

В. Ф. КАНУШИН, И. Г. ГАНАГИНА, Д. Н. ГОЛДОБИН

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОТ КВАЗИГЕОИДА НА ЛОКАЛЬНЫХ УЧАСТКАХ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ РАЗЛОЖЕНИЯ В ОБОБЩЕННЫЙ РЯД ФУРЬЕ

Рассматриваются два способа моделирования дискретно заданных высот квазигеоида (ВКГ) на локальном участке земной поверхности с помощью обобщенных рядов Фурье. Первый способ опирается на метод моделирования характеристик гравитационного поля Земли (ГПЗ) на плоскости и предполагает использование двумерного преобразования Фурье по ортонормированной системе тригонометрических функций. Вторым – разложения высот квазигеоида в ряд Фурье по ортонормированной системе сферических функций на локальном участке земной поверхности. Проанализированы погрешности аппроксимации полученных дискретных значений высот квазигеоида на локальной территории. Показано, что при современном уровне вычислительной техники наиболее точным и технологически простым способом моделирования высот квазигеоида на локальных участках является их разложение в ряд Фурье по ортонормированной системе сферических функций.

Ключевые слова: высота квазигеоида, аппроксимация, интерполирование, сферический гармонический анализ, тригонометрические функции, обобщенный ряд Фурье, локальный участок, сфера.

Введение

Изучение гравитационного поля Земли (ГПЗ) играет важную роль в решении научных и практических проблем геодезии, геофизики и высокоточной автономной навигации. С помощью информации о ГПЗ для определения местоположения осуществляется коррекция показаний инерциальных навигационных систем (ИНС) подвижных объектов [1]. При изучении глобального гравитационного поля Земли широко используется его представление в виде суммы сферических гармоник. В физической геодезии сферический гармонический анализ и синтез традиционно применяются при изучении длинноволновой части спектра глобального ГПЗ [2–4]. По мере накопления экспериментальных данных о нем, полученных в результате измерения силы тяжести как на поверхности Земли, так и в воздухе, а также благодаря реализации в последние десятилетия спутниковых проектов появилась возможность

Канушин Вадим Федорович. Кандидат технических наук, доцент кафедры космической и физической геодезии, ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет геосистем и технологий» (СГУГиТ) (Новосибирск).

Ганагина Ирина Геннадьевна. Кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой космической и физической геодезии, СГУГиТ.

Голдобин Денис Николаевич. Кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры космической и физической геодезии, СГУГиТ.

определения средневолнового диапазона спектра ГПЗ. В связи с тем что характеристики ГПЗ и их изменение оказывают существенное влияние на результаты геодезических измерений, траекторию движения транспортного средства (наземного, воздушного, морского, космического), работу инерциальных навигационных систем, наряду с изучением длинноволнового и средневолнового диапазона спектра гравитационного поля возникает необходимость детального описания этого поля в коротковолновом диапазоне на отдельных участках земной поверхности [5–12]. Решение этой задачи путем увеличения количества сферических гармоник в разложении ГПЗ в ряд Фурье не всегда возможно из-за ограниченной разрешающей способности и точности таких рядов.

В связи с этим представляет интерес моделирование характеристик ГПЗ: высот квазигеоида (ВКГ), аномалий силы тяжести (АСТ) и составляющих уклонения отвесных линий (СУОЛ) по дискретной информации, заданной в точках неравномерной сети на ограниченном участке земной поверхности.

Исходная информация для моделирования характеристик ГПЗ входит в состав моделей в качестве «интерполяторов», которые обеспечивают получение промежуточных значений характеристик ГПЗ с требуемой точностью в области интерполяции.

Создание локальных моделей характеристик ГПЗ по дискретным данным для площадной съемки с относительно равномерным распределением исходной информации описывается в публикациях, которые оказали заметное влияние на развитие методов цифрового моделирования ВКГ, АСТ и СУОЛ [13–16]. Эти методы используются для гладких функций, которые имеют непрерывную производную на всем множестве определения, однако малоэффективны или вовсе неприменимы в случае неравномерной площадной съемки, а также для редкой сети наблюдений.

Построение цифровых моделей ГПЗ по результатам неравномерных и особенно профильных съемок является сложной задачей как для формально-математических, так и для графических методов интерполяции. Ее решение с необходимой детализацией и точностью не может быть получено без явного или неявного привлечения дополнительной информации о структуре ГПЗ и его корреляционных связях с другими физическими полями. Применение цифровых карт поверхностей, полученных по наземным измерениям, в частности высот квазигеоида для получения СУОЛ, связано со сложностью получения полноты наземных данных и интерполированием их в узлы регулярной сетки – источником дополнительной погрешности. В работе [17] предложена методика математического моделирования АСТ в недостаточно изученных районах Земли, основанная на формализации и, соответственно, автоматизации на логико-математической базе процесса учета дополнительной информации, заданной в виде многомерного пространства косвенных признаков о ГПЗ. Эффективность этой методики связана в первую очередь с возможностью проведения количественного учета косвенных признаков ГПЗ. Среди формально-математических методов для приближения моделью характеристик ГПЗ «сложной» структуры, заданных дискретно и неравномерно, интерес представляет интерполяция этих характеристик в узлы регулярной сети с помощью обобщенных рядов Фурье в ортонормированной системе базисных функций с эмпирическими коэффициентами.

В настоящей работе проведено исследование двух способов моделирования высот квазигеоида на локальном участке с помощью обобщенных рядов Фурье по ортогональным многочленам. Первый способ предполагает использование для моделирования

высот квазигеоида двумерного преобразования Фурье по ортонормированной системе тригонометрических функций [18]. Второй способ – использование разложения высот квазигеоида в ряд Фурье по ортонормированной системе сферических функций [19].

