

О. А. СТЕПАНОВ, Ю. А. ЛИТВИНЕНКО, В. А. ВАСИЛЬЕВ, А. Б. ТОРОПОВ, М. В. БАСИН

АЛГОРИТМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ КВАДРАТИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЯХ В УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ И ИЗМЕРЕНИЙ. ЧАСТЬ 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Специфика предложенного в первой части статьи полиномиального фильтра, ориентированного на решение задач фильтрации при наличии квадратичных нелинейностей как в уравнениях динамики, так и в уравнениях измерений, его особенности и преимущества по сравнению с обобщенным фильтром Калмана поясняются и иллюстрируются на методическом примере и примерах решения задач обработки навигационной информации.

Ключевые слова: алгоритмы калмановского типа, нелинейная фильтрация, полиномиальный фильтр, примеры задач, навигационная информация.

1. Введение

В первой части статьи подробно описан полиномиальный фильтр (ПФ), ориентированный на решение задач фильтрации при наличии квадратичных нелинейностей как в уравнениях динамики, так и в уравнениях для измерений [1]. Там же обсуждается и взаимосвязь ПФ с обобщенным фильтром Калмана (ОФК) и фильтрами второго порядка, а кроме того, излагается методика оценки эффективности и сопоставления алгоритмов. Навигационные задачи, в которых могут быть использованы алгоритмы ПФ, условно можно разделить на две группы. В одной из них полиномиальный (в нашем случае квадратичный) характер нелинейностей присущ самой задаче в ее исходной постановке. Типичным примером здесь могут служить задачи идентификации [2–4]. В этом случае при реализации ПФ целесообразно использовать соотношения, представленные в табл. 1 [1]. К этой же группе можно отнести и задачи, в которых квадратичные нелинейности могут проявиться либо после перехода к новому вектору состояния, либо за счет преобразования исходных измерений. Примером здесь в частности может служить задача определения координат по дан-

Степанов Олег Андреевич. Член-корреспондент РАН, доктор технических наук, начальник научно-образовательного центра, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО (С.-Петербург). Вице-президент международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID 0000-0003-3640-3760.

Литвиненко Юлия Александровна. Кандидат технических наук, начальник сектора, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО. Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID 0000-0001-5438-2911.

Васильев Владимир Андреевич. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО, СПбГЭТУ «ЛЭТИ» (С.-Петербург). ORCID 0000-0003-0768-0814.

Торопов Антон Борисович. Кандидат технических наук, старший научный сотрудник, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». ORCID 0000-0001-6262-7691.

Басин Михаил Валентинович. Профессор, Автономный университет штата Нуэво Леон (Сан-Николас-де-лос-Гарса, Мексика), Университет ИТМО. ORCID 0000-0002-7274-4303.

ным о дальностях до точечных ориентиров и радиальных скоростях относительно этих ориентиров. В этом случае речь идет об использовании в качестве измерений квадрата дальностей до точечных ориентиров и скорости их изменения [5–7]. Наконец, наиболее распространенной является группа задач, в которых квадратичные нелинейности появляются после разложения нелинейных функций в ряд с учетом членов второго порядка малости [8–10]. Для этих задач при реализации ПФ удобнее ориентироваться на выражения для ПФ, приведенные в табл. 2 [1].

Во второй части статьи приводятся примеры использования ПФ для решения конкретных задач обработки навигационной информации с учетом отмеченных особенностей.

Работа имеет следующую структуру. Предварительно рассматривается методический пример, иллюстрирующий применение соотношений для ПФ, приведенных в табл. 1 [1], для случая, когда нелинейности проявляются как в уравнениях динамики, так и в уравнениях измерений. Затем описывается задача идентификации параметров модели бокового движения гидрографического судна, в которой нелинейности квадратичного типа присущи самой постановке задачи и проявляются лишь в уравнениях динамики. И наконец, применение ПФ поясняется на примере решения задачи навигации с использованием поля ускорения силы тяжести, представляющей собой задачу с нелинейностями общего вида, которые проявляются только в измерениях.

Следует заметить, что при рассмотрении конкретных примеров не предполагается их полное исследование с точки зрения детального анализа точности, а ставится цель проиллюстрировать применение и специфику предложенного алгоритма, что, по мнению авторов, упростит для разработчиков возможность его использования для решения стоящих перед ними конкретных прикладных задач.

2. Методический пример

Специфику ПФ, описанного в первой части статьи [1], его особенности и преимущества по сравнению с ОФК поясним сначала на простом методическом примере.

Предположим, что требуется решить задачу оценивания вектора состояния $x_k = [x_{1k} \quad x_{2k}]^T$

$$\begin{aligned} x_{1k} &= x_{1k-1} - ax_{1k-1}x_{2k-1} + w_k, \\ x_{2k} &= x_{2k-1}, \end{aligned} \quad x_0 \in N \left(x_0; \begin{bmatrix} \bar{x}_{10} \\ \bar{x}_{20} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \right) \quad (1)$$

по измерениям

$$y_k = x_{1k} + bx_{1k}x_{2k} + v_k, \quad (2)$$

где a и b – известные коэффициенты. Полагаем, что все используемые величины безразмерные. В этих соотношениях w_k, v_k – независимые между собой и от x_0 центрированные дискретные гауссовские белые шумы с дисперсиями σ_w^2 и σ_v^2 .

Особенность примера заключается в том, что квадратичная нелинейность проявляется как в уравнении динамики (1), так и в уравнении измерений (2) в виде слагаемых, содержащих $x_{1k}x_{2k}$.

Принимая во внимание (1), (2), введем необходимые для использования ПФ вектор состояния и соответствующие ему функции и параметры:

$$x_k = (x_{1k}, x_{2k})^T, \\ f_k(x_{k-1}) = \begin{bmatrix} f_{1k}(x_{k-1}) \\ f_{2k}(x_{k-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k-1} - ax_{1,k-1}x_{2,k-1} \\ x_{2,k-1} \end{bmatrix}, u_k = 0,$$

$$h_k(x_k) = x_{1,k} + bx_{1,k}x_{2,k},$$

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Q_k = \sigma_w^2, R_k = \sigma_v^2, n = 2, m = 1, \bar{x}_0 = [\bar{x}_{10} \quad \bar{x}_{20}]^T, P_0^x = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2).$$

Конкретизируем далее необходимые формулы, при этом, поскольку квадратичная нелинейность проявляется в исходной постановке задачи, при получении соотношений для ПФ будем ориентироваться на формулы из табл. 1 [1]. При формировании матриц $\{\Phi_k^{xx}\}_j, j = \overline{1..n}$, входящих в Φ_k^{xx} , в общем случае рекомендуется простая процедура. Если квадратичная форма для компоненты j содержит ненулевое слагаемое $ax_{\mu k}x_{\nu k}$, то соответствующие элементы $\{\Phi_k^{xx}(\mu, \nu)\}_j = \{\Phi_k^{xx}(\nu, \mu)\}_j = a/2, \mu, \nu = \overline{1..2}$. Таким образом, получаем

$$\Phi_k^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_k^{xx} = \left(\left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_1^T, \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_2^T \right)^T, \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -0.5a \\ -0.5a & 0 \end{pmatrix}, \\ \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

и, как следствие, можем записать:

$$\Phi_k^{PF}(\hat{x}_{k-1}^{PF}) = \left. \frac{df_k}{dx_{k-1}^T} \right|_{x_{k-1} = \hat{x}_{k-1}^{PF}} = f'_k(\hat{x}_{k-1}^{PF}) = \\ = \Phi_k^x + 2 \left(I_2 \otimes \left(\hat{x}_{k-1}^{PF} \right)^T \right) \Phi_k^{xx} = \begin{pmatrix} 1 - a\hat{x}_{2k-1}^{PF} & -a\hat{x}_{1k-1}^{PF} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Аналогично соотношения для матриц H_k^0, H_k^x, H_k^{xx} в уравнениях измерений могут быть записаны как

$$H_k^0 = 0, H_k^x = (1 \quad 0), H_k^{xx} = \left(\left\{ H_k^{xx} \right\}_1^T \right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0.5b \\ 0.5b & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$H_k^{PF}(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}) = \left. \frac{dh_k}{dx_k^T} \right|_{x_k = \hat{x}_{k/k-1}^{PF}} = h'_k(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}) = H_k^x + 2 \left(I_1 \otimes \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right)^T \right) H_k^{xx} = \\ = \left(1 + b\hat{x}_{2k/k-1}^{PF} \quad b\hat{x}_{1k/k-1}^{PF} \right). \quad (6)$$

Напомним, что при использовании двойной индексации первый индекс определяет номер компоненты соответствующего вектора.

