УДК 621.398
DOI 10.17285/0869-7035.0048

Ю. Г. ЕГОРОВ, Е. А. ПОПОВ

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ СКАЛЯРНОЙ КАЛИБРОВКИ ВЕКТОРНОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ

В статье приводятся результаты аналитического исследования погрешностей различных алгоритмов скалярной калибровки трехосных измерителей векторной физической величины. Даются практические рекомендации по реализации алгоритма калибровки. Результаты подтверждаются численным моделированием.

Ключевые слова: калибровка, акселерометр, ДУС, магнитометр, векторный измеритель.

Введение

При решении задач навигации, ориентации и управления подвижными объектами широкое применение нашли акселерометры, датчики угловых скоростей и магнитометры [1–14]. Эти приборы измеряют проекцию соответствующей векторной физической величины [15] (кажущегося ускорения, абсолютной угловой скорости, магнитной индукции) на свою ось чувствительности и, как правило, являются первичными измерителями в более сложных измерительных системах.

Первичные измерители объединяют в блоки, которые способны дать оценку не только модуля измеряемой физической величины, но и его направления в системе координат, связанной с основанием блока. Для этого рассматриваемые приборы, как правило, располагают по осям ортогональной системы координат, которую впоследствии называют приборной.

Воспользуемся понятием *векторного измерителя* (ВИ) [15] – устройства (измерительной системы), позволяющего измерить значение и оценить направление векторной физической величины.

Такое устройство будет обладать как погрешностями, присущими другим средствам измерения (аддитивные и мультипликативные составляющие), так и погрешностями, связанными с векторной природой измеряемой величины.

Рассмотрим неизбыточный ВИ, каждый первичный измеритель которого расположен так, чтобы его ось чувствительности совпадала с одной из ортогональных осей приборной системы координат (ПСК) $Oxyz$. У такого ВИ можно выделить три основных типа погрешности: смещение нулевых сигналов (аддитивная составляющая погрешности первичных измерителей) Δ_j ($j = x, y, z$), относительная погрешность масштабных коэффициентов (мультипликативная составляющая) δk_j и откло-

Егоров Юрий Григорьевич. Доктор технических наук, профессор, МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва). Действительный член международной общественной организации «Академии навигации и управления движением».

Попов Евгений Александрович. Кандидат технических наук, начальник лаборатории, АО «Центральный научно-исследовательский институт автоматики и гидравлики» (Москва). Член секции молодых ученых международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

нение осей чувствительности первичных измерителей от ПСК. Последние могут быть выражены в виде углов отклонения или направляющих косинусов осей чувствительности относительно ПСК – φ_{jk}.

Матрица ориентации осей чувствительности в ПСК тогда может быть записана в следующем виде:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varphi_{xy}^2-\varphi_{xz}^2} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} \\ \varphi_{yx} & \sqrt{1-\varphi_{yx}^2-\varphi_{yz}^2} & \varphi_{yz} \\ \varphi_{zx} & \varphi_{zy} & \sqrt{1-\varphi_{zx}^2-\varphi_{zy}^2} \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы Ф выражены через недиагональные элементы той же строки, так как сумма квадратов направляющих косинусов равна единице. При этом удобнее в качестве значимых оставить недиагональные элементы, так как при наличии малых отклонений осей чувствительности (как правило, они имеют значения порядка единиц и десятков угловых минут) они тоже будут малыми в отличие от диагональных элементов. Чем меньше углы отклонения осей чувствительности, тем больше их значения приближаются к значениям недиагональных элементов матрицы Ф.

Результат измерения векторной величины выражается в виде вектора $\hat{\bar{I}} \in \mathbb{R}^3$. С учетом рассмотренных погрешностей результат измерения можно представить в следующем векторно-матричном виде:

$$\hat{\bar{I}} = \bar{\Delta} + \left(E + \delta K\right) \cdot \Phi \cdot \bar{I} + \bar{\omega}, \tag{1}$$

где $\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_x & \Delta_y & \Delta_z \end{pmatrix}^T$ – вектор смещений нулевых сигналов; E – единичная матрица 3×3; $\delta K = diag([\delta k_x \quad \delta k_y \quad \delta k_z])$ – диагональная матрица, составленная из относительных погрешностей масштабных коэффициентов; $\bar{I}$ – истинное значение измеряемой векторной величины в проекциях на ПСК; $\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix}^T$ – вектор случайных составляющих результата измерения. В рамках данной статьи будем считать погрешности Δ_j, δk_j, φ_{jk} систематическими, т.е. не изменяющимися в запуске. Несистематические составляющие этих погрешностей можно включить в случайную составляющую $\bar{\omega}$.

При использовании ВИ по назначению необходимо скомпенсировать его систематические погрешности, для чего предварительно следует оценить их значения. Процедуру оценки, как правило, называют калибровкой [1–14]. Для ее проведения необходимо по заранее известному значению вектора $\bar{I}$ и получаемым результатам измерения $\hat{\bar{I}}$ оценить составляющие Δ_j, δk_j, φ_{jk}.

Существует множество методик калибровки для частных случаев реализации ВИ, например методики калибровки блоков акселерометров, датчиков угловых скоростей или навигационных систем в целом. Некоторые из них предназначены для оценки большего числа погрешностей, которые, впрочем, лишь уточняют базовую модель, рассматриваемую в настоящей статье.

Среди всех методик калибровки можно выделить те, которые основаны на сравнении абсолютного значения (модуля) измеренной величины $\left|\hat{\bar{I}}\right|$ с его принятым значением $\left|\bar{I}_d\right|$. Такой подход, как правило, называется скалярной (так как производится переход от измеренных значений проекций к модулю – скаляру) или инвариантной (так как модуль измеренной величины является инвариантом ориентации – при идеальных измерениях его значение не зависит от ориентации ВИ) калибровкой [1–10]. В англоязычной литературе используется термин *ellipsoid calibration* [11, 13].

Несмотря на единую концепцию построения такой процедуры калибровки, различные публикации содержат алгоритмы, применяемые к ВИ разных типов и отличающиеся в деталях, например: как вычислять модуль измеряемой величины или как оценивать текущую ориентацию $\overline{I}$ относительно ПСК.