Постановка задач, материалы и методики исследований

Двойной ряд Фурье по ортонормированной системе тригонометрических функций позволяет аппроксимировать сколь угодно сложную структуру ГПЗ и его характеристик [20], которые можно рассматривать как суперпозицию взаимодействующих множеств косинусоидальных и синусоидальных волн, содержащих набор гармоник с различными амплитудами и фазами. Так, если N – число профилей, изменяющихся в направлении y , а n – число дискретных исходных значений характеристик ГПЗ вдоль каждого профиля в направлении x , то искомая характеристика ГПЗ, выраженная через двумерный ряд Фурье, примет вид [20, 21]

$$\begin{aligned}
 f_{i,j} = & \sum_{m=0}^{N/2} \sum_{p=0}^{n/2} \alpha_{mp} \cos \frac{2\pi mi\Delta X}{n} \cos \frac{2\pi pj\Delta Y}{N} + \\
 & + \sum_{m=0}^{N/2} \sum_{p=0}^{n/2} \beta_{mp} \cos \frac{2\pi mi\Delta X}{n} \sin \frac{2\pi pj\Delta Y}{N} + \\
 & + \sum_{m=0}^{N/2} \sum_{p=0}^{n/2} \gamma_{mp} \sin \frac{2\pi mi\Delta X}{n} \cos \frac{2\pi pj\Delta Y}{N} + \\
 & + \sum_{m=0}^{N/2} \sum_{p=0}^{n/2} \delta_{mp} \sin \frac{2\pi mi\Delta X}{n} \sin \frac{2\pi pj\Delta Y}{N},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где m и p – номера гармоник в направлениях x и y .

В случае равномерного распределения исходных данных на локальном участке земной поверхности в силу ортогональности тригонометрических функций можно построить систему уравнений, которая позволяет вычислять коэффициенты ряда Фурье непосредственно, без каких-либо матричных преобразований, по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{mp} &= \frac{\aleph}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N f_{i,j} \cos \frac{2\pi mi\Delta x}{n} \cos \frac{2\pi pj\Delta y}{N}, \\
 \beta_{mp} &= \frac{\aleph}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N f_{i,j} \cos \frac{2\pi mi\Delta x}{n} \sin \frac{2\pi pj\Delta y}{N}, \\
 \gamma_{mp} &= \frac{\aleph}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N f_{i,j} \sin \frac{2\pi mi\Delta x}{n} \cos \frac{2\pi pj\Delta y}{N}, \\
 \delta_{mp} &= \frac{\aleph}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N f_{i,j} \sin \frac{2\pi mi\Delta x}{n} \sin \frac{2\pi pj\Delta y}{N},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $\aleph = \begin{cases} 1, & \text{при } m = p = 0 \\ 2, & \text{при } m = 0 \text{ или } p = 0. \\ 4, & \text{при } m > 0 \text{ и } p > 0 \end{cases}$

В формулах (1) и (2) предполагается, что начало гармонического ряда соответствует началу координат системы x и y . Гармоники могут быть вычислены вплоть до значений $m = n/2$ и $p = N/2$.

Для реализации вычислений по формулам (1) и (2) [21] использован тестовый участок на территории Новосибирской области размером 300 км вдоль меридиана и 450 км вдоль параллели, ограниченный координатами по широте от $53^{\circ}36'$ до $55^{\circ}48'$ и долготы от $77^{\circ}36'$ до $84^{\circ}27'$ (рис. 1).

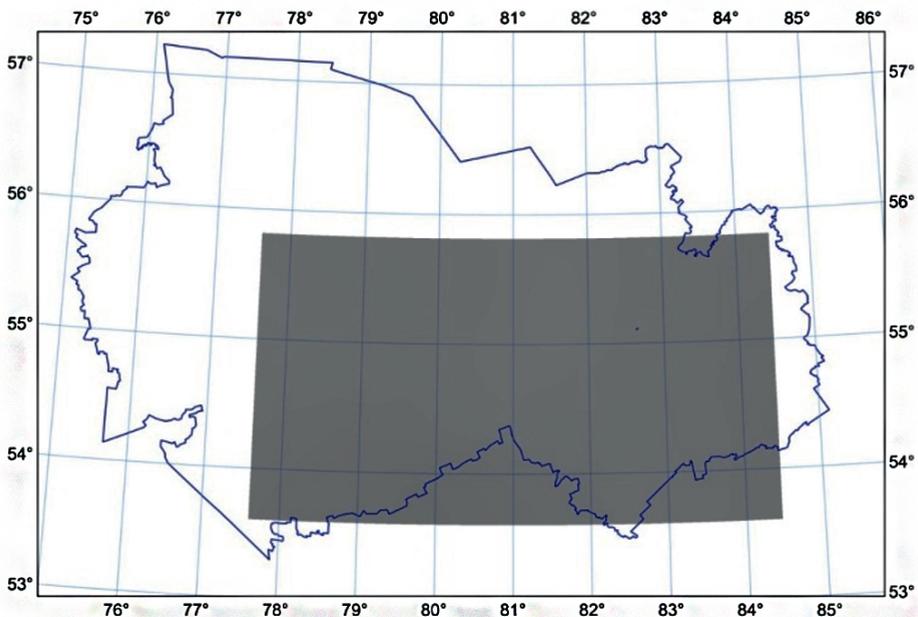


Рис. 1. Тестовый участок (серая область) на территории Новосибирской области

На данном участке в пунктах $P(B, L)$ заданы в количестве 190 нормальные высоты $H^{\nu}(P)$, полученные из геометрического нивелирования 1–4 классов, а также выполнены спутниковые координатные определения в рамках развития геодезической сети постоянно действующих базовых станций (ГС ПДБС) [22]. В результате выполненных измерений на данных пунктах получены геодезические высоты $H^{\Gamma}(P)$, средние квадратические погрешности которых из уравнивания спутниковой сети находятся в интервале от 1,5 до 3,1 см, в среднем – 1,8 см [23]. На рис. 2 приведена схема расположения пунктов $P(B, L)$.