Используя матрицы (3)–(6) и табл. 1 [1], можно сформировать алгоритм ПФ. Для получения его компактной записи воспользуемся дополнительными слагаемыми, введенными в первой части статьи в табл. 2. Выражения для них применительно к рассматриваемому примеру конкретизируются путем подстановки в них соответствующих матриц (3)–(6). В частности, слагаемые d_k^f и D_k^f определяются как

$$d_k^f = 2Tr_{2 \times 1} \left(\Phi_k^{xx} P_{k-1}^{PF} \right) = \begin{bmatrix} tr \left(\left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_1 P_{k-1}^{PF} \right) \\ tr \left(\left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_2 P_{k-1}^{PF} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tr \left(\begin{pmatrix} 0 & -0,5a \\ -0,5a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11k-1}^{PF} & P_{12k-1}^{PF} \\ P_{12k-1}^{PF} & P_{22k-1}^{PF} \end{pmatrix} \right) \\ tr(0_{2 \times 2}) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -0,5atr \left(\begin{pmatrix} P_{12k-1}^{PF} & P_{22k-1}^{PF} \\ P_{11k-1}^{PF} & P_{12k-1}^{PF} \end{pmatrix} \right) \\ tr(0_{2 \times 2}) \end{bmatrix} = -a \begin{bmatrix} P_{12k-1}^{PF} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$D_k^f \left(\hat{x}_{k-1}^{PF} \right) = 2Tr_{2 \times 2} \left(\Phi_k^{xx} P_{k-1}^{PF} \left(\left(\Phi_k^{xx} \right)^T \left(I_2 \otimes P_{k-1}^{PF} \right) \right) \right) = a^2 \begin{bmatrix} P_{11k-1}^{PF} P_{22k-1}^{PF} + \left(P_{12k-1}^{PF} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $0_{m \times n}$ здесь и далее – нулевая матрица размерности $m \times n$.

Аналогично можем конкретизировать формулы и для остальных дополнительных слагаемых, сведя их в табл. 1. Напомним, что введенный в приложении к первой части оператор $Tr_{c \times d}(M)$ преобразует блочную матрицу M , состоящую из n -мерных квадратных блоков $M_{i,j}$, $i = \overline{1,c}$; $j = \overline{1,d}$, в матрицу размерности $c \times d$, элементами которой являются следы матриц, т.е. $tr(M_{i,j})$, $i = \overline{1,c}$; $j = \overline{1,d}$. В частном случае $Tr_{1 \times 1}(M) \equiv tr(M)$.

Таблица 1

Дополнительные слагаемые в ПФ		
Причина	Куда входит	Вид дополнительного слагаемого
Нелинейность в уравнении динамики	В выражение для прогноза вектора состояния (9)	$d_k^f = Tr_{2 \times 1} \left(\Phi_k^{xx} P_{k-1}^{PF} \right) = -a \begin{bmatrix} P_{12k-1}^{PF} \\ 0 \end{bmatrix}$
	В выражение для матрицы ковариаций погрешности прогноза вектора состояния (10)	$D_k^f \left(\hat{x}_{k-1}^{PF} \right) = 2Tr_{2 \times 2} \left(\Phi_k^{xx} P_{k-1}^{PF} \left(\left(\Phi_k^{xx} \right)^T \left(I_2 \otimes P_{k-1}^{PF} \right) \right) \right) = \\ = a^2 \begin{bmatrix} P_{11k-1}^{PF} P_{22k-1}^{PF} + \left(P_{12k-1}^{PF} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
	В выражение для матрицы ковариаций погрешности прогноза текущего измерения (14)	$D_k^{fh} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF} \right) = H_k^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) D_k^f \left(\hat{x}_{k-1}^{PF} \right) H_k^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right)^T = \\ = a^2 \left(1 + b \hat{x}_{2k/k-1}^{PF} \right)^2 \begin{bmatrix} P_{11k-1}^{PF} P_{22k-1}^{PF} + \left(P_{12k-1}^{PF} \right)^2 \\ 0 \end{bmatrix}$
	В выражение для взаимной ковариации (15)	$F_k \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF} \right) = 2Tr_{2 \times 2} \left(\Phi_k^{xx} P_{k-1}^{PF} \left(\left(\Phi_k^{xx} \right)^T \left(I_2 \otimes P_{k-1}^{PF} \right) \right) \right) \left(H_k^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) \right)^T = \\ = D_k^f \left(\hat{x}_{k-1}^{PF} \right) \left(H_k^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) \right)^T = \\ = \begin{bmatrix} a^2 \left(1 + b \hat{x}_{2k/k-1}^{PF} \right) \left(P_{11k-1}^{PF} P_{22k-1}^{PF} + \left(P_{12k-1}^{PF} \right)^2 \right) \\ 0 \end{bmatrix}$

	В выражение для прогноза текущего измерения (13)	$d_k^h = Tr_{1 \times 1} \left(H_k^{xx} P_{k/k-1}^{PF} \right) = b P_{12k/k-1}^{PF}$
Нелинейность в уравнении динамики и измерений	В выражение для матрицы ковариаций погрешности прогноза текущего измерения (14)	$\begin{aligned} D_k^h &= 2Tr_{1 \times 1} \left(H_k^{xx} P_{k/k-1}^{PF} \left(\left(H_k^{xx} \right)^T \left(I_1 \otimes P_{k/k-1}^{PF} \right) \right) \right) = \\ &= 0,5b^2 \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_{k/k-1}^{PF} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_{k/k-1}^{PF} \right) = \\ &= b^2 \left(P_{11k/k-1}^{PF} P_{22k/k-1}^{PF} + \left(P_{12k/k-1}^{PF} \right)^2 \right) \end{aligned}$

С использованием представленных в табл. 1 соотношений для дополнительных слагаемых $d_k^f, d_k^h, D_k^h, D_k^{fh}$ и F_k нетрудно получить для ПФ приводимые ниже компактные выражения для блока прогноза и блока коррекции. При этом в блоке прогноза вычисляются прогноз вектора состояния и матрица ковариаций его погрешностей:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1k/k-1}^{PF} \\ \hat{x}_{2k/k-1}^{PF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1k}(\hat{x}_{k-1}) \\ f_{2k}(\hat{x}_{k-1}) \end{bmatrix} + d_k^f(\hat{x}_{k-1}^{PF}), \quad (9)$$

$$P_{k/k-1}^{PF}(\hat{x}_{k-1}^{PF}) = \tilde{P}_{k/k-1}^{PF}(\hat{x}_{k-1}^{PF}) + D_k^f(\hat{x}_{k-1}^{PF}), \quad (10)$$

где

$$\tilde{P}_{k/k-1}^{PF}(\hat{x}_{k-1}^{PF}) = \Phi_k^{PF}(\hat{x}_{k-1}^{PF}) P_{k-1}^{PF} \left(\Phi_k^{PF}(\hat{x}_{k-1}^{PF}) \right)^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T, \quad (11)$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} P_{k/k-1}^{PF}(\hat{x}_{k-1}^{PF}) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 - a\hat{x}_{2k-1}^{PF} & -a\hat{x}_{1k-1}^{PF} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11k-1}^{PF} & P_{12k-1}^{PF} \\ P_{12k-1}^{PF} & P_{22k-1}^{PF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - a\hat{x}_{2k-1}^{PF} & 0 \\ -a\hat{x}_{1k-1}^{PF} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_w^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + D_k^f(\hat{x}_{k-1}^{PF}). \end{aligned} \quad (12)$$

В блоке коррекции вычисляются прогноз измерений и матрица ковариаций его погрешностей:

$$\hat{y}_k^{PF} = h_k(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}) = \hat{x}_{1k/k-1}^{PF} + b\hat{x}_{1k/k-1}^{PF}\hat{x}_{2k/k-1}^{PF} + d_k^h(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P_{y_k}^{PF}(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}) &= H_k^{PF}(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}) \tilde{P}_{k/k-1}^{PF} \left(H_k^{PF}(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}) \right)^T + R_k + D_k^{fh} + D_k^h = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + b\hat{x}_{2k/k-1}^{PF} & b\hat{x}_{1k/k-1}^{PF} \\ \tilde{P}_{12k/k-1}^{PF} & \tilde{P}_{22k/k-1}^{PF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + b\hat{x}_{2k/k-1}^{PF} \\ b\hat{x}_{1k/k-1}^{PF} \end{pmatrix} + \sigma_v^2 + D_k^{fh} + D_k^h, \end{aligned} \quad (14)$$

взаимная матрица ковариации погрешностей прогноза вектора состояний и ошибок прогноза измерений:

$$\begin{aligned}
 P_{x_k y_k}^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) &= \tilde{P}_{k/k-1}^{PF} \left(H_k^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) \right)^T + F_k \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF} \right) = \\
 &= \begin{pmatrix} \tilde{P}_{11k/k-1}^{PF} & \tilde{P}_{12k/k-1}^{PF} \\ \tilde{P}_{12k/k-1}^{PF} & \tilde{P}_{22k/k-1}^{PF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + b \hat{x}_{2k/k-1}^{PF} \\ b \hat{x}_{1k/k-1}^{PF} \end{pmatrix} + F_k \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF} \right),
 \end{aligned} \tag{15}$$

а также коэффициент усиления, искомая оценка вектора состояний и соответствующая матрица ковариаций ее погрешностей:

$$K_k^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) = P_{x_k y_k}^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) \left(P_{y_k}^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) \right)^{-1}, \tag{16}$$

$$\hat{x}_k^{PF} = \hat{x}_{k/k-1}^{PF} + K_k^{PF} \left(y_k^{PF} - \hat{y}_k^{PF} \right), \tag{17}$$

$$P_k^{PF} = P_{k/k-1}^{PF} - K_k^{PF} \left(P_{x_k y_k}^{PF} \right)^T. \tag{18}$$

Путем подстановки выражения для дополнительных слагаемых из табл. 1 в соотношения (9)–(15) легко более предметно конкретизировать ПФ, описанный в табл. 1 первой части статьи.