Данная статья ставит следующие задачи: обобщить известные теоретические результаты относительно инвариантной калибровки, описать возникающие на различных этапах алгоритма погрешности, а также дать некоторые практические рекомендации.

Вычисление модуля измеряемой величины

Принятое значение векторной величины $\overline{I}_d$ отличается от истинного $\overline{I}$ как по модулю, так и по направлению. Основная идея рассматриваемого подхода заключается в том, что модуль векторной величины не зависит (инвариантен) от его ориентации, за счет чего устраняется большая часть погрешности оценки, вызванная неточностью задания (знания) ориентации.

Представим принятое значение векторной величины $\overline{I}_d$ с учетом погрешностей его задания в следующем виде:

$$\overline{I}_d = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\psi_y^2-\psi_z^2} & \psi_z & -\psi_y \\ -\psi_z & \sqrt{1-\psi_z^2-\psi_x^2} & \psi_x \\ \psi_y & -\psi_x & \sqrt{1-\psi_x^2-\psi_y^2} \end{pmatrix} \left(1+\frac{\Delta I}{\left|\overline{I}\right|}\right)\overline{I}, \qquad (2)$$

где ψ_j – малые углы, приводящие к отклонению принятого значения измеряемой величины от ее истинного значения, ΔI – отклонение принятого значения модуля измеряемой величины от его истинного значения.

Для описания ориентации истинного вектора измеряемой величины в ПСК введем его орт, состоящий из направляющих косинусов

$$\overline{\eta} = \frac{\overline{I}}{\left|\overline{I}\right|}, \qquad (3)$$

где $\overline{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_x & \eta_y & \eta_z \end{pmatrix}^T$, $\eta_j = {I_j}\big/{\left|\overline{I}\right|}$.

Тогда ориентация принятого вектора, выраженная таким же ортом, будет

$$\overline{\eta}_d = \begin{pmatrix} \eta_x\sqrt{1-\psi_y^2-\psi_z^2}+\psi_z\eta_y-\psi_y\eta_z \\ \eta_y\sqrt{1-\psi_z^2-\psi_x^2}-\psi_z\eta_x+\psi_x\eta_z \\ \eta_z\sqrt{1-\psi_x^2-\psi_y^2}+\psi_y\eta_x-\psi_x\eta_y \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Модуль измеряемой величины по показаниям ВИ можно рассчитать двумя способами:

1) как корень из суммы квадратов элементов вектора $\hat{\bar{I}}$:

$$m_I = \sqrt{\hat{I}_x^2 + \hat{I}_y^2 + \hat{I}_z^2}\,; \tag{5}$$

2) как скалярное произведение вектора $\hat{\bar{I}}$ на $\bar{\eta}_d$:

$$m_{II} = \hat{\bar{I}} \cdot \bar{\eta}_d\,. \tag{6}$$

В первом случае не используется информация об ориентации вектора $\bar{I}$, во втором, напротив, используется. Любой из способов приведет к разным по составу и значениям методической и инструментальной погрешностям.

Рассмотрим результат каждого из этих преобразований. Для этого подставим в (5) и (6) выражение (1). При этом, считая все оцениваемые параметры ВИ малыми величинами, здесь и далее будем пренебрегать всеми составляющими, в которые входят величины меньше второго порядка малости (тройные и четверные произведения):

$$\begin{aligned} m_I &= \left|\bar{I}\right|\left[1 + 2L_I + M_I + S_I\right]^{1/2} \cong \left|\bar{I}\right|\left[1 + L_I + \frac{1}{2}M_I + \frac{1}{2}S_I\right], \\ m_{II} &= \left|\bar{I}\right|\left[1 + L_{II} + M_{II} + S_{II}\right], \end{aligned} \tag{7}$$

где $L_I = L_{II} = L$ – линейная относительно погрешностей ВИ составляющая выражения; M_I, M_{II} – нелинейная составляющая; S_I, S_{II} – случайная составляющая результата измерения модуля.

Раскроем входящие в (7) составляющие:

$$L = \sum_{j=x,y,z}\left(\frac{\Delta_j}{\left|\bar{I}\right|}\eta_j + \delta k_j \eta_j^2\right) + \left(\varphi_{xy} + \varphi_{yx}\right)\eta_x\eta_y + \left(\varphi_{yz} + \varphi_{zy}\right)\eta_y\eta_z + \left(\varphi_{zx} + \varphi_{xz}\right)\eta_z\eta_x,$$

$$M_I = \sum_{j=x,y,z}\left[\frac{\Delta_j^2}{\left|\bar{I}\right|^2} + \frac{\Delta_j}{\left|\bar{I}\right|}\delta k_j \eta_j + \delta k_j^2 \eta_j^2 + \sum_{\substack{k=x,y,z\\k\neq j}}\left(\frac{\Delta_j}{\left|\bar{I}\right|}\varphi_{jk}\eta_k - \varphi_{jk}^2\eta_j^2 + 2\delta k_j \varphi_{jk}\eta_j\eta_k\right) + \prod_{\substack{k=x,y,z\\k\neq j}}\varphi_{jk}\eta_k\right],$$

$$M_{II} = \frac{1}{\left|\bar{I}\right|}\det\left(\bar{\eta}, \bar{\psi}, \bar{\Delta}\right) + \det\left(\bar{\eta}, \bar{\psi}, \bar{\kappa}\right) + \det\left(\bar{\eta}, \bar{\psi}, \bar{\phi}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=x,y,z}\sum_{\substack{k=x,y,z\\k\neq j}}\left(\varphi_{jk}^2 + \psi_k^2\right)\eta_j^2,$$

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix}\psi_x & \psi_y & \psi_z\end{pmatrix}^T,$$

$$\bar{\kappa} = \begin{pmatrix}\delta k_x \eta_x & \delta k_y \eta_y & \delta k_z \eta_z\end{pmatrix}^T,$$

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix}\varphi_{xz}\eta_z + \varphi_{xy}\eta_y & \varphi_{yx}\eta_x + \varphi_{yz}\eta_z & \varphi_{zy}\eta_y + \varphi_{zx}\eta_x\end{pmatrix}^T,$$

$$S_I = \frac{1}{\left|\bar{I}\right|^2}\sum_{j=x,y,z}\left(\omega_j^2 + \omega_j I_j\right),$$

$$S_{II} = \frac{1}{\left|\bar{I}\right|}\sum_{j=x,y,z}\omega_j\eta_j.$$

Подробный анализ преобразования (5) был проведен в [1], а преобразования (6) – в [9]. Здесь же приводится краткое сравнение результатов этих преобразований.