Значения высот квазигеоида $\zeta^{uc}(P)$ относительно эллипсоида WGS-84 получены по формуле

$$\zeta^{uc}(P) = H^{\Gamma}(P) - H^{\nu}(P). \quad (3)$$

Как видно из рис. 2, исходная информация получена для пунктов $P(B, L)$, задающих на исследуемой территории неравномерную сеть. Для вычисления по формулам (1) и (2) исходные данные необходимо преобразовать в узлы равномерной сети. В условиях случайного распределения пунктов на плоскости среднее расстояние между узлами регулярной сетки можно определить по формуле [20]

$$\bar{\Delta} = 1/2\sqrt{p}, \quad (4)$$

где p – плотность узлов на исследуемом участке, которая равна числу узлов неравномерной сети, приходящихся на единицу квадратной площади, например на 1 км^2 .

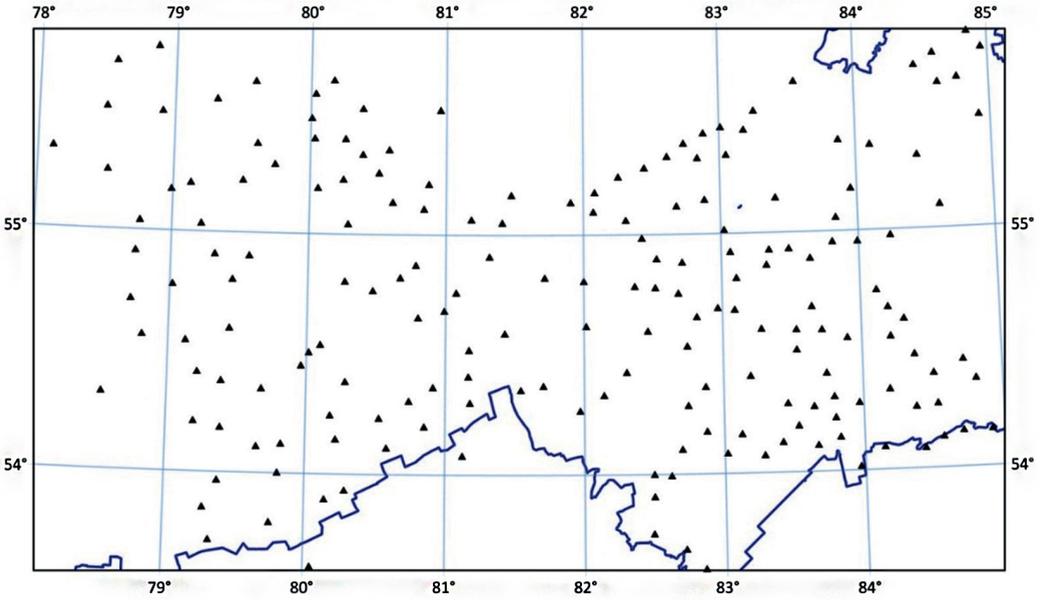


Рис. 2. Схема расположения пунктов $P(B, L)$ на тестовом участке

Существуют различные схемы построения регулярной сетки. В данном случае тестовый участок разделен системой параллелей N и меридианов n на K равновеликих по площади элементарных площадок размером $\bar{\Delta} \times \bar{\Delta}$:

$$K = N \cdot n = 144, \text{ при } N=12 \text{ и } n = 12.$$

Для центральной точки каждой площадки $i = 1, \dots, K$ вычислено среднее арифметическое значение высоты квазигеоида ζ_i^p по всем имеющимся для нее исходным данным. В результате получена матрица значений ζ_i^p в узлах регулярной сетки (рис. 3).

-35.1720	-34.8290	-34.8030	-34.9450	-35.1220	-34.9050	-34.8650	-35.1720	-34.7130	-35.9430	-34.6090	-34.6150
-34.8790	-35.7580	-35.4460	-35.0450	-35.1680	-34.6890	-35.5790	-35.6950	-36.1980	-36.5560	-35.1190	-35.9490
-35.8370	-35.8610	-35.2080	-35.8280	-35.6980	-36.6320	-35.9410	-35.8020	-35.5420	-35.5690	-36.4220	-36.1120
-35.8950	-35.5530	-35.7600	-35.5130	-35.8110	-35.6160	-35.5930	-36.9250	-36.8500	-36.3340	-36.6740	-36.7060
-37.4350	-36.5990	-36.9820	-36.9480	-38.1900	-37.7010	-37.9950	-37.3280	-37.5240	-37.8780	-37.8300	-37.5010
-38.3050	-37.4180	-37.8450	-37.6480	-37.7590	-38.3370	-37.7460	-37.0700	-38.3450	-37.3280	-38.2570	-38.2570
-37.4000	-37.7020	-38.4260	-38.1920	-37.4140	-39.0600	-37.7320	-38.1290	-38.7980	-38.8770	-37.6020	-37.8920
-38.0190	-37.3780	-36.8010	-36.5740	-36.8110	-36.0640	-36.2810	-36.3250	-36.9760	-37.1140	-35.7830	-37.1270
-35.8860	-35.8990	-36.0540	-38.1160	-37.9720	-36.5790	-36.7140	-36.8360	-37.1200	-36.1790	-37.6030	-37.0140
-35.2240	-35.4290	-35.0690	-35.1310	-35.5910	-34.9490	-35.6810	-34.7540	-35.6560	-35.9240	-35.5000	-34.7670
-35.2850	-35.0330	-34.9060	-35.4290	-35.3940	-35.2490	-34.8610	-35.1090	-35.0720	-34.2940	-34.6570	-35.0870
-34.8600	-35.0560	-34.5090	-35.4660	-35.6390	-34.2160	-34.7860	-34.7400	-34.8470	-34.1040	-35.0630	-33.5940

