

Е. И. СОМОВ

**АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНЫХ СОСТОЯНИЙ И СИНТЕЗ ЯВНЫХ ЗАКОНОВ  
НАСТРОЙКИ СИЛОВЫХ ГИРОКОМПЛЕКСОВ КРАТНЫХ СХЕМ**

*Выполнен топологический анализ сингулярных состояний силовых гироскопических комплексов кратных схем на основе четырех и шести гироскопов, синтезированы явные законы настройки таких комплексов.*

**Введение**

Электромеханические системы, широко используемые в настоящее время для управления ориентацией космических аппаратов (КА), интенсивно изучаются уже более 50 лет [1]. В прецессионной теории силовых гироскопов при простейшем моделировании движения КА как абсолютно твердого тела нетрудно представить принципиальные проблемы, возникающие в силовом гироскопическом комплексе (СГК) на основе избыточного числа  $m \geq 4$  безупорных гироскопов (ГД), которые не имеют ограничений на угловое положение относительно произвольно расположенных осей их подвеса на корпусе КА.

Введем кватернион  $\Lambda$  ориентации связанного с корпусом КА базиса  $\mathbf{B}$  относительно некоторого инерциального базиса  $\mathbf{I}$  и вектор  $\boldsymbol{\omega}$  абсолютной угловой скорости КА. Свяжем с каждым  $i = 1 \div m$  ГД, имеющим вектор кинетического момента (КМ)  $\mathbf{H}_i = h_g \mathbf{h}_i$  с одинаковым модулем  $h_g$ , правый триэдр его осей: (i) орт  $\mathbf{h}_i(\beta_i)$  вектора КМ ГД, положение которого определяется углом  $\beta_i$ , (ii) фиксированный в базисе  $\mathbf{B}$  орт  $\mathbf{g}_i$  оси подвеса ГД и (iii) орт  $\mathbf{p}_i(\beta_i) = \mathbf{h}_i(\beta_i) \times \mathbf{g}_i$ . Пусть вектор-столбец  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_i\}$  составлен из углов поворота ГД относительно осей их подвеса. Тогда вектор суммарного нормированного КМ СГК  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) = \sum \mathbf{h}_i(\beta_i)$ , а орт гироскопического момента  $i$ -го ГД

$$\mathbf{m}_i^g(\beta_i) = \frac{\partial \mathbf{h}_i(\beta_i)}{\partial \beta_i} = \mathbf{g}_i \times \mathbf{h}_i(\beta_i) = -\mathbf{p}_i(\beta_i).$$

Все векторы и тензор инерции корпуса КА  $\mathbf{J}$  представляются в базисе  $\mathbf{B}$ , матрица Якоби  $\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) \equiv [\mathbf{a}_i(\beta_i)] = \partial \mathbf{h} / \partial \boldsymbol{\beta} = [\mathbf{m}_i^g(\beta_i)]$  определяется строкой  $[\cdot]$  из столбцов  $\mathbf{m}_i^g(\beta_i)$ . Определим нормированный к значению  $h_g$  вектор КМ корпуса КА в виде  $\mathbf{k}(t) \equiv \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t) / h_g$ , и для простоты будем считать, что вектор суммарного нормированного КМ механической системы «КА+СГК»  $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{k}(t) + \mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}(t)) = \mathbf{0}$ . Пусть при отсутствии внешнего возмущающего момента  $\forall t \in T_r \equiv [t_i, t_f]$  заданы функции времени  $\Lambda(t)$  и  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , представляющие программное угловое движение базиса  $\mathbf{B}$  относительно базиса  $\mathbf{I}$ , которое описывается дифференциальными уравнениями  $\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega} / 2$ ;  $\dot{\mathbf{k}}(t) = -\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ . Здесь

---

**Сомов** Евгений Иванович (1947). Кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, зав. отделом «Динамики и управления движением» Самарского научного центра РАН. Действительный член Академии навигации и управления движением.

вектор нормированного управляющего момента СГК  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \Sigma \mathbf{m}_i^g(\beta_i) \dot{\beta}_i$  вычисляется по формуле  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{u}^g$ ;  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{u}^g$ , где «управлением» считается вектор-столбец  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{u}^g = \{u_i^g\}$  с компонентами  $u_i^g$  скоростей поворота ГД, ограниченных по модулю заданным значением  $u_g^m = \text{const}$ .