Как следует из описания составляющих формулы (7), модуль измеряемой величины при вычислении указанными способами имеет одинаковую составляющую L, линейно зависящую от искомых параметров Δ_j, δk_j, φ_{jk}. Можно также отметить, что ни в m_I, ни в m_{II} не входят первые порядки погрешности задания ориентации ψ_j, что говорит о важном свойстве данных преобразований – инвариантности полученного значения модуля измеряемого вектора по отношению к малым погрешностям задания ориентации измеряемого вектора относительно ПСК. Вместе с тем нелинейные составляющие вычисленных значений M_I и M_{II} и их случайные составляющие S_I и S_{II} будут сильно отличаться.

В M_I входят квадраты и двойные произведения погрешностей ВИ – Δ_j, δk_j, φ_{jk}, что может существенно смещать оценки, полученные с помощью линейных методов, например метода наименьших квадратов (МНК). Кроме того, следует отметить преобразование случайных составляющих результата измерения $\overline{\omega}$, которое будет давать в m_I кроме линейной комбинации в виде скалярного произведения $\overline{\omega}\cdot\overline{I}$ еще и составляющую $\overline{\omega}\cdot\overline{\omega}$, при условии нормального распределения $\overline{\omega}$ имеющую χ^2-распределение [17], что, в свою очередь, приведет к смещению m_I относительно истинного значения модуля измеряемой величины. Тем не менее значение этого смещения будет малым, так как $\overline{\omega}\cdot\overline{\omega}$ является квадратом малой величины.

S_{II}, напротив, содержит только линейно преобразованную случайную составляющую результата измерений $\overline{\omega}\cdot\overline{\eta}$, что должно лучше сказываться на точности оценки при применении линейных методов. Помимо этого, следует отметить, что в M_{II} содержатся квадраты только направляющих косинусов осей чувствительности φ_{jk}^2 и погрешности задания ориентации ψ_k^2, остальные же составляющие представляют собой произведения погрешностей ВИ и погрешностей задания ориентации. В случае если погрешности ψ_j имеют случайную составляющую, их квадраты будут вносить в m_{II} такое же смещение, как и $\overline{\omega}\cdot\overline{\omega}$ в m_I.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что задача выбора преобразования для вычисления модуля векторной величины неоднозначна и зависит от следующих факторов:

1) предполагаемого диапазона значений параметров ВИ Δ_j, δk_j, φ_{jk};
2) предполагаемых параметров распределения случайной составляющей результата измерений ω_j;
3) предполагаемых параметров распределения погрешностей задания ориентации ψ_j.

При проведении первичной калибровки ВИ в условиях нескомпенсированных значений Δ_j, δk_j, φ_{jk} будет целесообразно использовать преобразование (6), так как в случае применения линейных методов оценивания оно даст меньшее смещение оценки. При уменьшении диапазонов предполагаемых значений Δ_j, δk_j, φ_{jk}, например при проведении контрольной калибровки, следует руководствоваться соотношением параметров распределений ω_j и ψ_j. Как правило, ω_j можно сократить за счет увеличения времени осреднения показаний в одном измерительном положении, при этом ψ_j определяется параметрами оборудования, задающего ориентацию вектора $\overline{I}$ (например, неортогональностями осей поворотно-наклонного стола и смещением его датчиков углов).

Переход к невязкам

Под невязкой в данном случае будем понимать разницу между измеренным значением модуля векторной величины и его истинным значением, нормированную на величину истинного значения модуля векторной величины. Согласно данному определению невязки m_I и m_{II} будут вычисляться по формуле

$$J = \frac{m}{\left|\overline{I}\right|} - 1. \tag{8}$$

Так как при проведении реальных измерений вместо неизвестного истинного значения модуля измеряемой величины используется его принятое значение $\left|\overline{I}_d\right|$, то невязки результатов измерений будут содержать дополнительную погрешность $\delta J_d \cong \Delta I^2 - \Delta I$, которая может иметь различный порядок. Так, в случае калибровки ВИ по геофизическим константам (например, калибровки блока акселерометров под действием ускорения свободного падения или калибровки блока датчиков угловых скоростей под действием угловой скорости суточного вращения Земли) погрешность ΔI будет определяться только точностью используемых справочных материалов. Иными словами, принятое значение модуля может быть установлено заранее с точностью, позволяющей пренебречь в дальнейшем δJ_d. При этом, когда в качестве измеряемого воздействия выступает векторная величина, создаваемая каким-либо устройством (например, при калибровке ДУС под воздействием угловой скорости вращения, задаваемой наклонно-поворотным стендом, или магнитометра при задании внешнего поля специальными источниками), погрешность ΔI будет определяться техническими характеристиками этого устройства и не всегда может быть пренебрежимо малой.

Получение оценок параметров ВИ

Задача оценки параметров ВИ по линейной части L выражения (7) схожа с задачей нахождения параметров эллипсоида [11–13] в пространстве η_x, η_y, η_z. Такую оценку можно находить различными методами [16]. Наиболее простым с точки зрения реализации и анализа является МНК, в качестве вектора результатов измерений которого будет выступать вектор невязок $\overline{J} = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_i & \dots & J_N \end{pmatrix}^T$, составленный из невязок (8), полученных в N измерительных положениях.

