения скрытности, в силу которых интенсивность радиообмена между членами многоагентного роботизированного ансамбля желательно снизить до минимума.

Обсуждаемые проблемные факторы на практике доказали свою способность критически подорвать качество работы системы управления, вплоть до отказов, и требуют внимания уже на стадии её разработки. Классическая математическая теория управления предлагает лишь изолированные рецепты против некоторых из этих факторов. Вместе с тем более глубокий уровень их интеграции требует комплексного анализа и, как следствие, новых методов, которые дали бы инженеру в руки эффективный аппарат купирования соответствующих негативных последствий. Классические математические теории управления и связи в целом не демонстрируют такой интеграции. Даже между собой они имеют лишь незначительный контакт. Классическая теория управления в основном исходит из предположения идеального канала связи с номинально сколь угодно высокой битовой скоростью передачи данных и мгновенности вычислений. Со своей стороны, математическая теория информации рассматривает неидеальные каналы связи, будучи относительно индифферентной к цели передачи данных.

Указанные обстоятельства мотивировали новую междисциплинарную главу математической теории управления, в которой вопросы управления, коммуникации и вычислений изучаются в единстве. Широкомасштабные исследования в этой области были начаты на рубеже тысячелетий, при наличии отдельных более ранних результатов. Ориентиром новой математической теории частично послужила классическая теория информации и связи, связанная с именами Шеннона и Колмогорова. В ней ключевую роль играет характеристика канала связи, именуемая емкостью и определяемая как максимальное среднее количество бит информации, которое можно передать через данный канал в единицу времени со сколь угодно малой вероятностью ошибки, где максимум берется по всевозможным способам кодирования-декодирования. В новой теории аналогичный фундаментальный характеристикой (ФХ) является наименьшая битовая скорость передачи данных, которая необходима и достаточна для достижения определенной цели управления и данного динамического объекта. Каждая в своем контексте, эти характеристики указывают грань между возможным и невозможным и дают фундаментальный ориентир для разработки практических методов передачи данных/управления.

В последние два десятилетия, исследованию упомянутой ФХ в различных постановках были посвящена масса работ. Оказалось, что независимо от сценария эта характеристика аналогична по духу, хотя далеко не всегда равна топологической энтропии (ТЭ) исследуемого объекта, которая является традиционной количественной мерой сложности, хаотичности, неопределенности и случайности в динамической системе.

Доклад предлагает краткий обзор соответствующих основных результатов с упором на следующих темах

1. Управление линейными системами через стохастические (зашумленные) каналы связи и проблема адекватности классической математической теории информации и связи задачам управления: достижения, проблемы, парадоксы [1,2].
2. Распределенное децентрализованное управление сетевыми системами [1,3,6].
3. Фундаментальная характеристика (ФХ) нелинейных систем и связанные специализированные концепции энтропии [4,5,7].
4. Конструктивный метод вычисления ФХ, основанный на втором методе Ляпунова и методических разработках школы Якубовича-Леонова [4-7].
5. Достаточность метода: результаты, аналогичные обратным теоремам Ляпунова [7].
6. Примеры, связанные с прототипическими хаотическими системами [4-7].

ЛИТЕРАТУРА


1. **Matveev A.S., Savkin A.V.** Estimation and Control over Communication Networks. Boston: Birkhäuzer, 2009. 534 p.
2. **Matveev A.S., Savkin A.V.** An Analogue of Shannon Information Theory for Detection and Stabilization via Noisy Discrete Communication Channels. *SIAM Journal on Control and Optimization***.** 2007, Vol. 46. P.1323-1361
3. **Matveev A.S., Savkin A.V.** Multi-rate Stabilization of Linear Multiple Sensor Systems via Limited Capacity Communication Channels. *SIAM Journal on Control and Optimization***.** 2007, Vol. 44. P.584-618
4. **Matveev A.S., Pogromsky A.Y.** Observation of nonlinear systems via finite capacity channels: Constructive data rate limits. *Automatica*.. 2016, Vol. 70. P. 217—229
5. **Matveev A.S., Pogromsky A.Y.** Observation of nonlinear systems via finite capacity channels. Part II: Restoration entropy and its estimates**.** *Automatica*.. 2019, Vol. 103. P. 189—199
6. **Pogromsky A.Y., Matveev A.S., Proskurnikov A.V., Fridman E.** Comprehending complexity: Data-rate constraints in large-scale networks, *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2019. Vol. 64. P. 4252-4259
7. **Kawan C., Matveev A.S., Pogromsky A.Y.** Remote state estimation problem: towards the data-rate limit along the avenue of the second Lyapunov method,.*Automatica.* 2020 (submitted)


---

**A.S. Matveev** (Saint Petersburg State University, National Research University ITMO, Saint Petersburg, Russia), **A.Y. Pogromsky** (Technical University of Eindhoven, Eindhoven, the Netherlands) **Theory of control under constraints on the communication bit-rate: Brief overview.**

*Abstract.* The paper offers a brief overview of basic results obtained in the area of the mathematical theory of estimation and control under communication bit-rate constraints during the last two decades. The main focus of the overview is on linear systems combined with stochastic models of communication channels, on distributed networked systems with deterministic channels, and on a related to the topic fundamental characteristic of nonlinear systems and associated specialized concepts of entropy.

## Секция 8

## УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

К. Д. ВО, А.А. БОБЦОВ
(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

# АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ОБЪЕКТОМ НА БАЗЕ МЕТОДОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

*Рассматривается задача управления линейными нестационарными системами по выходу, то есть без измерения вектора переменных состояния или производных выходного сигнала. Для синтеза стабилизирующего управления выбирается хорошо зарекомендовавшая себя онлайн процедура решения матричного дифференциального уравнения Риккати. Для синтеза наблюдателя переменных состояния предлагается новый подход, обеспечивающий возможность, получения монотонных оценок сходимости с регулированием времени переходного процесса.*

**Введение. Постановка задачи.** Задача синтеза стабилизирующих регуляторов для линейных нестационарных объектов является классической и хорошо изученной в современной теории автоматического управления. За последние несколько десятилетий для специальных математических структур объектов управления были предложены разные оригинальные методы (см., например, [1 – 10]). Однако, на сколько известно авторам данной работы, не существует общих методов, кроме классического подхода – решение в реальном масштабе времени матричного дифференциального уравнения Риккати (см., например, [11, 12]). Базируясь на данном подходе, будет предложен алгоритм синтеза стабилизирующего регулятора, предусматривающий синтез, как сигнала управления, так и наблюдателя переменных состояния.

Рассмотрим полностью управляемый и наблюдаемый нестационарный одноканальный объект управления, представленного в форме вход-состояние-выход

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{1}$$

$$y(t) = C(t)x(t). \tag{2}$$

Предполагая, что все параметры модели (1), (2) являются известными (то есть коэффициенты матриц $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ известные функции времени), но вектор переменных состояния $x(t)$ не измеряется, требуется синтезировать закон управления $u(t)$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость положения равновесия $x = 0$.

**Синтез закона управления.** Решение задачи синтеза закона управления будет проведена в два этапа. На первом этапе будем допускать, что вектор переменных состояния $x(t)$ измеряется. Для решения данной задачи будем использовать онлайн процедуру решения матричного дифференциального уравнения Риккати [11, 12]. На втором этапе будет рассмотрен новый метод синтеза наблюдателя переменных состояния $x(t)$, обеспечивающий оценку неизмеряемых переменных состояния.

*Этап 1*. Рассмотрим модель (1), (2) в предположении, что вектор переменных состояния $x(t)$

измеряется. Выберем закон управления в следующем виде

$$u(t) = -B^T P x(t), \tag{3}$$

где нестационарная матрица $P$ находится из решения дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} + A^T P + PA - PBB^T P = -2\alpha P - Q \tag{4}$$

где число $\alpha > 0$ и стационарная матрица $Q = Q^T > 0$.

*Этап 2.* На данном этапе рассмотрим новый метод синтеза наблюдателя для объекта управления (1), (2). Для синтеза наблюдателя будем использовать идеи, предусматривающие использование методов параметрической идентификации, опубликованные в [13, 14]. Для этого рассмотрим динамическую систему полностью эквивалентную (1), то есть

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t). \tag{5}$$

Для оценивания вектора $x(t)$ будем использовать следующий алгоритм

$$\hat{x}(t) = z(t) - \Phi(t)\hat{\theta}, \tag{6}$$

где $\hat{x}(t)$ – оценивания вектора $x(t)$, $\theta = z(0) - x(0)$, а матрица $\Phi(t)$ рассчитывается следующим образом

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \Phi(0) = \mathrm{I}$$

Таким образом, задача оценивания вектора $x(t)$ может быть сведена к идентификации вектора неизвестных параметров $\theta$. Для оценивания параметра $\theta$ рассмотрим классическую регрессионную модель вида

$$q = \omega^T \theta, \tag{7}$$

где скаляр $q = y(t) - C(t)z(t)$ и вектор $\omega^T = C(t)\Phi(t)$.

Для идентификации вектора неизвестных параметров $\theta$, воспользуемся методом DREM (см., например, [15]). Следуя [15] пропустим известные элементы регрессионной модели (7) через блоки запаздывания $[\mathrm{H}(\cdot)](t) = (\cdot)(t-\tau)$, где $\tau \in R_+$. Тогда для (7) имеем

$$q_{f_i} = \omega_{f_i}^T \theta. \tag{8}$$

Сформулируем на основе исходой регрессионной модели (7) и новой отфильтрованной регрессионной модели (8) расширенную регрессионную модель

$$q_e = A_e \theta, \tag{9}$$

где $q_e = \begin{bmatrix} q & q_{f_1} & \cdots & q_{f_{n-1}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $A_e = \begin{bmatrix} \omega^{\mathrm{T}} & \omega_{f_1}^{\mathrm{T}} & \cdots & \omega_{f_{n-1}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Умножая (9) на алгебраическое дополнение $A_e$, получаем $Y = adjA_e q_e = \Delta\theta$, откуда получаем скалярную модель вида $Y_i = \Delta\theta_i$, где $\Delta = \det\{A_e\}$ – определитель матрицы $A_e$.

Оценку $\theta_i$ будем осуществлять по формуле

$$d\hat{\theta}_i / dt = -k_i \Delta(\Delta\hat{\theta}_i - Y_i), \tag{10}$$

где $k_i$ – положительное число, увеличивая которое можно добиваться ускорения процессов сходимости неизвестных параметров к истинным значениям.

С учетом наблюдателя (5), (6), (10) запишем закон управления (3) следующим образом

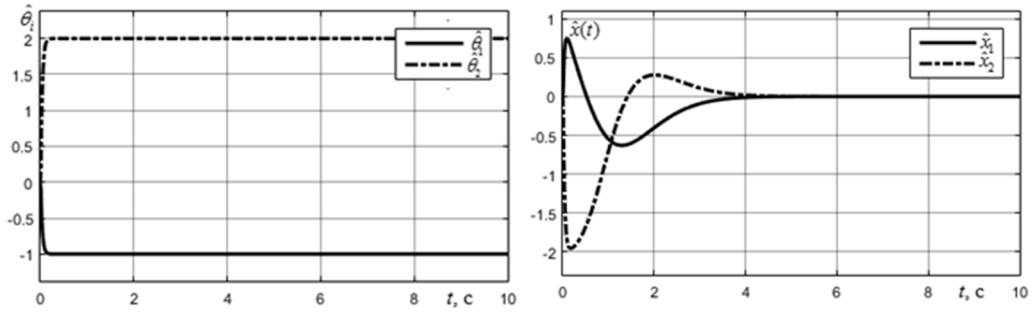
$$u(t) = -B^T P\hat{x}(t). \tag{11}$$

Для иллюстрации работоспособности закона управления (5), (6), (10), (11) представим результаты компьютерного моделирования. Пусть параметры матриц $A(t), B(t)$ имееют следующий вид

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; a_1(t) = \begin{cases} -0,2t \text{ при } t < 5 \\ -1 \text{ при } t \geq 5 \end{cases}.$$

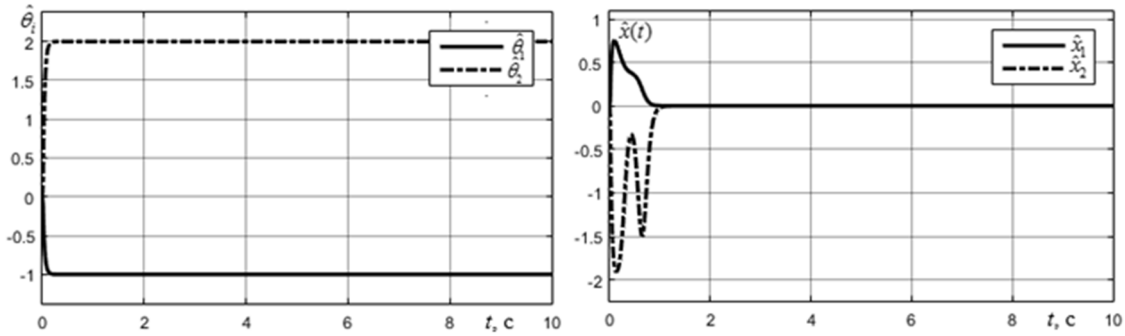
Проведем компьютерное моделирование для единичной матрицы $Q = Q^T > 0$ и различных значений коэффициента $\alpha > 0$. Примем $\tau = 0,01, k_i = 500$, $z(0) = 0$ и промоделируем наблюда-

тель (5), (6), (10) совместно с законом управления (11). На рисунках 1 и 2 представлены, соответственно, графики переходных процессов для коэффициентов $\alpha = 1$ и $\alpha = 10$.




А Б

Рис. 1. Графики переходных процессов $\hat{\theta}_i$ (А) и $\hat{x}(t)$ (Б) при $\alpha = 1$




А Б

Рис. 2. Графики переходных процессов $\hat{\theta}_i$ (А) и $\hat{x}(t)$ (Б) при $\alpha = 10$

**Заключение.** В работе предложен метод синтеза закона управления по выходу для линейной нестационарной системы (1), (2). Был синтезирован наблюдатель переменных состояния вида (5), (6), (10), обеспечивающий асимптотическую сходимость настраиваемых оценок к истинным значениям объекта управления. Для синтеза наблюдателя был использован подход, предусматривающий преобразование исходной модели объекта управления к линейной регрессионной модели вида (7). Представленные в работе результаты компьютерного моделирования иллюстрируют работоспособность предложенного подхода, а также демонстрируют хорошее качество переходных процессов. В качестве перспектив развития рассмотренного подхода, видеться его расширение на класс систем с неизвестными параметрами, а также при наличии возмущающих воздействий.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Бобцов А.А., Наговицина А.Г.** Адаптивное управление по выходу линейными нестационарными объектами // Автоматика и телемеханика. 2006. № 12. С. 163-174.
2. **Бобцов А.А., Григорьев В.В., Наговицина А.Г.** Алгоритм адаптивного управления нестационарным объектом в условиях возмущения и запаздывания // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 1. С. 8-14.
3. **Цыкунов А.М.** Робастное управление нестационарными объектами // АиТ. 1996. №2. С. 117–125.
4. **Бобцов А.А., Лямин А.В., Сергеев К.А.** Синтез закона адаптивного управления для стабилизации не точно заданных нестационарных объектов // Изв. вузов. Приборостроение. 2001. №3. С. 3–7.
5. **Никифоров В.О.** Робастная следящая система // Изв. вузов. Приборостроение. 1998. №7. С. 13 – 18.
6. **Барабанов Н. Е.** О стабилизации линейных нестационарных систем с неопределенностью в коэффициентах // АиТ. 1990. No10.
7. **Tsakalis K. S. and Ioannou P.A.** Adaptive control of linear time-varying plants // Automatica. 1987. V.23. No4. P. 459–468.
8. **Tsakalis K. S. and Ioannou P.A.** Linear time varying systems: control and adaptation. – Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993.
9. **Zhang Y., Fidan B., Ioannou P.A.** Backstepping control of linear time-varying systems with known and unknown parameters // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2003. – V. 48. – No 11. – P. 1908–1925.
10. **Юркевич В. Д.** Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб: Наука 2000.
11. **Wilson J Rugh.** Linear system theory. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

12. **Juan Rueda-Escobedo, Rosane Ushirobira, Denis Efimov, and Jaime Moreno.** Gramian-based uniform convergent observer for stable ltv systems with delayed measurements. International Journal of Control, 2019.
13. **Romeo Ortega, Alexey Bobtsov, Anton Pyrkin, Stanislav Aranovskiy.A** parameter estimation approach to state observation of nonlinear systems // Systems & Control Letters. Volume 85, November 2015, Pages 84-94.
14. **Romeo Ortega, Alexey Bobtsov, Denis Dochain, Nikolay Nikolaev.** State observers for reaction systems with improved convergence rates // Journal of Process Control. Volume 83, November 2019, Pages 53-62.
15. **Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.** Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Trans. Automat. Control. 2016. V. 62. No. 7. P. 3546–3550.

---

**Q.D.Vo, A.A. Bobtsov** (ITMO University, Saint-Petersburg). **Control algorithm for linear time-varying plant on base parametric identification methods**

*Abstract.* The problem of control for time-varying linear systems by the output (i.e. without measuring the vector of state variables or derivatives of the output signal) was considered. For the control design, the well-known online procedure for solving the Riccati matrix differential equation is chosen. For synthesis of the observer of state variables, a new approach is proposed, providing the possibility of obtaining monotonous estimates of convergence with the regulation of time of transition.

С. И. КОЛЕСНИКОВА
(Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения)

# ДВА АЛГОРИТМА НЕЛИНЕЙНОЙ АДАПТАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

*Рассмотрена проблема аналитического синтеза нелинейного регулятора для систем нелинейных дифференциальных / разностных уравнений, подверженных влиянию двух типов помех – случайной и неслучайной. Для решения задачи используется метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов, ранее применяемый только для детерминированных объектов.*

*Предложено два алгоритма синтеза адаптивных регуляторов, численная апробация которых проведена на ряде нелинейных объектов: роботе-манипуляторе, иммунологической системе, системе Лоренца.*

**Введение.** Принципы физической теории управления [1], учитывающей физические свойства и потенциальные внутренние ресурсы управляемого объекта, наиболее прозрачно отражены в алгоритмах управления на многообразиях [2-7], в частности, в логике синтеза метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР), ставшим уже классическим к настоящему времени [2, 3].

Одно из главных достоинств методов синтеза систем управления на многообразиях [2-7] состоит в следующем: в окрестности целевого многообразия для удерживания траекторий объекта в ней не требуется полного знания описания объекта (например, [2-7])). Именно это обстоятельство и техника моделирования возмущений как частных решений некоторых дифференциальных уравнений [8] будут использоваться в ниже излагаемом подходе нелинейной адаптации к синтезу управления неполно описанным объектом.

Целью данного доклада является, во-первых, изложение двух алгоритмов синтеза управления нелинейным объектом, часть описания которого неизвестна, на базе методов синтеза регуляторов, первый из которых реализует технику инвариантов (здесь - целевых многообразий) и расширения фазового пространства [9]; второй использует стратегии управления, минимизирующие дисперсию [10] выходной макропеременной на множестве дискретных АКАР-управлений; во-вторых, численное моделирование обеих систем управления по естественным показателям переходного и установившегося режимов для ряда прикладных нелинейных задач.

Следует отметить, что ранее было получено аналитическое обоснование робастных свойств адаптивного регулятора на многообразии с неслучайной помехой для объекта второго порядка [11] и алгоритма нелинейного стохастического синтеза 1-3-го порядков [12-14].

**Постановка задачи и синтез системы непрерывного управления. Алгоритм нелинейной адаптации.** Непрерывный объект управления задан описанием:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}\left(\mathbf{X}(t)\right) + \mathbf{u}(t) + \mathbf{z}(t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{X}[t] = \left(X_1[t],...,X_n[t]\right)$ - векторная переменная состояния; $\mathbf{F}(t) := \mathbf{F}\left(\mathbf{X}(t)\right) \in \mathrm{R}^n$ - нелинейная функция; $\mathbf{u} \in \mathrm{R}^m$, $m \le n$ - управление; $\mathbf{z}(t), \in \mathrm{R}^l$, $l \le m$ - неслучайная ограниченная функция, входящая в уравнения с управляющей переменной.

Ставится задача вывода объекта (1) в окрестность заданного целевого многообразия $\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{X}(t)\right) = 0, t \to \infty$, где $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{X}(t)\right)$ - целевая макропеременная.

***Алгоритм нелинейной адаптации***

*Этап 1.* Перевод внешнего возмущения во внутреннюю дополнительную фазовую переменную (расширение фазового пространства):

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}\left(\mathbf{X}(t)\right) + \mathbf{u}(t) + \hat{\mathbf{z}}(t), \\ &\dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \eta \boldsymbol{\psi}^*(t), \quad \eta = const > 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

*Этап 2.* Вывод структуры синтезируемого регулятора на базе классического АКАР из условия $\Phi_1 = \int_0^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \left[ \left(\psi_l\right)^2 + \left(\omega_l \dot{\psi}_l\right)^2 \right] dt \to \min, \omega_l > 0.$

Итоговая система управления для модели (1) представляет собой совокупность уравнений объекта управления и регулятора, полученного на базе (2).

*Замечание 1.* Аналогично строится система управления для дискретного варианта описания объекта управления. В этом случае система для построения дискретного АКАР-регулятора принимает вид:

$$\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{F}\left(\mathbf{X}(t)\right) + \mathbf{u}(t) + \hat{\mathbf{z}}(t),$$
$$\hat{\mathbf{z}}(t+1) = \hat{\mathbf{z}}(t) + \mu \boldsymbol{\psi}^*(t), \mu = const > 0.$$

*Замечание 2.* Логика синтеза системы управления на базе алгоритма нелинейной адаптации существенно использует факт: переменные возмущения $z_k(t), k = \overline{1,l}$ входят только в уравнения, содержащие переменные управления $u_i(t), i = \overline{1,m}.$

Принципиальное отличие ниже предлагаемого подхода от метода нелинейной адаптации заключается

а) в отказе от ограничительного условия наличия возмущения только в уравнениях, правые части которых содержат переменные управления;

б) в предположении неслучайности ограниченной функции помехи с нулевым средним, вероятностное распределение которой тоже неизвестно.

**Постановка задачи и синтез системы дискретного стохастического управления. Алгоритм, минимизирующий дисперсию выходной макропеременной**.

Дискретный стохастический объект задан описанием:

$$\mathbf{X}[t+1] = \mathbf{F}[t] + \mathbf{u}[t] + \boldsymbol{\xi}[t+1] + c\boldsymbol{\xi}[t], t \in \{0,1,...\} \qquad (3)$$

где $\mathbf{X}[t] = \left(X_1[t],...,X_n[t]\right)$ - векторная переменная состояния; $\mathbf{F}(t) := \mathbf{F}\left(\mathbf{X}(t)\right) \in \mathrm{R}^n$ - нелинейная функция; $\mathbf{u} \in \mathrm{R}^m$, $m \le n$ - управление; $\boldsymbol{\xi}(t), \in \mathrm{R}^l$, $l \le n$ - случайная ограниченная функция с нулевым средним и ограниченной дисперсией для некоррелированных компонент; $0 < c < 1$.