Рис. 3. Матрица значений ζ_i^p в узлах регулярной сетки

Значения ζ_i^p являются исходными данными для вычисления по формулам (2) коэффициентов двумерного тригонометрического ряда Фурье. Полученные коэф-

фициенты позволяют восстановить по формуле (1) в 144 узлах регулярной сетки значения высот модели квазигеоида $\zeta_i^{модель}$ на исследуемом локальном участке Новосибирской области.

В табл. 1 приведены статистические параметры распределения разностей $\delta\zeta_i = \zeta_i^{модель} - \zeta_i^p$ ($i = 1, \dots, K$) между вычисленными по формулам (1) и (2) значениями высот квазигеоида $\zeta_i^{модель}$ и значениями ζ_i^p высот квазигеоида в 144 узлах регулярной сетки, использованных в качестве контрольных, на тестируемом участке. На рис. 4 приведена гистограмма распределения разностей $\delta\zeta_i$.

Т а б л и ц а 1

Статистические параметры распределения разностей $\delta\zeta_i$

Параметр	Значение, м
Минимум	-0,782
Максимум	0,778
Диапазон	1,561
Среднее	0,000
СКП	0,296
Асимметрия	-0,145
Экцесс	0,113

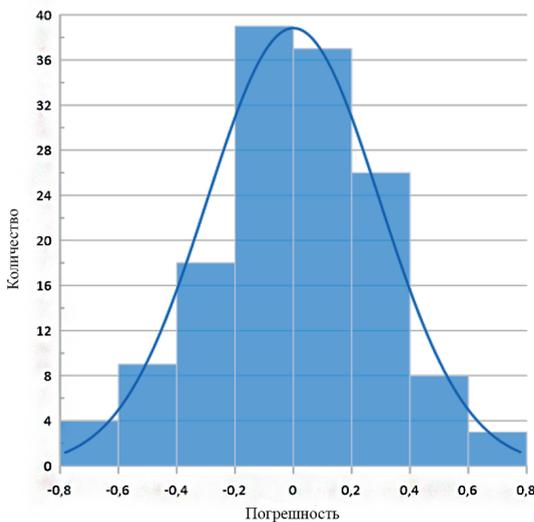


Рис. 4. Гистограмма распределения разности $\delta\zeta_i$

Как видно из табл. 1 и рис. 4, значения $\delta\zeta_i$ имеют распределение, близкое к нормальному с нулевым средним. Стандартное отклонение составило 0,296 м, а значение $\max|\delta\zeta_i| = 0,78$ м.

Следует отметить, что моделирование характеристик ГПЗ, основанное на двумерном преобразовании Фурье по ортонормированной системе тригонометрических функций, сопровождается большим объемом вычислений. Например, для каждой гармоники ряда (1) требуется вычислить по формулам (2) четыре коэффициента, для получения двойного ряда Фурье с тремя гармониками – 49, а для получения пяти гармоник в двух направлениях необходимо определять уже более ста коэффициентов.

Описание характеристик гравитационного поля на локальных участках земной поверхности путем увеличения количества сферических гармоник в разложении ГПЗ в ряд Фурье пока невозможно из-за ограниченной разрешающей способности и точности таких рядов, так как требуется детальное распределение исходных данных по всей земной поверхности. В работе [19], опубликованной в 1979 году, для этого было предложено применить разложение в ряд Фурье в ортонормированном

базисе сферических функций с использованием имеющейся информации о ГПЗ на этом участке. Для достижения заданной точности в рядах Фурье удерживается небольшое число гармоник.

Система сферических функций

$$P_{nm}(u) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases}$$

ортогональна на сфере при $u = \sin\varphi \in [-1, 1]$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$ [21]. В работах [19, 25, 26] показано, что путем линейных преобразований координат $x \in [a, b]$ и $y \in [c, d]$ функции $f(x, y)$, заданной на локальном участке земной поверхности, в новые координаты

$$\varphi' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \lambda' \in [-\pi, \pi]$$

на сфере по формулам

$$\varphi' = \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{2}\right) \cdot \pi, \tag{5}$$

$$\lambda' = \left(2 \frac{y-c}{d-c} - 1\right) \cdot \pi \tag{6}$$

на этом новом сферическом сегменте $[\varphi', \lambda']$ можно получить ортогональную систему сферических функций

$$P_{nm}(\sin \varphi') \begin{cases} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{cases}.$$

В этом случае функция $f(x, y)$, заданная на локальном участке, где координаты $x \in [a, b]$ и $y \in [c, d]$, отображается на сферу с новыми координатами $u' = \sin\varphi' \in [-1, 1]$, $\lambda' \in [0, 2\pi]$. При этом значение функции $f(x, y)$ в этой точке при преобразовании координат по формулам (5) и (6) не изменяется, т.е.