Формулы для ОФК можно получить из равенств (9)–(18), если заменить индекс *PF* на *EKF* и исключить из них слагаемые $d_k^f, d_k^h, D_k^h, D_k^{fh}$ и F_k .

Анализ этих слагаемых в частности показывает, что нелинейности типа $c_j x_{1,k-1} x_{2,k-1}$, в которых $c_j, j = f, h$ – известные коэффициенты $c_h = -a, c_f = b$, приводят к появлению одинаковым образом проявляющихся дополнительных слагаемых $d_k^j = c_j P_{12k/k-1}^{PF}$ для прогноза оценки первой компоненты вектора состояния и прогноза измерений, в правой части которой содержится нелинейное слагаемое, с одной стороны, и слагаемых $c_j^2 \left(P_{11k-1}^{PF} P_{22k-1}^{PF} + \left(P_{12k-1}^{PF} \right)^2 \right)$ для соответствующих дисперсий – с другой. Уровень этих слагаемых зависит в том числе и от величины взаимной корреляции между погрешностями оценки первой и второй компонент.

Кроме того, появляется дополнительное слагаемое

$$a^2 \left(P_{11k-1}^{PF} P_{22k-1}^{PF} + \left(P_{12k-1}^{PF} \right)^2 \right) \left(1 + b \hat{x}_{2k/k-1}^{PF} \right)$$

у диагонального элемента матрицы $F_k \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF} \right)$.

По аналогии с тем, как это было сделано в примере, рассмотренном в первой части статьи [1], опишем следующую нестационарную задачу фильтрации вектора состояний $x_k = [x_{1k} \quad x_{2k}]^T$:

$$\begin{aligned}
 x_{1k} &= x_{1k-1} - a x_{1k-1} x_{2k-1} + d_k^f + w_k + \tilde{w}_k, \\
 x_{2k} &= x_{2k-1},
 \end{aligned} \quad \left[\begin{matrix} x_{10} \\ x_{20} \end{matrix} \right] \in N \left(x_0; \begin{bmatrix} \bar{x}_{10} \\ \bar{x}_{20} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \right) \tag{19}$$

по измерениям

$$y_k = x_{1k} + b x_{1k} x_{2k} + d_k^h + v_k + \tilde{v}_k + h_{1k}' \tilde{w}_k. \tag{20}$$

В этих уравнениях величины $d_k^f \left(\hat{x}_{k-1}^{PF} \right), d_k^h \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF} \right)$ и $h_{1k}' \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) = 1 + b \hat{x}_{2k/k-1}^{PF}$ при обработке текущего измерения трактуются как известные значения, \tilde{w}_k – дополнительный гауссовский центрированный порождающий шум с дисперсией $D_k^f \left(\hat{x}_{k-1}^{PF} \right)$,

\tilde{v}_k – дополнительный гауссовский центрированный белый шум с дисперсией $D_k^h(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF})$. Эти шумы считаются не коррелированными с w_k и v_k . Нетрудно убедиться, что уравнения ПФ в рассматриваемом примере будут совпадать с уравнениями ОФК для такой задачи. При этом наличие дополнительного измерительного шума $h'_k \tilde{w}_k$, коррелированного с порождающим шумом \tilde{w}_k , обеспечивает наличие дополнительного слагаемого $D_k^h(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF})$ в уравнении для дисперсии погрешности прогноза измерения и слагаемого $F_k(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF})$ в выражении для взаимной ковариации. Будем в дальнейшем называть модель для такой задачи эквивалентной расширенной моделью. Эта модель может быть полезной при анализе влияния квадратичных нелинейностей на точность решения рассматриваемой задачи с использованием ПФ и ОФК. В частности, можно отметить, что ОФК, используемый для решения исходной задачи (1), (2), синтезируется для модели, в которой наличие величин d_k^f , \tilde{w}_k в уравнениях динамики и d_k^h , \tilde{v}_k , $h'_k \tilde{w}_k$ в уравнениях измерений не предполагается. Ясно, что все это и создает предпосылки к ухудшению точности ОФК по сравнению с ПФ, в том числе и к занижению расчетной матрицы ковариаций и неточному вычислению коэффициента усиления. По сути это есть следствие того факта, что в ОФК должным образом не учитывается наличие квадратичных составляющих в уравнениях динамики и измерений, в то время как в ПФ фактически формируются и используются оценки этих составляющих в виде d_k^f и d_k^h с учетом характеристики их точности.

С целью сопоставления алгоритмов при решении рассматриваемой задачи было проведено ее моделирование в соответствии с процедурой, приведенной в табл. 5 части 1, при $L = 1000$. В ходе моделирования значения действительных и расчетных среднеквадратических погрешностей (СКП) оценивания вычислялись с использованием диагональных элементов соответствующих матриц ковариаций для сопоставляемых алгоритмов.

При моделировании были приняты следующие значения: $\bar{x}_{10} = 2,5$, $\bar{x}_{20} = 0,6$, $a = 0,01$, $b = 1$, $\sigma_1^2 = 4$, $\sigma_w^2 = 0,001$, $R_k = \sigma_v^2 = 0,01$. Число шагов k принималось равным 150. Моделирование проводилось для двух значений: $\sigma_2^2 = 0$ и $\sigma_2^2 = 0,01$. Результаты расчетов представлены далее на рис. 1, 2 в виде графиков СКП, на которых розовая (расчетная – OPT calc) и синяя (действительная – OPT real) кривые соответствуют оптимальному алгоритму, реализуемому с использованием фильтра частиц [11, 12] (количество частиц – 500); красная (расчетная – PF calc) и зеленая (действительная – PF real) кривые соответствуют ПФ; красная прерывистая (расчетная – EKF calc) и синяя (действительная – EKF real) прерывистая – ОФК, коричневая (действительная – SOKF real) и желтая (расчетная – SOKF calc) – фильтру второго порядка, в котором прогноз для вектора состояний вычисляется согласно приведенным в первой части соотношениям (41), (42) [1]. Кроме того, для последнего измерения построены гистограммы и рассчитаны соответствующие СКП.

На рис. 1 приведены результаты для случая $\sigma_2^2 = 0$. Нетрудно заметить, что этот вариант соответствует линейной задаче оценивания. Существенно, что, как и следовало ожидать, в этом случае все дополнительные слагаемые, приведенные в табл. 1, обнуляются. Таким образом, результаты для всех алгоритмов должны быть одинаковыми и совпадать с результатами для ОФК, обеспечивающими в данном случае вычисление потенциальной точности. Это и подтверждают графики СКП, приведенные в качестве примера только для первой компоненты. Аналогичное совпадение имеется и для гистограмм, представленных в табл. 2.

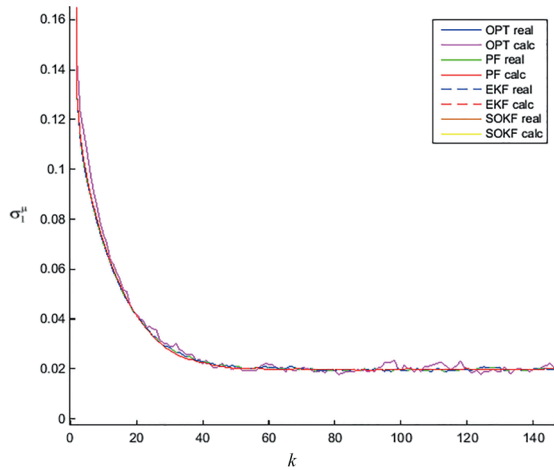


Рис. 1. Действительные и расчетные СКП оценивания x_1 для различных алгоритмов при $\sigma_2^2 = 0$

Т а б л и ц а 2

Гистограммы погрешностей оценивания первой компоненты вектора состояния для различных алгоритмов и безусловные СКП для последнего измерения $k = 150$

Оптимальный фильтр	Полиномиальный фильтр	Фильтр второго порядка	ОФК
СКП = 0,026	СКП = 0,026	СКП = 0,026	СКП = 0,026

Аналогичные результаты для случая $\sigma_2 = 0,1$ приведены на рис. 2 и в табл. 3.