Ставится задача вывода объекта (2) в окрестность заданного целевого многообразия $\mathbf{E}\left\{\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{X}(t)\right)\right\} = 0, t \to \infty$, где $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{X}(t)\right)$ - целевая макропеременная; $\mathbf{E}\{\cdot\}$ - операция математического ожидания. При этом требуется выполнение следующих условий на управление:

1) $\mathbf{E}\left\{\psi_j[t+1] + \omega\psi_j[t]\right\} = 0,\ 0 < \lambda = \mathrm{const} < 1,\ j = \overline{1,m},\ t \to \infty;$

2) $\mathbf{D}\left\{\psi_j[t+1] + \omega\psi_j[t]\right\} \to \min,\ j = \overline{1,m},\ t \to \infty;$

3) $\mathbf{E}\{\Phi_2\} = \mathbf{E}\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\alpha^2\psi_j^2[t] + \left(\Delta\psi_j[t]\right)^2\right)\right\} \to \min, \alpha = const.$

***Алгоритм синтеза стохастического управления на многообразии***

*Этап 1.* Определение структуры регулятора $\tilde{\mathbf{u}}^A[t],\ t \in \{0,1,...\}$ на базе классического АКАР при фиксированном векторе $\xi(t), \in \mathrm{R}^l,\ l \le n$ и выполнение операции условного математического ожидания $\hat{\mathbf{u}}[t] = \mathbf{E}\left\{\tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{A}}[t] \,\middle|\, \xi^t\right\}$, где $\xi^t = \left(\boldsymbol{\xi}[t], \boldsymbol{\xi}[t-1]...\boldsymbol{\xi}[0]\right),\ \boldsymbol{\xi}[t] = \left(\xi_1[t],...,\xi_l[t]\right).$

*Этап 2.* Декомпозиция описания (3) с учетом предельных уравнений $\psi_j[t+1] + \lambda_j\psi_j[t] = 0, j = \overline{1,m}$ (левых частей уравнений Эйлера-Лагранжа для функционала типа 3), куда подставляется формула для $\hat{\mathbf{u}}[t]$.

*Этап 3.* Определение переменной $\xi[t]$ как функции от макропеременной и исключение ее из выражения $\hat{\mathbf{u}}[t]=\mathbf{E}\left\{\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{A}}[t]\,\middle|\,\xi^{t}\right\}$. Синтез стохастического дискретного регулятора закончен.

**Примеры постановок и решения нелинейных задач управления**. Рассмотрим применение двух выше изложенных алгоритма синтеза *целесообразного* управления для системы Лоренца как объекта управления (здесь приводится ее преобразованный вариант, так называемая «городская система» [15], в правую часть которых введены переменная шума $\zeta$ и управление $u$):

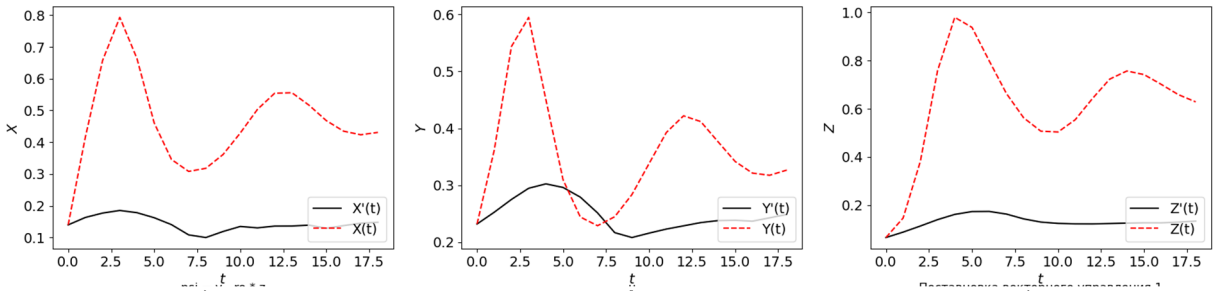
$$\begin{aligned}&\dot{X}(t)=f_1(t)+\zeta(t)+u(t), f_1=a_1(a_2Y(t)-a_3X(t)),\\&\dot{Y}(t)=f_2(t)=c_1(c_2X(t)-c_2Y(t))-c_4X(t)Z(t),\\&\dot{Z}(t)=f_3(t)=d_1X(t)Y(t)-d_2Z(t),\end{aligned}\qquad(4)$$

где $X(t),Y(t),Z(t)$ - количество продукции, производимой городской системой, численность коренного населения, цена земельной ренты, соответственно; $a_i,c_j,d_k,i=\overline{1,3},j=\overline{1,4},k=1,2$ – положительные коэффициенты пропорциональности; $\zeta(t),u(t)$ - неизвестная функция времени и управление, соответственно. Далее, где смысл не искажается, переменную $t$ будем опускать.

Пусть цель управления $\psi(t)=Z(t)-Z^{*}=0,t\to\infty,Z^{*}=\mathrm{const}$. Тогда согласно алгоритму нелинейной адаптации

$$\begin{aligned}&u(t)=-\psi_1(t)T_1^{-1}-f_1(t)-\hat{\zeta}(t)-\left(L_1(t)f_2(t)+L_2(t)f_3(t)+\eta L_3(t)\psi(t)\right),\\&\psi_1(t)=X(t)+\left(d_1Y(t)\right)^{-1}\left(T_2^{-1}\left(\psi(t)+k\hat{\zeta}(t)\right)+k\eta\psi(t)-d_2Z(t)\right),\\&L_1=-Y^{-2}(t)d_1^{-1}\left(T_2^{-1}\left(\psi(t)+k\hat{\zeta}(t)\right)+k\eta\psi(t)-d_2Z(t)\right),\\&L_2=\left(d_1Y(t)\right)^{-1}\left(T_2^{-1}+k\eta-d_2\right),L_3(t)=\left(d_1Y(t)\right)^{-1}T_2^{-1}k,\dot{\hat{\zeta}}=\eta\psi,\end{aligned}\qquad(5)$$

где $k,\eta=\mathrm{const},T_1,T_2$ - параметры регулятора (рис. 1 при значениях $T_1=3,T_2=5$ ).




*а*) *б*) *в*)

Рис. 1. Нормализованные координаты системы (4)-(5): *а*)-X, *б*)-Y, *в*)-Z - без управления (красный пунктир) и с управлением (сплошная линия), соответственно,

$$a_1=5,4,a_2=3,8,a_3=0,6,c_1=1,7,c_2=5,9,c_3=0,4,c_4=0,9,d_1=4,2,d_2=0,3,Z^{*}=0,15$$

Сравнительные значения среднеквадратического отклонения (СКО) выходной макропеременной итоговой системы стохастического управления для дискретизованного объекта Лоренца приведены в таблице 1 ( $\sigma_{FS},\sigma_S,\sigma_A$ - СКО $\psi$ с ядерной фильтрацией переменных стохастической системы, без фильтрации и по классическому АКАР в нерасчетных условиях, соответственно), из которой следует возрастание эффективности нового алгоритма по сравнению с классическим с ростом дисперсии входного шума $\zeta$.

Таблица 1

**Результаты сравнительного моделирования классического АКАР-управления и стохастического**

| $\sigma(\zeta)$ | $\sigma_{FS}$ / $\sigma_S$ / $\sigma_A$ |
|---|---|
| 0,01 | 5,403336e-06/5,353822e-06/5,066653e-06 |
| 0,1 | 5,328371e-06/5,292146e-06/5,078745e-06 |

| | |
|---|---|
| 0,3 | 5,188229e-06/5,173508e-06/5,113991e-06 |
| 0,4 | 5,130103e-06/5,125491e-06/5,141863e-06 |
| 0,5 | 5,079142e-06/5,083674e-06/5,180330e-06 |
| 0,6 | 5,034977e-06/5,046891e-06/5,232549e-06 |
| 0,7 | 4,997370e-06/5,020643e-06/5,315050e-06 |
| 0,9 | 4,942956e-06/5,264345e-06/8,529433e-06 |
| 1,0 | 4,923673e-06/5,575386e-06/9,195757e-06 |

**Заключение**. В докладе приводятся два алгоритма нелинейного синтеза адаптивного регулятора для аддитивных помех двух типов (неслучайного и случайного), построенных на базе классического метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов, численная апробация которых указывает на свойства робастности приемлемого качества.

На основе стохастического синтеза системы управления решены ряд прикладных задач управления: иммунологии, движения руки робота-манипулятора, городской малой системы.

*(Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ № 20-08-00747*)

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красовский А.А.** Математическая и прикладная теория. Избранные труды. М.: Наука, 2002. 362 с.
2. **Колесников А.А.** Синергетика и проблемы теории управления: сборник научных трудов / Под ред. А.А. Колесникова. М.: Физматлит, 2004. С. 13–204.
3. **Тюкин И.Ю., Терехов В.А.** Адаптация в нелинейных динамических системах. СПб.: ЛКИ, 2008. 384 с.
4. **Khalil H.K.** Nonlinear systems. Prentice Hall. 2002. 750 p.
5. **Astolfi A., Karagiannis D., Ortega R.** Nonlinear and Adaptive Control with Applications. Springer, 2008. 290 p.
6. **Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V.** Nonlinear and adaptive control design. New York: John Wiley & Sons, 1995. 563 p.
7. **Utkin V.I.** Sliding Modes in Control and Optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 286 p.
8. **Джонсон С.** Теория регуляторов, приспосабливающихся к возмущениям / Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса. М.: Мир, 1980.
9. Колесников А.А. Метод интегральной адаптации нелинейных систем на инвариантных многообразиях. *Труды 3-ей мультиконференции по проблемам управления*. СПб. 2010. С. 29-34.
10. **Astroem K.J., Wittenmark B.** Adaptive control. Нью-Йорк: Dover Publications, 2008. 590 p.
11. Kolesnikova S.I. Synthesis of the Control System for a Second Order Non-Linear Object with an Incomplete Description. *Automation and Remote Control*. 2018. Vol. 79. № 9. P. 1556–1566.
12. Kolesnikova S.I. A multiple-control system for nonlinear discrete object under uncertainty. *Optimization Methods and Software*. 2018. Vol. 34. № 3. P. 578–585.
13. Колесникова С.И. Синтез стохастического регулятора на многообразиях для нелинейного дискретного объекта. *Прикладная информатика*. 2018. № 6. С. 18–30.
14. Kolesnikov A., Kolesnikova S., Tsvetnitskaya S. A Discrete Stochastic Regulator on a Manifold, Minimizing Dispersion of the Output Macrovariable. *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*. 2019. Vol. 20. № 12. P. 707-713.
15. **Занг В.Б.** Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной теории. М.: Мир, 1999. 335 с.

---

**S.I.Kolesnikova** (St.Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg). **Two algorithms of nonlinear adaptation under uncertainty conditions**

*Abstract.* The problem of analytical synthesis of a nonlinear controller for systems of nonlinear differential / difference equations subject to the influence of two types of noises - random and nonrandom. To solve the problem, the method of analytical design of aggregated controllers is used, which was previously used only for deterministic objects.
Two algorithms for the synthesis of adaptive controllers are proposed, the numerical testing of which was carried out on a number of nonlinear objects: a robotic manipulator, an immunological system, and the Lorenz system.

Р.О. ОМОРОВ
(Институт физики Национальной академии наук Кыргызской Республики, г. Бишкек)

# РОБАСТНОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*В работе рассматриваются оригинальные результаты Алгебраического метода робастной устойчивости, полученные автором для непрерывных и дискретных интервальных динамических систем, в общей нелинейной постановке задачи. Достоверность результатов метода апробирована на контрпримерах к известной теореме Биаласа и других исследователей проблем робастной устойчивости.*

**Введение.** Работа В.Л. Харитонова [1] вызвала огромный интерес к проблеме исследований робастности интервальных динамических систем [2-5]. В современной теории интервальных динамических систем существуют два альтернативных направления [1-3, 6, 7]:

- - алгебраическое или Харитоновское направление;
- - частотное или направление Цыпкина – Поляка.

В настоящей работе рассматривается *алгебраический метод* исследования робастности как непрерывных, так и дискретных интервальных динамических систем, основы которого заложены в работах [8 -11].

**Постановка задачи.** Рассматриваются динамические системы порядка *n*, непрерывная

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \tag{1}$$

и, дискретная

$$x(m+1) = F(x(m)),\ m=1,2,3,\ldots, \tag{2}$$

где $x = x(t) \in R^n$, $x(m)$ - вектора состояния, $F - n-$мерная дифференцируемая вектор-функция с интервальными коэффициентами при переменных состояния системы.

Требуется определить условия робастной устойчивости систем (1) и (2).

**I. Непрерывные системы.**

***Основные результаты.*** В основополагающей для рассматриваемого метода работах [8, 10] для линейных непрерывных систем, получены результаты в виде строго доказанных теоремы 1 и леммы к ней о робастной устойчивости систем (1) по условиям гурвицевести четырех угловых полиномов Харитонова, составленным по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ характеристических полиномов системы (1):

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n = 0\,. \tag{3}$$

Прежде чем сформулировать эту теорему 1 и лемму, полученные для линейных систем необходимо представить основную идею исследования нелинейных интервальных динамических систем на базе использования результатов для линейных интервальных систем.

Для решения задачи в нелинейной постановке предлагается использовать положения метода топологической грубости систем, т.е. через рассмотрение робастной устойчивости вблизи особых траекторий системы (особых точек, предельных циклов и притягивающих многообразий (аттракторов)) [12-15]. В таком случае, задача для нелинейных систем сводится к семейству линейных задач по особым траекториям системы. Соответственно будем рассматривать робастную устойчивость семейства линейных систем с интервальными матрицами $A$ линейной части вблизи особых траекторий системы, т.е. $A \in R^{nxn}$ - интервальные матрицы с элементами $a_{ij}, i, j = \overline{1,n},$ представляющими интервальные величины $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ с угловыми значениями $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \underline{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$.

*Теорема 1.* Для того чтобы положение равновесия x=0 системы (1) было асимптотически устойчиво при всех $A \in D$ или, чтобы интервальная матрица A была устойчива, необходимо и

достаточно, чтобы были гурвицевы все четыре угловые полиномы Харитонова, составленные по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ характеристических полиномов (3) системы (1).

Данная теорема доказана на основе следующей леммы.

*Лемма.* Сепаратные угловые коэффициенты $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ образуются как соответствующие коэффициенты полиномов (3), либо при угловых значениях элементов $a_{ij}, i, j = \overline{1,n}$, матрицы А, либо при нулевых значениях некоторых элементов (если интервал принадлежности включает нуль).

Как нетрудно видеть из леммы, для нахождения коэффициентов $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$, в общем случае необходимо применение оптимизационных методов нелинейного программирования.

К теореме 1, доказательство которой приведено в приложениях работ [8, 10], необходимо сделать следующее уточняющее замечание.

*Замечание.* Из основного аргумента доказательства теоремы 1, связанного с наличием четырех угловых полиномов Харитонова следует, что при отсутствии полного множества (набора) из четырех угловых полиномов условия теоремы 1 необходимы, но могут быть недостаточны для устойчивости системы (1).

Случай соответствующий приведенному *замечанию* может возникнуть тогда, когда сепаратные угловые коэффициенты полиномов (3) взаимосвязаны и в итоге сужают набор угловых коэффициентов до количества менее четырех.

Справедливость доказанной теоремы 1 подтверждается аннулированием известных контрпримеров к теореме Биаласа [4].

Так, теорема 1 апробирована на различных контрпримерах теоремы Биаласа, в частности из работы [5], где рассматривается матрица

$$A = \Omega_r = \begin{bmatrix} -0.5 - r & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

где $r \in [0,1]$, для которого подтверждена справедливость теоремы 1.

Но в случае матрицы $A = \Omega_r$ из [5] можно наглядно рассмотреть справедливость приведенного выше замечания к теореме 1.

Действительно, в данном случае последовательные сепаратные угловые коэффициенты образуют неполное множество угловых коэффициентов, поскольку

$$\begin{aligned} b_1 &= -\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 1.5 + r = b_2 = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ii} a_{jj} - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} a_{ji}, \\ b_3 &= \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{ij} a_{jk} a_{kj} - \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{ij} a_{jk} a_{ki} - a_{11} a_{22} a_{33} = 4r + 2.06, \end{aligned} \qquad (5)$$

отсюда сепаратные угловые коэффициенты:

$\underline{b}_1 = 1.5; \overline{b}_1 = 2.5; \underline{b}_2 = 1.5, \overline{b}_2 = 2{,}5; \underline{b}_3 = 2.06, \overline{b}_3 = 6.06.$

Соответственно, угловых полиномов Харитонова в данном случае будет только два

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \lambda^3 + 1.5\lambda^2 + 1.5\lambda + 2.06 = f_2(\lambda), \\ f_3(\lambda) &= \lambda^3 + 2.5\lambda^2 + 2.5\lambda + 4.06 = f_4(\lambda), \end{aligned} \qquad (6)$$

т.е. полного набора 4-х угловых полиномов, указанных в работах [8, 10] не будет.

Поэтому, по угловым полиномам (6) система (1) будет всюду при $r \in [0,1]$ устойчива, хотя известно, что при $r \in [0.5 - \sqrt{0.06},\ 0.5 + \sqrt{0.06}]$ эта система неустойчива.

**II. Дискретные системы.** Как известно, публикация работы [1] дала импульс для поиска многими исследователями дискретных аналогов теорем Харитонова [2, 3, 6, 9, 11, 16]. Так в работе [2] указано, что «дискретный вариант харитоновского условия четырех многочленов отсутствует». Но здесь же отмечается, что в настоящее время получены [17] дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова. Но эти аналоги теорем Харитонова имеют определенные ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов [2] . Эти ограничения были сняты в работах [9, 11, 16] , где получены аналоги теорем Харитонова с использованием теоремы Шура [18]. Также в [9, 11, 16] сформулированы теоремы, являющиеся дискретными аналогами результатов работы [1] по интервальным матрицам и многогранникам матриц.

В случае нелинейной постановки задачи исследования робастной устойчивости дискретных интервальных систем, аналогично непрерывному случаю применяются положения метода топологической грубости с рассмотрением семейства линейных интервальных систем вблизи особых траекторий в фазовом пространстве системы.

**Заключение.** Алгебраический метод Харитоновского направления исследований робастной устойчивости интервальных динамических систем, рассмотренный в данной работе, является дальнейшим развитием основных результатов работ [8, 9], позволяющим решать проблему робастной устойчивости при общем виде интервальной матрицы линейной части системы вблизи особых траекторий в фазовом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Харитонов В.Л.** Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т.14. № 11. С. 2086-2088.
2. **Джури Э.И.** Робастность дискретных систем //Автоматика и телемеханика. 1990. №5. - С.4-28.
3. **Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.** Робастная устойчивость линейных систем// Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т.32. - М.: ВИНИТИ, 1991. – С. 3-31.
4. Bialas S. A necessary and sufficient condition for stability of internal matrices// Int. J. Control 1983. V.37.№4.- P. 717-722.
5. Barmish B.R., Hollot C.V. Counter-example to a recent result on the stability by S. Bialas // Int. J. Control. 1984. V.39. №5. – P. 1103-1104.
6. **Оморов Р.О.** Робастная устойчивость интервальных динамических систем. – Бишкек: Илим, 2018. – 104 с.
7. **Оморов Р.О.** Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем //
8. Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 3. С. 364-370.
9. **Оморов Р.О.** Робастность интервальных динамических систем. I.Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. 1995. №1. - С.22-27.
10. **Оморов Р.О.** Робастность интервальных динамических систем. II.Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. 1995. №3. - С.3-7.
11. Omorov R.O. Robustness of Interval Dynamic Systems. I. Robustness in Continuous Linear Interval Dynamic Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. T. 34. No 3. – P. 69-74.
12. Omorov R.O. Robustness of Interval Dynamic Systems. II. Robustness of Discrete Linear Interval Dynamical Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. T. 34. No 4. – P. 1-5.
13. **Оморов Р.О.** Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и Телемеханика. 1991. № 8. С. 36-45.
14. **Omorov R.O.** Maximal coarseness of dinamical systems // Automation and Remote Control. 1992. V. 52. No 8 pt 1. P. 1061-1068.
15. **Оморов, Р.О.** Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Дисс. докт. техн. наук. СПб.: Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики, 1992.
16. **Оморов Р.О.** Метод топологической грубости: Теория и приложения. I. Теория // Изв. НАН КР, 2009. № 3. С. 144-148.
17. **Оморов Р.О.** О дискретном аналоге теоремы Харитонова //Наука и новые технологии, 2002, №3. - С. 5-10.
18. Kraus F.J., Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M. On the robustness of low order Shur polynomials // IEEE Trans. Circ. Systems. 1988. – V. CAS-35, N5.
19. **Цыпкин Я.З.** Теория импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1958. – 724 с.


---

**R.O.Omorov** (Institute of Physics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek) **Robustness of Interval Dynamic Systems**

*Abstract.* The paper examines the original results of the Algebraic method of robust stability, obtained by the author for continuous and discrete interval dynamical systems in both linear and non-linear setting of the problem. The reliability of the results of the method is tested on counterexamples to the well-known theorem of Bialas and other researchers of robust stability problems.

Д. Х. ИМАЕВ, Р. И. СМИРНОВ, М.Ю. ШЕСТОПАЛОВ
(СПб ГЭТУ «ЛЭТИ», Санкт-Петербург)

С.В. КВАШНИН
(АО «НПФ «Система-Сервис», Санкт-Петербург)

# ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В ПОЛЕ ИНТЕНСИВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

*Обсуждается проблема размещения компонентов систем автоматического управления энергетическими объектами для минимизации воздействия окружающей среды. Сделаны предположения об изотропности среды, непрерывном и монотонном ослаблении интенсивности поля при удалении размещаемых компонентов от источника. Представлены методы, алгоритмы и компьютерная программа для оптимального размещения компонента на плоскости с запрещенными зонами, аппроксимированными многоугольниками.*

**Введение.** Реализация системы управления расширяет среду функционирования управляемого объекта — вместе с компонентами системы (датчиками, контроллерами, элементами, обеспечивающими коммуникационные и вычислительные функции) — появляются и новые возмущения. Сказанное в полной мере относится к энергетическим установкам (газотурбинным электростанциям, газоперекачивающим агрегатам с газотурбинным приводом и др.), компоненты систем управления (СУ) которых оказываются в условиях интенсивных физических воздействий механической, тепловой и электромагнитной природы [1], [2]. «Паразитные» возмущения среды функционирования могут ухудшать качество процессов управления, достигнутое на этапе синтеза по исходным моделям управляемого объекта и «расчетной» среды.

Анализ влияния новых воздействий требует трансляции знаний о расширенной среде функционирования СУ на языки методов и инструментов теории управления, что оказывается нетривиальной междисциплинарной задачей, относящейся к областям моделирования, идентификации и проектирования промышленных систем автоматизации. Модели расширенной среды задаются на языках, специфичных для задач проектирования — это «схемы автоматизации» (распределение вычислительных и коммуникационных ресурсов контроля и управления), геометрические модели (координаты и габариты компонентов и препятствий), данные о спектре и интенсивности источников физических воздействий, характеристики полей передачи воздействий в пространстве и чувствительности компонентов к различным воздействиям.

Если возмущения недопустимо ухудшают качество процессов управления, то ставится задача ослабления их влияния. Селективная инвариантность к возмущениям достигается разными способами — системным, информационно-алгоритмическим, геометрическим [3]. Системные способы, основанные на методах теории управления и структурированных моделях динамики, позволяют формировать причинно-следственную топологию системы — пути компенсации возмущений и контуры обратных связей, ослабляющих каналы передачи. Информационно-алгоритмический способ ослабляет интенсивность возмущений путем рационального распределения коммуникационных и вычислительных ресурсов. Важнейшим способом ослабления «паразитных» возмущений является надлежащий выбор пространственной топологии СУ — размещение компонентов СУ и элементов соединений из условия ослабления причин возмущений.