Пусть заданы значения нормированных к значению  $h_g$  векторов КМ СГК  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) \in \mathbf{S} \subset \mathbf{R}^3$  и его потребного управляющего момента  $\mathbf{m}^g \in \mathbf{M} \subset \mathbf{R}^3$ . Тогда приходим к двум *нелинейным* векторным уравнениям  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}(t)) = -\mathbf{k}(t)$  и  $\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{m}^g$  в трехмерном пространстве относительно векторов-столбцов  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_i\}$  и  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \{\dot{\beta}_i\}$ , каждый из которых имеет размерность  $m$ .

*Первая* принципиальная проблема заключается в построении внешней граничной поверхности  $\partial \mathbf{S} = \mathbf{S}^* \subset \mathbf{R}^3$  области  $\mathbf{S}$  вариации КМ СГК, форма которой существенно зависит от числа  $m$  ГД и расположения ортов  $\mathbf{g}_i$  осей их подвеса в базисе  $\mathbf{B}$ , а также в анализе условий разрешимости уравнений указанных нелинейных векторных уравнений при возможном уменьшении ранга матрицы Якоби  $\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta})$  для особых (сингулярных) состояний СГК. Таким состояниям соответствуют расположения конца вектора  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})$  как на поверхности  $\mathbf{S}^*$ , так и на поверхностях  $\mathbf{h}_k^*$  весьма сложной структуры внутри области  $\mathbf{S}$ . Сингулярные состояния СГК возникают при таких положениях ГД, когда матрица Грамма  $\mathbf{G}(\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{A}_h^T(\boldsymbol{\beta})$  теряет полный ранг, т.е. при  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \det(\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta})) = 0$ . Здесь наиболее сложными являются задачи *топологического анализа* свойств поверхностей  $\mathbf{h}_k^*$ , где возникают *ветвления* решений указанных нелинейных алгебраических уравнений [1]. На таких поверхностях возникает *неоднозначность* движения ГД в составе СГК или *клинч* некоторой совокупности ГД, особенно если не используются алгоритмы доопределения их состояний и управлений в окрестности этих поверхностей. На основе критериев знакоопределенности квадратичных форм для локальных переменных в окрестности точек сингулярных состояний СГК *внутри* области  $\mathbf{S}$  в оригинальных работах [2,3] для произвольных схем СГК проведена классификация поверхностей  $\mathbf{h}_k^*$  на (i) проходимые  $\mathbf{h}^*$ , (ii) непроходимые поверхности типа  $\mathbf{h}_\alpha^*$ , которые гладко сопрягаются с поверхностью  $\mathbf{S}^*$ , т.е. являются гладкими продолжениями поверхности  $\mathbf{S}^*$  внутрь области  $\mathbf{S}$ , и (iii) непроходимые поверхности типа  $\mathbf{h}_\beta^*$ , изолированные от граничной поверхности  $\mathbf{S}^*$ .

*Вторая* принципиальная проблема заключается в обосновании законов *настройки* СГК, которые являются законами распределения вектора  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})$  его суммарного нормированного КМ между избыточным числом ГД с учетом необходимости обхода либо прохождения сингулярных состояний СГК. Угловые скорости каждого ГД относительно оси его подвеса ограничены по модулю заданным значением  $u_g^m$ , что существенно-нелинейным образом «трансформируется» в ограничения на компоненты вектора нормированного управляющего момента СГК  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ , т.е. моментные характеристики СГК зависят как от пре-

дыстории, так и от текущего расположения векторов КМ гиродинов в его составе. Для схем СГК общего вида в свое время Е.Н. Токарем были теоретически обоснованы *неявные* законы настройки СГК, основанные на *дифференциальных соотношениях* с различными вариантами псевдообращения матрицы Якоби  $A_n(\beta)$  и на оптимизации определителя  $G$  матрицы Грамма либо другого скалярного выпуклого функционала  $\Phi(\beta)$  для сигнализации приближения состояния СГК к множествам  $h_k^*$  внутри области  $S$  [1,4].