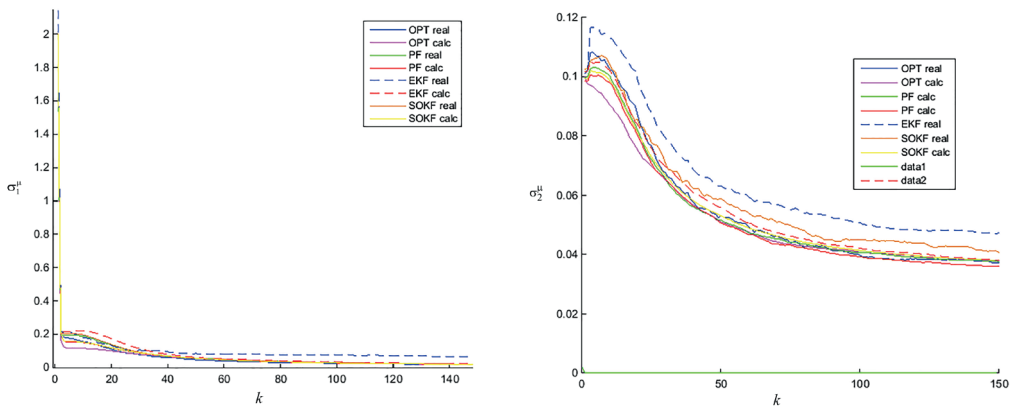
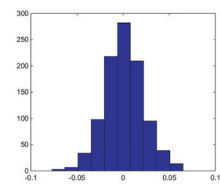
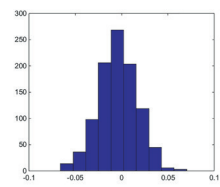
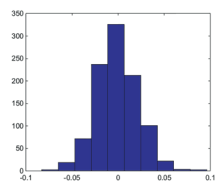
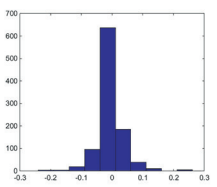


Рис. 2. Действительные и расчетные СКП оценивания x_1 и x_2 для различных алгоритмов при $\sigma_2^2 = 0,1$

Гистограммы погрешностей оценивания первой компоненты вектора состояния для различных алгоритмов и безусловные СКП оценивания для последнего измерения

	Оптимальный фильтр	Полиномиальный фильтр	Фильтр второго порядка	ОФК
x_1	 <p>СКП = 0,0230</p>	 <p>СКП = 0,0281</p>	 <p>СКП = 0,0294</p>	 <p>СКП = 0,0632</p>

Дополнительные слагаемые в матрицах ковариаций в начальный момент времени $k = 0$ при $\sigma_1^2 = 4$, $\sigma_2^2 = 0,01$, $a^2 = 10^{-4}$ и $b = 1$ можно оценить как

$$D_k^f = a^2 \begin{pmatrix} P_{11k-1}^{PF} P_{22k-1}^{PF} + (P_{12k-1}^{PF})^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_k^h = b^2 \left(P_{11k-1}^{PF} P_{22k-1}^{PF} + (P_{12k-1}^{PF})^2 \right) = 0,04,$$

$$F_k = \begin{pmatrix} a^2 (1 + b \hat{x}_{2k/k-1}^{PF}) \left(P_{11k-1}^{PF} P_{22k-1}^{PF} + (P_{12k-1}^{PF})^2 \right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,4 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сопоставляя ненулевой элемент $\sqrt{D_k^f} = 0,002$ с $\sigma_w = 0,032$ и $\sqrt{D_k^h} = 0,2$ с величиной $\sigma_v = 0,1$, можем сделать вывод о том, что, поскольку $\sqrt{D_k^f} = 0,002 \ll \sigma_w = 0,03$, а $\sqrt{D_k^h} > \sigma_v$, влияние нелинейностей в измерениях проявляется в большей степени, а нелинейностей в динамике – незначительно. Этим, собственно, и объясняется тот факт, что рассмотренная в первой части статьи модификация фильтра второго порядка, в котором как раз и пренебрегают вкладом D_k^f , обеспечивает получение результатов, практически совпадающих с ПФ.

Как следует из представленного моделирования, ПФ обеспечивает точность, близкую к точности оптимального алгоритма, и кроме того, вырабатываемая в нем расчетная матрица ковариаций согласована с действительной матрицей ковариаций, что свидетельствует о состоятельности алгоритма ПФ в рассматриваемом примере. Традиционный же ОФК при $\sigma_2 = 0,1$ таким свойством не обладает, существенно проигрывая по точности ПФ, и при этом соответствующая ему гистограмма заметно отличается от гауссовской. Фильтр второго порядка лишь незначительно уступает по точности ПФ.

3. Задача идентификации параметров модели бокового движения гидрографического судна

Рассмотрим теперь пример задачи, связанной с обработкой навигационной информации. Такой задачей является, в частности, задача идентификация параметров модели бокового движения гидрографического судна. Как следует из [4], эта задача может быть сведена к оцениванию вектора состояния, описываемого уравнениями в виде

$$\begin{aligned} V_{Tk} &= (1 - \mu_{V_t})V_{Tk-1} + g_{V_t} w_{1k}, \\ W_k &= (1 - \mu_f)W_{k-1} + g_f w_{2k}, \\ V_k &= W_{k-1} + \theta_1 V_{k-1} + \alpha_1 \omega_{k-1} + u_{1k}, \\ \omega_k &= lW_{k-1} + \theta_2 V_{k-1} + \alpha_2 \omega_{k-1} + u_{2k} \end{aligned} \quad (21)$$

по формируемым от спутниковой навигационной системы и корабельного компаса измерениям

$$\begin{aligned} y_{1k} &= V_k + V_{Tk} + v_{1k}, \\ y_{2k} &= \omega_k + v_{2k}. \end{aligned} \quad (22)$$

В этих соотношениях: V_{Tk} – поперечная составляющая скорости течения (описываемая марковской последовательностью первого порядка с интервалом корреляции $1/\mu_{V_t}$); W_k – нормализованная (приведенная к массе судна) боковая составляющая силы ветрового воздействия (также описываемая марковской последовательностью первого порядка с интервалом корреляции $1/\mu_f$); V_k – поперечная составляющая скорости судна относительно воды; ω_k – угловая скорость рыскания судна, l – известное плечо боковой составляющей силы ветрового воздействия; α_1, α_2 – известные параметры модели; u_{1k}, u_{2k} – известные сигналы управления (перекладка руля); θ_1, θ_2 – неизвестные постоянные параметры модели, подлежащие идентификации; w_{1k}, w_{2k} – некоррелированные между собой и с начальным значением x_0 центрированные порождающие белые шумы с единичными дисперсиями. Значения μ_f, μ_{V_t} также считаются известными [4]; $v_k = [v_{1k} \ v_{2k}]^T$ – вектор погрешностей измерений, представляющий собой независимую от x_0 белозумную последовательность с матрицей ковариаций R_k .

Принимая во внимание соотношения табл. 1 части 1, введем необходимые для использования ПФ вектор состояния и соответствующие ему функции и параметры:

$$x_k = (V_{Tk}, W_k, V_k, \omega_k, \theta_1, \theta_2)^T = (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, x_{4k}, x_{5k}, x_{6k})^T,$$

$$f_k(x_{k-1}) = \begin{bmatrix} f_{1k}(x_{k-1}) \\ f_{2k}(x_{k-1}) \\ f_{3k}(x_{k-1}) \\ f_{4k}(x_{k-1}) \\ f_{5k}(x_{k-1}) \\ f_{6k}(x_{k-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \mu_{V_t})V_{Tk-1} \\ (1 - \mu_f)W_{k-1} \\ W_{k-1} + \theta_1 V_{k-1} + \alpha_1 \omega_{k-1} \\ lW_{k-1} + \theta_2 V_{k-1} + \alpha_2 \omega_{k-1} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \mu_{V_t})x_{1k-1} \\ (1 - \mu_f)x_{2k-1} \\ x_{2k-1} + x_{3k-1}x_{5k-1} + \alpha_1 x_{4k-1} \\ lx_{2k-1} + x_{3k-1}x_{6k-1} + \alpha_2 x_{4k-1} \\ x_{5k-1} \\ x_{6k-1} \end{bmatrix},$$

$$h_k(x_k) = \begin{pmatrix} V_k + V_{Tk} \\ \omega_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1k} + x_{3k} \\ x_{4k} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} g_{V_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_f & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad Q_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_k = \begin{bmatrix} r_1^2 & 0 \\ 0 & r_2^2 \end{bmatrix},$$

$$n = 6, m = 2, P_0 = \text{diag}\{\sigma_j^2\}, j = \overline{1,6}.$$

Матрицы Φ_k^x , Φ_k^{xx} примут вид:

$$\Phi_k^x = \begin{pmatrix} (1-\mu_{V_r}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\mu_F) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\Phi_k^{xx} = \left(\left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_1^T \quad \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_2^T \quad \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_3^T \quad \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_4^T \quad \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_5^T \quad \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_6^T \right)^T, \quad (24)$$

$$\left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_1 = \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_2 = \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_5 = \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_6 = 0_{6 \times 6},$$

$$\left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\{ \Phi_k^{xx} \right\}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицу Φ_k^{PF} можно записать как

$$\Phi_k^{PF}(\hat{x}_{k-1}^{PF}) = \Phi_k^x + 2 \left(I_6 \otimes (\hat{x}_{k-1}^{PF})^T \right) \Phi_k^{xx} = \begin{pmatrix} 1-\mu_{V_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu_F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \hat{x}_{5k-1}^{PF} & \alpha_1 & \hat{x}_{3k-1}^{PF} & 0 \\ 0 & l & \hat{x}_{6k-1}^{PF} & \alpha_2 & 0 & \hat{x}_{3k-1}^{PF} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Поскольку измерения линейны, то

$$H_k^x = H_k^{PF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_k^{xx} = 0. \quad (26)$$

В соответствии с соотношениями, аналогичными (9) и (10), можно конкретизировать выражения для прогноза и расчетной матрицы ковариаций его погрешностей. Применяя выражения, аналогичные (13), (14) и (15), вычислим прогноз измерений \hat{y}_k^{PF} , матрицы ковариаций $P_{y_k}^{PF}$, P_{x_i, y_k}^{PF} ($\hat{x}_{k/k-1}^{PF}$). Это в конечном счете позволит вычислять коэффициент усиления (16) и, согласно (17) и (18), получать оценки и матрицу ковариаций ее погрешностей на каждом шаге.