Различные этапы разработки СУ — синтез по требованиям динамики, распределение вычислительных и коммуникационных ресурсов, размещение компонентов — не могут выполняться независимо. Синтез по условию инвариантности к возмущениям невозможен без модели объекта и среды, которые зависят от размещения компонентов в поле воздействий. Размещение компонентов обусловлено распределением вычислительных и коммуникационных ресурсов, а эти ресурсы определяются в результате синтеза СУ. Замкнутый круг неопределенностей разрывается методом «проб и ошибок» — с помощью сходящейся итеративной процедуры, включающей процедуры математического моделирования, синтеза и проектирования.

Теория размещения относится к области геометрического моделирования, а алгоритмы размещения — к вычислительной геометрии [4]—[7].

Предлагаемый доклад посвящен методам и алгоритмам размещения компонентов СУ в изотропной среде с единственным источником излучения и любым числом препятствий. Дано краткое описание интерактивной программы размещения и приведен иллюстративный пример.

**Постановка задачи на плоскости.** Требуется поместить очередной элемент в допустимой области так, чтобы воздействие на него со стороны источника излучения было минимально. Принимается гипотеза о непрерывном и монотонном ослаблении интенсивности поля с удалением от единственного источника. Интенсивность излучения не зависит от направления, а препятствия не экранируют поле воздействий. Источник излучения и размещаемые компоненты рассматриваются как точки, расстояние между которыми измеряется в евклидовой метрике. Дополнительные ограничения на размерность пространства и характеристики среды распространения излучений, число источников, форму препятствий и размеры размещаемого компонента порождают множество постановок задач разной сложности.

В основу большинства последовательных алгоритмов размещения положен принцип оптимизации целевой функции, сводящийся к выбору на каждом шаге локально оптимальной позиции для новых элементов при неизменности положения ранее размещенных элементов (см., например, [4]—[7]). Принятые допущения позволяют сформулировать равносильную постановку задачи максимального удаления размещаемого компонента от источника и решать ее с помощью алгоритмов, основанных на свойствах локальных оптимумов, не прибегая к численным алгоритмам оптимизации.

Примем без потери общности, что единственный излучатель находится в начале декартовой системы координат, (*x*, *y*) — искомые координаты компонента в допустимой области Ω, аппроксимируемой изотетичными прямоугольниками. Критерий размещения формулируется так:

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \to \max_{(x,\ y)\in\Omega}\ . \tag{1}$$

***Теорема1.*** Для того, чтобы точка $(x_0, y_0)$ являлась точкой максимума, необходимо и достаточно выполнение неравенства:

$$\forall(\delta x,\ \delta y) \in O_\varepsilon\colon x_0\delta x + y_0\delta y < 0, \tag{2}$$

где $\delta x$, $\delta y$ — допустимые вариации координат в окрестности точки $O_\varepsilon$.

Отдельно отметим, что постановка задачи оптимального размещения в трехмерном пространстве принципиально не отличается от задачи на плоскости, а теорема 1 принимает вид:

$$\forall(\ \delta x,\ \delta y,\ \delta z) \in O_\varepsilon\colon x_0\delta x + y_0\delta y +\ z_0\delta z < 0. \tag{3}$$

В том случае, когда препятствия имеют произвольную конфигурацию, их приходится аппроксимировать прямоугольниками или призмами. Это позволяет использовать описанный метод и программы оптимального размещения компонентов. Размеры (следовательно, число) прямоугольников (призм) зависят от требуемой точности размещения. Следовательно, достижение требуемой точности размещения приведет к росту числа локальных оптимумов.

**Размещение в пространстве, аппроксимируемом многоугольниками.** Рассмотрим более общую задачу, когда множество запретных зон представлено многоугольниками. Оставим принятые в предыдущем разделе допущения.

Примем в качестве целевой функции оптимизации квадрат евклидовой метрики:

$$r(x; e) = \|x - e\|^2 \to\ \max_{x\,\in\,\Omega}\ , \tag{4}$$

где: $e \in \mathbb{R}^2$ — параметр, определяющий положение источника излучения в пространстве.

В силу выпуклых свойств оптимизируемой функции (4) при наличии априорной информации о топологии допустимой области, вместо численных алгоритмов оптимизации целесообразно применить аналитический метод нахождения оптимальных точек.

Пусть существует многоугольник $P$, такой, что его внутренний угол $S = < v_1, v_2, v_3 >$, образованный упорядоченным набором вершин $v_1, v_2, v_3 \in P$, превосходит 180°. Положим $p = v_1 - v_2$, $q = v_3 - v_2$, тогда справедлива следующая:

***Теорема 2.*** Для того, чтобы в точке $x_0 \in \mathbb{R}^3$ существовал локальный максимум, необходимо и достаточно выполнение системы неравенств

$$\begin{gathered}(\nabla r(x_0),\ p) < 0;\\ (\nabla r(x_0),\ q) < 0;\\ (n_v^+,\ p) > 0;\\ (n_v^+,\ q) > 0,\end{gathered} \tag{5}$$

где: $p, q$ – векторы, построенные на сторонах угла $S$; $n_v^+ = n_p^+ + n_q^+$ – нормаль к вершине угла $S$, определяемая как сумма внешних нормалей $n_p^+, n_q^+$ к соответствующим сторонам угла $S$.

***Программы визуализации оптимального размещения.*** Процедура формирования пространственной топологии СУ не может быть полностью автоматизирована и выполняется в интерактивном режиме. Программы автоматической оптимизации координат компонента должны дополняться инструментами визуализации для неформального анализа результатов и выбора последовательности компонентов с учетом факторов, не поддающихся формальной постановке.

Рис. 1 иллюстрирует прямоугольную область с препятствиями, где указаны точки локальных максимумов расстояния до источника. Рис. 2 иллюстрируется пример оптимального размещения в пространстве. Программа визуализации отображает три проекции, а также аксонометрию рабочей области с указанием источника и локальных оптимумов.

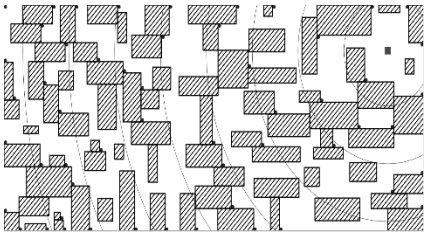


Рис. 1

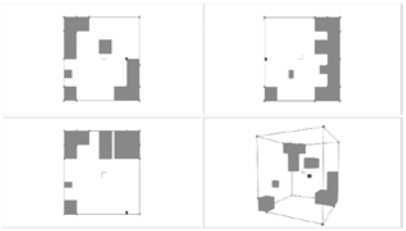


Рис. 2

Рис. 3 иллюстрирует область с препятствиями, имеющими форму простых многоугольников, а также схематически изображает газоперекачивающий агрегат, источник излучений, препятствия, аппроксимируемые прямоугольниками и многоугольниками, а также линии связи.

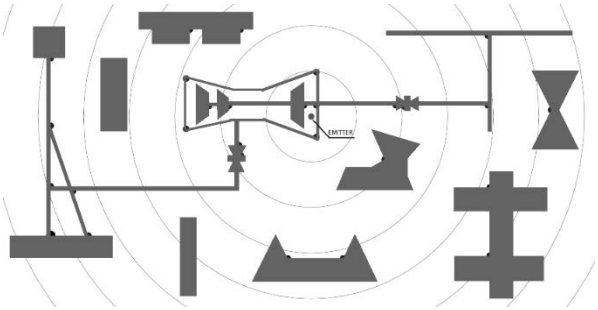


Рис. 3

**Заключение.** Важнейшим способом обеспечения инвариантности (независимости, слабой зависимости) переменных от возмущений является выбор пространственной топологии системы управления — оптимальное размещение компонентов. Расширенные модели систем управления, функционирующих в среде интенсивных физических воздействий, задаются геометрическими моделями, характеристиками источников, среды распространения и чувствительностью компонентов к определенным типам излучений.

В докладе приведены необходимые и достаточные условия оптимальности координат компонентов на плоскости с препятствиями в виде изотетичных прямоугольников, а также в пространстве по критерию максимального удаления от единственного источника воздействия. Результаты расширены на случай области с препятствиями, имеющими форму простых многоугольников. Доказано условие существования решения в пространстве по заданным проекциям оптимальной точки.

Для развития итеративных процедур синтеза и проектирования систем управления необходимо дальнейшее развитие методов, моделей и алгоритмов размещения компонентов СУ в случае:

- произвольного числа воздействий с различными спектрами и интенсивностью с учетом чувствительности размещаемых компонентов к излучениям разнотипных источников направленного действия;
- когда рабочая область и препятствия имеют произвольную конфигурацию;
- учета экранирования влияния воздействий.

На практике размещение компонентов не может быть полностью автоматизировано и представляет собой взаимодействие проектировщика и программ оптимизации. Это требует дальнейших разработок по визуализации рабочих областей, препятствий и результатов размещения с применением современных компьютерных программ визуализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль С.Д., Квашнин С.В., Черников А.В., Гайдаш Д.М. Инновационная концепция проектирования САУ на базе узлов интерактивной сети// Турбины и Дизели, 2018, №3. С. 12−15.
2. Методы оптимального размещения компонентов систем управления газотурбинными установками. С.Д. Альтшуль, С.В. Квашнин, Д.Х. Имаев, Р.И. Смирнов, М.Ю. Шестопалов// III Международная научная конференция по проблемам управления в технических системах (ПУТС-2019). Материалы конференции. Санкт-Петербург. 29–31 октября 2019 г. СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ». С. 47–49.
3. Имаев Д.Х., Квашнин С.В., Шестопалов М.Ю. Топологический синтез селективно инвариантных систем управления// Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2019. № 7. С. 44–48.
4. Ханан М., Курцберг Дж. Методы размещения/ В кн. Теория и методы автоматизации проектирования вычислительных систем. — М.: Мир, 1977. С. 147–225.
5. Фокс А., Пратта М. Вычислительная геометрия. Применение в производстве и проектировании. — М.: Мир, 1982. С. 304.
6. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. Под редакцией Ю.М. Банковского — М.: Мир, 1989. С. 478.
7. Забудский Г.Г. Алгоритм решения минимаксной задачи размещения объекта на плоскости с запрещенными зонами// Автомат. и телемех. Вып. 2, 2004. С. 93–100.

---

**D.H. Imaev, R.I. Smirnov, M.Yu. Shestopalov** (St. Petersburg Electrotechnical University «LETI» St. Petersburg, Russia), **S.V. Kvashnin** («SPF «SYSTEM-SERVICE», JSC, St. Petersburg, Russia) **Placement of Control system components in the field of Intensive physical Impact**

*Abstract.* Problem of the placement (location) of components of automatic control systems for energy facilities to minimize environ-mental impact is discussed. Assumptions are made about the isotropy of the medium, continuous and monotonous attenuation of field intensity with distance from a single source and a placed component. A method, algorithms, and computer program for the optimal location of a component on a plane with forbidden zones approximated by polygons.

А.Ю. КУСТОВ, В.Н. ТИМИН
(ИПУ им. В.А. Трапезникова, Москва)

А.В. ЮРЧЕНКОВ
(ИПУ им. В.А. Трапезникова; МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва)

# УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

*Рассматривается линейная дискретная стационарная система с мультипликативными шумами в матрице при векторе состояния. Внешнее возмущение задано классом стационарных последовательностей гауссовских случайных векторов с ограничением сверху на значение средней анизотропии. В рамках данной постановки получены условия ограниченности анизотропийной нормы системы.*

**Введение.** Первые работы по анизотропийной теории управления появились около четверти века назад [1,2], когда И.Г. Владимиров с соавторами ввели такие ее основные понятия как анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия стационарной эргодической последовательности случайных векторов, анизотропийные нормы линейного оператора и линейной динамической системы. Для линейных дискретных систем был проведен анализ, на основе которого были решены задачи управления и фильтрации [3] для обоих – стационарного и нестационарного – случаев. Однако для систем со случайными матрицами первые результаты в рамках анизотропийной теории были получены относительно недавно [4]. На основе работы [4] была решена задача анализа для систем с мультипликативными шумами [5], хотя первые попытки вычисления границы анизотропийной нормы для таких систем были сделаны еще в [6]. Изучение систем с мультипликативными шумами представляет интерес из-за их большой практической значимости: они описывают динамику гибридных, механических, экономических моделей, с помощью таких систем можно моделировать работу сетей датчиков с отказами и пр. Формулы для вычисления анизотропийной нормы стационарной системы получены в [7], построение оценки нестационарной системы на основе коррекции при потере измерений можно найти в [8]. В данной работе будут приведены условия ограниченности анизотропийной нормы для стационарной системы с мультипликативными шумами, для стационарных неслучайных систем аналогичный результат подробно описан в [9].

**Постановка задачи.** Рассмотрим следующую линейную дискретную стационарную систему:

$$F\colon \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \\ z_k = Cx_k + Dw_k. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x_k \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, $z_k \in \mathbb{R}^p$ – выход системы. Матрица $A$ имеет представление $A = A_0 + \sum_{i=1}^{M} \xi_{i,k} A_i$. Матрицы $A_i, B, C, D$ известны и имеют соответствующие размерности, $\xi_{i,k}, i = \overline{1,M}$, являются независимыми (по $k$ и $i$) случайными скалярными величинами с нулевыми средними и единичными дисперсиями: $\boldsymbol{E}[\xi_{i,k}] = 0$, $\boldsymbol{E}[\xi_{i,k}\xi_{j,s}] = \delta_{i,j} \cdot \delta_{k,s}$, где $\boldsymbol{E}[\cdot]$ – математическое ожидание, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Также считаем, что случайные величины $\xi_{i,k}$ статистически независимы с возмущением $w_k$. Кроме того, предполагается, что внешнее возмущение $w_k$ принадлежит множеству стационарных эргодических последовательностей случайных векторов, средняя анизотропия

$$\overline{A}(W) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\left(\frac{m\hat{G}(\omega)\hat{G}^*(\omega)}{||G||_2^2}\right) d\omega \tag{2}$$

которых ограничена известным неотрицательным числом $a \geq 0$. В формуле выше $\hat{G}(\omega) = \lim_{r\to 1-0} G(re^{j\omega})$ и

$$||G||_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}\left(\hat{G}(\omega)\hat{G}^*(\omega)\right) d\omega}, \quad (3)$$

где $G(\omega)$ – частотное представление так называемого формирующего фильтра, производящего входное возмущение. Связь этого формирующего фильтра с возмущением может быть описана в терминах спектральной плотности:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\hat{G}(\omega)\hat{G}^*(\omega). \quad (4)$$

Больше информации на эту тему можно найти, к примеру, в [1].

Задача состоит в нахождении таких условий на матрицы системы (1), при которых ее анизотропийная норма

$$|||F|||_a = \sup\left\{Q(F,W) = \frac{||FW||_2}{||W||_2} \,\middle|\, \overline{A}(W) \le a\right\} \quad (5)$$

была бы ограничена заданным пороговым числом $\gamma \ge 0$. Здесь

$$||W||_2 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{tr}\left(E\left[w_k^T w_k\right]\right)\right)^{1/2}. \quad (6)$$

Стоит отметить, что в отличие от работы [9], где был ограничен единицей спектральный радиус неслучайной матрицы $A$ системы (1), в текущей постановке подразумевается выполнение ограничения $\lim_{k\to\infty}\rho\left(\left(\boldsymbol{E}[A^k]\right)^{1/k}\right) < 1$, эквивалентного условию устойчивости (в определенном смысле) системы вида (1) со *случайной* матрицей $A$.

**Основной результат.** Важным инструментом в анизотропийной теории является проверка свойства изометричности системы, другими словами, сохранение значения нормы входа при прохождении через систему. Для линейной стационарной системы (1) это условие можно записать в виде

$$D^T D + B^T R B = I_m, \quad (7)$$

$$P(A_0^T R B \ + C^T D) = 0, \quad (8)$$

где матрицы $P$ и $R$ являются решениями следующих уравнений Ляпунова:

$$P = A_0 P A_0^T + BB^T, \quad (9)$$

$$R = \sum_{i=0}^{M} A_i^T R A_i \ + C^T C. \quad (10)$$

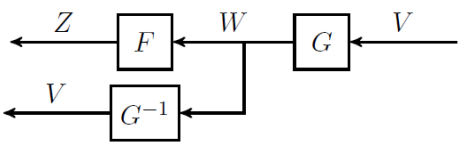



Рис.1. Блок-схема вспомогательной системы

Чтобы получить условие для проверки критерия изометричности в алгебраическом виде, аналогичное (4)-(5), которое будет использовано в дальнейшем, рассмотрим схему, представленную на рис.1. Здесь $F$ – система (1), $G$ – формирующий фильтр, генерирующий из гауссовского белого шума последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии, $G^{-1}$ – фильтр, обратный к $G$. Система $\left[\sqrt{q}F^T, G^{-T}\right]^T$, $q \in [0, \|F\|_\infty^{-2})$, будет обладать свойством изометричности, если разрешима следующая система матричных уравнений:

$$R_1 = \sum_{i=0}^{M} A_i^T R_1 A_i \ + qC^T C, \quad (11)$$

$$R_2 = A_0^T R_2 A_0 \ + L^T S^{-1} L, \quad (12)$$

$$S = \left(I_m - qD^T D - B^T R_1 B - B^T R_2 B\right)^{-1}, \quad (13)$$

$$L = S\left(qD^T C + B^T R_1 A_0 \ + B^T R_2 A_0\right). \quad (14)$$

Данный прием с проверкой свойства изометричности вспомогательной системы позволяет записать и условие ограниченности анизотропийной нормы системы.

*Теорема.* Анизотропийная норма системы (1) ограничена сверху заданным числом, т.е. выполнено $|||F|||_a \le \gamma$, если разрешима система уравнений (6)-(9), а их решение удовлетворяет дополнительному условию, которое в анизотропийной теории принято называть «неравенством специального вида»:

$$-\frac{1}{2}\ln\det\left((1-q\gamma^2)S\right) \ge a. \qquad (15)$$

**Заключение.** В работе приведено условие ограниченности анизотропийной нормы линейной стационарной системы с мультипликативными шумами в случае когда уровень средней анизотропии входной последовательности не превосходит известное значение. Проверка условия ограниченности сводится к поиску решения системы матричных уравнений в совокупности с неравенством специального вида.

*Работа проводилась при частичной поддержке РФФИ (Проект № 18-07-00269 А)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems, Proc.13 IFAC World Congr., P. 179-184, 1996.
2. Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.Е., Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале, АиТ, 2006, № 8, 92–111.
3. Чайковский М.М., Тимин В.Н., Кустов А.Ю., Курдюков А.П. Численные процедуры анизотропийного анализа стационарных систем и синтез субоптимальных регуляторов и фильтров, АиТ, 2018. № 1. С. 162-182.
4. KustovA.Yu. State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic System,Proc. 15th Int. Conf. on El. Eng., Comp. Sc. and Aut. Contr., P. 1-6, 2018.
5. Belov I.R., Yurchenkov A.V., KustovA.Yu. Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case, Proc. of the 27th Med. Conf. onContr. andAut.,P. 148-152, 2019.
6. Юрченков А.В., Кустов А.Ю., Курдюков А.П. Условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами, ДАН. 2016. Т. 467, № 4. С. 396-399.
7. KustovA.Yu., Timin V.N., Yurchenkov A.V. Anisotropic Norm Computation for Time-invariant Random System, Proc. Int. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2020, Moscow). M.: IEEE, 2020. P. 1-3.
8. KustovA.Yu., Yurchenkov A.V. Anisotropic Estimator Design for Time Varying System with Measurement Dropouts, Proc. 15th Int. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2020, Moscow). M.: IEEE, 2020. P. 1-4.
9. KurdyukovA.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M. Anisotropy-Based Bounded Real Lemma, Proc. 19th International symposium on mathematical theory of networks and systems. Budapest: EötvösLoránd University, Comp. and Aut. Res. Inst., Hungarian Academy of Sciences, 2010. P. 2391-2397.

---

**A.Yu. Kustov, V.N. Timin** (ICS of RAS, Moscow), **A.V. Yurchenkov** (ICS of RAS, Moscow; BMSTU, Moscow). **Anisotropic Norm Boundary Condition for Linear Discrete Time-invariant System with Multiplicative Noise**

*Abstract.* In this paper, the anisotropy-based analysis is considered for the LDTI system with state-multiplicative noises. The stationary input disturbance is supposed to has bounded mean anisotropy. For this setting, the boundedness condition for anisotropic norm of the system is obtained in terms of Riccati equations.

А. И. МАЛИКОВ
(Казанский национальный исследовательский технический университет им.А.Н.Туполева – КАИ,
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН)

# ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

*Дается краткий обзор современных достижений в теории устойчивости гибридных систем и систем с дискретными данными. Задачи анализа устойчивости, ограниченности, оценивания состояния, синтеза управления для некоторых классов непрерывно дискретных систем с неопределенностями сводятся к разрешимости задач оптимизации с дифференциальными и разностными линейными матричными неравенствами.*

**Введение.** Непрерывно-дискретные динамические модели часто используются при исследовании технических объектов с импульсным либо цифровым управлением. Также можно выделить класс систем, состояние которых скачкообразно изменяется в некоторые моменты времени – их называют импульсивными системами и класс систем с переключениями. Непрерывно-дискретные динамические модели, модели систем со скачкообразными изменениями фазовых координат и переключениями векторных полей относятся к классу гибридных систем потому, что их эволюция происходит как в непрерывном времени, так и в дискретные моменты времени, когда какое-то событие происходит, а их состояние в текущий момент времени характеризуется как непрерывными, так и изменяющимися в дискретные моменты времени, переменными. Проблеме устойчивости гибридных систем посвящено множество работ (см. обзор [1] и ссылки в нем). Следует отметить, что в последние годы был достигнут значительный прогресс в теории и применении гибридных систем. В ряде монографий [2-6] дается развитие теории устойчивости и управления гибридными системами. Когда состояния реального процесса претерпевают резкие изменения в дискретные моменты времени, импульсное дифференциальное уравнение служит эффективной математической моделью для описания этого явления. Идея этого внезапного изменения состояния приводит к импульсному методу управления, который оказался мощным инструментом для управления линейными динамическими системами [7].

Несмотря на быстрый прогресс, некоторые фундаментальные проблемы все еще либо не решены, либо менее понятны. В частности, гибридные системы, рассматриваемые в литературе, в основном состоят из линейных подсистем или нелинейных подсистем первого порядка, и различные типы сложной динамики, такие как нелинейности, неопределенные возмущения, неизвестные входы, погрешности измерений, изменения параметров не принимаются во внимание. Однако многие физические системы не могут быть описаны простыми моделями гибридных систем, и традиционные методы синтеза управления не применимы для таких систем.

В докладе дается краткий обзор результатов, полученных в исследовании гибридных систем после выхода обзора [1], а также их использование для исследования устойчивости и ограниченности систем с дискретными данными. Основное внимание будет уделено проблемам оценивания состояния, устойчивости и ограниченности на конечном интервале непрерывно-дискретных нелинейных моделей, а также вопросам синтеза управления при учете неопределенностей разного вида. Предложенный в [8,9] подход на основе функций Ляпунова с изменяющимися коэффициентами и техники дифференциальных линейных матричных неравенств (ДЛМН) может быть эффективно использован для синтеза управления непрерывно-дискретных систем.