$$f(x, y) = F(u', \lambda'). \tag{7}$$

Функцию $F(u', \lambda')$, заданную на сфере, можно представить в виде следующего ряда:

$$F(u', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\lambda' + b_{nm} \sin m\lambda') P_{nm}(\sin \varphi'). \tag{8}$$

При условии

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left[P_{nm}(u') \begin{cases} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{cases} \right]^2 du' d\lambda' = 1 \tag{9}$$

коэффициенты ряда (8) имеют вид:

$$\left. \begin{matrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} F(u', \lambda') P_{nm}(u') \begin{cases} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{cases} du' d\lambda'. \tag{10}$$

В данной работе за основу взят метод моделирования характеристик ГПЗ на локальном участке земной поверхности с помощью разложения в ряд Фурье в ортонормированном базисе сферических функций [27], при этом оригинальные алгоритмы и программы переработаны, модернизированы для исследования не только глобально, но и локального ГПЗ и адаптированы к современным вычислительным средствам.

Выполнить аналитическое интегрирование по формулам (10) практически невозможно из-за дискретности и неравномерного распределения в исследуемой области исходной информации о ГПЗ. Поэтому для вычисления гармонических коэффициентов a_{nm} и b_{nm} применяют методы численного интегрирования. Авторами использован метод интегральных сумм, предложенный в 1952 г. И.Д. Жонголовичем [28]. Так как значения исходных высот квазигеоида $\zeta(x, y)$ на исследуемой локальной территории S распределены неравномерно (рис. 2), то ее необходимо разделить с помощью системы равноотстоящих параллелей и меридианов на C равновеликих элементарных квадратов ΔS , в каждом из которых определяют среднее интегральное значение:

$$\bar{\zeta}(x, y) = \frac{\iint_{\Delta S} \zeta(x, y) dx dy}{\iint_{\Delta S} dx dy}. \quad (11)$$

Площадь участка S при отображении его на сферу ω должна быть равна площади поверхности единичной сферы ω , т.е. 4π . Чтобы равновеликие площадки $\Delta S \in S$ соответствовали равновеликим трапециям $\Delta\omega \in \omega$, потребуем выполнения следующего условия:

$$\iint_{\Delta\omega'} d\omega' = \int_{\lambda'_{i-1}}^{\lambda'_i} \int_{\varphi'_{k-1}}^{\varphi'_k} \cos \varphi' d\varphi' d\lambda' = \frac{4\pi}{C}, \quad (12)$$

где $i = 1, \dots, t$ – номер параллели и $j = 1, \dots, k$ – номер меридиана, ограничивающих элементарную трапецию.

В результате преобразований формулы (5) получим формулу для вычисления широт параллелей на сфере ω , которые обеспечивают ее разделение на равновеликие трапеции $\Delta\omega \in \omega$ (при этом разность долготы $\Delta\lambda' = \text{const}$):

$$u' = \sin \varphi'_i = \frac{2i}{t} - 1. \quad (13)$$

При этом количество таких трапеций будет равно C – числу площадок на локальном участке S .

С учетом вышеизложенного формулы для вычисления гармонических коэффициентов (10) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{matrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{2}{m\pi} \sum_{i=1}^{t/2} \bar{\Phi}(u'_{nm})_i \sin \beta \sum_{j=1}^k (\zeta_C + r\zeta_{IO})_{ij} \begin{pmatrix} \cos m\alpha_j \\ \sin m\alpha_j \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$a_{n0} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{t/2} \bar{\Phi}_{n0}(u')_i \sum_{j=1}^k (\zeta_C + r\zeta_{IO})_{ij} B_{n0}, \quad (15)$$

где ζ_C, ζ_{IO} – осредненные в элементарных трапециях «северного» и «южного» полушарий сферы ω значения функции высот квазигеоида ζ ;

$$\bar{\Phi}_{nm}(u')_i = \int_{\varphi'_i}^{\varphi'_{i+1}} \bar{P}_{nm}(u') \cos(u') du',$$

где $\bar{P}_{nm}(u')$ – нормированные присоединительные полиномы Лежандра; $\beta = \frac{\pi}{k}$; $\alpha_k = (2k-1)\beta$ – долгота центра элементарной трапеции; $r = (-1)^{n-m}$.

После вычисления по формулам (14)–(15) коэффициентов a_{nm} и b_{nm} ставится задача восстановления значений исследуемой функции $\zeta(\varphi, \lambda)$ на любой элементарной площадке $\Delta S \in S$. Для этого координаты $x \in [a, b]$ и $y \in [c, d]$, ограничивающие элементарную площадку $\Delta S \in S$, необходимо преобразовать в соответствующие им координаты $u' = \sin \varphi' \in [-1, 1]$, $\lambda' \in [0, 2\pi]$, ограничивающие элементарную площадку $\Delta \omega \in \omega$.

Для вычисления значений высот квазигеоида $\zeta(x, y)$ в любой элементарной трапеции выполним следующие преобразования.

Представим значения исследуемой функции в элементарной трапеции в виде

$$\bar{\zeta}(u', \lambda) = \frac{C}{4\pi} \int_{\lambda'_k}^{\lambda'_{k+1}} \int_{u'_k}^{u'_{k+1}} \zeta(u') \cos u' du' d\lambda'. \quad (16)$$

Функцию $\zeta(\varphi, \lambda)$ под интегралом (16) представим в виде ряда

$$\bar{\zeta}(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm} \cos m\lambda + \bar{b}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi). \quad (17)$$

Выражение (17) подставим в правую часть формулы (16), после ее интегрирования получим окончательную формулу для вычисления среднего интегрального значения функции $\zeta(\varphi, \lambda)$ в элементарной трапеции:

$$\bar{\zeta}(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^N \left[\bar{a}_{n0} \Phi(u')_i + \sum_{m=0}^n \frac{2k \sin m\beta}{m\pi} (\bar{a}_{nm} \cos ma_k + \bar{b}_{nm} \sin ma_k) \bar{\Phi}_{nm}(u')_i \right]. \quad (18)$$

При реализации вычислений по формулам (14), (15) и (18) значение функции $\bar{\Phi}_{nm}(u')_i$ вычисляется с помощью алгоритма, опубликованного в работе [29].