Сами выражения для оценок и матриц ковариаций в силу их громоздкости здесь приводить не будем, а проанализируем лишь специфику дополнительных слагаемых, характеризующих нелинейность в этой задаче. Заметим, что, поскольку нелинейность проявляется только в уравнениях динамики, а уравнения измерений линейные, слагаемые d_k^h и D_k^h будут отсутствовать.

Можно показать, что для d_k^f, D_k^f, D_k^{fh} и F_k справедливы следующие равенства:

$$d_k^f = Tr_{6 \times 1} \left(\Phi_k^{xx} P_{k-1}^{PF} \right) = \left[0, 0, P_{35, k-1}^{PF}, P_{36, k-1}^{PF}, 0, 0 \right]^T,$$

$$D_k^f = 2Tr_{6 \times 6} \left(\Phi_k^{xx} P_{k-1}^{PF} \left(\left(\Phi_k^{xx} \right)^T \left(I_6 \otimes P_{k-1}^{PF} \right) \right) \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33, k-1}^{PF} P_{55, k-1}^{PF} + \left(P_{35, k-1}^{PF} \right)^2 & P_{33, k-1}^{PF} P_{56, k-1}^{PF} + P_{35, k-1}^{PF} P_{36, k-1}^{PF} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33, k-1}^{PF} P_{56, k-1}^{PF} + P_{35, k-1}^{PF} P_{36, k-1}^{PF} & P_{33, k-1}^{PF} P_{66, k-1}^{PF} + \left(P_{36, k-1}^{PF} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_k = D_k^f \left(H_k^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) \right)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & P_{33, k-1}^{PF} P_{55, k-1}^{PF} + \left(P_{35, k-1}^{PF} \right)^2 & P_{33, k-1}^{PF} P_{56, k-1}^{PF} + P_{35, k-1}^{PF} P_{36, k-1}^{PF} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33, k-1}^{PF} P_{56, k-1}^{PF} + P_{35, k-1}^{PF} P_{36, k-1}^{PF} & P_{33, k-1}^{PF} P_{66, k-1}^{PF} + \left(P_{36, k-1}^{PF} \right)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$D_k^{fh} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF} \right) = H_k^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) D_k^f \left(\hat{x}_{k-1}^{PF} \right) H_k^{PF} \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right)^T =$$

$$= \begin{bmatrix} P_{33, k-1}^{PF} P_{55, k-1}^{PF} + \left(P_{35, k-1}^{PF} \right)^2 & P_{33, k-1}^{PF} P_{56, k-1}^{PF} + P_{35, k-1}^{PF} P_{36, k-1}^{PF} \\ P_{33, k-1}^{PF} P_{56, k-1}^{PF} + P_{35, k-1}^{PF} P_{36, k-1}^{PF} & P_{33, k-1}^{PF} P_{66, k-1}^{PF} + \left(P_{36, k-1}^{PF} \right)^2 \end{bmatrix}.$$

В этом примере также можно сформировать эквивалентную расширенную модель, которая формулируется следующим образом: оценить вектор состояния, описываемый в виде

$$x_k = f_k(x_{k-1}) + \Gamma_k w_k + d_k^f + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{w}_{1k} \\ \tilde{w}_{2k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

по измерениям, задаваемым как

$$\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1k} + x_{3k} \\ x_{4k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{w}_{1k} \\ \tilde{w}_{2k} \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{Q}_k = \begin{bmatrix} P_{33,k-1}^{PF} P_{55,k-1}^{PF} + \left(P_{35,k-1}^{PF}\right)^2 & P_{33,k-1}^{PF} P_{56,k-1}^{PF} + P_{35,k-1}^{PF} P_{36,k-1}^{PF} \\ P_{33,k-1}^{PF} P_{56,k-1}^{PF} + P_{35,k-1}^{PF} P_{36,k-1}^{PF} & P_{33,k-1}^{PF} P_{66,k-1}^{PF} + \left(P_{36,k-1}^{PF}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

В этих уравнениях функция $f_k(x_{k-1})$, матрица Γ_k , порождающий w_k и измерительный v_k шумы такие же, как и в исходной задаче; $d_k^f = [0, 0, P_{35,k-1}^{PF}, P_{36,k-1}^{PF}, 0, 0]^T$; $\tilde{w}_k = (\tilde{w}_{1k}, \tilde{w}_{2k})^T$ – не коррелированная с w_k и v_k центрированная гауссовская дискретная белозумная последовательность с матрицей ковариаций \tilde{Q}_k . Вектор \tilde{w}_k в приведенных уравнениях присутствует как дополнительный порождающий и измерительный шум.

Нетрудно убедиться, что уравнения ПФ в рассматриваемом примере совпадут с уравнениями ОФК для рассматриваемой задачи. При этом наличие дополнительного шума \tilde{w}_k в уравнениях динамики и измерений обеспечивает наличие дополнительного слагаемого $D_k^{fh}(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF})$ в уравнении для матрицы ковариаций погрешности прогноза измерения и слагаемого $F_k(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF})$ в выражении для взаимной ковариации.

Как и в предыдущем примере, такая интерпретация может быть полезной при анализе влияния нелинейностей на точность решения рассматриваемой задачи с использованием ОФК. В частности понятно, что предпосылки для снижения точности ОФК по сравнению с ПФ возникают из-за пренебрежения дополнительным слагаемым d_k^f , занижения уровня порождающего шума, а также того обстоятельства, что в модели измерений для ОФК не учитывается наличие дополнительного измерительного шума, идентичного дополнительному порождающему шуму. По сути это и есть следствие неучета в ОФК квадратичных составляющих в уравнениях динамики, в то время как в ПФ формируется и используется оценка этих составляющих с учетом ее характеристик точности.

Любопытно отметить: несмотря на тот факт, что измерения линейные, нелинейность в уравнениях динамики проявляется и в уравнениях измерений для расширенной эквивалентной модели.

Для сравнения алгоритмов и оценки их эффективности при решении рассматриваемой задачи, так же как и в методическом примере, было проведено ее моделирование в соответствии с процедурой, описанной в табл. 5 первой части статьи, при $L = 1000$.

В ходе моделирования предполагалось, что

$$\bar{x}_0 = (0,3 \text{ м/с}, 0,005 \text{ м/с}, 0,5 \text{ м/с}, 0,2 \text{ град/с}, -0,18, -0,02 \text{ град/м})^T,$$

$$\mu_f = 0,09, \mu_{V_T} = 0,8, l = 0,5 \text{ град/м},$$

$$\alpha_1 = -3,6 \text{ м/град}, \alpha_2 = -0,38, g_{V_T} = 0,01 \text{ м/с}^{1/2}, gf = 0,1 \text{ м/с}^{1/2},$$

$$R_k = \text{diag} \left\{ 0,01(\text{м/с})^2, 0,01(\text{град/с})^2 \right\},$$

$$P_0^x = \text{diag} \left(0,01(\text{м/с})^2, 0,00001(\text{м/с})^2, 0,16(\text{м/с})^2, 0,09(\text{град/с})^2, 0,0045, 0,00011(\text{град/м})^2 \right),$$

$$\sqrt{P_{33,k-1}^{PF} P_{55,k-1}^{PF}} = 0,4\sqrt{0,0045} = 0,4 \times 0,07 = 0,03 \ll 0,4,$$

$$P_{33,k-1}^{PF} P_{66,k-1}^{PF} = 0,4\sqrt{0,00011} = 0,004 \ll 0,09.$$

Управление выбиралось следующим образом:

$$u_{1,k} = \begin{cases} -0,002 & \text{при } k \in [1, 50] \cup [101, 150], \\ 0,002 & \text{при } k \in [51, 100] \cup [151, 200], \end{cases}$$

$$u_{2,k} = \begin{cases} 0,04 & \text{при } k \in [1, 50] \cup [101, 150], \\ -0,04 & \text{при } k \in [51, 100] \cup [151, 200]. \end{cases}$$

На рис. 3 показаны расчетные и действительные СКП оценивания неизвестных параметров оптимальным алгоритмом, ПФ и ОФК.