**Импульсивные системы.** Рассмотрим непрерывную систему с переменными коэффициентами и апериодическими импульсами:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)u_1(t) + D(t)w(t),\ t \neq t_k,\ \ x(t) = Jx(t-0) + B_2u_2(t),\ t = t_k, \qquad (1)$$

где $u_1 \in \mathrm{R}^{m_1}, u_2 \in \mathrm{R}^{m_2}$ управляющие входы для непрерывной и дискретной части системы, $t \in T,\ T = [t_0, t_N],\ t_0, t_N$ – начальный и конечный моменты времени. Предполагается, что на рассматриваемом интервале последовательность моментов времени $\{t_k\}, k \in N$ является возрастающей и ограниченной, причем длительность между импульсами ограничена

$h_k = t_{k+1} - t_k > \varepsilon > 0$. Определенная таким образом последовательность не допускает какой-либо точки сгущения. Обратим внимание, что последовательность импульсных моментов $\{t_k\}, k \in N$ может зависеть или не зависеть от состояния системы. Здесь не будет различий между этими двумя случаями, поскольку импульсные последовательности будут характеризоваться исключительно с точки зрения ограничений времени пребывания.

Пусть в начальный момент времени состояние системы принадлежит заданному эллипсоиду

$$E(Q_0) = \{x \in R^n : x^T Q_0^{-1} x \le 1\}, \tag{2}$$

где $Q_0$ - заданная положительно определенная матрица.

Рассматривается управление с обратной связью по состоянию:

$$u_1(t_k + \tau) = K_1(\tau)x(t_k + \tau), \tau \in [0, h_k), \; u_2(t_k) = K_2 x(t_k - 0), \tag{3}$$

Задача состоит в том, чтобы найти такие матрицы $K_1 \in \mathrm{R}^{m_1 \times n}$, $K_2 \in \mathrm{R}^{m_2 \times n}$, чтобы замкнутая система (2) была на конечном интервале ограниченной относительно заданных множеств $\{E(R_0), E(R(t))\}$ при всех $w \in W = \{w \in \mathrm{R}^r : \|w(t)\| \le 1\}$ и $h_k \in [\underline{h}, \overline{h}]$. Здесь $E(R_0), E(R(t))$ – заданные в виде эллипсоидов множества начальных состояний и допустимых текущих при

После подстановки (3) в (1) получим замкнутую систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_1 K_1(t))x(t) + Dw(t), \; t \ne t_k, \\ x(t) &= (J + B_2 K_2)x(t - 0), \; t = t_k, \end{aligned} \tag{4}$$

На основе разрывных функций Ляпунова с изменяющимися коэффициентами и ДЛМН [8,9] задача синтеза управления из условия ограниченности на конечном интервале относительно заданных множеств начальных состояний (2) и допустимых траекторий $E(Q(t)) = \{x \in R^n : x^T Q^{-1}(t) x \le 1\}$ сводится к следующей задаче оптимизации: $\mathrm{trace}(Q(t) \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{pmatrix} Q(t)A^T + AQ(t) + Y_1^T(t)B_1^T + B_1 Y_1(t) + \alpha Q(t) - \dfrac{dQ(t)}{dt} & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} \le 0, \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} Q(t_{k+1}) & JQ(t_k + \widetilde{h}_k - 0) + B_2 Y_2) \\ Q(t_k + \widetilde{h}_k - 0)J^T + Y_2^T B_2^T & \delta Q(t_k + \widetilde{h}_k - 0) \end{pmatrix} \ge 0, \; \widetilde{h}_k \in [\underline{h}, \overline{h}], \tag{6}$$

и граничных условиях $Q_0 \ge R_0$, $Q(t) \le R(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$. По найденному решению определяются матрицы $K_1(t) = Y_1(t)Q^{-1}(t)$ и $K_2(t_k) = Y_2(t_k)Q^{-1}(t_k + \underline{h} - 0)$, а матрица $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ определяет размеры эллипсоида, ограничивающего состояние системы с апериодическими импульсами на $[t_0, T]$. Применение способа численного решения задачи оптимизации с ДЛМН (5), основанного на линейной аппроксимации производной [10], позволяет ограничиться проверкой условия (6) – разностного линейного матричного неравенства (РЛМН) – в крайних точка $\widetilde{h}_k \in \{\underline{h}, \overline{h}\}$.

На простых примерах показано, что предлагаемый подход дает оценку допустимого диапазона изменения периода импульсов, при котором сохраняется устойчивость, сопоставимую по точности с другими методами. Кроме того данный подход дает оценки множества состояний системы с неопределенными начальными данными и возмущениями.

**Непрерывные системы с дискретным управлением.** Далее этот подход развивается для систем с липшицевыми нелинейностями и используется для оценивания состояния, анализа ограниченности системы с дискретным (кусочно-постоянным) управлением:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dw(t) + \Phi\varphi(t, x(t)) + Bu(t_k), \quad (7)$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ - вектор состояния, $w(t) \in W \subset \mathrm{R}^r$ - вектор неопределенных внешних возмущений, $u \in R^m$, $u(t) = K(t_k)x(t_k)$ - вектор управления в форме обратной связи по состоянию, измеряемому в дискретные моменты времени $t_k \in \Theta = \{t_k, t_k = t_{k-1} + h_k, k = 1,...,N\}$, $h_k$ – шаг выборки измерений, $A \in \mathrm{R}^{n\times n}, B \in \mathrm{R}^{n\times m}$, $D \in \mathrm{R}^{n\times r}$, $\Phi \in \mathrm{R}^{n\times q}$, - известные матрицы с постоянными или непрерывными и ограниченными элементами при всех $t \in T$.

Нелинейная векторная функция $\varphi(t,x)$ удовлетворяет ограничению:

$$\left\|\varphi(t,x)\right\|^2 \le \mu_0 + \mu_1\left\|C_f x\right\|^2 \quad \forall t \in T,\ x \in \mathrm{R}^n,$$

где $C_f \in \mathrm{R}^{q\times n}$ – известная матрица с ограниченными элементами при всех $t \in T$. Здесь и далее $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора, $\mu_0, \mu_1 \ge 0$ – заданные константы.

Определяя переменные $u(t) = x(t_k)$ и $z(t) = (x^T(t), u^T(t))^T$, (7) представляется как импульсивная система

$$\dot{z}(t) = A_z z + D_z w(t) + \Phi_z\varphi(t, x(t)),\ \ t \ne t_k,$$

$$z(t_k) = J_z z(t_k - 0),\ \ t = t_k \in \Theta,$$

где $A_z = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D_z = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, \Phi_z = \begin{bmatrix} \Phi \\ 0 \end{bmatrix}, J_z = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix}$. При этом, $z(t_0) = z_0 = (x_0^T, u_0^T) \in E(Q_{z0})$, где $Q_{z0} = diag(Q_0, KQ_0K^T)$.

Для такой системы получены условия ограниченности на конечном интервале относительно заданных множеств в виде разрешимости задач оптимизации с ДЛМН и РЛМН. Задача синтеза коэффициентов усиления кусочно-постоянного управления сводится также к задаче оптимизации с ДЛМН и РЛМН. Результаты иллюстрируются примерами.

**Заключение.** Дается краткий обзор результатов по исследованию гибридных систем, а также их использование для анализа устойчивости и ограниченности систем с дискретными данными. Основное внимание уделено проблемам оценивания состояния, устойчивости и ограниченности на конечном интервале непрерывно-дискретных нелинейных моделей, а также вопросам синтеза управления при учете неопределенностей разного вида. Показано, что подход на основе функций Ляпунова с изменяющимися коэффициентами и техники ДЛМН и РЛМН может быть эффективно использован для синтеза управления импульсивных систем и систем с дискретным управлением.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 18-08-01045*

ЛИТЕРАТУРА


1. Васильев С.Н., Маликов А.И. О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Т. 1. Казань: Фолиант, 2011. С. 23-81.
2. **Briat C.** Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems Analysis, Observation, Filtering & Control. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015. 394 p.
3. **Zhao X, Kao Y., Niu B., Wu T.** Control Synthesis of Switched Systems. Springer International Publishing Switzerland 2017. 164 p.
4. **Liu X., Zhang K.** Impulsive Systems on Hybrid Time Domains. Springer Nature Switzerland AG. 2019. 321 p.
5. **Gershon E., Shaked U.** Advances in H∞ Control Theory. Switched, Delayed, and Biological Systems. Springer Nature Switzerland AG. 2019. 310 p.
6. **Fei Z., Shi S., Shi P.** Analysis and Synthesis for Discrete-Time Switched Systems. A Quasi-Time-Dependent Method. Springer Nature Switzerland AG, 2020. 210 p.
7. **Kurzhanski A.B. Daryin A.N.** Dynamic Programming for Impulse Feedback and Fast Controls. The Linear Systems Case. Springer-Verlag London Ltd. 2020. 279 p.

8. Маликов А.И. Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями //Автоматика и телемеханика, 2016, №5. С.19–36.
9. Маликов А.И. Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2019. № 11. С. 59–82.
10. Маликов А.И., Дубакина Д.И. Численные методы решения задач оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами // Известия ВУЗов. Математика. 2020, №4. С.74-86.

---

**A.I.Malikov**, (Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Institute of Mechanics and Engineering FRC Kazan Scientic Center RAS). **State estimation and stabilization of continuous discrete systems with uncertain disturbances**

*Abstract.* A brief overview of modern achievements in the stability theory of hybrid systems and sampled data systems is given. The problems of stability analysis, boundedness, state estimation, and control synthesis for some classes of continuously discrete systems with uncertainties are reduced to the solvability of optimization problems with differential and difference linear matrix inequalities.

А. А. ЗАМЫШЛЯЕВА, Е. В. БЫЧКОВ, О. Н. ЦЫПЛЕНКОВА, Г. А. СВИРИДЮК
(ФГАОУ ВО "Южно-Уральский государственный университет (НИУ)", Челябинск)

# ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

*В работе обсуждается математическая модель измерительного устройства второго порядка, в основу которой положено уравнение Лагранжа второго рода. На основе теории уравнений соболевского типа высокого порядка и оптимального управления решениями задачи Шоуолтера – Сидорова получена теорема о существовании оптимального динамического измерения. В рамках данной математической модели могут быть исследованы датчики второго порядка, например, акселерометр, двухзвенные осцилляторы, движения манипуляторов и др.*

**Введение.** Механические системы с ограничениями, как правило, описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$M\ddot{z} + D\dot{z} + Kz = Lf + J\lambda, \tag{1}$$

$$G\dot{z} + Hz = 0, \tag{2}$$

где $z = z(t) \in R^n$ – вектор положения, $f = f(t) \in R^n$ – вектор внешних сил, $\lambda = \lambda(t) \in R^d$ – вектор множителей Лагранжа (они характеризуют коэффициент масштабирования, и служат мерой внешних сил необходимых для выполнения соответствующих ограничений, т. е. характеризуют значимость соответствующего ограничения), а $d$ – ранг матрицы Якоби второго уравнения системы, $M$ – матрица инерционных характеристик системы (положительно определенная и симметричная), $D$ – матрица демпфирования (или гироскопических характеристик), $K$ – матрица жесткости, $L$ – матрица параметров внешних сил, $J$ – якобиан уравнений ограничений (2), $G$ и $H$ – матрица параметров уравнений ограничений. Все матрицы в (1) и (2) являются известными. Функция наблюдения

$$y = Cz, \tag{3}$$

где $y = y(t) \in R^m$ – вектор наблюдения или выходного сигнала, $C_{m\times n}$ – матрица измерения, моделирует выходное устройство. Математическая модель (ММ) измерительного устройства (1) – (3) описана в [1], однако методы и подходы для ее исследования не предложены. Более подробно и с небольшими отличиями ММ (1) – (3) описана в [2]. В работе [3] исследована модель датчика второго порядка (например, акселерометра), которая формулируется на основе уравнения динамики (1) и некоторых дополнительных ограничений.

В работах А.Л. Шестакова, Г.А. Свиридюка, А.В. Келлер и др. [4, 5] предложена новая парадигма оптимальных динамических измерений на основе теории оптимального управления решениями уравнений соболевского типа первого порядка, а также исследованы математические модели измерительных устройств первого порядка, решена задача динамического восстановления сигнала.

На основе теории уравнений соболевского типа высокого порядка [6] и оптимального управления решениями задачи Шоуолтера – Сидорова [7] построим и исследуем математическую модель измерительного устройства второго порядка. Для того этого введем новую переменную $x = (z\ \lambda)^T \in R^{n+d}$ и зададим матричные операторы

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -D & 0 \\ -G & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -K & H \\ -J & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} Lf \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0 x + u, \tag{5}$$

а наблюдение преобразуется к виду

$$y = Nx. \tag{6}$$

Добавим начальное условие Шоуолтера – Сидорова на функцию состояния

$$P\dot{x}(0) = 0, \quad Px(0) = 0, \tag{7}$$

где $P$ – некоторый относительно спектральный проектор конкретный вид которого будет уточнен в дальнейшем. Кроме того, зададим функционал штрафа для оценки близости полученного в результате моделирования $y(t)$ и наблюдаемого в ходе эксперимента $y_0(t)$ сигналов

$$F(u) = \alpha \sum_{k=0}^{2} \int_0^T \left\| y^{(k)}(t) - y_0^{(k)}(t) \right\|^2 dt + \beta \sum_{k=0}^{\overline{K}} \int_0^T \left\langle W_k u^{(k)}(t), u^{(k)}(t) \right\rangle dt, \tag{8}$$

где коэффициенты $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,1)$, $\alpha + \beta = 1$, $W_k$ – симметричные неотрицательно определенные матрицы порядка $n$, $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в $R^m$ и $R^n$, соответственно. Пусть $U_{ad}$ – непустое, выпуклое множество допустимых измерений Точка минимума $\hat{u}$ функционала

$$F(\hat{u}) = \min_{u \in U_{ad}} F(u) \tag{9}$$

будет оптимальным динамическим измерением. Предлагаемый доклад посвящен исследованию задачи (4)–(8) методами теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов и теории оптимального управления решениями уравнений соболевского типа второго порядка.

**Исследование механической системы.** Пусть $X = Y = R^{n+d}$, тогда матричные операторы $A, B_1, B_0$, заданные в (4), очевидно, линейны и непрерывны (т.е. $L(X;Y)$). Обозначим через $\vec{B}$ пучок матриц $B_1, B_0$.

Множества $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in C : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in L(Y;X)\}$ и $\sigma^A(\vec{B}) = \overline{C} \setminus \rho^A(\vec{B})$ будем называть, соответственно, $A$-резольвентным множеством и $A$-спектром пучка $\vec{B}$. Оператор-функцию комплексной переменной $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\vec{B})$ назовем $A$- резольвентой пучка $\vec{B}$. Пучок матриц $\vec{B}$ – полиномиально $A$-ограничен (т.е. $\exists a \in R_+ \ \forall \mu \in C \ (|\mu| > a) \Rightarrow (R_\mu^A(\vec{B}) \in L(Y,X))$) в силу конечномерности пространств.

**Лемма 1.** [6] *Пусть выполнено условие*

$$\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B}) d\mu \equiv 0, \quad \gamma = \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}. \tag{10}$$

*Тогда матрицы*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^A(\vec{B}) \mu A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \mu A R_\mu^A(\vec{B}) d\mu$$

*– проекторы в пространствах $X$ и $Y$ соответственно.*

Положим $X^0 = \ker P$, $Y^0 = \ker Q$, $X^1 = \operatorname{im} P$, $Y^1 = \operatorname{im} Q$. Через $A^k$ $(B_l^k)$ обозначим сужение матриц $A$ $(B_l)$ на $X^k$, $k = 0,1$; $l = 0,1$.

В силу теоремы о расщеплении пространств [6], можно построить матрицы $H_0 = (B_0^0)^{-1} A^0 \in L(X^0)$ и $H_1 = (B_0^0)^{-1} B_1^0 \in L(X^0)$.

Определим семейство матриц $\{K_q^1, K_q^2\}$ следующим образом:

$$K_1^1 = H_0, K_1^2 = -H_1,$$

$$K_{q+1}^1 = K_q^2 H_0, K_{q+1}^2 = K_q^1 - K_q^2 H_1, \ q = 1,2,\ldots.$$

Если $K_p^2 \neq \mathsf{O}$, но $K_{p+1}^s \equiv \mathsf{O}$, то $\infty$ – полюс порядка $p \in N$ $A$-резольвенты пучка $\vec{B}$. Если $\infty$ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup N$ $A$-резольвенты пучка $\vec{B}$, то будем называть пучок операторов $\vec{B}$ $(A, p)$-ограниченным.

В силу теоремы 3 [7] имеет место

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие (10) и $\infty$ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup N$ $A$-резольвенты пучка матриц $\vec{B}$. Тогда для произвольной функции $u \in H^{p+2}(0, T; R^{n+d})$ существует единственное решение $x \in H^2(0, T; R^{n+d})$ задачи (5), (7) для $t \in (0, T)$, которое к тому, же имеет вид

$$x(t, u) = -\sum_{q=0}^{p} K_q^2 (B_0^0)^{-1} \frac{d^q}{dt^q} Qu(t) + \int_0^T X_1^{t-s} (A^1)^{-1} (I - Q) u(s) ds .$$

Теперь введем в рассмотрение пространство наблюдений $Obs = N(X)$, которые определяются системой алгебраических уравнений (6). Подчеркнем еще раз, что $Obs$ – подпространство в $X$, и рассмотрим функционал (8).

**Теорема 3.** Пусть выполнено условие (10) и $\infty$ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup N$ $A$-резольвенты пучка матриц $\vec{B}$. Тогда существует единственное оптимальное измерение.

**Заключение.** В качестве примера рассмотрена математическую модель двухзвенного осциллятора, состоящего из двух тел единичной массы, соединенных между собой демпфирующим элементом, и получено численное решение.

*Работа проводилась при поддержке гранта Минобрнауки РФ №FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белов А.А., Курдюков А.П.** Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015. 301 с.
2. **Geradin M., Cardona A.** Flexible multibody dynamics: a finite element approach. Chichester: John Wiley and Sons, 2001. 339 с.
3. **Пытьев Ю.П.** Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
4. Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A., The optimal measurements theory as a new paradigm in the metrology. *Journal of Computational and Engineering Mathematics.* 2020. Vol. 7, no. 1. P. 3–23.
5. Келлер А.В.,Замышляева А.А., Манакова Н.А. Об одной стохастической модели оптимальных динамических измерений. *В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2020. Материалы Международной конференции*. 2020. С. 150-153.
6. Замышляева А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка. *Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование"*. 2014. Том 7, № 2. С. 5–28.
7. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. Optimal control of solutions to the Showalter – Sidorov problem in a model of linear waves in plasma. *Journal of Computational and Engineering Mathematics.* 2018. Vol. 5, no. 4. P. 46–57.

**A.A. Zamyshlyaeva, E.V. Bychkov, O.N. Tsyplenlova, G.A. Sviridyuk,** (South Ural State University, Chelaybinsk) **On a Mathematical Model of the Second-Order Measuring Transducer**

*Abstract.* The paper discusses a mathematical model of the second-order measuring transducer, which is based on the Lagrange equation of the second kind. On the basis of the theory of Sobolev type equations of higher order and optimal control of solutions to the Showalter – Sidorov problem, a theorem on the existence of an optimal dynamic measurement is obtained. Within the framework of this mathematical model, the second-order sensors, for example, an accelerometer, two-link oscillators, manipulator movements can be investigated.

К. В. ВАСЮЧКОВА, О. В. ГАВРИЛОВА, Н. А. МАНАКОВА, Г. А. СВИРИДЮК
(Южно-Уральский государственный университет, Челябинск)

# ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМЫ С УСЛОВИЕМ ШОУЛТЕРА – СИДОРОВА

*Рассматривается полулинейная дескрипторная система с выделенной линейной частью и нелинейным слагаемым, неразрешенная относительно производной искомой вектор-функции. В статье описана задача оптимального измерения для исследуемой модели с условием Шоуолтера – Сидорова. Базируясь на методах теории динамических измерений, найдены достаточные условия существования решений задачи оптимального измерения с использованием методов теории оптимального управления.*

**Введение.** Динамические измерения приобретают все большее распространение в технике и научных исследованиях, в таких сферах как метрология, энергетика, вычислительная нейронаука, математическая экономика и других областях. Изменение требований к результатам измерений является следствием повышения качества испытаний и эффективности производства. Так, одной из наиболее значимых в теории динамических измерений является проблема восстановления измеряемого сигнала. Особую популярность в последние три десятилетия приобрели задачи оптимального (динамического) измерения для линейных и нелинейных дескрипторных систем. Нелинейные дескрипторные системы нашли свое приложение при моделировании движения летательных аппаратов [1], химических процессов [2], в технических системах [3], в робототехнике [4] и т.д. Для достижения близости значений виртуальных наблюдений и реальных наблюдений датчика применяются методы теории оптимального управления [5]. В результате определяемое виртуальное измерение – входящий сигнал модели является решением математической задачи оптимального управления, а получаемое при этом оптимальное динамическое измерение наиболее точно отражает входящий сигнал датчика. Данный подход предполагает минимизацию функционала штрафа, с помощью которого достигается наименьшее расхождение как значения выходного сигнала к выходному сигналу модели датчика, так и их производных. Данную задачу называют задачей оптимального измерения [6], а найденный минимум оптимальным измерением. В работах [5, 6] были рассмотрены линейные дескрипторные системы или системы уравнений леонтьевского типа, предлагаемая работа посвящена исследованию задач оптимального измерения именно для полулинейных дескрипторных систем. Рассмотрение именно полулинейных дескрипторных систем позволяет обобщить модель Шестакова – Свиридюка [6], основанную на линейных системах, на более общий случай, что позволит учесть нелинейные связи в датчиках.

**Основные результаты.** Рассмотрим полулинейную дескрипторную системы вида

$$L\dot{x}(t) + Mx(t) + N(x(t)) = u(t), \quad \det L = 0, \tag{1}$$

и

$$y(t) = Dx(t) \tag{2}$$

с начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0. \tag{3}$$

Здесь $L$, $M$ – матрицы порядка $n$ ($\langle Lx,x\rangle \geq 0$ и $\langle Mx,x\rangle \geq 0$), представляющие собой взаимовлияние скоростей состояния и состояния измерительного устройства, соответственно, причем $\dim \ker L = \dim \operatorname{coker} L$; $D$ – квадратная матрица порядка $n$, $N$ – нелинейный оператор заданный формулой $\langle N(x(t)), x(t)\rangle = \alpha_1 x_1^4 + \alpha_2 x_2^4 + \ldots + \alpha_n x_n^4$, $\alpha_i \geq 0$, где $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $x(t)=(x_1(t),x_2(t)\ldots,x_n(t))$ и $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t),\ldots,\dot{x}_n(t))$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния измерительного устройства, соответственно; $u(t)=(u_1(t),u_2(t), \ldots$

$u_n(t))$ и $y(t)=(y_1(t),y_2(t), \dots y_n(t))$ – вектор-функции измерений и наблюдений измерительного устройства, соответственно.

Основной задачей данной работы является минимизация значений функционала штрафа

$$J(y) = J(x,u) = \int_0^T \|y(t) - y_0(t)\|^4 \, dt, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} = \{u \in L_{4/3}((0,\tau), \mathbb{R}^n)\}$ – пространство измерений, $y_0(t) = (y_{01}(t),y_{02}(t),\dots,y_{0n}(t))$ – наблюдение, полученное в ходе натурного эксперимента. Заметим, что в силу (1), (2) вектор-функцию $y$ зависит от функций $x$, $u$, поэтому можно считать, что $J(y)=J(x,u)$.

Рассмотрим

$$\operatorname{coim} L = \{x \in \mathfrak{X} : [x,\varphi] = 0 \; \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\},$$

где $[\cdot,\cdot]$ – скалярное произведение в $L_2((0,\tau), \mathbb{R}^n)$.