При произвольном одинаковом числе применяемых ГД класс *кратных* схем СГК, где используются коллинеарные группы ГД (в каждой группе два или более ГД с параллельными осями подвеса), уступает *пространственным* схемам СГК общего вида как по размерам области  $S$  вариации КМ СГК, так и по критерию сферичности ее границы  $S^*$ . Однако СГК кратных схем имеют три весьма существенных достоинства [4, глава 4]:

- граница  $S^*$  области  $S$  вариации КМ СГК всегда совпадает с ее выпуклой оболочкой;
- все поверхности  $h_k^*$  особых состояний СГК внутри области  $S$  являются проходимыми, т.е. поверхностями типа  $h^*$ ;
- для таких схем могут быть обоснованы *явные* законы настройки, когда все характеристики потребного движения каждого ГД получаются по явным аналитическим соотношениям.

В сингулярном состоянии СГК определитель матрицы Грамма  $G(\beta) \equiv \det(G(\beta)) = 0$  и любой набор из векторов-столбцов  $a_i = m_i^g$  в составе матрицы Якоби  $A_n(\beta)$  не позволяет составить базис трехмерного пространства. Следовательно, в этом случае все векторы  $a_i = m_i^g$  становятся компланарными (принадлежат одной плоскости) и в суммарном векторе нормированного управляющего момента СГК  $m^g(\beta, \dot{\beta}) = \sum m_i^g(\beta_i) \dot{\beta}_i$  отсутствуют компоненты вдоль орта  $u$  нормали к этой плоскости. Такой орт  $u$  называется сингулярным и определяется из условия  $u \cdot a_i \equiv u^T a_i = 0, i = 1 \div m$ . Ранг матрицы  $A_n$  может быть равным 1 только в том случае, когда орты  $g_i$  осей подвеса всех ГД принадлежат одной плоскости. Каждому сингулярному состоянию СГК с вектором нормированного КМ  $h^*$  и сингулярной точкой  $\beta^*$  вектора-столбца углов ГД соответствует сингулярный вектор  $u$ , одинаковый для векторов  $h^*$  и  $-h^*$ . Для единообразного учета этих двух вариантов направлений векторов  $h^*$ , следуя Е.Н. Токарю, вводится набор знаков  $\epsilon = (\epsilon_i, i = 1 \div m)$ , где  $\epsilon_i = \text{sign}(u \cdot h_i)$ , причем набор  $\epsilon$  представляется по типу  $(+ - + - \dots +)$ , всего  $2^{m-1}$  комбинаций с учетом симметрии. В сингулярной точке имеем соотношения  $a_i = a_i^* = \epsilon_i g_i \times u / |g_i \times u|$ ;  $h^* = \sum \epsilon_i (g_i \times u) \times g_i / |g_i \times u|$ , где последнее соотношение определяет *непрерывное* отображение  $u \Rightarrow h^*$  с набором знаков  $\epsilon = (\epsilon_i)$  как параметров. Область вариации орта  $u$  представляет собой единичную сферу с *выколотыми точками*, которые соответствуют ортам  $\pm g_i$ . Для схем СГК общего вида при  $u = \pm g_i$  произвольное положение каждого  $i$ -го ГД удовлетворяет условию сингулярности, что на граничной поверхности  $S^*$  представляется *единичными окружно-*

стями, которые являются границей «вмятин» (кратеров) с осями по ортам  $\pm \mathbf{g}_i$ , всего  $2m$  кратеров. Поверхности  $\mathbf{h}_k^*$  с различными наборами знаков  $\boldsymbol{\varepsilon}$  соединяются на указанных окружностях. Граница  $\mathbf{S}^*$  области  $\mathbf{S}$  вариации вектора суммарного КМ СГК всегда является сингулярной поверхностью. Основная часть граничной поверхности  $\mathbf{S}^*$  представляется поверхностью  $\mathbf{h}_k^*$  со всеми положительными знаками  $\varepsilon_i$  в наборе  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$ , а другие ее части получаются при одном отрицательном знаке в различных наборах знаков  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и для схем СГК общего вида представляют собой внутренние поверхности *кратеров*, которые гладко соединяются с указанной основной частью на единичных окружностях [3].