В соответствии с МНК оценивание параметров ВИ проводится по формуле

$$\hat{\overline{X}} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T \overline{J}\,, \tag{9}$$

где $\hat{\overline{X}} = \begin{pmatrix} \hat{\Delta}_x & \hat{\Delta}_y & \hat{\Delta}_z & \delta\hat{k}_x & \delta\hat{k}_y & \delta\hat{k}_z & \hat{\gamma}_{xy} & \hat{\gamma}_{yz} & \hat{\gamma}_{zx} \end{pmatrix}^T$ – вектор оценок параметров ВИ ($\hat{\gamma}_{jk} = \varphi_{jk} + \varphi_{kj}; j,k = x,y,z; j \neq k$);

$\underset{N\times 9}{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_i & \dots & h_N \end{pmatrix}^T$ – матрица измерений линейной части системы,

$$h_i = \begin{pmatrix} \dfrac{\eta_{xi}}{\left|\overline{I}\right|} & \dfrac{\eta_{yi}}{\left|\overline{I}\right|} & \dfrac{\eta_{zi}}{\left|\overline{I}\right|} & \eta_{xi}^2 & \eta_{yi}^2 & \eta_{zi}^2 & \eta_{xi}\eta_{yi} & \eta_{yi}\eta_{zi} & \eta_{zi}\eta_{xi} \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание на то, что направляющие косинусы осей чувствительности φ_{jk} входят в линейную часть невязки J_i как линейные комбинации γ_{jk}.

В этом виде и будет проводиться их оценка, что, впрочем, не помешает осуществить компенсацию погрешностей ВИ.

Запишем выражение (9) с учетом описанных ранее погрешностей нелинейности, случайных составляющих (7), отклонения принятого значения модуля ΔI, а также учтем, что при формировании матрицы H используются принятые, а не истинные значения направляющих косинусов $\overline{\eta}_d$:

$$\hat{\overline{X}} = K \cdot H_d^T \cdot \left(\overline{L} + \overline{M} + \overline{\Delta I} + \overline{S}\right) + \overline{\varepsilon}_{\delta H}, \qquad (10)$$

где $K = \left(H_d^T H_d\right)^{-1}$ – матрица Фишера; $\overline{L} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \dots & L_i & \dots & L_N \end{pmatrix}^T$ – вектор линейных частей измеренного значения модуля; $\overline{M} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_i & \dots & M_N \end{pmatrix}^T$ – вектор нелинейных его частей; $\overline{S} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_i & \dots & S_N \end{pmatrix}^T$ – вектор случайных составляющих измеренного значения модуля; $\overline{\Delta I} = \begin{pmatrix} \delta J_{d1} & \delta J_{d2} & \dots & \delta J_{di} & \dots & \delta J_{dN} \end{pmatrix}^T$ – вектор отклонений принятого значения модуля в каждом измерительном положении; $\overline{\varepsilon}_{\delta H} = -K \cdot H_d^T \cdot \delta H \cdot \overline{X}$ – погрешность оценки вектора $\overline{X}$ из-за неточности задания ориентации измеряемой величины; $\delta H = H - H_d$ – погрешность знания матрицы измерений, $H_d = (h_{d1} \;\; h_{d2} \dots h_{di} \dots h_{dN})^T$,

$$h_{di} = \begin{pmatrix} \dfrac{\eta_{dxi}}{\left|\overline{I}\right|} & \dfrac{\eta_{dyi}}{\left|\overline{I}\right|} & \dfrac{\eta_{dzi}}{\left|\overline{I}\right|} & \eta_{dxi}^2 & \eta_{dyi}^2 & \eta_{dzi}^2 & \eta_{dxi}\eta_{dyi} & \eta_{dyi}\eta_{dzi} & \eta_{dzi}\eta_{dxi} \end{pmatrix}.$$

Пояснения к формуле (10).

Пусть заданы результаты измерений:

$$\overline{y} = H\overline{X}.$$

Представим матрицу H в виде разложения на матрицу H_d, которая будет использоваться в процессе оценки, и матрицу δH:

$$H = H_d - \delta H.$$

В этом случае результаты измерения примут вид:

$$\overline{y} = \left(H_d - \delta H\right)\overline{X} = H_d\overline{X} - \delta H\overline{X}.$$

Тогда при применении МНК оценка вектора $\overline{X}$ примет следующий вид:

$$\hat{\overline{X}} = \left(H_d^T H_d\right)^{-1} H_d^T \overline{y} = \overline{X} - \left(H_d^T H_d\right)^{-1} H_d^T \delta H \overline{X} = \overline{X} + \overline{\varepsilon}_{\delta H},$$

где $\overline{\varepsilon}_{\delta H} = -\left(H_d^T H_d\right)^{-1} H_d^T \delta H \overline{X}$ – погрешность оценки вектора $\overline{X}$ из-за неточности знания (задания) независимой переменной.

Очевидно, что при таком методе получения оценок нелинейные составляющие результатов измерений, отклонение принятого значения модуля измеряемой величины, случайные составляющие и погрешности знания матрицы измерений будут вносить погрешности в оценку вектора $\overline{X}$. Рассмотрим более подробно влияние каждой составляющей.

Влияние случайной составляющей результатов измерения

Влияние вектора случайных составляющих $\overline{S}$ на точность оценки параметров ВИ может быть описано с помощью соответствующей матрицы ковариации

$$K_S = \left(H_d^T P_S^{-1} H_d\right)^{-1}, \tag{11}$$

где P_S – матрица ковариации вектора случайных составляющих $\overline{S}$.

В случае если случайные величины S_i независимы и имеют одинаковую дисперсию D_S ($P_S = E \cdot D_S$), выражение (11) примет вид

$$K_S = K \cdot D_S. \tag{12}$$

В этом случае можно утверждать, что погрешности оценок, вызванные случайными составляющими результатов измерений, определяются только дисперсией этих результатов измерений и матрицей Фишера K [18], которая, в свою очередь, зависит только от выбора измерительных положений.

Следует также учитывать, что при выборе преобразования (5) случайные составляющие модуля измеряемой величины будут смещенными, даже если измерительный шум первичных измерителей описывался несмещенным нормальным распределением.

Влияние нелинейных составляющих результатов измерений

Как уже говорилось, влияние нелинейных составляющих будет зависеть от выбранного способа преобразования (5) или (6). Вместе с тем применение итерационного подхода, предполагающего компенсацию погрешностей ВИ после получения их оценки и повторение процедуры оценивания, способно в значительной степени сократить влияние большей части нелинейных составляющих.