Пусть $\mathcal{X} = \{x \in L_4((0,\tau), \mathbb{R}^n): \dot{x} \in \operatorname{coim} L\}$ – пространство состояний, $\mathfrak{N} = D[\mathfrak{X}]$ – пространство наблюдений при некотором фиксированном $\tau \in \mathbb{R}_+$. Выделим в $\mathfrak{U}$ замкнутое, выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ – множество допустимых измерений.

Рассмотрим множество

$$\boldsymbol{M} = \{x \in \mathfrak{X}: \; (I - Q)(Mx + N(x)) = (I - Q)u\}. \tag{5}$$

В силу свойств матрицы $L$ существует проектор $Q$ вдоль $coker\ L$ на $im\ L$. Заметим, что если $x=x(t)$ – решение уравнения (1), то оно с необходимостью лежит во множестве $\boldsymbol{M}$. Множество $\boldsymbol{M}$ будем называть фазовым многообразием уравнения (1).

**Определение 1.** Слабым решением уравнения (1) назовем вектор-функцию $x \in \mathcal{X}$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T \varphi(t) \left[ \frac{d}{dt} Lx + Mx + N(x), w \right] dt = \int_0^T \varphi(t) [u, w] dt, \tag{6}$$

для любых $w \in \mathcal{X}$ и любого $\varphi \in L_2(0,\tau)$. Решение уравнение (1) назовем решением задачи Шоуолтера – Сидорова, если оно удовлетворяет (3).

**Теорема 1.** *Если $\boldsymbol{M}$ простое банахово $C^\infty$-многообразие, то для любых $x_0 \in \mathcal{X}$ и $u \in \mathcal{U}$ существует единственное решение $y \in \mathfrak{N}$ задачи (1) – (3).*

Требуется найти оптимальное измерение $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_\partial$, удовлетворяющее системе (1), (2), начальному условию Шоуолтера – Сидорова (3) и

$$J(\tilde{u}) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u) \tag{7}$$

**Определение 2.** *Пару $(\tilde{x},\tilde{u}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}_\partial$ назовем решением задачи оптимального измерения (1) – (4), (7), если*

$$J(\tilde{x},\tilde{u}) = \min_{(x,u)} J(x,u),$$

*где пары $(x,u) \in \mathfrak{X} \times \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяют (1) – (3) в смысле определения 1.*

**Теорема 2.** *Если $\boldsymbol{M}$ простое банахово $C^\infty$-многообразие, то для любых $x_0 \in \mathfrak{X}$ и $y_0 \in \mathfrak{N}$ существует единственное измерение $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_\partial$ для которого выполнено (7).*

Вектор-функцию $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$ существующую по теореме 2, будем, в дальнейшем, называть точным оптимальным измерением. Заметим, что вектор-функции $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$ и $y = y(t)$ полученные в результате применения теоремы 1 и теоремы 2, являются виртуальным точным оптимальным измерением и виртуальным точным оптимальным наблюдением.

Теоремы 1 и 2 устанавливают существование решения, но не описывают метода его нахождения. Для численного исследования задачи *(1) – (4), (7)* линеаризуем уравнение (1) при помощи

метода декомпозиции, тогда задача *(1) – (4), (7)* эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} &L\dot{x}(t) + Mx(t) + N(v(t)) = u(t), \\ &y(t) = Dx(t), \\ &x(u, v(t)) = v(t), \\ &L(x(0) - x_0) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

**Определение 3.** Тройку $(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathcal{U}_\partial$ *назовем решением задачи оптимального измерения (7), (8), если*

$$J(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{u}) = \min_{(x,v,u)} J(x, v, u),$$

где тройка $(x, v, u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathcal{U}_\partial$ *удовлетворяет (8) в смысле определения 1. В силу задачи (8)* $y=y(t,x,v,u)$.

**Теорема 3.** *Если* $\boldsymbol{M}$ *простое банахово* $C^\infty$*-многообразие, то для любых* $x_0\in\mathfrak{X}$ *и* $y_0\in\mathfrak{N}$ *существует решение задачи (7), (8).*

*Работа проводилась при поддержке гранта Минобрнауки РФ № FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).*

ЛИТЕРАТУРА


1. **Stevens B. L., Lewis F. L.** Aircraft Modeling. Dynamics and Control. New York: Wiley, 1991.
2. **Kumar A. and Daoutidis P.** Feedback Control of Nonlinear Differentialalgebraic Equation Systems. *AIChE Journal*. 1995. Vol. 41. P.619–636.
3. **Hemami H., Wyman B.F.** Modeling and Control of Constrained Dynamic Systems with Application to Biped Locomotion in the Frontal Plane. *IEEE Trans. Automat. Control*. 1979. Vol. 24. P.526–535.
4. **Mills J.K., Goldenberg A.A.** Force and Position Control of Manipulators During Constrained Motion Tasks. *IEEE Trans. Robot. Automat.* 1989. V. 5. P.30–46.
5. **Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А.** Новый подход к измерению динамически искаженных. *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование.* 2010. № 16(192), вып. 5. С.116–120.
6. **Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V., Khudyakov Y.V.** The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals. *Semigroups of Operators -Theory and Applications*. 2015. P.183–195.
7. **Stevens B. L., Lewis F. L.** Aircraft Modeling. Dynamics and Control. New York: Wiley, 1991.
8. **Kumar A. and Daoutidis P.** Feedback Control of Nonlinear Differentialalgebraic Equation Systems. *AIChE Journal*. 1995. Vol. 41. P.619–636.
9. **Hemami H., Wyman B.F.** Modeling and Control of Constrained Dynamic Systems with Application to Biped Locomotion in the Frontal Plane. *IEEE Trans. Automat. Control*. 1979. Vol. 24. P.526–535.
10. **Mills J.K., Goldenberg A.A.** Force and Position Control of Manipulators During Constrained Motion Tasks. *IEEE Trans. Robot. Automat.* 1989. V. 5. P.30–46.
11. **Shestakov A.L., Sviridyuk G.A.** A New Approach to Measuring Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software.* 2010. № 16(192), issue 5. P.116–120.
12. **Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V., Khudyakov Y.V.** The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals. *Semigroups of Operators -Theory and Applications*. 2015. P.183–195.


---

**K.V. Vasiuchkova, O.V. Gavrilova, N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk** (South Ural State University (National Research University, Chelyabinsk). **Optimal measurement problem for a semilinear descriptor system with showalter – sidorov condition**

*Abstract.* A semilinear descriptor system with a distinguished linear part and a nonlinear term, which is not resolved with respect to the derivative of the desired vector function, is considered. The article describes the optimal measurement problem for the studied model with Showalter – Sidorov condition. Based on the methods of the theory of dynamic measurements, sufficient conditions for the existence of solutions to the problem of optimal measurement are found using methods of the theory of optimal control.

А.И. ГЛУЩЕНКО, В.А. ПЕТРОВ, К.А. ЛАСТОЧКИН
(Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал),
ФГАОУ ВО НИТУ «МИСиС», г. Старый Оскол)

# О ВЛИЯНИИ КОЭФФИЦИЕНТА СКОРОСТИ АДАПТАЦИИ НА СХОДИМОСТЬ В ГРАДИЕНТНЫХ СХЕМАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ

*В работе рассматривается одна из основных проблем внедрения адаптивных систем управления и идентификации в практику – проблема выбора значения шага адаптации для обеспечения требуемой скорости сходимости по параметрам линейной регрессии. Основой решения данной задачи может являться рекурсивный МНК при условии его применения вместо стандартного градиентного метода. Поэтому в работе осуществляется сравнение известных свойств этих подходов и демонстрируется способность рекурсивного МНК к сохранению постоянной скорости сходимости для различных регрессоров.*

**Введение.** Большинство современных методов беспоискового адаптивного управления так или иначе сводятся к задаче оценки параметров некоторой линейной регрессии вида $y = \theta^T\omega$ [1]. Законы оценки идеальных параметров при этом, как правило, строятся по методам градиентного спуска, скоростного градиента и второго метода Ляпунова [1,2].

Общеизвестной проблемой таких законов оценки является, то что экспоненциальная сходимость оцениваемых параметров к их идеальным значениям $\theta$ гарантируется только при выполнении условия постоянного возбуждения регрессора (PE) [1]. При этом на сегодняшний день были получены результаты [3, 4], позволяющие так или иначе ослаблять это требование.

Другой, менее освещенной в литературе, проблемой рассматриваемых контуров идентификации является проблема выбора коэффициента скорости процесса адаптации $\Gamma$. Ее суть заключается в том, что, как было доказано в работе [5], для текущего регрессора $\omega$ функции $y$ даже при выполнении условия PE существует оптимальное значение коэффициента $\Gamma$, при котором скорость сходимости оценок к идеальным значениям максимальна. С одной стороны, это означает, что скорость сходимости оценок к идеальным значениям не может быть сделана произвольно большой, а с другой стороны, что для каждого нового значения регрессора $\omega_{new}$ существует свое новое оптимальное значение коэффициента скорости процесса адаптации $\Gamma_{new}$. Предложенные более 40 лет назад методы фильтрации и расширения регрессора [6, 7], как было показано в работе [8], решают первую проблему и позволяют сделать скорость сходимости произвольно большой путем увеличения значения коэффициента скорости процесса адаптации. Однако значение $\Gamma$ выбирается один раз и остается постоянным, что при изменении регрессора не позволяет поддерживать желаемую скорость сходимости.

Поэтому методы фильтрации и расширения регрессора не решают вторую проблему – поддержание для различных регрессоров наперед заданной скорости сходимости параметров регрессии к идеальным. С практической точки зрения хотелось бы иметь закон оценки идеальных параметров регрессии, обеспечивающий указанное требование. Таких законов оценки на сегодняшний день еще не было предложено. Основой для таких подходов может служить рекурсивный МНК, который может быть применен вместо градиентного метода.

Акцентируя внимание на проблеме выбора скорости процесса адаптации, целью настоящей работы является сравнение с точки зрения величины скорости сходимости свойств градиентного контура оценки и контура, построенного согласно рекурсивного МНК с экспоненциальным забыванием. Он отличается от классического градиентного контура наличием закона настройки скорости процесса адаптации $\Gamma$. Как будет показано в исследовании, это позволяет рекурсивному МНК частично решить описанную выше проблему.

**Основная часть.** Математически строго опишем градиентный контур идентификации и контур оценки неизвестных параметров, построенный согласно рекурсивного МНК.

Для этого введем регрессию (1), аппроксимирующую идеальную функцию $y(t)=\theta^T\omega(t)$.

$$\hat{y}(t) = \hat{\theta}^T(t)\omega(t) \tag{1}$$

где $\omega \in R^n$ – известный вектор регрессоров, $\theta \in R^n$ – вектор неизвестных постоянных параметров, $\hat{\theta} \in R^n$ – вектор настраиваемых параметров.

Уравнение в отклонениях между (1) и идеальной функцией $y(t)$ имеет вид (2).

$$\hat{y}(t) - y(t) = \tilde{y}(t) = \hat{\theta}^T(t)\omega(t) - \theta^T\omega(t) = \tilde{\theta}^T(t)\omega(t), \tag{2}$$

где $\tilde{\theta} \in R^n$ – вектор параметрической ошибки.

***Градиентный контур оценки.*** Для синтеза градиентного контура оценки на основе уравнения в отклонениях (2) введем целевой критерий в виде (3) [1].

$$Q = 0.5\tilde{y}^T(t)\tilde{y}(t) \tag{3}$$

Закон оценки идеальных параметров согласно градиентному методу приобретает вид (4).

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\Gamma\nabla Q_{\theta^T} = -\Gamma\frac{\partial Q^T}{\partial\tilde{\theta}^T(t)} = -\Gamma\frac{\partial\tilde{y}(t)}{\partial\tilde{\theta}^T(t)}\tilde{y}^T(t) = -\Gamma\omega(t)\omega^T(t)\tilde{\theta}(t) \tag{4}$$

Поскольку идеальные параметры $\theta$ постоянны, то дифференциальное уравнение для параметрической ошибки $\tilde{\theta}$ имеет вид (5).

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\Gamma\omega(t)\omega^T(t)\tilde{\theta}(t) \tag{5}$$

Решение дифференциального уравнения (5) имеет вид (6).

$$\tilde{\theta}(t) = e^{-\Gamma\int_0^t\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau}\tilde{\theta}(0) \tag{6}$$

Поведение параметрической ошибки при использовании градиентного закона оценки (4) описывается следующими свойствами: 1) при выполнении условия PE параметрическая ошибка (6) экспоненциально сходится к нулю [1]; 2) для текущего регрессора $\omega$ существует оптимальное значение скорости адаптации, обеспечивающее максимально возможную скорость сходимости параметрической ошибки (6) к нулю [5, 8].

***МНК контур оценки.*** Для синтеза контура оценки по методу рекурсивного МНК с экспоненциальным забыванием целевой критерий выберем в интегральном виде (7) [1, 9].

$$J = 0.5\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\tilde{y}^T(\tau)\tilde{y}(\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

где $\lambda$ – экспоненциальный фактор забывания.

Тогда МНК оценки (9) идеальных параметров $\theta$ могут быть получены из уравнения (8).

$$\nabla_{\hat{\theta}^T(t)}J^T = \frac{\partial J^T}{\partial\hat{\theta}^T(t)} = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\omega(\tau)\left[\omega^T(\tau)\hat{\theta}(t) - y^T(\tau)\right]d\tau = 0 \tag{8}$$

$$\hat{\theta}(t) = \underbrace{\left[\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right]^{-1}}_{\Gamma(t)}\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\omega(\tau)y^T(\tau)d\tau \tag{9}$$

Непосредственно контур оценки идеальных параметров получим из уравнения (9) по процедуре, с которой можно ознакомится в [9]. В этом случае контур оценки описывается системой дифференциальных уравнений (10).

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}(t) = -\Gamma(t)\omega(t)\omega^T(t)\tilde{\theta}(t) \\ \dot{\Gamma}(t) = \lambda\Gamma(t) - \Gamma(t)\omega(t)\omega^T(t)\Gamma(t) \end{cases} \tag{10}$$

Как следует из системы уравнений (10), контур оценки неизвестных параметров, построенный согласно рекурсивного МНК, отличается от градиентной схемы (5) наличием закона настройки скорости процесса адаптации.

Решение системы дифференциальных уравнений (10) имеет вид (11).

$$\tilde{\theta}(t) = e^{-\int_0^t\Gamma(\tau)\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau}\tilde{\theta}(0);\ \Gamma(t) = \frac{e^{\lambda t}\Gamma(0)}{1 + \Gamma(0)\int_0^t e^{\lambda\tau}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau} \tag{11}$$

Поведение параметрической ошибки при использовании закона оценки (10) описывается следующими свойствами: 1) при выполнении условия PE параметрическая ошибка (11) экспоненциально сходится к нулю [1]; 2) скорость сходимости может быть сделана произвольно большой путем увеличения фактора забывания λ [9].

***Результаты численных экспериментов.*** С помощью экспериментов в Matlab/Simulink проиллюстрируем свойства градиентного алгоритма идентификации – уравнение (5) – и алгоритма идентификации, построенного по рекурсивному МНК, – система уравнений (10) – с точки зрения скорости сходимости. Вид регрессора, начальные значения параметрической ошибки и матрицы скоростей процесса идентификации были выбраны в соответствии со значениями, записанными в выражении (12). Для градиентного контура оценки (5) использовалась постоянная скорость адаптации, совпадающая с начальной для МНК контура.

$$\Gamma(0)=I;\ \lambda=10;\ \omega=\left[\begin{array}{cc} A\sin(\omega) & A\cos\left(\frac{\pi}{4}\omega\right)\end{array}\right]^T;\ \tilde{\theta}^T(0)=\begin{bmatrix}10 & 10\end{bmatrix} \qquad (12)$$

На рис.1 представлено сравнение норм параметрических ошибок, полученных при моделировании уравнений (5) и (10) с различными значениями амплитуды $A$ регрессора (12).

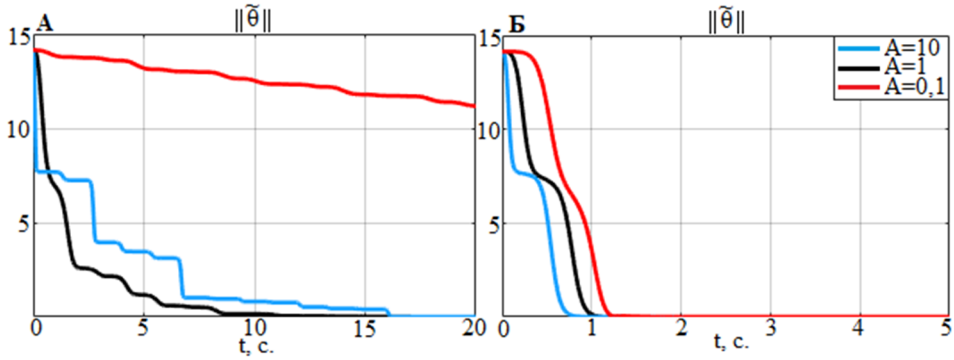



Рис. 1. Сравнение норм параметрических ошибок при моделировании градиентной схемы (А) и МНК схемы (Б)

Как следует из рис.1А, при различной амплитуде регрессора $A$ градиентная схема (5) с постоянной скоростью $\Gamma=I$ обеспечивает различную скорость сходимости нормы параметрической ошибки к нулю. При этом проявляется эффект наличия оптимальной скорости адаптации, отмеченный во введении: для регрессора меньшей амплитуды $A = 1$ обеспечивается более быстрая скорость сходимости, чем для регрессора $A = 10$. Это означает, что скорость $\Gamma = I$ не является оптимальной для регрессора амплитудой $A = 10$.

Как следует из рис.1Б, при различной амплитуде регрессора $A$ контур оценки (10) обеспечивает также различную скорость сходимости. Однако, этот эффект, как видно из сравнения рис.1А и рис.1Б, проявляется слабее. Также, настройка скорости позволила обеспечить прямо пропорциональный характер зависимости скорости сходимости от амплитуды регрессора: чем больше амплитуда регрессора, тем больше скорость сходимости. В целом, результаты проведенных экспериментов показали, что на практике, с точки зрения скорости сходимости при различной амплитуде регрессора, предпочтительнее использовать МНК контур оценки (10) с переменной скоростью настройки, чем градиентный контур (5).

**Заключение.** В дальнейших исследованиях планируется решение проблемы, сформулированной во введении, а именно разработка на основе рекурсивного МНК закона настройки скорости, который позволит обеспечить наперед заданную и постоянную (при различных значениях регрессора) скорость сходимости параметрической ошибки к нулю.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ № 18-47-310003 р_а.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ioannou P., Sun J. Robust Adaptive Control. Mineola. NY, USA: Dover. 2013. 834 p.
2. **Фрадков А. Л.** Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 296 с.

3. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin, A. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2016. Vol. 62. №. 7. P. 3546-3550.
4. Chowdhary G., Yucelen T., Mühlegg M., Johnson E. Concurrent learning adaptive control of linear systems with exponentially convergent bounds. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2013. Vol. 27. №. 4. P. 280-301.
5. Narendra K. S., Annaswamy A. M. Persistent excitation in adaptive systems. *International Journal of Control*. 1987. Vol. 45. №. 1. P. 127- 160.
6. Lion P. M. Rapid identification of linear and nonlinear systems. *AIAA Journal*. 1967. Vol. 5. №. 10. P. 1835-1842.
7. Kreisselmeier G. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE transactions on automatic control*. 1977. Vol. 22. №. 1. P. 2-8.
8. Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D. On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes. *Annual Reviews in Control*. 2020. P. 1-16. In press.
9. Sastry S., Bodson M. Adaptive control: stability, convergence and robustness. Courier Corporation, 2011. 204 p.

---

**A.I. Glushchenko, V.A. Petrov, K.A. Lastochkin** (Stary Oskol technological institute n.a. A.A. Ugarov (branch) NUST “MISIS). **On impact of learning rate value on convergence of gradient identification schemes**

*Abstract.* In this study, one of the main problems of adaptive control and identification systems implementation in practice is considered. This is the problem of choice of a learning rate value to provide the required convergence rate of linear regression parameters. Recursive least-squares method can be used as a basis to solve this problem, provided that it is used instead of a conventional gradient descent method. Therefore, the aim of the research is to compare the known properties of these approaches and demonstrate the capability of the recursive least-squares method to provide a constant convergence rate under condition of different values of the regressor.

С. А. ЗАГРЕБИНА, Н. Н. СОЛОВЬЁВА, Н. С. ГОНЧАРОВ
(Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск)

# ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА МЕТОДАМИ КВАЗИНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

*В докладе излагается описание математической модели измерительного устройства методами квазинормированных пространств. Данная модель выступает в качестве приложения теории позитивных вырожденных голоморфных групп операторов в квазисоболевых пространствах последовательностей. Этот подход актуален в силу возможности нахождения позитивных решений – значений измерительного прибора, а значит, более отвечает физическому смыслу. Ведь, как правило, о его отсутствии мы говорим, когда получаем отрицательное или мнимое значение рассматриваемой величины, которая по смыслу положительна или действительна.*

**Введение.** В последнее время возрос интерес к математическим моделям, характеризующим физические процессы и имеющим позитивные (т.е. неотрицательные) решения. В такого рода моделях, прежде всего, возникают вопросы её адекватности при найденных характеристиках, качественные и количественные стороны которых находятся в непрерывной зависимости от изначально заданных значений модели. Наша задача – описать такую математическую модель, неотрицательные начальные данные которой будут давать неотрицательные решения.

В теории динамических измерений важной задачей является задача восстановления сигнала, искаженного помехами разной природы. Один из способов ее решения, возникший в последнее десятилетие – это задача оптимальных динамических измерений [1]. Важной частью математической модели измерительного устройства в этой теории является система леонтьевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \tag{1}$$

где $L$ и $M$ – квадратные матрицы порядка $n$, задающие структуру измерительного устройства, вектор-функция $u = col(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ соответствует состоянию измерительного устройства. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1) является однородной линейной вырожденной, т.е. $\det L = 0$.

Математическая модель измерительного устройства предназначена для обработки линейных сигналов, которые непрерывны во времени. Как правило, значения таких сигналов искаженны и содержат грубые отклонения от своих моделей. Классическая постановка задач измерения параметров сигналов базируется на применении нормированных пространств.

В силу того, что позитивные решения более «физичны», актуален вопрос о существовании позитивных решений системы (1). Для исследования этого вопроса используется теория позитивных вырожденных голоморфных групп операторов [2], отвечающая адекватности модели, опирающаяся на полные нормированные банаховы пространства, называемые банаховыми структурами. Как известно, любое банахово пространство является квазибанаховым, а обратное – неверно.

Квазинормированным же пространством $\left(\mathfrak{U}, {}_{\mathfrak{U}}\|\bullet\|\right)$ называется линейное пространство $\mathfrak{U}$ над полем $\mathbb{R}$ с квазинормой ${}_{\mathfrak{U}}\|\bullet\|$, которая отличается от нормы только аксиомой «неравенство треугольника»

$$\forall u, v \in \mathfrak{U} \quad {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \le C\left({}_{\mathfrak{U}}\|u\| + {}_{\mathfrak{U}}\|v\|\right),$$

где константа $C \ge 1$. Полное квазинормированное пространство $\mathfrak{U}$ называется квазибанаховым. Квазинормированные пространства уже использовались ранее как при решении абстрактных задач [3], так и при решении прикладных задач [4]. Говоря же про наше описание модели измерительного устройства, стоит еще раз упомянуть, что квазинорма ${}_{\mathfrak{U}}\|\bullet\|$ естественным образом задает топологию на $\mathfrak{U}$. Базисом окрестностей служит совокупность всех множеств ви-

да $\left\{u \in \mathfrak{U} : {}_{\mathfrak{U}}\left\| u - v \right\| < \varepsilon \right\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. А в качестве пространства, в котором проводим рассуждения, выбираем квазисоболевы пространства последовательностей

$$l_q^m = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{\frac{mq}{2}} \left| u_k \right|^q < +\infty \right\},\ m \in \mathbb{R},\ q \in [1, +\infty).$$

Основной целью данного доклада является описание позитивных решений системы (1). Наличие таких решений в квазинормированных пространствах позволит в дальнейшем продолжить исследование позитивных оптимальных динамических измерений в квазинормированных пространствах.