По формулам (14), (15) и (18) выполнено разложение высот квазигеоида в ряд Фурье по системе сферических функций на локальном участке территории Новосибирской области [26], который разделен системой равноудаленных параллелей и меридианов на 2500 элементарных площадок. На каждой площадке определены средние значения высот квазигеоида. После преобразования систем координат создана матрица исходных значений высот квазигеоида $\zeta(u', \lambda')$, которые отнесены к центрам 2500 равновеликих на сфере элементарных трапеций.

В табл. 2 приведены статистические параметры распределения разности $r(P)$, которая вычислена в 190 контрольных точках $P(\varphi, \lambda)$ по следующей формуле:

$$r^k(P) = \bar{\zeta}_{\text{выч}}(P) - \zeta_{\text{кон}}(P), \quad (20)$$

где $\bar{\zeta}_{\text{выч}}(P)$ – высота квазигеоида, вычисленная по формулам (14) (15) и (18) в контрольных точках $P(\varphi, \lambda)$; $\zeta_{\text{кон}}(P)$ – высота квазигеоида в контрольных точках исходной нерегулярной сети.

Контрольные точки $P(\varphi, \lambda)$ принадлежат исходной неравномерной сети, значения высот квазигеоида $\zeta_{\text{кон}}(P)$ в этих точках не использовались при формировании матрицы исходных значений.

Из табл. 2 видно, что с увеличением степени разложения N уменьшается стандартное отклонение разности $D(r^k)$: например, при $N = 10$ стандартное отклонение $D(r^k) = 0,132$ м, а при $N = 5000$ стандартное отклонение $D(r^k) = 0,017$ м; разность между максимальным и минимальным значениями при $N = 5000$ составляет 0,111 м.

Минимум значений стандартного отклонения $D(r^k) = 0,017$ м достигнут при степени $N = 400$, а разность между максимальным и минимальным значениями $r^k(P)$ составляет 0,106 м.

Т а б л и ц а 2

**Статистические параметры распределения разности $r^k(P)$,
полученной в 190 контрольных точках нерегулярной сети**

Степень разложения	Мин.	Макс.	Диапазон	Среднее	СКП	Асимметрия	Эксцесс
10	-0,924	0,649	1,573	-0,010	0,132	-2,998	24,241
50	-0,269	0,093	0,362	-0,002	0,035	-3,767	25,707
100	-0,068	0,129	0,197	0,000	0,022	0,711	6,057
150	-0,085	0,152	0,237	-0,001	0,021	1,740	16,071
200	-0,061	0,074	0,135	-0,001	0,018	-0,054	1,945
300	-0,067	0,046	0,113	-0,001	0,018	-0,506	0,971
400	-0,063	0,044	0,106	-0,001	0,017	-0,515	1,305
500	-0,085	0,047	0,133	-0,001	0,018	-0,839	2,610
600	-0,063	0,049	0,112	-0,001	0,018	-0,417	1,018
700	-0,063	0,048	0,111	-0,001	0,017	-0,530	1,263
800	-0,062	0,049	0,111	-0,001	0,017	-0,513	1,233
900	-0,063	0,049	0,111	-0,001	0,017	-0,504	1,190
1000	-0,063	0,049	0,112	-0,001	0,018	-0,596	1,363
1500	-0,062	0,048	0,110	-0,001	0,018	-0,539	1,117
2000	-0,062	0,048	0,110	-0,001	0,017	-0,535	1,190
2500	-0,062	0,049	0,110	-0,001	0,017	-0,534	1,191
3000	-0,062	0,049	0,110	-0,001	0,017	-0,509	1,176
4000	-0,062	0,048	0,110	-0,001	0,017	-0,510	1,153
5000	-0,062	0,048	0,111	-0,001	0,017	-0,526	1,248

Относительная средняя квадратическая погрешность вычисления высот квазигеоида в 190 контрольных точках на локальном участке равна

$$\frac{D(r)}{\bar{\zeta}_{cp}} 100\% = 0,05\%.$$

Полученные результаты показывают, что метод моделирования характеристик ГПЗ с помощью разложения в ряд Фурье по системе сферических функций на локальном участке может успешно использоваться для интерполяции дискретно и неравномерно заданных характеристик ГПЗ.

На рис. 5 приведен график зависимости стандартного отклонения $D(r^k)$ разности $r^k(P)$ в контрольных точках $P(\varphi, \lambda)$ нерегулярной сетки от степени N разложения в ряд Фурье по ортогональным функциям на локальном участке Новосибирской области.

Из рис. 5 видно, что стандартное отклонение $D(r^k)$ разности $r^k(P)$ быстро уменьшается с ростом степени N в интервале низких частот $0 \leq N \leq 50$, а затем при

$N > 150$ испытывает небольшие колебания в интервале $0,017 \text{ м} \leq D(r^k) \leq 0,018 \text{ м}$. Таким образом, при интерполировании высот квазигеоида на тестируемом участке Новосибирской области достаточно ограничить ряд (18) степенью $N = 200$.