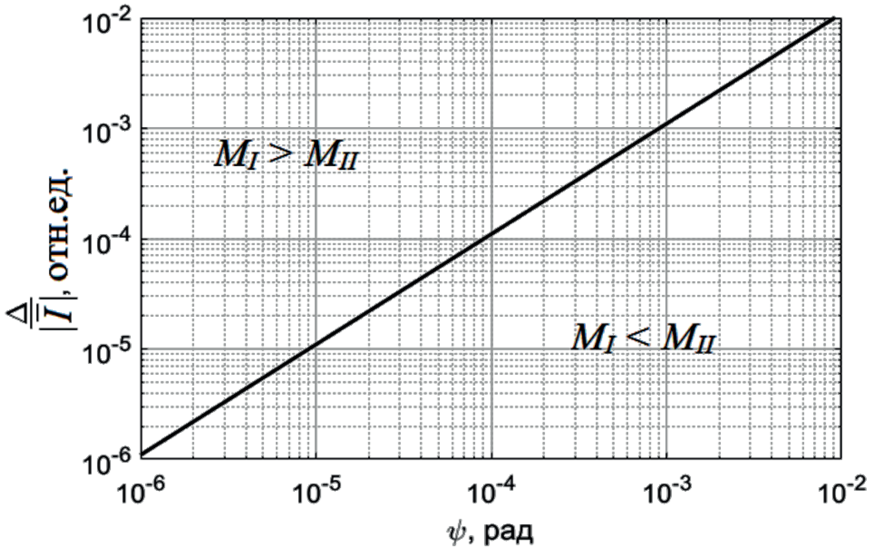
Некомпенсированными останутся составляющие, зависящие от φ_{jk}^2 и ψ_k^2, так как эти параметры не оцениваются. При этом следует отметить, что они входят в результаты измерения с коэффициентами η_j^2, с такими же коэффициентами входят в $\overline{L}$ отклонения масштабных коэффициентов δk_j. Это неизбежно приведет к смещению оценок δk_j на величину $\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=x,y,z \\ k\neq j}}\left(\varphi_{jk}^2+\psi_k^2\right)$. Их компенсация возможна с привлечением дополнительных алгоритмов [8, 9].

Кроме того, необходимо отметить, что сходимость оценок в ходе итерационной процедуры требует дополнительных исследований. В общем случае можно сказать, что она будет тем лучше, чем меньше начальное значение нелинейных составляющих (чем точнее начальное приближение).

Если предположить, что перед разработчиком методики калибровки конкретного типа ВИ встала задача выбора между преобразованиями (5) и (6), то он должен основывать его в том числе на соотношении предельных значений M_I и M_{II}, которые могут быть получены при известных параметрах распределения погрешностей рассматриваемого типа ВИ и погрешностей испытательного оборудования.

На рисунке представлена граница, разделяющая области, в которых нелинейная составляющая измерений M_I больше M_{II} и наоборот, при наличии только смещений нулевых сигналов Δ_j и погрешностей задания ориентации ψ_j.

К примеру, если для данного типа ВИ характерно относительное смещение нулевого сигнала не более чем на 10^{-3}, а испытательное оборудование позволяет задавать параметры ориентации с погрешностью не более 10^{-4} рад, то $M_I > M_{II}$, и предпочтительнее выбрать преобразование (6). Если же испытательное оборудование более грубое и погрешность задания параметров ориентации не более 10^{-2} рад, то $M_I < M_{II}$, и предпочтительнее выбрать преобразование (5). В случаях, близких к граничным, следует учитывать другие факторы.



Граница, разделяющая области с различным отношением M_I и M_{II}

Влияние отклонения принятого значения модуля

Влияние отклонения принятого значения модуля ΔI на оценку вектора параметров ВИ $\hat{\bar{X}}$ может быть описано, так же как и случайная составляющая результатов измерений, с помощью матрицы ковариации (если ΔI представлено случайной величиной)

$$K_{\Delta I} = \left(H_d^T P_{\Delta I}^{-1} H_d \right)^{-1}, \tag{13}$$

где $P_{\Delta I}$ – матрица ковариации вектора $\overline{\Delta I}$.

Стоит рассматривать вектор $\overline{\Delta I}$ отдельно от вектора $\bar{S}$, так как они, как правило, сильно отличаются формой и параметрами распределения. $\bar{S}$ определяется шумовой составляющей трактов измерителей и для большинства задач может быть принят случайным. В то время как $\overline{\Delta I}$ в случае выбора в качестве принятого значения, например, ускорения свободного падения (УСП) будет содержать постоянные значения погрешности знания УСП в месте проведения измерений.

Влияние погрешности знания матрицы измерений

При применении итерационной процедуры вектор оценок $\bar{X}$ на каждой итерации будет иметь все меньший порядок и, как следствие, $\bar{\varepsilon}_{\delta H}$ будет уменьшаться. Значение погрешностей составляющих δH тоже может быть сокращено за счет рационального способа оценки параметров ориентации ВИ η_{ji}. Это позволяет не оценивать ее специально, а считать пренебрежимо малой в результате применения итерационной процедуры.

Нужно также отметить, что точные или приближенные выражения для погрешности $\overline{\varepsilon}_{\delta H}$ могут быть получены аналитически. Возможен и вариант использования метода полных наименьших квадратов (total least squares) [14], который позволяет получать оценки с учетом погрешностей независимых переменных.

Различные подходы к оценке параметров ориентации ВИ

Как было показано, матрица измерений H_d состоит из направляющих косинусов принятого значения вектора измеряемой величины η_{dji} и их произведений. Во всех предыдущих рассуждениях η_{dji} считались известными, что соответствует концепции планируемого эксперимента (все измерительные положения задаются согласно плану эксперимента). Тем не менее существуют задачи, в которых η_{dji} заранее не известны (непланируемый эксперимент). В таких случаях требуется оценить их перед проведением расчетов.