**Постановка задачи.** Рассмотрим математическую модель измерительного устройства и в качестве ее первой части представим систему уравнений (1), упомянутую во введении

$$L\dot{u} = Mu, \tag{2}$$

ну а в качестве второй составляющей математической модели измерительного устройства укажем начальное условие Шоуолтера – Сидорова

$$P\left(u(0) - u_0\right) = 0, \tag{3}$$

где $P$ – проектор в пространстве $\mathbb{R}^n$, построенный в соответствии с матрицами $L$ и $M$. Вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений принимаем за конечномерный аналог уравнений соболевского типа, чтобы далее при использовании теории позитивных голоморфных групп операторов не возникало противоречий с методами теории вырожденных полугрупп операторов [5]. Заметим также, что начальное условие (3) более удобно в алгоритмах численных расчетов, которые планируется внедрить в дальнейшем.

Решение $u = u(t)$ уравнений (2) назовем классическим решением задачи (2),(3).

Матрицу $M$ будем называть $(L, p)$-регулярной $\left(p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\right)$, если к случаю $p = \max\{n_1, n_2, \ldots n_k\} \in \mathbb{N}$ – это порядок полюса в точке $\infty$ $L$-резольвенты $\left(\mu L - M\right)^{-1}$ матрицы $M$ – добавим условие $p = 0$ (т.е. $\det L \neq 0$) .

**Лемма 1.** [6] Пусть матрица $M$ $(L, p)$-регулярна. Тогда матрицы $P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left(\mu L - M\right)^{-1} L d\mu,\ Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} L\left(\mu L - M\right)^{-1} d\mu$ являются проекторами.

**Теорема 1.** [6] Пусть матрица $M$ $(L, p)$-регулярна $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует единственная максимальная голоморфная разрешающая группа уравнений (2), которая представима в виде $U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu t} d\mu$,где $t \in \mathbb{R}$ $\gamma \subset \mathbb{C}$ – (замкнутый) контур, ограничивающий область, содержащую $L$ - спектр $\sigma^L(M)$ оператора $M$

**Основной метод описания позитивных решений математической модели измерительного устройства.** Пусть $L$ и $M$ - квадратные матрицы порядка $n$. Матрица $M$ $(L, p)$-регулярна. В соответствии с [7] называем $\rho^L(M) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \det\left(\mu L - M\right) \neq 0\right\}$ – $L$-резольвентным множеством, а $\sigma^L(M) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s\}, s < n$ $L$-спектром матрицы $M$, который совпадает со спектром как матрицы $L^{-1}M$, так и матрицы $ML^{-1}$, при условии $\det L \neq 0$. Определим контур $\gamma = \left\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r\right\},\ r > \max\left\{|\mu_1|, |\mu_2|, \ldots, |\mu_s|\right\}$, построим проекторматрицы $P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left(\mu L - M\right)^{-1} L d\mu,\ Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} L\left(\mu L - M\right)^{-1} d\mu$ . Далее

$(\mu L - M)^{-1} L = R_\mu^L(M)$ и $L(\mu L - M)^{-1} = L_\mu^L(M)$ будем называть правой и левой $L$-резольвентами матрицы $M$ соответственно.

Также существуют следующие голоморфные группы матриц: $U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu,\ F^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu,\ t \in \mathbb{R},\ \gamma \subset \mathbb{C}$ [8].

Единицами этих групп служат проекторы $U^0 = P$ и $F^0 = Q$. В теории позитивных вырожденных голоморфных групп операторов в квазисоболевых пространствах, банаховой структурой $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \mathcal{C})$ называем полное линейное нормированное пространство Рисса, с заданным отношением порядка $\geq$ и $\mathcal{C}$-собственным порождающим конусом [2]. Однопараметрическое семейство матриц $V^\cdot = \{V^t : t \in \mathbb{R}\}$, действующее на пространстве $\mathcal{B}$, будем называть разрешающей позитивной группой системы (2), при условии, что $V^t u \geq 0$ при $u \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Решение $u(t) = U^t u_0$ системы уравнений (2) будет решением задачи (2), (3), если $Pu_0 = u_0$. Фазовым пространством системы (2) будем называть множество $\mathcal{B} \subset \mathbb{U}^n$ такое, что любое решение системы (2) лежит в $\mathcal{B}$ поточечно, т.е. $u(t) \in \mathcal{B}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. При любых $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение задачи (2), (3). Таким образом, достаточное условие $u_0 \in \operatorname{im} P$ является необходимым.

Условие (3) считаем уместным в случае $(L, p)$-регулярности матрицы. И в таком случае данное условие (3) эквивалентно условию $\left[R_\alpha^L(M)\right]^{p+1}(u(0) - u_0) = 0$ при любом $\alpha \in \rho^L(M)$ [9].

**Теорема 2.** Пусть матрица $M$ $(L, p)$-регулярна $p \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ \det M \neq 0$. Тогда следующие условия эквивалентны

1. $\left(\mu R_\mu^L(M)\right)^{p+1},\ \left(\mu L_\mu^L(M)\right)^{p+1}$ позитивны при всех достаточно больших $\mu \in \mathbb{R}_+$;
2. вырожденные голоморфные группы $U^\cdot,\ F^\cdot$ позитивны.

Как было отмечено ранее, фазовым пространством (2) служит подпространство $\operatorname{im} P$.
Тогда существует единственное позитивное решение задачи (2), (3), которое к тому же имеет вид $u(t) = U^t u_0,\ \forall u_0 \in U^n : u_0 \geq 0$.

**Заключение.** Беря во внимание вышесказанное, стоит сказать, что в докладе дано описание математической модели измерительного устройства и его позитивного решения методами квазинормированных пространств. В дальнейшем планируется продолжить исследование позитивных оптимальных динамических измерений в квазинормированных пространствах посредством развития теории позитивных вырожденных голоморфных групп операторов. А также предполагается внедрение алгоритма численных расчетов для позитивного решения поставленной задачи (2), (3).

*Работа проводилась при поддержке гранта Минобрнауки РФ №FENU-2020-0022 (2020072ГЗ)*

ЛИТЕРАТУРА


1. Shestakov A.L., Keller A.V., Sviridyuk, G.A. The theory of optimal measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics.* 2014. Vol. 1. № 1. P. 3-16.
2. Zagrebina S.A., Solovyova N.N. Positive degenerate holomorphic groups of the operators and their applications. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 2020. 325. P. 95-109.
3. **Берг Й., Лефстрем И.** Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980. 264 с.
4. Вовк С.М., Борулько В.Ф. Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазиномированных пространствах. *Известиявысшихучебныхзаведений.Радиоэлектроника.* 2010. Т. 53. № 7. С. 31–42.

5. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов. *Успехи математичеких наук.* 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
6. Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А., Худяков Ю.В. Оптимальные измерения детерминированных и стохастических сигналов. *XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.* 2014. С. 1231-1242.
7. Свиридюк Г.А., Брычев С.В. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа. *Изв. вузов. Математика.* 2003. №8. С. 46-52.
8. Keller A.V., Sagadeeva M.A. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy. *Semigroups of Operators – Theory and Applications.* 2020. P. 263-277.
9. Свиридюк Г. А., Загребина С. А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа. *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика.* 2010. Т. 3:1. С. 104–125

---

**Sophiya. A. Zagrebina, Natalya. N. Solovyova, Nikita. S. Goncharov** (Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “South Ural State University (national research university)”, Chelyabinsk). **Description of the measuring device`s mathematical model by the methods of quasinormed spaces**

*Abstract.* The reports contains a description of the measuring device`s mathematical model by the methods of quasinormalized spaces. This model serves as an application to the theory of positive degenerate holomorphic groups of operators in Quasi-Sobolev spaces of sequences. This branch is relevant due to the possibility of finding positive solutions or values of the measuring device, which means that it is more consistent with the physical meaning. Indeed, as a rule, we talk about its absence when we get a negative or imaginary value of a quantity that is positive or real in meaning.

А. Н. ЖИРАБОК, А. В. ЗУЕВ
(Дальневосточный федеральный университет, Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток)

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДЕФЕКТОВ В ДАТЧИКАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Рассматривается метод идентификации дефектов в датчиках нелинейных технических систем на основе скользящих наблюдателей. Предлагаемый подход базируется на идее построения редуцированной модели исходной системы, обладающей избирательной чувствительностью к дефектам и возмущению. Кроме уменьшения сложности средств диагностирования это позволяет ослабить ограничения, накладываемые на исходную систему.*

**Введение.** Одним из важнейших элементов сложной технической системы является информационно-измерительная система, ее существенная часть представлена измерительными преобразователями (датчиками), которые в силу своих конструктивных особенностей нередко являются самыми ненадежными элементами таких систем. Дефекты, возникающие в датчиках, приводят к искажению их показаний, что отражается на качестве управления технической системой. Если величину этих искажений удается оценить, то искаженные показания могут быть скорректированы и качество управления системой будет восстановлено.

Методом, дающим наибольшую информацию об искажениях, вызванных дефектами, является идентификация. Последние годы для ее реализации активно применяется подход, основанный на наблюдателях, работающих в скользящем режиме и использующих особенности этого режима [1]; далее такие наблюдатели будем называть скользящими. Скользящие наблюдатели применяются для решения задачи идентификации дефектов для различных систем [2-4]. Во всех этих публикациях на исходную систему накладывается ряд ограничений.

В настоящей работе метод на основе скользящих наблюдателей используется для решения задачи оценки величины дефектов в нелинейных системах при действии на них возмущений. В основе предлагаемого подхода лежит идея использования редуцированной (имеющей меньшую размерность) модели исходной системы. Это дает возможность уменьшить сложность наблюдателей по сравнению с известными работами [2-4], где строятся наблюдатели полного порядка. Кроме того, удается ослабить ограничения на класс рассматриваемых систем по сравнению с известными методами [2-4], что позволяет расширить класс систем, для которых задача идентификации дефектов может быть решена.

**Построение редуцированной модели.** Рассмотрим техническую систему, описываемую уравнениями

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t),u(t)) + L\rho(t), \qquad y(t) = Hx(t) + \sum_{i=1}^{l} D_i d_i(t). \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^l$ – векторы состояния, управления и измерений; $F$, $G$, $C$, $L$ и $H$ – известные постоянные матрицы; $\rho(t) \in R^q$ – неизвестная функция времени, описывающая действующие на систему возмущения; $d_i(t) \in R$ – функция, описывающая дефекты в $i$-м датчике: при их отсутствии $d_i(t) = 0$, при появлении дефекта $d_i(t)$ становится неизвестной функцией времени, $i = \overline{1,l}$; матрицы $D_1$, …, $D_l$ связывают дефекты с соответствующими компонентами вектора измерений: $D_1 = (1\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}}$, …, $D_l = (0\ 0\ \ldots\ 1)^{\mathrm{T}}$;

$$\Psi(x,u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1 x, u) \\ \cdots \\ \varphi_s(A_s x, u) \end{pmatrix},$$

$A_1, \ldots, A_s$ – матрицы-строки; $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ – нелинейные (возможно, недифференцируемые) функции. Предполагается, что функция $\Psi(x,u)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу $x$, т.е. $\|\Psi(x,u) - \Psi(x',u)\| \le N\|x - x'\|$.

Для простоты рассмотриается случай, когда дефекты возможны только в одном датчике с соответствующими элементами $D$ и $d(t)$. Решение поставленной задачи опирается на редуцированную модель системы (1), аналогичную модели, традиционно используемой при решении задача диагностики [5], которая в общем случае описывается уравнением

$$\dot{x}_*(t) = F_* x_*(t) + G_* u(t) + J_* H x(t) + C_* \Psi(x_*(t), y(t), u(t)) + L_* \rho(t), \quad y_*(t) = H_* x_*(t) + D_* d(t) \quad (2)$$

где $x_* \in R^k$ – вектор состояния размерности $k < n$, $F_*$, $G_*$, $J_*$, $H_*$, $C_*$ и $L_*$ – постоянные матрицы. Предполагается, что при отсутствии дефектов и возмущений выполняются равенства $x_*(t) = \Phi x(t)$ и $y_*(t) = R_* y(t)$ для некоторых матриц $\Phi$ и $R_*$, удовлетворяющих условиям

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad R_* H_* = H \Phi, \quad G_* = \Phi G, \quad C_* = \Phi C, \quad L_* = \Phi L, \quad D_* = R_* D.$$

Ниже предполагается, что $\Phi L = 0$; последнее означает существование модели, не чувствительной к возмущениям, когда возможна точная идентификация функции $d(t)$. Метод построения такой модели изложен в [5]. Для построения скользящего наблюдателя необходимо выполнить дополнительное условие $R_* D = 0$.

**Построение скользящего наблюдателя.** Скользящий наблюдатель строится на основе модели (2) и имеет вид

$$\dot{\hat{x}}_*(t) = F_* \hat{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + C_* \Psi(\hat{x}_*(t), y(t), u(t)) - J_* D v(t) - K e_y, \quad \hat{y}_*(t) = H_* \hat{x}_*(t), \quad (3)$$

где разрывная функция $v(t)$ ищется в виде

$$v(t) = g \frac{Q e_y(t)}{\left\| Q e_y(t) \right\| + \delta},$$

матрица $K$ выбирается так, чтобы $F_{**} = F_* - K H_*$ стала устойчивой матрицей, $e_y(t) = \hat{y}_*(t) - y_*(t) = \hat{y}_*(t) - R_* y(t)$ – ошибка по выходу; правила выбора матрицы $Q$ и скаляра $g$ обсуждаются ниже, $\delta$ – малое положительное число; предполагается, что $J_* D \neq 0$.

Введем ошибку по состоянию $e(t) = \hat{x}_*(t) - x_*(t)$; нетрудно видеть, что

$$e_y(t) = \hat{y}_*(t) - R_* y(t) = H_* \hat{x}_*(t) - R_* (Hx(t) + Dd(t)) = H_* \hat{x}_*(t) - R_* H x(t) - R_* D d(t),$$

а так как $R_* H = H_* \Phi$ и $R_* D = 0$, то $e_y(t) = H_* e(t)$.

Используя (2) и (3), запишем уравнение динамики ошибки $e(t)$:

$$\dot{e}(t) = F_* e(t) + J_* (y(t) - Hx(t)) - J_* D v(t) - K e_y(t) = F_{**} e(t) + J_* D (d(t) - v(t)). \quad (4)$$

Так как матрица $F_{**}$ устойчива, то для произвольной симметрической положительно определенной матрицы $W$ существует симметрическая положительно определенная матрица $P$ такая, что $F_{**}^{\mathrm{T}} P + P F_{**} = -W$. По аналогии с [4] предполагается, что существует матрица $Q$, удовлетворяющая условию

$$P J_* D = H_*^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}}, \quad (5)$$

скаляр $g$ выбирается из условия $g > \left\| d(t) \right\|$.

**Теорема**. Если $\lambda_{\min}(W) > 2N\left\| P \right\|$, а матрица $Q$ и скаляр $g$ выбраны указанным образом, то скользящее движение системы (4) асимптотически устойчиво.

Доказательство основано на анализе производной функции Ляпунова $V(t) = e^{\mathrm{T}}(t) P e(t)$.

Оценка функции $d(t)$ ищется в виде

$$\hat{d}(t) = g \frac{Q e_y(t)}{\left\| Q e_y(t) \right\| + \delta}.$$

**Пример.** Для иллюстрации изложенной теории рассмотрим задачу идентификации дефектов в датчиках следящего электропривода, описываемого моделью [6]

$$\dot{x}_1(t) = k_1 x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = k_2 x_3(t) + k_3 sign(x_2(t)) + \rho(t),$$
$$\dot{x}_3(t) = k_4 x_2(t) + k_5 x_3(t) + k_6 u(t),$$
$$y_1(t) = x_1(t) + d_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) + d_2(t).$$

Нетрудно видеть, что дефекты описываются матрицами

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что редуцированная модель, инвариантная к возмущению, имеет вид

$$\dot{x}_*(t) = -k_1 k_5 y_2(t) - k_1 k_6 u(t), \quad y_{*2}(t) = x_*(t),$$

где $x_*(t) = k_4 x_1(t) - k_1 x_3(t)$, при этом $R_* = (k_4 \quad -k_1)$. Так как $R_* D_1 \neq 0$ и $R_* D_2 \neq 0$, то условия построения скользящего наблюдателя не выполняются. Для преодоления этого затруднения предлагается ввести еще один датчик, измеряющий переменную $x_2$, т.е. $y_3(t) = x_2(t) + d_3(t)$. В этом случае можно построить две редуцированные модели и два скользящих наблюдателя, обладающих нужными свойствами.

Первая модель имеет следующий вид:

$$\dot{x}_*^1(t) = k_1 H_3 x(t), \quad y_*^1(t) = x_*^1(t).$$

где $x_*^1 = x_1$, $R_*^1 = (1 \quad 0 \quad 0)$, $J_*^1 = (0 \quad k_1 \quad 0)$. Нетрудно видеть, что $R_*^1 D_2 = 0$ и $R_*^1 D_3 = 0$, но переменная $y_3$ не входит в описание модели и не может быть идентифицирована. Так как $J_*^1 D_3 = k_1$ и $H_* = 1$, то согласно (5) можно принять $P = 1/k_1$, $Q = 1$. Скользящий наблюдатель описывается уравнениями

$$\dot{\hat{x}}_*^1(t) = k_1 y_2(t) - k_1 g_1 \frac{e_{y1}(t)}{\left\| e_{y1}(t) \right\| + \delta_1}, \quad \hat{y}_*^1(t) = \hat{x}_*^1(t),$$

где $e_{y1}(t) = \hat{y}_*^1(t) - y_*^1(t) = \hat{y}_*^1(t) - y_1(t)$, $g_1 > \left\| d_3(t) \right\|$, $\delta_1$ – малое положительное число [2]. Оценка функции $d_2(t)$ имеет вид

$$\hat{d}_3(t) = g_1 \frac{e_{y1}(t)}{\left\| e_{y1}(t) \right\| + \delta_1}.$$

Вторая модель описывается уравнениями

$$\dot{x}_*^2(t) = k_2 H_2 x(t) + k_3 sign(y_3(t)), \quad y_*^2(t) = x_*^2(t),$$

где $x_*^2 = x_2$, $R_*^2 = (0 \quad 1 \quad 0)$, $J_*^2 = (0 \quad k_2 \quad k_3)$. Так как $J_*^2 D_2 = k_3$ и $H_* = 1$, то согласно (5) можно принять $P = 1/k_3$, $Q = 1$. Скользящий наблюдатель имеет вид

$$\dot{\hat{x}}_*^2(t) = k_2 y_3(t) + k_3 sign(y_3(t)) - k_4 g_2 \frac{e_{y2}(t)}{\left\| e_{y2}(t) \right\| + \delta_2}, \quad \hat{y}_*^2(t) = \hat{x}_*^2(t),$$

где $e_{y2}(t) = \hat{y}_*^2(t) - y_*^2(t) = \hat{y}_*^2(t) - y_3(t)$, $g_2 > \left\| d_2(t) \right\|$. Оценка функции $d_3(t)$ дается выражением

$$\hat{d}_2(t) = g_2 \frac{e_{y2}(t)}{\left\| e_{y2}(t) \right\| + \delta_2}.$$

**Заключение.** В работе получено решение задачи идентификации дефектов в датчиках нелинейных технических систем при наложении ограничения $R_* D = 0$. Возможное направление дальнейших исследований – ослабление этого ограничения.

*Работа проводилась при поддержке гранта РНФ 16-19-00046-П.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уткин В.И.** Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
2. **Edwards C., Spurgeon S., Patton R.** Sliding Mode Observers for Fault Detection and Isolation. *Automatica*. 2000. Vol. 36. P. 541-553.
3. **Floquet T., Barbot J., Perruquetti W., Djemai M.** On the robust fault detection via a sliding mode observer. *International J. Control*. 2004. Vol. 77. P. 622–629.
4. **He J., Zhang C.** Fault reconstruction based on sliding mode observer for nonlinear systems. *Mathematical Problems in Engineering*. 2012. Vol. 2012. ID 451843. P. 1-22.
5. **Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е.** Методы диагностирования линейных систем на основе скользящих наблюдателей. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2019. № 6. С. 73–89.
6. **Зуев А.В., Филаретов В.Ф.** Особенности создания комбинированных позиционно-силовых систем управления манипуляторами. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2009. № 1. С. 154-162.

---

**A. Zhirabok, A. Zuev** (Far Eastern Federal University, Vladivostok; Institute of Marine Technology Problems, Vladivostok)
**Sensor fault identification of nonlinear technical systems**

*Abstract.* The method of sensor fault identification in nonlinear technical systems via sliding mode observers is considered. The suggested approach is based on the reduced order model of the original system having different sensitivity to faults and disturbance. This allows reducing complexity of the diagnostic system and relaxing the limitations imposed on the original system.

А. Л. ШЕСТАКОВ
(Южно-Уральский государственный университет, Челябинск)

А. В. КЕЛЛЕР
(Воронежский государственный технический университет, Воронеж)

# МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА СКОЛЬЗЯЩЕЙ СРЕДНЕЙ

*Теория оптимальных динамических измерений построена на использовании методов теории оптимального управления для нахождения динамически искаженного входного сигнала по наблюдаемому выходному сигналу. Модель измерительной системы содержит систему леонтьевского типа, начальное условие Шоуолтера–Сидорова. Инерционность измерительной системы, помехи приводят к искажению входного сигнала. Представлены численный метод использования цифрового фильтра скользящей средней к наблюдаемому сигналу с последующим применением метода оптимального динамического измерения, результаты вычислительных экспериментов.*

**Введение.** Задача восстановления динамически искаженного сигнала по наблюдаемому является основной задачей динамических измерений [1]. Для ее решения до недавнего времени в качестве основного математического аппарата использовались методы теории обратных задач. В последнее десятилетие создана [2] и активно развивается [3-5] теория оптимальных динамических измерений, она построена на синтезе методов оптимального управления, уравнений соболевского и леонтьевского типов, динамических измерений и автоматического управления. Использование методов теории автоматического управления к задачам динамических измерений предложено в [6]. В основе математической модели измерительной системы лежит система леонтьевского типа – конечномерный аналог уравнения соболевского типа [7]. В настоящее время разрабатываются методы теории оптимальных динамических измерений, основанные на развитии теории стохастических уравнений соболевского типа [8] и численных методов [9]. Предлагаемый доклад посвящен новому численному методу, в основе которого лежит использование цифрового фильтра скользящей средней к данным наблюдения с последующим применением сплайн-метода оптимальных динамических измерений. Представлены результаты вычислительных экспериментов и рекомендаций по использованию цифрового фильтра скользящей средней.