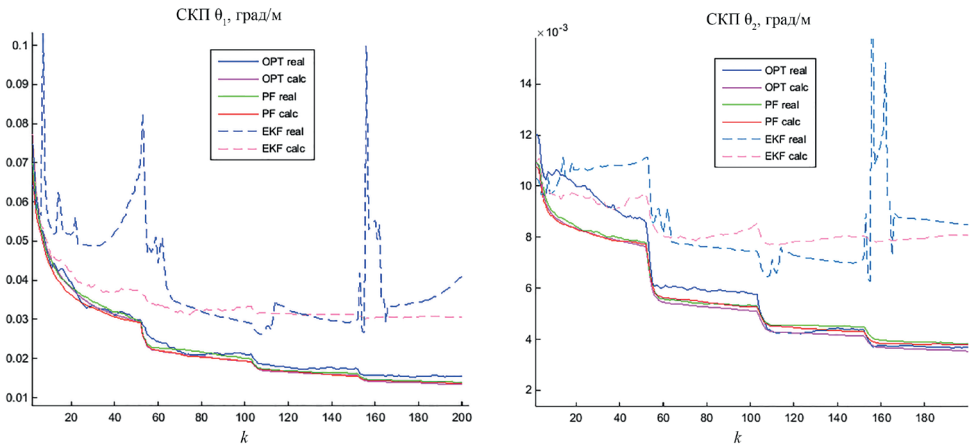
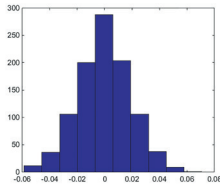
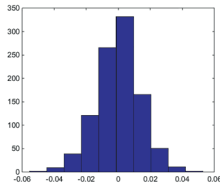
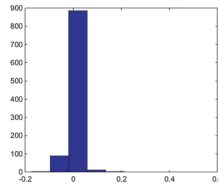
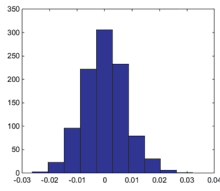
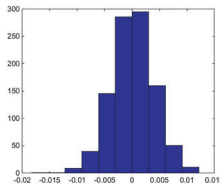
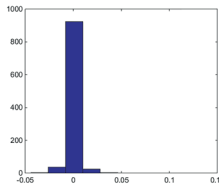


Рис. 3. Действительные и расчетные СКП оценивания θ_1 и θ_2 для рассматриваемых алгоритмов

Гистограммы погрешностей оценивания θ_1 и θ_2 для рассматриваемых алгоритмов и безусловные СКП оценивания для последнего измерения $k = 200$

	Оптимальный фильтр	Полиномиальный фильтр	ОФК
θ_1	 <p>СКП = 0,0164</p>	 <p>СКП = 0,0183</p>	 <p>СКП = 0,0450</p>
θ_2	 <p>СКП = 0,0036 град/м</p>	 <p>СКП = 0,0037 град/м</p>	 <p>СКП = 0,0087 град/м</p>

Полученные результаты показывают, что расчетная и действительная характеристики точности ПФ практически согласованы и его точность близка к потенциальной, т.е. ПФ в данном примере состоятелен (см. часть 1). В то же время ОФК при заданном уровне априорной неопределенности в знании параметров θ_1 и θ_2 оказывается неработоспособным.

4. Задача навигации с использованием карт геофизических полей

Рассмотрим теперь пример задачи, в которой нелинейность общего вида проявляется только в уравнениях измерений, – задачу навигации по данным о геофизических полях [13–16]. Будем для определенности полагать, что при навигации используются данные о поле ускорений силы тяжести при известной карте этого поля в заданном районе. Один из вариантов этой задачи на плоскости можно сформулировать следующим образом [14].

Требуется оценить вектор состояния, представляющий собой координаты подвижного объекта на плоскости

$$\begin{aligned} x_{1k} &= x_{1k-1} + u_{1k}, \\ x_{2k} &= x_{2k-1} + u_{2k}, \end{aligned} \quad x_0 \in N \left(x_0; \begin{bmatrix} \bar{x}_{10} \\ \bar{x}_{20} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \right), \quad (27)$$

по скалярным измерениям

$$y_k = h(x_k) + v_k, \quad (28)$$

в которых u_{1k}, u_{2k} – известные входные сигналы, вырабатываемые по показаниям навигационной системы; $h(x_k)$ – нелинейная функция, заданная с помощью карты; v_k – погрешности измерения, представляющие собой независимую от x_0 белозумную последовательность с известными и одинаковыми дисперсиями r^2 . Входные сигналы u_k выбираются так, чтобы объект двигался по заданному маршруту.

Для построения ПФ введем вектор состояния и соответствующие ему функции и параметры:

$$x_k = [x_{1k} \quad x_{2k}]^T, f_k(x_{k-1}) = [x_{1k-1} \quad x_{2k-1}]^T; \Gamma_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = r^2, n = 2, m = 1, \\ P_0 = \sigma^2 I_2, u_k = [u_{1k} \quad u_{2k}]^T.$$

Определяющая карту функция $h(x_k)$ задается тем или иным образом в цифровой форме. Например, это может быть сделано с помощью набора значений поля в узлах равномерной сетки координат и правила интерполяции при вычислении поля между узлами [13, 15].

При вычислении значений поля используем представление

$$h(x_k) \approx h(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}) + \left. \frac{dh(x_k)}{dx_k^T} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}^{PF}} (x_k - \hat{x}_{k/k-1}^{PF}) + \frac{1}{2} (x_k - \hat{x}_{k/k-1}^{PF})^T \left. \frac{d^2h(x_k)}{dx_k dx_k^T} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}^{PF}} (x_k - \hat{x}_{k/k-1}^{PF}).$$

Для вычисления производных первого и второго порядков могут быть использованы различные численные методы, в частности метод наименьших квадратов, с помощью которого в области априорной неопределенности функция $h(x_k)$ аппроксимируется в виде квадратичной формы.

Отличительной особенностью рассматриваемого примера является то, что квадратичные нелинейности возникают после разложения нелинейной функции $h(x_k)$ в ряд Тейлора. В этом случае при реализации ПФ удобнее применить выражения, приведенные в табл. 2 [1], при этом найти дополнительные слагаемые можно при помощи соотношений, в которых используются значения первой и второй производной функции $h(x_k)$. Поскольку уравнения динамики линейны, дополнительных слагаемых будет только два: d_k^h – в выражении для прогноза текущего измерения и D_k^h – в выражении для матрицы ковариаций погрешности прогноза текущего измерения. Для d_k^h запишем:

$$d_k^h = 0,5Tr_{1 \times 1} \left(h''(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}) P_{k-1}^{PF} \right) = 0,5tr \left(\begin{bmatrix} \left. \frac{d^2h(x_k)}{dx_{1k} dx_{1k}^T} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}^{PF}} & \left. \frac{d^2h(x_k)}{dx_{1k} dx_{2k}^T} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}^{PF}} \\ \left. \frac{d^2h(x_k)}{dx_{2k} dx_{1k}^T} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}^{PF}} & \left. \frac{d^2h(x_k)}{dx_{2k} dx_{2k}^T} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}^{PF}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11k-1}^{PF} & P_{12k-1}^{PF} \\ P_{12k/k-1}^{PF} & P_{22k-1}^{PF} \end{bmatrix} \right). \quad (29)$$

В свою очередь, для D_k^h получим:

$$\begin{aligned}
 D_k^h \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) &= 0,5Tr_{1 \times 1} \left(h_k'' \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) P_{k/k-1}^{PF} \left(\left(h_k'' \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF} \right) \right)^T \left(I_1 \otimes P_{k/k-1}^{PF} \right) \right) \right) = \\
 &= 0,5tr \left[\begin{array}{cc} \frac{d^2 h(x_k)}{dx_{1k} dx_{1k}^T} & \frac{d^2 h(x_k)}{dx_{1k} dx_{2k}^T} \\ \frac{d^2 h(x_k)}{dx_{2k} dx_{1k}^T} & \frac{d^2 h(x_k)}{dx_{2k} dx_{2k}^T} \end{array} \right]_{\hat{x}_{k/k-1}^{PF}} \left[\begin{array}{cc} P_{11k-1}^{PF} & P_{12k-1}^{PF} \\ P_{12k/k-1}^{PF} & P_{22k-1}^{PF} \end{array} \right]. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Дополнительные слагаемые d_k^h и D_k^h , как и в предыдущих примерах, фактически можно трактовать как оценку для квадратичных составляющих в уравнениях измерений и соответствующую матрицу ковариации ее погрешностей. Здесь также можно ввести эквивалентную расширенную модель, для которой соотношения ОФК совпадут с соотношениями для ПФ. Для этого достаточно привести следующую модель измерений, в которой соотношения для ОФК совпадут с соотношениями ПФ:

$$y_k = h(x_k) + d_k^h + v_k + \tilde{v}_k, \quad (31)$$

где d_k^h – известная величина, а \tilde{v}_k – дополнительный измерительный шум с дисперсией D_k^h , определяемой согласно приведенным выше выражениям. Эти соотношения позволяют понять причины возможного ухудшения точности при использовании ОФК и могут быть также полезными при исследовании влияния вида функции на точность решения задачи навигации с использованием данных карты. Применительно к этой задаче речь можно вести об исследовании навигационной информативности поля, используемого для навигации [16].

Рассмотрим простейший случай, полагая, что поле в области априорной неопределенности может быть описано полиномом второго порядка, т.е.

$$h(x_k) \approx C_{0k} + C_{1k}x_{1k} + C_{2k}x_{2k} + C_{3k}x_{1k}^2 + C_{4k}x_{1k}x_{2k} + C_{5k}x_{2k}^2, \quad (32)$$

где $C_{0k} - C_{5k}$ – известные величины.