Нахождение η_{dji} по результатам измерений $\hat{I}_{ji}$ может быть проведено по формуле, аналогичной (3). Тогда с учетом погрешностей самих измерителей ориентация принятого вектора будет выражаться как

$$\overline{\eta}_d = \frac{\left|\overline{I}\right|}{\left|\hat{\overline{I}}\right|}\begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_x}{\left|\overline{I}\right|} + \delta k_x \eta_x + \eta_x\sqrt{1-\varphi_{xy}^2-\varphi_{xz}^2} + \varphi_{xy}\eta_y + \varphi_{xz}\eta_z + \dfrac{\omega_x}{\left|\overline{I}\right|} \\ \dfrac{\Delta_y}{\left|\overline{I}\right|} + \delta k_y \eta_y + \eta_y\sqrt{1-\varphi_{yx}^2-\varphi_{yz}^2} + \varphi_{yx}\eta_x + \varphi_{yz}\eta_z + \dfrac{\omega_y}{\left|\overline{I}\right|} \\ \dfrac{\Delta_z}{\left|\overline{I}\right|} + \delta k_z \eta_z + \eta_z\sqrt{1-\varphi_{zx}^2-\varphi_{zy}^2} + \varphi_{zx}\eta_x + \varphi_{zy}\eta_y + \dfrac{\omega_z}{\left|\overline{I}\right|} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Как следует из (14), η_{ji} при таком способе нахождения тоже будут иметь погрешности, как и в (4). Если вычислять заново η_{ji} в ходе итерационной процедуры, то значительная часть погрешности, вызванная Δ_j и δk_j, уменьшится, но останутся составляющие, содержащие φ_{jk} и ω_j.

Оценка η_{ji} по результатам измерений $\hat{I}_{ji}$ может быть проведена и в случае планируемого эксперимента. Целесообразно это делать, когда дисперсии направляющих косинусов принятого значения измеряемого вектора по априорной информации (например, по показаниям датчиков углов стенда) будут больше, чем в случае их вычисления по результатам измерений самого ВИ. Матрицы ковариации погрешностей направляющих косинусов при нахождении их по априорной информации $P\left[\eta_{ji}\left(\overline{\psi}_i\right)\right]$ и результатам измерений ВИ $P\left[\eta_{ji}\left(\hat{\overline{I}}_i\right)\right]$ могут быть выражены для каждого измерительного положения при известных матрицах ковариации, входящих в выражения (4), (14):

$$\begin{aligned} P\left[\eta_{ji}\left(\overline{\psi}_i\right)\right] &= H_{\eta\psi}(i)P_\psi H_{\eta\psi}^T(i), \\ P\left[\eta_{ji}\left(\hat{\overline{I}}_i\right)\right] &= H_{\eta I}(i)P_I H_{\eta I}^T(i), \end{aligned} \tag{15}$$

где $H_{\eta\psi}(i)=\begin{pmatrix} 0 & -\eta_{zi} & \eta_{yi} \\ \eta_{zi} & 0 & -\eta_{xi} \\ -\eta_{yi} & \eta_{xi} & 0 \end{pmatrix}$ – матрица влияния вектора погрешностей задания ориентации $\bar{\psi}=\begin{pmatrix}\psi_x & \psi_y & \psi_z\end{pmatrix}^T$ при i-й измерительной ориентации;

P_ψ – ковариационная матрица вектора $\bar{\Psi}$;

$$H_{\eta I}(i)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta_{xi} & 0 & 0 & \eta_{yi} & \eta_{zi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_{yi} & 0 & 0 & 0 & \eta_{xi} & \eta_{zi} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_{zi} & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{xi} & \eta_{yi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

матрица влияния вектора погрешностей ВИ

$\bar{X}_I=\begin{pmatrix}\Delta_x & \Delta_y & \Delta_z & \delta k_x & \delta k_y & \delta k_z & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} & \varphi_{yx} & \varphi_{yz} & \varphi_{zx} & \varphi_{zy} & \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{pmatrix}^T$ при i-й измерительной ориентации;

P_I – ковариационная матрица вектора $\bar{X}_I$.

В качестве оценки η_{ji} также могут быть выбраны средневзвешенные с учетом полученных дисперсий значения:

$$\bar{\eta}_i=\left(\begin{bmatrix}E\\E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{\eta\psi}(i)P_\psi H^T_{\eta\psi}(i) & O \\ O & H_{\eta I}(i)P_I H^T_{\eta I}(i)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}E & E\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}E\\E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\eta}_i(\bar{\psi})\\ \bar{\eta}_i\left(\hat{\bar{I}}\right)\end{bmatrix}, \quad (16)$$

здесь E – единичная матрица, O – нулевая матрица.

На практике вместо формулы (16) можно ограничиться изменением способа оценки η_{ji} на разных шагах итерационной процедуры: например, на первом шаге использовать $\bar{\eta}_i(\bar{\psi})$, а на последующих, когда оценки смещений нулевых сигналов и отклонений масштабных коэффициентов будут частично скомпенсированы, использовать $\bar{\eta}_i\left(\hat{\bar{I}}\right)$. Впрочем, для большинства задач достаточно ограничиться рациональным выбором одного из способов вычисления η_{ji}, который можно сделать, сравнив, например, определители или следы матриц ковариации параметров ориентации, полученных по формулам (15).

Результаты математического моделирования

Для демонстрации значимости описанных особенностей процедуры калибровки ВИ ниже приводятся описание и результаты численного моделирования процедуры калибровки при различных условиях ее проведения.

Моделирование методом Монте-Карло осуществлялось для двухитерационного алгоритма, на второй итерации которого компенсируются смещения нулевых сигналов и отклонения масштабных коэффициентов. При этом было реализовано три модификации алгоритма:

1) при вычислении модуля $\left|\bar{I}\right|$ по формуле (6) и направляющих косинусов вектора $\bar{I}_d$ в ПСК по известным с конечной точностью углам на каждой из итераций;
2) при вычислении модуля $\left|\bar{I}\right|$ по формуле (5) и направляющих косинусов вектора $\bar{I}_d$ в ПСК по показаниям первичных измерителей на каждой из итераций;
3) вычисление параметров на первой итерации проводится, как в п. 1., а на второй – как в п. 2.

Использовалась программа калибровки из 18 измерительных положений [9].

В каждом испытании (единичном моделировании процесса калибровки) случайным образом задавались смещения нулевых сигналов Δ, отклонения масштабных коэффициентов δk, направляющие косинусы осей чувствительности φ, случайные составляющие результатов измерений ω, погрешности задания ориентации измеряемого вектора относительно ПСК ψ и погрешность знания истинного значения модуля воздействующей величины ΔI. Все случайные величины задавались как несмещенные, независимые, нормально распределенные.