**Использование цифрового фильтра скользящей средней при решении задачи оптимального динамического измерения**

***Постановка основной задачи оптимального динамического измерения.*** Введем в рассмотрение пространства состояний $\aleph = \left\{ x \in L_2\left((0,\tau), \mathrm{R}^n\right) : \dot{x} \in L_2\left((0,\tau), \mathrm{R}^n\right) \right\}$, наблюдений $\Upsilon = C\left[\aleph\right]$ и измерений $\mathfrak{A} = \left\{ u \in L_2\left((0,\tau), \mathrm{R}^n\right) : u^{(p+1)} \in L_2\left((0,\tau), \mathrm{R}^n\right) \right\}$. Измерительное устройство моделируется системой [6]

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + D\eta, \end{cases} \tag{1}$$

и начальным условием Шоуолтера – Сидорова [2]

$$\left[ \left(\alpha L - A\right)^{-1} L \right]^{p+1} \left( x(0) - x_0 \right) = 0 \tag{2}$$

где $L$ и $A$ – квадратные матрицы порядка $n$ (отметим, что существуют измерительные системы такие, что $\det L = 0$ [7]), матрица $A$ – $(L; p)$-регулярна [3], $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ – вектор-функции состояний измерительной системы, наблюдаемого сигнала и входного сигнала соответственно, $x_0 \in \mathrm{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$, матрица $B$ характеризует взаимосвязь между входом системы и ее состоянием, матрицы $C$ и $D$ характеризуют взаимосвязь между состоянием системы и наблюдениями, $\eta(t)$ – вектор-функция помех на выходе измерительной системы.

В $\mathfrak{A}$ выделется замкнутое выпуклое множество допустимых измерений $\mathfrak{A}_\partial \subset \mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}_\partial = \left\{ u \in \mathfrak{A} : \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \le d \right\}. \quad (3)$$

Требуется найти такое $v \in \mathfrak{A}_\partial$ – оптимальное динамическое измерение – при котором достигается минимальное значение

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{A}_\partial} J(u) \quad (4)$$

функционала

$$J(u) = \sum_{q=1}^{1} \int_0^\tau \left\| y^{(q)}(u,t) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt, \quad (5)$$

где $y_0(t)$ , $t \in [0,\tau]$, – непрерывно-дифференцируемая функция (будем считать ее «реальным наблюдением») , построенная на основе наблюдаемых значений $Y_{0i}$ на выходе измерительной системы. Функционал качества отражает оценку близости реального наблюдения $y_0(t)$ $y_0(t)$и наблюдения $y(t)$, получаемого на основе математической модели измерительного устройства. Представленную задачу (1) – (5) будем называть основной задачей оптимальных динамических измерений.

***Алгоритм численного метода.*** Пусть заданы: матрицы, входящие в состав системы (1); начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n$; массив наблюдаемых значений $Y_{0i}$ в моменты времени $t_i$, $i$ = 0, 1,…, $n$ выходящего сигнала, причем $t_{i+1} - t_i = \delta$, $t_0 = 0$, $t_n = \tau$; $f_c$ – максимальная частота, которой ограничен спектр искомого входящего сигнала.

1. Определив вид цифрового фильтра скользящей средней, применим его к массиву значений $Y_{0i}$, в результате получим сглаженные значения $y_{0i}$, $i$ = 0, 1,…, $n$. При этом, как будет показано в вычислительных экспериментах, важно определение числа точек $N$, по которым проводится вычисление скользящей средней. Считая, что влияние помех на выходе нивелируется при сглаживании фтльтром, перейдем к решению задачи (1) – (5) при $D$=0.

2. Разобьем отрезок $[0,\tau]$ на $M$ отрезков $[\tau_{m-1},\tau_m]$, где $m$ = 1, 2,…, $M$, причем $t_0 = \tau_0 = 0$, $t_n = \tau_M$; На каждом отрезке $[\tau_{m-1},\tau_m]$ решаем задачу оптимального динамического измерения, при этом приближенное значение оптимального измерения $\hat{v}_m^\ell(t)$ находим в виде многочлена степени $\ell \le n - 1/M$. Основы алгоритма изложены в [3]. Важным в этом алгоритме является добавление условия $\hat{v}_m^\ell(\tau_m) = \hat{v}_{m+1}^\ell(\tau_m)$.

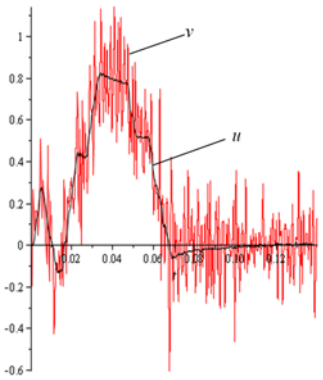



Рис. 1. Тестовый сигнал $u$ и оптимальное динамическое измерение $v$ без использования цифрового фильтра

3. Получив массив значений $\hat{v}^\ell(t_i)$ отображаем его графически. Кроме того, по этому массиву может быть построена интерполяционная функция $\tilde{v}(t)$.

***Вычислительные эксперименты.*** На стенде проведено испытание датчика Метран-43 с аналоговым электронным преобразователем. Результат реализации алгоритма без использования цифрового фильтра представлен на рисунке 1, $u$ – тестовый сигнал, фиксируемый контрольным датчиком (черная линия), $v$ – получаемый входящий сигнал (красная линия). Различия обусловлены помехами на выходе измерительного устройства и его инерционностью.

При проведении вычислительных экспериментов к массивы наблюдений применялись различные виды цифрового фильтра скользящей средней: 1) простая скользящая средняя (вид A); 2) взвешенная линейно-сглаженная скользящая средняя с возрастанием весовых коэффициентов к текущему значению, которое является наибольшим в совокупности $N$ точек (вид B); 3) взвешенная линейно-сглаженная скользящая средняя с уменьшением весовых коэффициентов к текущему значению, которое является наибольшим в совокупности $N$ точек (вид F); 4) взвешенная линейно-сглаженная скользящая средняя с увеличением весовых коэффициентов к текущему значению, которое является средним в совокупности $N$ точек (вид C). Кроме того рассматривались различные варианты значений $N$. В результате подтвердилась гипотеза о связи этой

величины со значением $f_c$ – максимальной частотой, которой ограничен спектр искомого входящего сигнала.

На рисунке 2 отражены результаты вычислительного эксперимента при *N*=10 для фильтра вида А. Очевидно снижение проявления помех с проявлением формы искомого сигнала. Отметим, что количество точек соответствует интервал, по которому вычисляется среднее значение и который является «аналогом» интервала дискретизации. Используя теорему Котельникова при известном $f_c$ = 250 Гц, определен интервал дискретизации Δ= 0,002. Но с учетом того, что по совокупности точек вычисляется среднее, увеличили этот интервал в 2 раза. Такому интервалу соответствует совокупность из 20 точек. Результаты вычислительных экспериментов при *N*=20 (по сравнению с результатами при *N*=10) при применении различных видов цифрового фильтра показали достижение меньшего значения динамической погрешности. При дальнейшем увеличении значения *N* погрешность стала увеличиваться за счет большего сглаживания и невозможностью отражать локальные пики входящего сигнала.

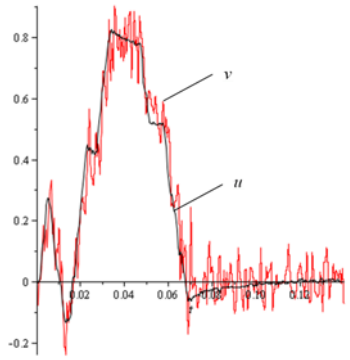



Рис. 2. Тестовый сигнал *u* и оптимальное динамическое измерение *v* с использованием цифрового фильтра взвешенной скользящей средней вида

Однако эксперименты показали, что большинство видов фильтра скользящей средней, за исключением вида С, с увеличением *N* в большей мере проявляет эффект запаздывания. Поэтому эффективным решением было осуществление сдвига на *m* точек влево: 1) при применении фильтра вида А $m\delta=\Delta$; 2) при применении фильтра вида В $m\delta\approx {}^{2\Delta}/_{3}$; 3) при применении фильтра вида F $m\delta\approx {}^{4\Delta}/_{3}$. На рисунке 3 отражены результаты вычислительного эксперимента при *N*=20 для фильтра вида В, на рисунке 4 – при *N*=20 для фильтра вида С.

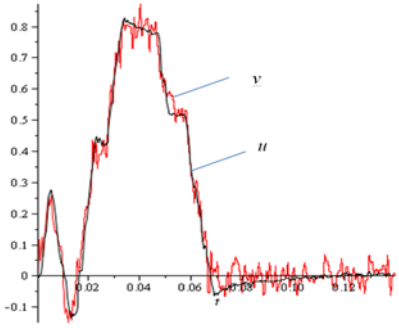



Рис. 3. Тестовый сигнал *u* и оптимальное динамическое измерение *v* с использованием цифрового фильтра взвешенной скользящей средней вида В

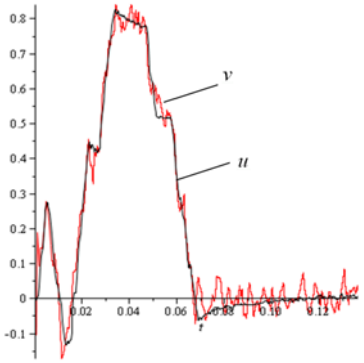



Рис. 4. Тестовый сигнал *u* и оптимальное динамическое измерение *v* с использованием цифрового фильтра взвешенной скользящей средней вида С

**Заключение.** Применение цифрового фильтра скользящего среднего к наблюдаемому сигналу при восстановлении динамически искаженного сигнала методом оптимального динамического измерения позволило сделать следующие выводы. Количество точек *N*, используемых в методе скользящей средней, должны принадлежать отрезку равному 2Δ, где $0 < \Delta \leq {}^{1}/_{2f_c}$, $f_c$ – максимальная частота, которой ограничен спектр искомого входного сигнала.

Меньшая динамическая погрешность достигается при использовании двух видов цифровых фильтров скользящей средней: 1) вида А, при этом для уменьшения эффекта запаздывания предлагается использовать сдвиг значений. 2) вида В.

В дальнейшем при аналогичной постановке задачи будут рассмотрены другие виды цифровых фильтров.

*Работа проводилась при поддержке гранта Минобрнауки РФ №FENU-2020-0022 (2020072ГЗ)*

ЛИТЕРАТУРА


1. Грановский В.А. Динамические измерения: теория и метрологическое обеспечение вчера и сегодня. *Датчики и системы.* 2016. № 3 (201). С. 57-72.
2. Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов, *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*, № 16(192), 2010, с. 116-120.
3. Шестаков А.Л., Келлер А.В., Назарова Е.И. Численное решение задачи оптимального измерения // *Автоматика и телемеханика*. 2012. № 1. С. 107-115.
4. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. *The optimal measurements theory as a new paradigm in the metrology. Journal of Computational and Engineering Mathematics.* 2020. Т. 7. № 1. С. 3-23.
5. Сагадеева М.А. Построение наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование.* 2019. Т. 12. № 2. С. 82-96.
6. **Шестаков А.Л.** Методы теории автоматического управления в динамических измерениях, Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2013. 257 с.
7. Khudyakov Yu.V. On mathematical modeling of the measurement transducers, *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, Т.3, № 3, 2016, с. 68-73.
8. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint initial-final value problems for dynamical sobolev-type equations in the space of noises. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2018. Т. 2018. С. 128.
9. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V., Khudyakov Y.V,, Zamyshlyaeva, A.A. Numerical investigation of optimal dynamic measurements. *Acta IMEKO.* 2018, 7 (2). С. 65-72


---

**A.V. Keller** (Voronezh State Technical University, Voronezh), **A.L. Shestakov** (South-Ural State University, Chelyabinsk)
**Optimal dynamic measurement method using a digital sliding medium filter**

*Abstract.* The theory of optimal dynamic measurements is based on the use of methods of the theory of optimal control to find the dynamically distorted input signal from the observed output signal. The measuring system model contains a Leontief-type system, the Showalter – Sidorov initial condition. Inertia of the measuring system, interference leads to distortion of the input signal. A numerical method for using a digital moving average filter for the observed signal with subsequent application of the method of optimal dynamic measurement, the results of computational experiments are presented.
Keywords: Leontief-type system, optimal control problem, mathematical model of measurement transducer, computational experiments

А. В. КЕЛЛЕР
(Воронежский государственный технический университет, Воронеж)

М.А. САГАДЕЕВА
(Южно-Уральский государственный университет, Челябинск)

# СХОДИМОСТЬ СПЛАЙН-МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ

*Задача оптимального динамического измерения заключается в нахождении динамически искаженного входного сигнала по наблюдению выходного как решения задачи оптимального управления. Эта задача имеет единственное решение. При сложной форме входного сигнала эффективными численными методами нахождения оптимального динамического измерения являются методы с использованием сплайнов. В докладе представлен алгоритм метода и показана его сходимость к точному решению.*

**Введение.** Задача оптимального динамического измерения является одной из математических постановок задачи восстановления динамически искаженного входного сигнала (измерения) по наблюдаемому. Задача оптимального динамического измерения сводится к задаче оптимального управления, в которой измерение понимается как управляющее воздействие, а функционал штрафа позволяет найти такое измерение, которое обеспечивает близость как наблюдаемого и моделируемого выходного сигнала, так и производных этих функций [1]. В теории оптимальных динамических измерений [2] значимым направлением развития является разработка эффективных численных методов [3,4]. Первоначально разработанные алгоритмы требовали больших вычислительных ресурсов или времени, поэтому в рамках развития существующих алгоритмов, было предложено использовать метод декомпозиции и сплайн функции. В данном докладе представлен сплайн-метод решения задачи оптимального динамического измерения и показана его сходимость

**Задача оптимального динамического измерения и сходимость сплайн-метода ее решения**

***Постановка задачи оптимального динамического измерения.*** Введем в рассмотрение пространства состояний $\aleph = \left\{ x \in L_2\left((0,\tau), \mathrm{R}^n\right) : \dot{x} \in L_2\left((0,\tau), \mathrm{R}^n\right) \right\}$, наблюдений $\Upsilon = C\left[\aleph\right]$ и измерений $\mathfrak{A} = \left\{ u \in L_2\left((0,\tau), \mathrm{R}^n\right) : u^{(p+1)} \in L_2\left((0,\tau), \mathrm{R}^n\right) \right\}$. Измерительное устройство модели-руется системой [5]

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

и начальным условием Шоуолтера – Сидорова [1]

$$\left[ \left(\alpha L - A\right)^{-1} L \right]^{p+1} \left( x(0) - x_0 \right) = 0 \tag{2}$$

где $L$ и $A$ – квадратные матрицы порядка $n$ (отметим, что существуют измерительные системы такие, что $\det L = 0$ [6]), матрица $A$ – $(L; p)$-регулярна [2], $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ – вектор-функции состояний измерительной системы, наблюдаемого сигнала и входного сигнала соответственно, $x_0 \in \mathrm{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$, матрица $B$ характеризует взаимосвязь между входом системы и ее состоянием, матрица $C$ – взаимосвязь между состоянием системы и наблюдениями.

В $\mathfrak{A}$ выделется замкнутое выпуклое множество допустимых измерений $\mathfrak{A}_\partial \subset \mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}_\partial = \left\{ u \in \mathfrak{A} : \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \le d \right\}. \tag{3}$$

Требуется найти такое $v \in \mathfrak{A}_\partial$ – оптимальное динамическое измерение – при котором достигается минимальное значение

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{A}_\partial} J(u) \tag{4}$$

функционала

$$J(u)=\sum_{q=1}^{1}\int_{0}^{\tau}\left\|y^{(q)}(u,t)-y_0^{(q)}(t)\right\|^2 dt\,, \tag{5}$$

где $y_0(t)$ , $t\in[0,\tau]$, – непрерывно-дифференцируемая функция (будем считать ее «реальным наблюдением»), построенная на основе либо наблюдаемых дискретных значений $Y_{0i}$ в узловых точках $t_i$ на выходе измерительной системы, либо сглаженных цифровыми фильтрами наблюдаемых дискретных значений $y_{0i}$ в узловых точках $t_i$ .

**Теорема 1**.[2]. Пусть $L$ и $A$ – квадратные матрицы порядка $n$, матрица $A$ – ($L$; $p$)-регулярна, причем $\det A\neq 0$. Тогда для любого $x_0\in \mathrm{R}^n$ существует единственное решение $v\in\mathfrak{A}_\partial$ задачи (1) – (5), являющееся оптимальным динамическим измерением, причем $x(v)\in\aleph$ удовлетворяет системе (1) при начальном условии (2) и имеет вид

$$x(t)=\lim_{k\to\infty}x_k(t)=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{q=0}^{p}\left(A^{-1}\left(\left(kL_k^L(A)\right)^{p+1}-\mathbb{I}_n\right)L\right)A^{-1}\left(\mathbb{I}_n-\left(kL_k^L(A)\right)^{p+1}\right)(Bu)^{(q)}+\right.$$

$$\left.+\left(\left(L-\frac{t}{k}A\right)^{-1}L\right)^k x_0+\int_0^t\left(\left(L-\frac{t-s}{k}A\right)^{-1}L\right)^k\left(L-\frac{t-s}{k}A\right)^{-1}\times\left(kL_k^L(A)\right)^{p+1}Bu(s)\,ds\right], \tag{6}$$

где $\lim\left(kL_k^L(A)\right)^{p+1}$ – проектор, $L^L(A)$ – левая резольвента оператора $A$ [2].

Будем искать оптимальное измерение в виде $u^\ell=col\left(\sum_{j=1}^{\ell}a_{1j}t^j,\sum_{j=1}^{\ell}a_{2j}t^j,,\ldots,\sum_{j=1}^{\ell}a_{nj}t^j\right),$, а учитывая (6), получим

$$J_k(v_k^\ell)=\min J_k(u^\ell)=\min\sum_{q=1}^{1}\int_0^\tau\left\| \quad {}_k^{(q)}(\ ^\ell,\ )-\ {}_0^{(q)}(\ )\right\|^2 \tag{7}$$

Таким образом, парой $(v_k^\ell,x_k^\ell)=(v_k^\ell,x_k(v^\ell))$ будем обозначать приближенное решение задачи оптимального динамического измерения, если помимо оптимального динамического измерения будем искать и приближенное состояние системы.

Справедлива следующая

**Теорема 2**.[7]. Пусть матрица $A$ – ($L$; $p$)-регулярна, причем $\det A\neq 0$, $p\in\{0\}\cup\boldsymbol{N}$, функционал (5) является сильно выпуклой функцией на компактном и выпуклом множестве $\mathfrak{A}_\partial\subset\mathfrak{A}$ . Тогда $J_k(v_k^\ell)\to J(v)$, $v_k^\ell\to v$ при $k\geq K$ и $\ell>p$ и существует $T$>0, что выполняется неравенство

$$T\left\|v_k^\ell-v\right\|^2\leq J_k(v_k^\ell)-J(v)\,.$$

***Алгоритм сплайн-метода и его сходимость.*** Пусть заданы: матрицы, входящие в состав системы (1); начальное значение $x_0\in\mathrm{R}^n$; массив наблюдаемых значений $Y_{0i}$ в узловых точках $t_i$, $i$ = 0, 1,…, $n$ выходящего сигнала, причем $t_{i+1}-t_i=\delta$, $t_0=0$, $t_n=\tau$.

1. Разобьем отрезок $[0,\tau]$ на $M$ отрезков $[\tau_{m-1},\tau_m]$, где $m$ = 1, 2,…, $M$, причем $t_0=\tau_0=0$, $t_n=\tau_M$;

2. На каждом отрезке $[\tau_{m-1},\tau_m]$ строим интерполяционную функцию $y_{0m}^\ell(t)$ в виде многочлена степени $\ell\leq(n-1)/M$.

3. Последовательно для $m$ = 1, 2,…, $M$ на $[\tau_{m-1},\tau_m]$ решаем задачу оптимального динамического измерения (1)-(5) при $u\in\mathfrak{A}_{\partial m}$, где $\mathfrak{A}_{\partial m}\subset\mathfrak{A}_\partial$ – замкнутое выпуклое подмножество $\mathfrak{A}_\partial$. Приближенное значение оптимального измерения $v_{km}^\ell(t)$ находим в виде многочлена степени $\ell$ , налагая условие непрерывности

$$v_{km}^\ell(\tau_m)=v_{k,m+1}^\ell(\tau_m) \tag{8}$$

4. В результате получаем непрерывную на $[0,\tau]$ сплайн-функцию $\tilde{v}_k^{\ell}(t)=\bigcup_m v_{km}^{\ell}(t)$.

Сходимость сплайн-функции $\tilde{v}_k^{\ell}(t)$ к точному решению $\tilde{v}(t)$ задачи (1)-(5) на $[0,\tau]$ следует из:

1) сходимости интерполяционного процесса при построении сплайн-функции $\tilde{y}_0^{\ell}(t)=\bigcup_m y_{0m}^{\ell}(t)$, т.е. при $M\to\infty$ $\left\|\tilde{y}_0^{\ell}(t)-y_0(t)\right\|\to 0$;
2) сходимости приближенного решения $v_{km}^{\ell}(t)$ к точному $v_m(t)$ на отрезке $[\tau_{m-1},\tau_m]$ при $m$ = 1, 2,…, $M$ на основании теоремы 2;
3) непрерывности сплайн-функции $\tilde{v}_k^{\ell}(t)$ на $[0,\tau]$, получаемой при выполнении условия (8).

**Заключение.** В докладе представлен сплайн-метод решения задачи оптимального динамического измерения и показана его сходимость. В дальнейшем будет исследована возможность применения метода сплайн-коллокации для решения задачи оптимального динамического измерения.

В дальнейшем при аналогичной постановке задачи будут рассмотрены другие виды цифровых фильтров.

*Работа проводилась при поддержке гранта Минобрнауки РФ №FENU-2020-0022 (2020072ГЗ)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов, *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*, № 16(192), 2010, с. 116-120.
2. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. *The optimal measurements theory as a new paradigm in the metrology. Journal of Computational and Engineering Mathematics.* 2020. Т. 7. № 1. С. 3-23.
3. Шестаков А.Л., Келлер А.В., Назарова Е.И. Численное решение задачи оптимального измерения // *Автоматика и телемеханика*. 2012. № 1. С. 107-115.
4. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V., Khudyakov Y.V,, Zamyshlyaeva, A.A. Numerical investigation of optimal dynamic measurements. *Acta IMEKO*. 2018, 7 (2). С. 65-72
5. **Шестаков А.Л.** Методы теории автоматического управления в динамических измерениях, Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2013. 257 с.
6. Khudyakov Yu.V. On mathematical modeling of the measurement transducers, *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, Т.3, № 3, 2016, с. 68-73.
7. Свиридюк Г.А., Келлер А.В. О сходимости численного решения задач оптимального управления для систем уравнений леонтьевского типа. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические наукию 2011. № 2(23). С.24 – 33.

---

**A.V. Keller** (Voronezh State Technical University), **M.A. Sagadeeva** (South-Ural State University, Chelyabinsk). **Convergence of the spline method for solving the optimal dynamic measurement problem**

*Abstract.* The problem of optimal dynamic measurement is to find a dynamically distorted input signal by observing the output signal as a solution to the optimal control problem. This problem has only one solution. With a complex input signal, spline methods are effective numerical methods for finding the optimal dynamic measurement. The report presents the algorithm of the method and shows its convergence to the exact solution

А. А. ГАЛЯЕВ, А. С. САМОХИН, М. А. САМОХИНА
(Институт Проблем Управления им. В. А. Трапезникова РАН;
Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова)

# О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ РАССТАНОВКИ ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

*Рассматривается задача оптимизации расстановки обнаружителей в конфликтной среде для противодействия уклоняющемуся объекту. Для этого решается вспомогательная задача построения локально оптимальных путей на плоскости при заданной конфигурации обнаружителей. Приводится методика решения обеих задач и результаты численного моделирования для случая 2 обнаружителей.*

**Введение.** В последнее время в классе задач управления подвижными объектами в конфликтной среде (см. [1] и библиографию к ней) проявляется интерес к нетрадиционным критериям, таким, как повышение скрытности при движении в конфликтной среде с учетом карты потенциальных рисков-угроз [2], вместо традиционных подходов минимизации времени или затрат энергоресурсов. В литературе рассматриваются задачи уклонения подвижного объекта от конфликтующих объектов, представленных обнаружителями: сенсорами и детекторами. При этом предполагается, что местоположение угрозы и её воздействие подвижному объекту известны, и выбор его маршрута и параметров движения осуществляется таким образом, чтобы минимизировать негативное воздействие конфликтной среды. Например, в работах [3-4] получены аналитические решения для оптимальных режимов скорости движения в задачах с одним сенсором в плоских постановках. А в работе [1] численно смоделированы решения для оптимальных режимов скорости в задачах с несколькими конфликтующими объектами на основе алгоритма Дейкстры.