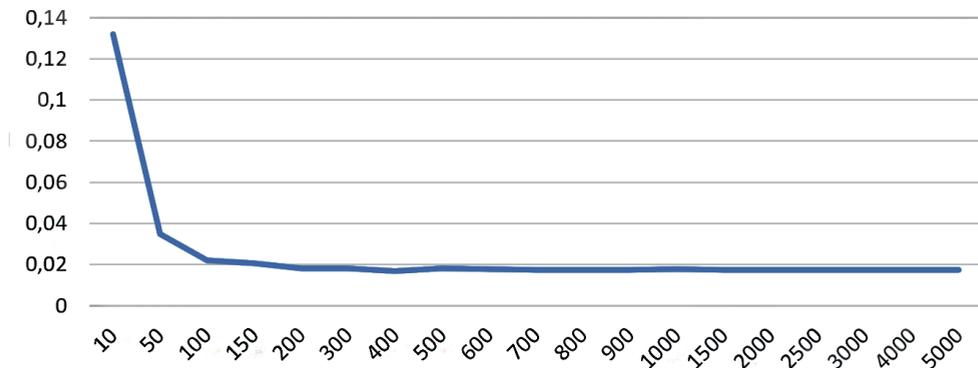


Рис. 5. График зависимости стандартного отклонения $D(r^k)$ разности $r^k(P)$ в контрольных точках $P(\varphi, \lambda)$ нерегулярной сети от степени N разложения в ряд Фурье по ортогональным функциям на локальном тестируемом участке

Выводы

Результаты исследования двух способов моделирования ВКГ на локальном участке с помощью обобщенных рядов Фурье по ортогональным многочленам показали, что наиболее точным и технологически простым является метод, основанный на разложении ВКГ в ряд Фурье по ортогональной системе сферических функций. Стандартное отклонение разности между модельными и исходными значениями высот квазигеоида на 190 «контрольных» точках составило 17 мм при удержании гармоник в ряде Фурье до степени $N = 400$, что составляет на исследуемом участке 0,05% в относительных единицах средней квадратической погрешности. Способ, основанный на двумерном преобразовании Фурье по ортонормированной системе тригонометрических функций, является менее точным и технологичным при изменении степени и порядка разложения в двойном ряде Фурье. Стандартное отклонение разности между модельными и исходными значениями высот квазигеоида составили 296 мм, что в 17,4 раза больше стандартного отклонения разности в методе моделирования высот квазигеоида с помощью рядов Фурье по системе сферических функций.

Используя результаты вычисления высоты геоида ζ с помощью разработанного метода моделирования в качестве базовых, можно получить значения составляющих уклонений отвеса ξ, η [30], необходимых для коррекции инерциальной навигационной системы. Предложенные в статье алгоритмы и программы универсальны и могут быть применены для вычисления любых характеристик аномального ГПЗ и получения цифровой информации об исследуемой территории, необходимой для коррекции параметров инерциальных навигационных систем подвижных объектов.

Моделирование с помощью рядов Фурье по системе сферических функций позволит получать значения характеристик гравитационного поля на локальных участках земной поверхности с повышенной точностью и может быть рекомендовано для решения задач геодезии, геофизики и обеспечения ИНС подвижных объектов, вклю-

чая беспилотные летательные аппараты, необходимыми данными для автономного функционирования в режиме реального времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джанджгава Г.И., Герасимов Г.И., Августов Л.И. Навигация и наведение по пространственным геофизическим полям // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2013. №3. С. 74–84.
2. Непоклонов В.Б., Зуева А.Н., Плешаков Д.И. Вопросы разработки и применения систем компьютерного моделирования для глобальных исследований гравитационного поля Земли // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2007. № 2. С. 79–97.
3. Нейман Ю.М., Сугаипова Л.С. Об адаптации глобальной модели геопотенциала к региональным особенностям (часть 1) // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2014. № 3. С. 3–12.
4. Koneshov, V.N., Nepoklonov, V.B., Spiridonova, E.S. et al., Comparative Assessment of Global Models of the Earth's Gravity Field, *Izv., Phys. Solid Earth*, 2020, 56, 249–259. <https://doi.org/10.1134/S1069351320020044>.
5. Ака Блаш Ульфред. О создании предварительной модели геоида на территорию Республики Кот-д'Ивуар // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2019. Т. 63. № 2. С. 134–144. DOI 10.30533/0536-101X-2019-63-2-134-144.
6. Erol, B., Işık, M.S., and Erol, S., An Assessment of the GOCE High-Level Processing Facility (HPF) Released Global Geopotential Models with Regional Test Results in Turkey, *Remote Sensing in Geology, Geomorphology and Hydrology: Special Issue «Remote Sensing by Satellite Gravimetry»*, 2020, 12(3), 586. <https://doi.org/10.3390/rs12030586>.
7. Foroughi, I., Van'cek, P., Kingdon, R.W., Goli, M., Sheng, M., Afrasteh, Y., Novak, P., Santos, M.C., Sub-centimetre geoid, *J. Geod.*, 2019, 93, 6, 849–868. DOI 10.1007/s00190-018-1208-1.
8. Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T., Oikonomidou, X., The experimental gravity field model XGM2019e, *GFZ Data Services*, 2019. <https://doi.org/10.5880/ICGEM.2019.007>.
9. Jiang, T., Dang, Y., and Zhang, C., Gravimetric geoid modeling from the combination of satellite gravity model, terrestrial and airborne gravity data: a case study in the mountainous area, *Colorado. Earth Planets Space*, 2020, 72, 189. <https://doi.org/10.1186/s40623-020-01287-y>.
10. Abd-Elmotaal, H.A., Kühnreiter, N., Seitz, K., Heck, B., A Precise Geoid Model for Africa: AFRgeo2019, *International Association of Geodesy Symposia*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2020. https://doi.org/10.1007/1345_2020_122
11. Borghi, A., Barzaghi, R., Al-Bayari, O., and Al Madani, S., Centimeter Precision Geoid Model for Jeddah Region (Saudi Arabia), *Remote Sens.*, 2020, 12(12), 2066. <https://doi.org/10.3390/rs12122066/>.
12. Garbanzo-Leon, J. et al., A regional Stokes-Helmert geoid determination for Costa Rica (GCR-RSH-2020): computation and evaluation, *Contributions to Geophysics and Geodesy*, 2020, vol. 50/2, 223–247. <https://doi.org/10.31577/congeo.2020.50.2.3>.
13. **Современные методы и средства** измерения параметров гравитационного поля Земли / Под общей ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова; науч. редактор д.т.н. О.А. Степанов. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 390 с.
14. Конешов В.Н., Непоклонов В.Б., Сермягин Р.А., Лидовская Е.А. Современные глобальные модели гравитационного поля Земли и их погрешности // Гирскопия и навигация. 2013. № 1. С.107–118.
15. Непоклонов В.Б. Об использовании новых моделей гравитационного поля Земли в автоматизированных технологиях изысканий и проектирования // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. 2009. №2 (33). С. 72–76.
16. Аронов В.И. Методы математической обработки геологических данных на ЭВМ. М., «Недра», 1977. 168 с.
17. Канушин В.Ф. Основные принципы прогнозирования аномалий силы тяжести с учетом дополнительной информации // Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК. 1982. №90. 33 с.
18. Авсюк Ю.Н. и др. Гравиметрия и геодезия / ред. Б. В. Бровар. М.: Научный мир, 2010. 570 с.
19. Бузук В.В., Вовк И.Г., Канушин В.Ф., Костына Ю.Г., Суздаев А.С. Математическое моделирование скалярных полей рядом Фурье по системе сферических функций. Новосибирск: Новосибирский институт инженерной геодезии аэрофотосъемки и картографии, 1979. 12 с. Деп. в ВИНТИ 10 04 1979 №1284-79.