Было проведено 8 вариантов моделирования, количество испытаний N в каждом было равно 20000. Задаваемые значения СКП параметров приведены в табл. 1. Варианты 1 и 2 отличаются порядком всех задаваемых параметров и рассмотрены для того, чтобы установить, влияет ли он на выбор алгоритма. В вариантах 3–8 усиливается влияние одного из параметров на фоне остальных, соответствующих варианту 1.

Таблица 1

СКП задаваемых параметров в различных вариантах моделирования

№ пп.	$\sigma_\Delta / \lvert\bar{I}\rvert$, отн. ед.	$\sigma_{\delta k}$, отн. ед.	σ_φ, отн. ед.	σ_ψ, рад	$\sigma_\omega / \lvert\bar{I}\rvert$, отн. ед.	$\sigma_{\Delta I}$, отн. ед.
1	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-7}$
2	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-4}$
3	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$\mathbf{6\cdot10^{-3}}$	$1\cdot10^{-7}$
4	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-5}$	$\mathbf{2\cdot10^{-4}}$
5	$\mathbf{6\cdot10^{-3}}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-7}$
6	$1\cdot10^{-4}$	$\mathbf{6\cdot10^{-3}}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-7}$
7	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$\mathbf{6\cdot10^{-3}}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-7}$
8	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$\mathbf{6\cdot10^{-3}}$	$1\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-7}$

В каждом испытании вычислялась погрешность оценки как разность между полученной оценкой и заданным значением параметра. Далее рассчитывались средние значения погрешности оценки каждой компоненты вектора $M_{Xi} = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\left(\hat{X}_s(i) - X_s(i)\right)$ (i=1…9) и дисперсии $\sigma_{Xi}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{s=1}^{N}\left(\hat{X}_s(i) - X_s(i) - M_{Xi}\right)^2$.

Для того чтобы не анализировать влияние задаваемых параметров и вариантов алгоритма на погрешности каждой компоненты вектора оценки, а смотреть на изменение точности калибровки в целом, на основе σ_{Xi}^2 и M_{Xi} были сформированы два итоговых показателя:

1) суммарная нормированная квадратическая погрешность

$$D = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\frac{\sigma_{Xi}^2}{K_s(i,i)}};$$

2) среднее относительное смещение оценки

$$\mu = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\frac{\lvert M_{Xi}\rvert}{\sigma_{Xi}}.$$

Параметр D представляет собой сумму дисперсий оценок σ_{Xi}^2, нормированных по их теоретическим значениям, соответствующим диагональным элементам матрицы ковариации K_s (при условии равноточности измерений $D_s = \sigma_\omega^2 / \left|\bar{I}\right|^2$). Если бы модель измерений соответствовала линейной, а в независимых переменных отсутствовали погрешности, можно было бы предполагать, что значение D будет равным 1. Однако при наличии рассмотренных выше погрешностей D будет отклоняться от 1, и чем сильнее будет это отклонение, тем о большем влиянии можно говорить.

Параметр μ показывает, какую долю занимает смещение оценок относительно разброса их значений в среднем. Так, при малых значениях μ можно говорить о том, что смещение «затеряется» на фоне случайного разброса оценок.

В табл. 2 и 3 представлены итоговые показатели для результатов первой итерации работы алгоритма, а в табл. 4, 5 – для второй.

Таблица 2

Среднее относительное смещение оценки μ для первой итерации работы алгоритма калибровки, отн. ед.

Модификация алгоритма	Вариант моделирования							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,007	0,006	0,005	0,003	0,005	0,005	0,334	0,555
2	0,007	0,006	0,006	0,003	0,333	0,234	0,372	0,002
3	0,007	0,006	0,005	0,003	0,005	0,005	0,334	0,555

Таблица 3

Суммарная нормированная квадратическая погрешность *D* для первой итерации работы алгоритма калибровки, отн. ед.

Модификация алгоритма	Вариант моделирования							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,00	1,00	1,00	20,05	1,00	1,00	4,05	3,33
2	1,00	1,00	1,00	20,05	4,58	2,96	6,45	1,00
3	1,00	1,00	1,00	20,05	1,00	1,00	4,05	3,33

Таблица 4

Среднее относительное смещение оценки μ для второй итерации работы алгоритма калибровки, отн. ед.

Модификация алгоритма	Вариант моделирования							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,007	0,006	0,005	0,003	0,005	0,005	0,334	0,555
2	0,007	0,006	0,007	0,003	0,005	0,005	0,372	0,003
3	0,007	0,006	0,007	0,003	0,005	0,005	0,372	0,003

Таблица 5

Суммарная нормированная квадратическая погрешность *D* для второй итерации работы алгоритма калибровки, отн. ед.

Модификация алгоритма	Вариант моделирования							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,00	1,00	1,00	20,05	1,00	1,00	4,05	3,33
2	1,00	1,00	1,00	20,05	1,00	1,00	6,45	1,00
3	1,00	1,00	1,00	20,05	1,00	1,00	6,45	1,00

Видно, что для вариантов моделирования 1–4, когда нет преобладающего разброса значений параметров ВИ и погрешностей задания ориентации, параметры D (характеризующие разброс оценок) и μ (характеризующие смещение оценки) практически не зависят от выбранного способа вычисления модуля измеряемого вектора m и его ориентации $\overline{\eta}_d$.

В случаях преобладающего разброса смещения нулевых сигналов и отклонений масштабного коэффициента (5–6) на первой итерации параметр D в несколько раз меньше для алгоритмов, использующих априорную информацию об ориентации (модификации алгоритма 1 и 3). Эти отличия полностью исчезают на второй итерации, так как на ней в показаниях первичных измерителей компенсируются первичные оценки Δ и δk. При преобладании погрешности ориентации осей чувствительности φ (вариант моделирования 7) параметр D в два раза меньше на каждой из итераций, когда используются априорные данные об ориентации. Зато, когда преобладающей является именно погрешность задания ориентации ψ (вариант моделирования 8), параметр D значительно меньше при использовании алгоритмов, опирающихся только на показания первичных измерителей (модификация алгоритма 2).