В связи с широким применением беспилотных аппаратов для предотвращения несанкционированного доступа на охраняемую территорию интересна обратная задача: оптимизация расстановки в охраняемой области сенсоров таким образом, чтобы уменьшить скрытность уклоняющегося объекта. Несмотря на актуальность, в опубликованных работах по задаче построения карты оптимального расположения нескольких сенсоров рассматривался только случай, когда наблюдатели обладают некоторым конусом обзора, в котором они фиксируют объект.

В настоящей работе рассматривается плоская задача расстановки сенсоров с равномерно распространяющимися круговыми полями обнаружения для противодействия уклоняющемуся объекту. А также в качестве вспомогательной рассматривается задача построения локально оптимальных путей в конфликтной среде, представленной фиксированным количеством сенсоров. Предполагается, что отношение сигнал/помеха на входах приемных систем сенсоров мало в течение всего времени движения объекта по маршруту, поэтому оптимизируется интегральный функционал, называемый риском [5].

**Постановка задачи.** Рассматривается задача расстановки некоторого заранее определенного количества $N$ неподвижных сенсоров – точек $L_i$ на плоскости. По данной плоскости из одной фиксированой точки в другую за фиксированное время $T < \infty$ должна переместиться материальная точка $M$, управление которой осуществляется величиной и направлением вектора скорости $v$. Точка $M$ перемещается от точки $S$ до точки $F$, точки $L_i$ разрешается размещать внутри некоторого прямоугольника, расположенного между точками $S$ и $F$.

Материальная точка управляется так, чтобы минимизировать функционал: $I = \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}_i^2} \right) \mathrm{d}t$, зависящий от величины вектора скорости точки v, расстояний до каждого из сенсоров $r_i$ и весовых коэффициентов влияния $q_i$ сенсоров $L_i$. Расположение точек $L_i$ должно максимизировать глобальный минимум по всевозможным путям при фиксированных точках $L_i$ описанного выше функционала.

**Метод решения.** Для решения задачи расстановки вводится прямоугольная сетка, в узлах которой располагаются сенсоры. Для каждого возможного расположения сенсоров решается

вспомогательная задача о нахождении оптимальных путей и запоминается лучшее значение функционала $I$, которого может добиться уклоняющийся объект.

***Вспомогательная задача.*** При решении задачи поиска лучшего маршрута для заданного расположения сенсоров без ограничения общности считается, что уклоняющийся объект перемещается из точки (0, 0) в точку с координатами (0, 1).

Данная задача исследуется с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина. На основе анализа системы необходимых условий оптимальности [6] решение исходной задачи минимизации сводится к решению краевой задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\frac{p_x}{\|p\|},\ \dot{p}_x = -\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{v^2\cdot 2(x-a_i)}{((x-a_i)^2+(y-b_i)^2)^2}, \\ \dot{y} = v\frac{p_y}{\|p\|},\ \dot{p}_y = -\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{v^2\cdot 2(y-a_i)}{((x-a_i)^2+(y-b_i)^2)^2}, \\ x(0)=0,\ y(0)=0,\ x(T)=0, y(T)=1, \end{cases} \text{где } \mathrm{v} = \min\left( \frac{\|p\|}{\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}}, \mathrm{v}_{\max} \right), \quad (1)$$

где $(x,\ y)$ – координаты уклоняющегося объекта, $(a_i,\ b_i)$ – координаты $i$-го сенсора, $p_x$ и $p_y$ – сопряжённые переменные, $\|p\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$. Для решения краевой задачи (1) применяется метод стрельбы [7] по двум параметрам, – координатам вектора $(p_x(0),\ p_y(0))$, сонаправленному вектору скорости в начальный момент времени, с использованием модифицированного метода Ньютона. Серия задач Коши в методе Ньютона решается численно явным методом Рунге-Кутты 8-го порядка DOPRI8, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса с автоматическим выбором шага за счёт контроля максимально допустимой локальной погрешности на шаге при помощи сравнения результатов интегрирования на текущем отрезке методами 7 и 8 порядка точности. Авторами реализован соответствующий программный комплекс на языке C для построения экстремалей Понтрягина.

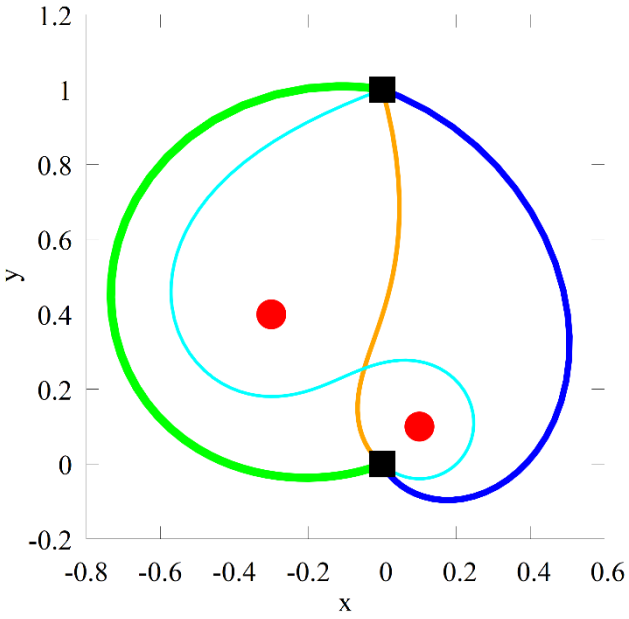



Рис. 1. Локально оптимальные маршруты в случае двух сенсоров с координатами (0,1, 0,1) и (-0,3, 0,4) – обозначены красными точками, без полных оборотов вокруг обнаружителей, $\mathrm{v}_{\max} = 2$, $T = 1{,}5$. Чёрными квадратами обозначены точки старта и финиша уклоняющегося объекта. Более жирной траектории соответствует лучшее значение функционала.

В качестве примера на Рис. 1 приводятся локально-оптимальные пути для задачи построения маршрутов уклонения от двух сенсоров.

**Результаты.** Задача расстановки сенсоров решалась для $N$ = 1, 2, 3 с ограничением на максимальную скорость v. В результате численного моделирования построены карты оптимального расположения сенсоров, выписаны лучшие по функционалу решения, проведены параметрические исследования. В качестве примера далее приводятся результаты для $N$ = 2.

Таблица 1

**Найденные экстремали**

| № | $J$ | $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ | № | $J$ | $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ | № | $J$ | $x_1$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1132,9 | 0 | 0,1 | 0 | 0,9 | 4 | 666,4 | -0,1 | 0,9 | 0 | 0,1 | 7 | 666,3 | -0,1 | 0,1 |
| 2 | 747,4 | 0 | 0,9 | 0 | 0,9 | 5 | 666,4 | 0 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 8 | 650,7 | 0 | 0,1 |
| 3 | 747,4 | 0 | 0,1 | 0 | 0,1 | 6 | 666,3 | 0 | 0,9 | 0,1 | 0,1 | 9 | 650,7 | 0 | 0,2 |

В Таблице 1 приведены 9 лучших значений функционала $J$, не меньших 600, и соответствующие им расположения 2 сенсоров на заданной сетке с шагами 0.1 по $x$ и по $y$, где $J$ – наименьшее возможное значение функционала $I$ уклоняющегося объекта при фиксированной конфигурации. В первой колонке приводится $J$ для данного расположения сенсоров, далее координаты $(x_1, y_1)$ первого сенсора и $(x_2, y_2)$ второго сенсора.

Из Таблицы 1 видно, что оптимальным решением в случае двух сенсоров оказалось расположить один сенсор максимально близко к точке старта, другой – к точке финиша. Второе по величине функционала решение – расположить оба сенсора либо рядом со стартом, либо рядом с финишем. На Рис. 2 приведены лучшие значения функционала $J$ для всевозможных расположений одного из сенсоров, если координаты второго сенсора заданы. Более высоким точкам на графике соответствуют более выгодные расположения сенсора в исходной задаче.

Рис. 2. Зависимость функционала $J(x_1, y_1)$ от расположения одного сенсора, при этом координаты второго сенсора $(x_2, y_2)$ могут принимать любые значения

**Заключение.** В работе рассмотрена задача оптимизации расстановки сенсоров с равномерно распространяющимися круговыми полями обнаружения в конфликтной среде для противодействия уклоняющемуся объекту. В качестве результатов для случая двух сенсоров описано их лучшее расположение, приводится его сравнение со следующими по функционалу решениями, а также карта возможных расположений второго сенсора, если расположение первого сенсора задано.

Для решения вспомогательной задачи планирования маршрута в конфликтной среде на плоскости разработана методика на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина, которая позволяет численно строить карты локально-оптимальных путей для заданных конфигураций сенсоров и находить лучшее возможное значение функционала. Реализован соответствующий программный комплекс на языке С для построения экстремалей.

В качестве развития задачи возможно рассмотреть сенсоры с более сложными моделями полей, произвести расчёты на более мелких сетках с использованием градиентных методов, рассмотреть исходную задачу как задачу максимина, а также упрощенную модель построения путей с дискретизацией задачи для ускорения вычислений.

*Работа выполнена при поддержке программы президиума РАН №7.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамянц Т.Г., Галяев А.А., Маслов Е.П., Рудько И.М., В.П. Яхно. Уклонение подвижного объекта в конфликтной среде от обнаружения системой разнородных наблюдателей. *Управление подвижными объектами и навигация.* 2015. № 2. С. 31–37.
2. Dogan A., Zengin U. Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2006. V. 29. № 4. P. 723-732.
3. Галяев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде. *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2009. № 3. С. 134–140.
4. Галяев А.А., Маслов Е.П. Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружения. *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2010. № 4. С. 52–62.
5. Сысоев Л.П. Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде. *Проблемы управления*. 2010. № 6. С. 65–72.
6. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
7. **Григорьев И.С.** Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005. 159 с.

**A.A. Galyaev, A.S. Samokhin, M.A. Samokhina** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences; Lomonosov Moscow State University). **On the problem of the optimal placing of detectors on the plane**

*Abstract.* The problem of the placement of detectors optimizing in a threat environment for countering an evading object is considered. The auxiliary problem of locally optimal paths on the plane constructing is solved for a given configuration of detectors. A method for solving both problems and the results of numerical simulations for 2 detectors case are presented.

А.Л. ШЕСТАКОВ, С.А. ЗАГРЕБИНА, М.А. САГАДЕЕВА
(Южно-Уральский государственный университет, Челябинск)

# МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ОПТИМАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ, ИСКАЖЕННОГО ИНЕРЦИОННОСТЬЮ, РЕЗОНАНСАМИ И ДЕГРАДАЦИЕЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

*Задача оптимального динамического измерения применяется для восстановления искаженного различными помехами сигнала. Основой теории таких задач является задача оптимального управления решениями системы леонтьевского типа. А именно, с помощью минимизации разницы между моделируемым и реальным значениями сигнала можно восстановить воздействие, соответствующее данным натурного эксперимента. Данный доклад посвящен описанию метода построения численных приближений точного решения задачи оптимального динамического измерения.*

*Ключевые слова: система леонтьевского типа, задача оптимального управления, математическая модель измерительного устройства, формула численного решения.*

**Введение.** В теории динамических измерений одной из наиболее значимых проблем является задача восстановления измеряемого сигнала по наблюдаемым данным [1]. Одним из традиционных методов решения этой задачи являются методы, основанные на теории обратных задач. При этом используется преобразование для перехода к частотному описанию данных, а обратный переход сопряжен с различными трудностями, которые и преодолеваются методами теории обратных задач. Также при решении этой задачи широко используются методы теории автоматического управления (см., например, [2]).

На основе модели для описания измерительного устройства (ИУ), построенной методами теории автоматического управления, в последнее время была создана [3] и активно развивается теория оптимальных динамических измерений (см., например, [4–6]). Основой этой теории является задача оптимального управления решениями системы леонтьевского типа. Этот подход позволяет решать задачу без дополнительных преобразований. А именно, в этой теории модель ИУ описывается в виде системы леонтьевского типа и для нее решается задача оптимального управления решениями этой системы для минимизации разницы между виртуальным наблюдением, которое получено в ходе вычислительного эксперимента, и реальным наблюдением, построенное по экспериментальным данным. Найденный таким образом оптимум называют оптимальным динамическим измерением. К настоящему времени в рамках теории оптимальных динамических измерений исследованы случаи, когда измерение искажено инерционностью измерительного устройства [5], резонансами в его цепях [7] или его деградацией [8]. В настоящем докладе описывается метод численных приближений оптимального динамического измерения при искажении всеми тремя помехами одновременно.

**Метод построения численных приближений оптимального динамического измерения.**

***Постановка задачи оптимального динамического измерения.*** Введем в рассмотрение пространство состояний $X = \left\{x \in L_2(0,\tau;R^n) : \dot{x} \in L_2(0,\tau;R^n)\right\}$, пространство измерений $U = \left\{u \in L_2(0,\tau;R^n) : u^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;R^n\right\}$ и $Y = N[X]$ – пространство наблюдений при некотором фиксированном $\tau > 0$. В качестве части математической модели ИУ будем рассматривать неоднородную нестационарную систему леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Du(t), \tag{1}$$

$$y(t) = b(t)Nx(t) + Fu(t), \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор-функции измерений и наблюдений ИУ соответственно; $n$ – число параметров состояния системы; $L$ и $M$ – квадратные матрицы порядка $n$, представляющие собой взаимовлияние скоростей изменения

состояния и собственно состояния ИУ, при этом матрица $M$ $(L,p)$-регулярна [5,8]. Скалярные функции $a,b:(0,\tau)\to R_+$ описывают изменение во времени параметров системы этих взаимовлияний (в частности, они могут описывать снижение чувствительности ИУ, т.е. деградацию ИУ); квадратные матрицы $D$ и $N$ порядка $n$, характеризуют взаимовлияние параметров измерения и связь между состоянием системы и наблюдением соответственно.

Дополним систему (1), (2) начальным условием Шоуолтера–Сидорова [9]

$$\left[R_\alpha^L(M)\right]^{p+1}\left(x(0)-x_0\right)=0, \tag{3}$$

где $R_\alpha^L(M)=(\alpha L-M)^{-1}L$ – правая $L$-резольвента матрицы $M$, $\alpha$ – комплексный параметр для которого обратная матрица $(\alpha L-M)^{-1}$ существует, $x_0$ – некоторый заданный вектор из $R^n$. Главной частью математической модели ИУ является функционал штрафа

$$J(u)=\varepsilon\int_0^\tau\left\|y(t)-\tilde{y}(t)\right\|^2dt+(1-\varepsilon)\int_0^\tau\left\langle Cx(t),x(t)\right\rangle dt, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – норма и скалярное произведение в $R^n$; $\tilde{y}=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_n)$ – наблюдение, полученное в ходе натурного эксперимента; $x(t)$ и $y(t)$ линейно зависят от $u(t)$. Минимизируя первое слагаемое функционала (4) мы минимизируем воздействие инерционности ИУ на измерение. А минимизируя второе слагаемое, мы снижаем воздействие резонансов в цепях ИУ. Здесь квадратная симметрическая матрица $C$ порядка $n$ характеризует взаимовлияние резонансов в цепях ИУ. Параметр $\varepsilon\in(0,1]$ выбирается в соответствии с целями исследования. При этом при $\varepsilon=1$ резонансы в цепях измерительного устройства учитываться не будут.

Выделим в $U$ замкнутое и выпуклое подмножество $U_\partial$ – множество допустимых измерений. Требуется найти оптимальное измерение $v\in U_\partial$ такое, что выполняется

$$J(v)=\min_{u\in U_\partial}J(u). \tag{5}$$

Задача (1)–(5) называется *задачей оптимального динамического измерения*, ее решение позволяет восстановить измерение $v\in U_\partial$, соответствующее результатам наблюдений $\tilde{y}$. Найденное $v\in U_\partial$ будем называть точным решением задачи (1)–(5) или точным оптимальным динамическим измерением. Существование точного оптимального динамического измерения $v$ обосновывается в [10].

***Приближения решения задачи оптимального динамического измерения.*** Построение приближений решения задачи (1)–(5) проводится в несколько этапов.

На первом этапе заменим пространство управлений $U$ на конечномерное подпространство $U^\ell$ вектор-многочленов вида

$$u^\ell(t)=col\left(\sum_{r=0}^{\ell}\tilde{c}_{1r}t^r,\sum_{r=0}^{\ell}\tilde{c}_{2r}t^r,\ldots,\sum_{j=0}^{\ell}\tilde{c}_{nr}t^r\right),\qquad \ell>p. \tag{6}$$

Ясно, что $U=\bigcup_{\ell=0}^{\infty}U^\ell$. На втором этапе заменим семейства разрешающих матриц [11] уравнения (1) на их приближения, сходимость которых следует из общей теории уравнений соболевского типа [12], конечномерным аналогом которых являются системы леонтьевского типа. Наконец, на третьем этапе заменим все операции интегрирования и дифференцирования на их численные аналоги. А именно, для вычисления приближения значения функционала (3) зафиксируем количество узлов $m$ квадратурной формулы Гаусса, найдем узлы $\tau_j$ и веса $w_j$ для этой формулы на отрезке $[0,\tau]$. В результате получим

$$J_{km}(u^{\ell}) = \frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{m}\left[\varepsilon\left\|y_{\ell km}(\tau_j) - \tilde{y}(\tau_j)\right\|^2 + (1-\varepsilon)\left\langle Cx_{\ell km}(\tau_j), x_{\ell km}(\tau_j)\right\rangle\right]w_j, \qquad (7)$$

где $y_{\ell km}(\tau_j) = b(\tau_j)Nx_{\ell km}(\tau_j) + Fu^{\ell}(\tau_j)$, а

$$x_{\ell km}(\tau_j) = \frac{\tau_j}{2}\sum_{i=0}^{j}\left[\left(\left(L - \frac{\tau_j - \tau_i}{2k}\sum_{r=0}^{j-i}a(s_r)\varpi_r M\right)^{-1}L\right)^k\left(L - \frac{1}{k}M\right)^{-1}\left(kL(L-kM)^{-1}\right)^k u^{\ell}(\tau_j)\right]w_j +$$

$$+\sum_{q=0}^{p}\left(M^{-1}L\right)^q M\left(\left(kL(L-kM)^{-1}\right)^k - E_n\right)\left(\frac{m}{\tau}\right)^q\sum_{\iota=-r}^{\nu}d_{q\iota}A_q\left(\tau_j + \iota\frac{\tau}{m}\right).$$

Здесь $E_n$ – единичная квадратная матрица порядка $n$; $s_r$ и $\varpi_r$ $(r = 0,\ldots,j-i)$ – узлы и веса квадратурной формулы Гаусса на отрезке $[\tau_i,\tau_j]$, $d_{q\iota}$ – коэффициенты формулы численного дифференцирования порядка точности $\left(\frac{m}{\tau}\right)^{\tilde{r}}$ $(r \le \iota \le \nu,\ r+\nu+1 = q+\tilde{r})$, а значения вектор-функции $A_q : [0,\tau] \to R^n$ специальным образом строятся по значениям функции $a(t)$ и вектор-функции $Du^{\ell}(t)$.

Для нахождения приближения оптимального динамического измерения возьмем множество $U_{\partial}^{\ell}$ такое, что для $u^{\ell} \in U_{\partial}^{\ell}$ выполняется неравенство $\left\|u^{\ell}\right\| < R$ $(R > 0)$. Далее, на этом множестве будем искать $v_{\ell km} \in U_{\partial}^{\ell}$ как решение задачи

$$J(v_{\ell km}) = \min_{u \in U_{\partial}^{\ell}} J_{km}(u^{\ell})$$

с функционалом вида (7) по коэффициентам вектор-функции (6). В результате получим приближение оптимального динамического измерения в виде

$$v_{\ell km}(t) = col\left(\sum_{r=0}^{\ell}c_{1r}t^r, \sum_{r=0}^{\ell}c_{2r}t^r, \ldots, \sum_{r=0}^{\ell}c_{nr}t^r\right)$$

Для этого приближения $v_{\ell km}$ выполняется $\lim\limits_{\ell\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} v_{\ell km} = v$.

**Заключение.** Применение описанного метода построений приближений оптимального динамического измерения позволяет упростить алгоритмы численного решения, так как был упрощен вид функционала (3). При этом теперь возможно, что найденное приближение может не является решением задачи (1)–(3), но при этом является приближением точного решения задачи оптимального динамического измерения.

*Работа проводилась при поддержке гранта Минобрнауки РФ №FENU-2020-0022 (2020072ГЗ)*

ЛИТЕРАТУРА


1. **Грановский В.А.** Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 224 с.
2. **Шестаков А.Л.** Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2013. 257 с.
3. Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов. *Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование.* 2010. № 16 (192). С. 116–120.
4. Шестаков А.Л., Келлер А.В., Назарова Е.И. Численное решение задачи оптимального измерения. *Автоматика и телемеханика.* 2012. № 1. С. 107–115.
5. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. The Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics.* 2014. Vol. 1. № 1. P. 3–15.

6. Shestakov A.L., Sagadeeva M.A., Manakova N.A., Keller A.V., Zagrebina S.A., Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A. Optimal Dynamic Measurements in presence of the random interference. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 1065. № 21. ID 212012.
7. **Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V.** The numerical algorithms for the measurement of the deterministic and stochastic signals. *Semigroups of Operators – Theory and Applications (SOTA 2013). Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. Vol. 113. Cham: Springer, 2015. P. 183–195.
8. Sagadeeva M.A. Mathematical bases of Optimal Measurements Theory in nonstationary case. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. 2016. Vol. 3. № 3. P. 19–32.
9. Келлер А.В., Загребина С.А. Некоторые обобщения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей соболевского типа. *Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование*. 2015. Т. 8. № 2. С. 5–23.
10. Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. The Optimal Measurements Theory as a new paradigm in the metrology. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. 2020. Vol. 7. №. 1. P. 3–23.
11. **Keller A.V., Sagadeeva M.A.** Degenerate matrix groups and degenerate matrix flows in solving the optimal control problem for dynamic balance models of the Economy. *Semigroups of Operators – Theory and Applications (SOTA 2018). Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. Vol. 325. Cham: Springer, 2020. P. 263–277.
12. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator. Utrecht – Boston: VSP, 2003. 216 p.

---

**A.L.Shestakov, S.A.Zagrebina, M.A.Sagadeeva** (South Ural State University, Chelyabinsk). **Method for constructing numerical approximations of Optimal Dynamic Measurement distorted by inertia, resonances, and degradation of the measurement transducer**

*Abstract.* The problem of optimal dynamic measurement is used to restore the signal distorted by various interference. The basis of the theory of such problems is the optimal control problem of a Leontief-type system solutions. Namely, by minimizing the difference between the simulated and real values of the signal, it is possible to restore the effect corresponding to the data of the field experiment. This report describes a method for constructing numerical approximations of the exact solution of the optimal dynamic measurement problem.

.