20. Девис Дж. Статистика и анализ геологических данных. М.: Мир, 1977. 572. с.
21. Разработка алгоритмов и программ для определения когерентных составляющих физических полей земли в представлении рядами Фурье: Отчет о НИР/СГГА; Руководитель В. Ф. Канушин, - № ГР. 012004.08851, инв. № 022008.02255. Новосибирск, 2007. 64 с.
22. Гиенко Е.Г., Струков А.А., Решетов А.П. Исследование точности получения нормальных высот и уклонений отвесной линии на территории Новосибирской области с помощью глобальной модели геоида EGM2008 // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2011. Т. 1. № 2. С. 186–191.
23. Обиденко В.И., Оприцова О.А., Решетов А.П. Разработка методики получения нормальных высот на территории Новосибирской области с использованием глобальной модели геоида EGM2008 // Вестник СГУГиТ. 2016. Вып. 1 (33). С. 14–26.
24. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 476 с.
25. Вовк И.Г., Костына Ю.Г. Об аппроксимации рельефа рядом Фурье по системе ортогональных функций // Изв вузов Геодезия и аэрофотосъемка. 1981. № 4. С. 19–25.
26. Вовк И.Г., Канушин В.Ф., Суздалев А.С. Локальный ковариационный анализ физических полей Земли // Геодезия и картография. 1986. №3. С. 16–20.
27. Канушин В.Ф. Моделирование аномалий силы тяжести с учетом данных о рельефе Земли в условиях неполной гравиметрической изученности: Дис. ... канд тех наук. Новосибирск, 1984. 291 с.
28. Жонголович И.Д. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ними. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1952. Вып. III. 126 с.
29. Вовк И.Г. Алгоритмы и программы для вычисления интегральных значений сферических функций // Тр. НИИГАиК, 1972. Т.26. С. 21–30.
30. Карпик А.П., Канушин В.Ф., Ганагина И.Г., Голдобин Д.Н., Косарев Н.С., Косарева А.М. Определение составляющих уклонения отвесной линии на территории Западной Сибири методом численного дифференцирования // Вестник СГУГиТ. 2018. Т. 23. № 3. С. 15–29.

Kanushin, V.F., Ganagina, I.G., Goldobin, D.N. (Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia)

Modeling the Quasigeoid Heights on Local Areas of the Earth Surface by the Results of Expansion into a Generalized Fourier Series, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2020, vol. 28, no. 4 (111), pp. 82–94.

Abstract. The article presents two methods of modeling discrete heights of a quasigeoid on a local area of the earth's surface using a generalized Fourier series. The first method is based on modeling the characteristics of the earth's gravitational field on a plane and involves the use of a two-dimensional Fourier transform by an orthonormal system of trigonometric functions. The second method consists in the expansion of the quasigeoid heights in a Fourier series by an orthonormal system of spherical functions on a local area of the earth's surface. The errors of approximation of the obtained discrete values of the quasigeoid heights on the local territory are analyzed. It is shown that with the modern computing technology, the most accurate and technologically simple way to model the quasigeoid heights on local areas is to expand them into a Fourier series by an orthonormal system of spherical functions.

Key words: quasigeoid height, approximation, interpolation, spherical harmonic analysis, trigonometric functions, generalized Fourier series, local area, sphere.

Материал поступил 13.10.2020