Что касается смещения μ, то выбор алгоритма оказывает на него такое же влияние, как и на D. Помимо этого, можно сказать, что для большинства случаев моделирования, вне зависимости от выбора алгоритма, в среднем смещение будет составлять меньше 1% от СКП. В случаях, когда среднее смещение увеличивается, наиболее смещенными получаются оценки отклонений масштабных коэффициентов, и для случая моделирования 7 они могут достигать порядка СКП.

В целом, полученные в ходе статистических испытаний результаты подтверждают сделанные ранее выводы о влиянии нелинейных составляющих на погрешности оценок параметров ВИ Δ_j, δk_j, γ_{jk} при выборе различных способов вычисления модуля измеряемого вектора m и его ориентации $\overline{\eta}_d$.

Выводы

Использование единой модели измерений блоков акселерометров, ДУС и магнитометров дало возможность обобщить ранее известные теоретические результаты по скалярной (инвариантной) калибровке таких векторных измерителей.

Анализ применяемых алгоритмов скалярной (инвариантной) калибровки позволил выявить их особенности, возникающие на этапах вычисления модуля измеряемой величины, перехода к невязкам измерений, формировании матрицы измерений и получения оценок параметров. Статистические испытания подтвердили ряд выявленных закономерностей.

Несмотря на то что для большинства вариантов моделирования выбор алгоритма не оказал влияния на погрешности получаемых оценок, в ряде случаев различные алгоритмы приводили к существенно отличающимся по точности результатам. В связи с этим с практической точки зрения можно дать следующие рекомендации при выборе алгоритма вычисления модуля измеряемой величины и оценки параметров ориентации:

1) в случае значительного различия между значениями нелинейных составляющих измерений M_I и M_{II} выбор между преобразованиями (5) и (6) следует сделать в пользу того преобразования, при котором нелинейная составляющая будет меньше;
2) при больших значениях СКП случайной составляющей измерений следует предпочесть преобразование (6), чтобы полученные оценки были менее смещенными;
3) выбор в пользу способа вычисления параметров ориентации η_{ji} по измерениям ВИ или по априорной информации об ориентации (например, на основе показаний ДУ стенда) следует делать на основе сравнения матриц ковариации, рассчитываемых по формуле (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лакоза С.Л., Мелешко В.В.** Скалярная калибровка акселерометров низкой и средней точности // Радиооптика. 2015. №1. С. 9–28.
2. **Zikmund, A., Ripka, P.,** Scalar calibration of 3-D COIL system, *Journal of Electrical Engineering*, 2010, vol. 61, no 7/s, pp. 39–41.
3. **Василюк Н.Н.** Калибровка коэффициентов линейной модели интегрального магнитометра за счет использования измерений трехосного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27. № 1 (104). С. 107–126. DOI 10.17285/0869-7035.2019.27.1.107-126.
4. **Wu, Q., Wu, R., Han, F., and Zhang, R.,** A three-stage accelerometer self-calibration technique for space-stable inertial navigation systems, *Sensors*, 2018, vol. 18, no. 9, 2888.
5. **Водичева Л.В., Парышева Ю.В.** Оценка точностных параметров датчиков бесплатформенного инерциального измерительного блока с помощью относительно грубого поворотного стола // Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27. № 2 (105). С. 162–178. DOI: 10.17285/0869-7035.2019.27.2.162-178.
6. **Измайлов Е.А., Лепе С.Н., Молчанов А.В., Поликовский Е.Ф.** Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // XV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ «ЦНИИ Электроприбор», 2008. С. 145–154.
7. **Аврутов В.В., Головач С.В., Мазепа Т.Ю.** О скалярной калибровке инерциального измерительного модуля // Сборник трудов XIX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным системам. СПб., 2012. С. 113–118.
8. **Егоров Ю.Г. и др.** Итерационная процедура калибровки чувствительных элементов БИНС // Авиакосмическое приборостроение. 2018. №2. С. 3–17.
9. **Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И.** Гарантирующий подход и l1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Издательство Московского университета. 2012. 296 с.
10. **Bonnet, S., Bassompierre, C., Godin, C., Lesecq, S., Barraud, A.,** Calibration methods for inertial and magnetic sensors, *Sensors and Actuators A: Physical*, 2009, 156, pp. 302–311.
11. **Cheng Chi, Jun-Wei Lv, Dan Wang,** Calibration of triaxial magnetometer with ellipsoid fitting method, *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*, 2019, 237.
12. **Jiakun Li, Kuangi-shu, Heng Zhang,** An efficient method for tri-axis magnetometer calibration, *IEEE SmartWorld-UIC-ATC-SCALCOM-IOP-SCI*, 2019, pp. 654–660.

13. **Pieniazek, J.,** Ellipsoid multi-axial sensor calibration with temperature compensation, *IEEE 5th international workshop on metrology for AeroSpace*, 2019, pp. 70–75.
14. **Crassidis, J.L., Cheng, Y.,** Three-Axis Magnetometer Calibration Using Total Least Squares, *AIAA SciTech Forum*, 2020.
15. **Нестеров В.Н.** Теоретические основы измерений составляющих векторных многокомпонентных физических величин // Измерительная техника. 2004. №7. С. 12–16.
16. **Pilu, M., Fitzgibbon, A.W., Fisher, R.B.,** Ellipse-specific direct least-square fitting, *IEEE Proceedings of International Conference on Image Processing*, 1996, vol. 3, pp. 599–602.
17. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей : учебник. М.: Юстиция, 2018. 658 с.
18. **Крянев А.В., Лучкин Г.В.** Математические методы обработки неопределенных данных. 2-е изд. испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 216 с.

Egorov, Yu.G. (Bauman Moscow State Technical University, Moscow), **Popov, E.A.** (Central Scientific – Research Institute of Automatics and Hydraulics, Moscow)

Analysis of Errors in Scalar Calibration of the Vector Meter, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2020, vol. 28, no. 4 (111), pp. 37–52.

Abstract. The article presents the results of an analytical study of errors of various algorithms for scalar calibration of triaxial meters of a vector physical quantity. Practical recommendations are given for implementation of the calibration algorithm. The results are confirmed by numerical modeling.

Key words: calibration, accelerometer, angular rate sensor, magnetometer, vector meter.

Материал поступил 19.11.2020