Дополнительные слагаемые тогда примут вид:

$$\begin{aligned}
 d_k^h &= 0,5tr \left[\begin{array}{cc} 2C_{3k}P_{11k-1}^{PF} + C_{4k}P_{12k-1}^{PF} & 2C_{3k}P_{12k-1}^{PF} + C_{4k}P_{22k-1}^{PF} \\ 2C_{5k}P_{12k-1}^{PF} + C_{4k}P_{11k-1}^{PF} & 2C_{5k}P_{22k-1}^{PF} + C_{4k}P_{12k-1}^{PF} \end{array} \right] = \\
 &= C_{3k}P_{11k-1}^{PF} + C_{4k}P_{12k-1}^{PF} + C_{5k}P_{22k-1}^{PF}, \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_k^h &= 0,5 \left(\left(2C_{3k}P_{11k-1}^{PF} + C_{4k}P_{12k-1}^{PF} \right)^2 + \left(2C_{5k}P_{22k-1}^{PF} + C_{4k}P_{12k-1}^{PF} \right)^2 \right) + \\
 &+ \left(2C_{3k}P_{12k-1}^{PF} + C_{4k}P_{22k-1}^{PF} \right) \left(2C_{5k}P_{12k-1}^{PF} + C_{4k}P_{11k-1}^{PF} \right). \quad (34)
 \end{aligned}$$

Таким образом, преимущества ПФ заключаются в том, что при синтезе этого алгоритма в отличие от ОФК учитывается факт наличия известного входного сигнала $d_k^h = C_{3k}P_{11k-1}^{PF} + C_{4k}P_{12k-1}^{PF} + C_{5k}P_{22k-1}^{PF}$ и увеличенной дисперсии измерительного шума на величину D_k^h , порожденных присутствием квадратичных слагаемых. Используя (33), (34), можем также сформировать табл. 5, иллюстрирующую специфику дополнительных слагаемых для частных случаев функции вида (32).

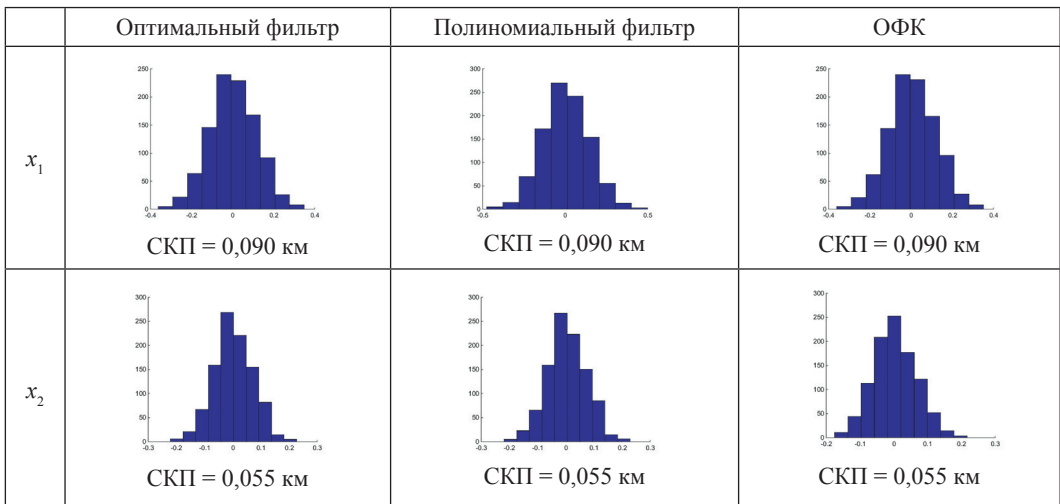
Таблица 5

Значения коэффициентов	d_k^h	D_k^h
$C_{4k} \neq 0, C_{3k} = C_{5k} = 0$	$C_{4k}P_{12k/k-1}^{PF}$	$C_{4k}^2 \left[\left(P_{12k-1}^{PF} \right)^2 + P_{11k-1}^{PF} P_{22k-1}^{PF} \right]$
$C_{3k} \neq 0, C_{4k} = C_{5k} = 0$	$C_{3k}P_{11k-1}^{PF}$	$2C_{3k}^2 \left(P_{11k-1}^{PF} \right)^2$
$C_{5k} \neq 0, C_{4k} = C_{3k} = 0$	$C_{5k}P_{22k-1}^{PF}$	$2C_{5k}^2 \left(P_{22k-1}^{PF} \right)^2$

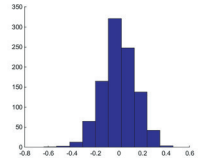
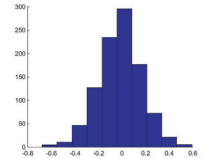
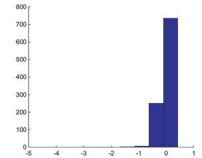
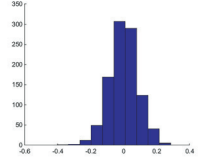
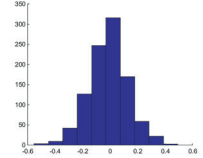
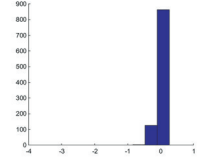
Приведем результаты моделирования этой задачи. Полагаем, что значения $u_k = [u_{1k} \ u_{2k}]^T$ таковы, что истинная траектория представляет собой прямую. Моделирование было проведено в соответствии с процедурой, описанной в табл. 5 части 1, при $L = 1000$, при следующих значениях исходных данных: $[\bar{x}_{10} \ \bar{x}_{20}]^T = [2,7 \ -0,4]^T$ км. СКП шума измерений r составляло 0,16 мГал; $P_0^x = \text{diag} \{ \sigma^2 \ \sigma^2 \}$. Для простоты предполагалось, что геофизическое поле таково, что C_{jk} , $j = 1, 5$ в (32) – постоянные, при этом $C_{0k} = 0, C_1 = 0,2$ мГал/км, $C_2 = -0,5$ мГал/км, $C_3 = 0,3$ мГал/км², $C_4 = -0,45$ мГал/км², $C_5 = 0,4$ мГал/км². Результаты моделирования представлены на рис. 4 и сведены в табл. 6 и 7. Вид поля и траектория истинного движения приведены на рис. 5.

Таблица 6

Гистограммы погрешностей оценивания x_1 и x_2 для случая $\sigma = 0,2$ км и безусловные СКП оценивания для последнего измерения ($k = 30$)



Гистограммы погрешностей оценивания x_1 и x_2 для случая $\sigma = 0,5$ км и безусловные СКП оценивания для последнего измерения ($k = 30$)

	Оптимальный фильтр	Полиномиальный фильтр	ОФК
x_1	 СКП = 0,114 км	 СКП = 0,117 км	 СКП = 0,466 км
x_2	 СКП = 0,089 км	 СКП = 0,093 км	 СКП = 0,241 км

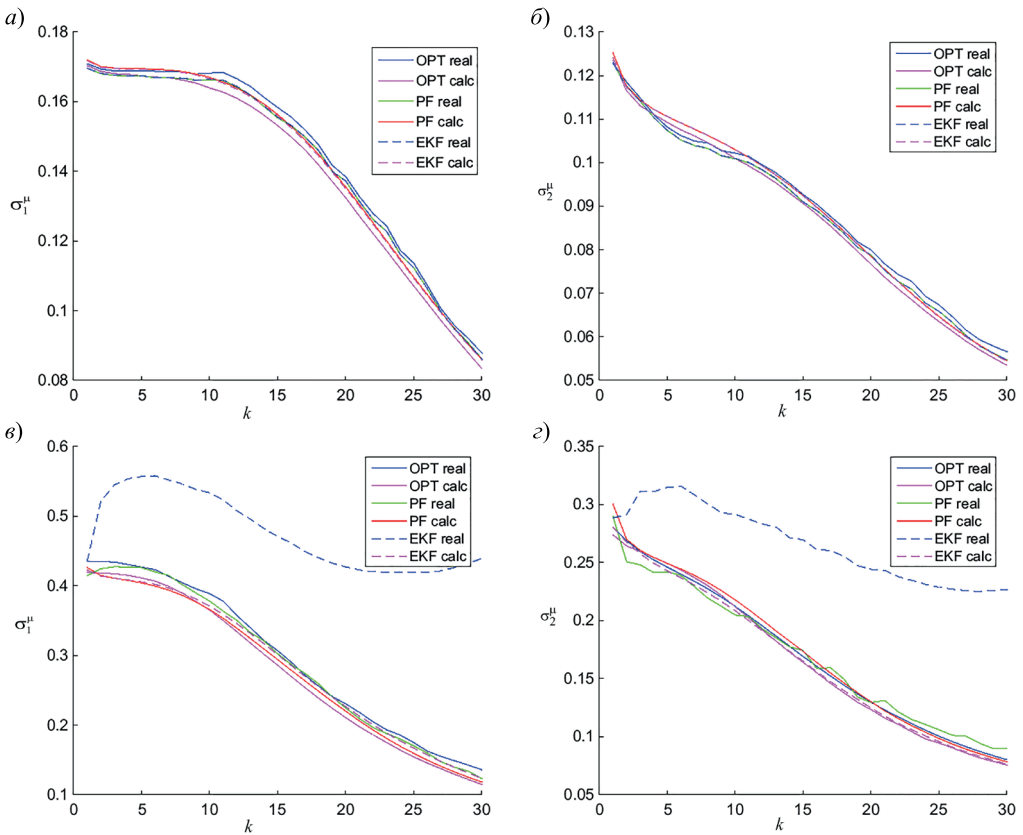


Рис. 4. Результаты моделирования задачи навигации по геофизическим полям: для первой и второй координаты при априорной неопределенности $\sigma = 0,2$ км (а, б) и $\sigma = 0,5$ км (в, з)

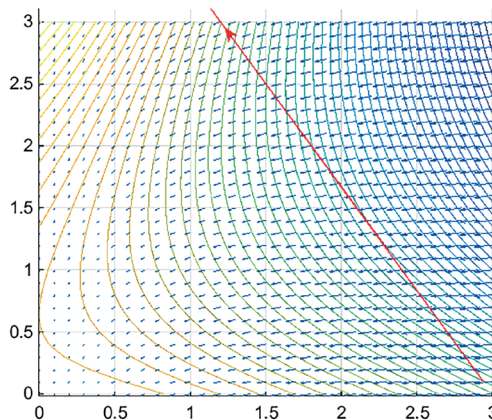


Рис. 5. Вид поля и траектория истинного движения

Из представленных в примере результатов видно, что при малой априорной неопределенности $\sigma = 0,2$ км точности ПФ и ОФК отличаются незначительно, тогда как при $\sigma = 0,5$ км ОФК теряет свойство состоятельности и существенно уступает ПФ. В то же время для принятых условий моделирования точность ПФ практически совпадает с точностью оптимального алгоритма, и он сохраняет свойство состоятельности. Ухудшение точности ОФК, используемого для решения задачи (27), (28), по сравнению с ПФ, как и в предыдущих примерах, обусловлено пренебрежением фактом наличия величин d_k^h и \tilde{v}_k в модели измерений (31).

5. Заключение

Особенности построения ПФ для решения дискретных во времени задач фильтрации при наличии квадратичных нелинейностей как в уравнениях динамики, так и в уравнениях измерений по сравнению с ОФК проанализированы на методическом примере, примере решения задачи идентификации параметров модели бокового движения гидрографического судна и задачи коррекции показаний навигационной системы по данным о поле ускорения силы тяжести.

В соотношениях для ПФ конкретизированы дополнительные по отношению к ОФК слагаемые, анализ которых позволяет оценивать уровень их вклада в уравнения для ПФ и возможность упрощения ПФ без заметных потерь в точности.

Для всех рассмотренных примеров сформулирована постановка задачи фильтрации для эквивалентной расширенной модели, ОФК для которой совпадает с ПФ для исходной нелинейной задачи. Иными словами, ПФ для исходной задачи совпадает с ОФК для эквивалентной расширенной модели. Такая интерпретация ПФ создает хорошую основу для анализа причин ухудшения точности ОФК по сравнению с ПФ. В частности отмечается, что эти причины обусловлены неучетом в ОФК наличия смещений в уравнениях для прогноза вектора состояния и вектора измерений, дополнительных порождающих и измерительных шумов, а также фактом их взаимной корреляции. Обращается внимание, что это, в свою очередь, есть следствие неучета в ОФК квадратичных составляющих в уравнениях динамики и уравнениях измерений, в то время как в ПФ для этих составляющих формируются и используются их оценки и соответствующие им характеристики точности.

Для рассмотренных примеров показаны преимущества ПФ по сравнению с ОФК в части обеспечения более высокой точности оценивания и получения расчетной матрицы ковариаций, согласованной с ее действительным значением.

В качестве направлений дальнейших исследований можно предложить выявление целесообразности применения при реализации ПФ итерационных процедур и нерекуррентных схем обработки, а также сопоставление ПФ с получившими широкое применение в задачах обработки навигационной информации ансамблевыми фильтрами (UKF).

Заслуживает внимания и вопрос более подробного сопоставления ПФ и оптимального нелинейного алгоритма и поиска возможных причин ухудшения точности ПФ по сравнению с оптимальным алгоритмом.

Авторы надеются, что материал, представленный в обеих частях статьи, создаст предпосылки, с одной стороны, для понимания возможных причин повышения эффективности ПФ по сравнению с традиционным фильтром калмановского типа, таким как ОФК, а с другой – позволит разработчикам без труда реализовать этот алгоритм при решении конкретных задач обработки измерительной информации.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда
№ 18-19-00627, <https://rscf.ru/project/18-19-00627/>.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Васильев В.А., Торопов А.Б., Басин М.В.** Алгоритм полиномиальной фильтрации в задачах обработки навигационной информации при квадратичных нелинейностях в уравнениях динамики и измерений. Часть 1. Описание алгоритма // *Гироскопия и навигация*. 2021. Т.29. №3 (114). С. 3–33.
2. **Toropov, A.B., Stepanov, O.A., Basin, M.V., Vasiliev, V.A., Loparev, A.V.**, Polynomial Filtering Algorithm For Single-Beacon Navigation Problem, *17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018)*, IFAC-PapersOnLine, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 619–623.
3. **Васильев В.А.** Применение алгоритма полиномиальной фильтрации в задаче идентификации параметров узкополосного процесса // *Навигация и управление движением*. Сборник тезисов докладов международного семинара / под общей редакцией И.В. Белоконова. Самара, 2020. С. 79–81
4. **Пелевин А.Е.** Идентификация параметров модели объекта в условиях внешних возмущений // *Гироскопия и навигация*. 2014. №4 (87). С. 111–120.
5. **Stepanov, O.A., Vasiliev, V.A., Toropov, A.B., Loparev, A.V., Basin, M.V.**, Efficiency analysis of a filtering algorithm for discrete-time linear stochastic systems with polynomial measurement, *Journal of the Franklin Institute*, 2019, vol. 356, pp. 5573–5591.
6. **Торопов А.Б., Лопарев А.В., Пелевин А.Е.** Сравнение алгоритмов оценивания местоположения подводного аппарата при одномаяковой навигации // XXXII конференция памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н. Н. Острякова. 2020. С. 332–336.
7. **Кашинцев Н.А., Лопарев А.В.** Использование метода полиномиальной фильтрации при определении местоположения подводного аппарата // *Навигация и управление движением*. Материалы XX конференции молодых ученых с международным участием. 2018. С. 177–179.
8. **Лопарев А.В., Зайцев О.В., Антонов Д.В.** Использование адаптивных алгоритмов прогнозирования угла качки корабля // Материалы конференции «Управление в морских системах» (УМС-2020). 13-я мультиконференция по проблемам управления. Санкт-Петербург, 2020. С. 127–130.
9. **Simon, D.**, *Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches*, John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, USA, 2006.
10. **Степанов О.А.** Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2003. 370 с.
11. **Doucet, A., Freitas, N., Gordon, N.**, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, New York, NY, Springer New York, 2001, 590 p.

12. Gustafsson, F., Gunnarsson, F., Bergman, N. et al., Particle filters for positioning, navigation, and tracking, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, vol. 50, no. 2, pp. 425–437.
13. Дунаевская К.В., Киселев Л.В., Костоусов В.Б. Исследование метода вычисления текущей характеристики точности в задаче навигации по картам геофизических полей // *Гироскопия и навигация*. 2021. Т. 29. №1 (112). С. 52–69.
14. Степанов О.А., Торопов А.Б. Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Ч. 1. Обзор алгоритмов // *Гироскопия и навигация*. 2015. №3 (90). С. 102–125.
15. Васильев В.А., Соколов А.В. Сравнение расчетной точности алгоритмов постобработки гравиметрической информации и данных измерения поля глубин в задаче построения навигационного геофизического полигона // *Материалы XXVIII конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова*. СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2012. С. 46–47.
16. Степанов О.А., Носов А.С., Торопов А.Б. Навигационная информативность геофизических полей и выбор траекторий в задаче уточнения координат с использованием карты // *Известия Тульского государственного университета*. Технические науки. 2018. № 5. С. 74–92.

Stepanov, O.A., Litvinenko, Yu.A. (Concern CSRI Elektropribor, JSC, St. Petersburg, Russia; ITMO University, St. Petersburg, Russia), Vasiliev, V.A. (Concern CSRI Elektropribor, JSC; ITMO University; St. Petersburg Electrotechnical University LETI, Russia), Toropov, A.B. (Concern CSRI Elektropribor, JSC), and Basin, M.V. (ITMO University; Autonomous University of Nuevo León, San Nicolás de los Garza, Mexico) Polynomial Filtering Algorithm Applied to Navigation Data Processing under Quadratic Nonlinearities in System and Measurement Equations. Part 2. Solution Examples, *Гироскопия и Навигация*, 2021, vol. 29, no. 4 (115), pp. 56–77.

Abstract. In the first part of the paper, a polynomial filter is proposed for filtering under quadratic nonlinearities both in the system and measurement equations. The second part details its features and advantages over the extended Kalman filter and illustrates them using a methodological example and navigation data processing.

Key words: Kalman type algorithms, nonlinear filtering, polynomial filter, navigation data.

Материал поступил 15.07.2021