СГК *кратных схем* с  $k$  коллинеарными группами, где каждая  $s$ -я группа содержит  $m_s$  гироидов и  $\sum_s m_s = m$ , имеют ряд сингулярных поверхностей, в том числе поверхность, которая содержит  $2k$  кратеров с осями по ортам  $\pm \mathbf{g}_i$  и радиусами, значения которых определяются числом  $m_s$ ,  $s = 1 \div k$  в каждой группе и знаками  $\varepsilon_i$  в наборе  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$ . При  $\mathbf{u} = \pm \mathbf{g}_i$  всевозможные сингулярные положения гироидов формируют *круговые плоскости*, которые *прикрывают*  $2k$  кратеров. Другие сингулярные поверхности с различными наборами знаков  $\varepsilon_i$  гладко сопрягаются с этими круговыми плоскостями по окружностям соответствующего радиуса. Для кратных схем граница  $\mathbf{S}^*$  области вариации КМ СГК представляет собой сингулярную поверхность и указанные круговые плоскости радиусом  $m_s$  со всеми положительными знаками  $\varepsilon_i$  в наборе  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$ , т.е. граничная поверхность  $\mathbf{S}^*$  совпадает с ее выпуклой оболочкой. При одном отрицательном знаке в наборе  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$  любая сингулярная поверхность  $\mathbf{h}_k^*$  не представляет собой часть (продолжение) граничной поверхности  $\mathbf{S}^*$ , т.е. такие поверхности  $\mathbf{h}_k^*$  являются полностью внутренними – типа  $\mathbf{h}^*$ .

Если при *заданном* векторе КМ  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$  СГК должен сформировать управляющий момент  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$  в направлении *заданного* орта  $\mathbf{u}$ , то возможны два случая [4, глава 4]:

- перераспределяя положения ортов  $\mathbf{h}_p(\boldsymbol{\beta}_p)$  ГД относительно *неизменного* суммарного КМ СГК  $\mathbf{h} \equiv \Sigma \mathbf{h}_i = \mathbf{h}^*$ , можно обеспечить управляющий момент в направлении орта  $\mathbf{u}$ , тогда сингулярная точка  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$  называется *проходимой* в направлении орта  $\mathbf{u}$ ;
- никаким перераспределением положения ортов  $\mathbf{h}_p$  ГД относительно *неизменного* суммарного КМ СГК  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$  нельзя сформировать управляющий момент в направлении орта  $\mathbf{u}$ , при этом сингулярная точка  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$  называется *непроходимой* в направлении орта  $\mathbf{u}$ .

Аналитическое определение проходимости конкретной особой (сингулярной) точки  $\mathbf{h}^*$  выполняется на основе *топологического анализа* типа сингулярной поверхности  $\mathbf{h}_k^*$  в малой окрестности этой точки.

Пусть орт  $\mathbf{u}$ , в направлении которого необходимо сформировать вектор управляющего момента  $\mathbf{m}^g$  СГК, является ортом нормали к поверхности  $\mathbf{h}_k^*$ ,

орты  $\mathbf{h}_i^*$  представляют значения КМ отдельных ГД в особой точке и  $\beta_i^*$  – соответствующие им углы прецессии ГД. Разложением векторной зависимости  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})$  в ряд Тейлора в окрестности особой точки  $\mathbf{h}^*$  по степеням компонентов вектора-столбца  $\delta\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*$  вариации углов ГД выводится соотношение  $\Delta\mathbf{h} \equiv \mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}^*) = \sum_i \mathbf{a}_i \delta\beta_i - \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{h}_i (\delta\beta_i)^2 + \dots$ . Вычисляя проекцию вектора  $\Delta\mathbf{h}$  на орт  $\mathbf{u}$ , получаем  $\Delta h_u \equiv \Delta\mathbf{h} \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \sum_i (1/p_i) (\delta\beta_i)^2$ , где параметры  $p_i \equiv 1/(\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{u})$  используются в определении *гауссовой кривизны*  $\mathcal{K}$  сингулярной поверхности  $\mathbf{h}_k^*$  в малой окрестности точки  $\mathbf{h}^*$ , в данном случае согласно формуле  $1/\kappa \equiv \frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_i p_j (\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_j \times \mathbf{u}))^2$ . Особая точка является *проходимой*, если можно создать положительную вариацию  $\Delta h_u$  при неизменности суммарного КМ СГК  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$ .

Предложенный Е.Н. Токарем и В.Н. Платоновым [3] метод анализа проходимости особой точки основан на следующих простых положениях. Касательная плоскость к особой поверхности определяется двумя ортами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  из условий  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ ,  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$  и  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \neq 1$ . Неизменность суммарного КМ СГК  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$  приводит к необходимости выполнения двух очевидных условий  $\Delta h_v \equiv \Delta\mathbf{h} \cdot \mathbf{v} = \sum_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}) \delta\beta_i = 0$ ;  $\Delta h_w \equiv \Delta\mathbf{h} \cdot \mathbf{w} = \sum_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{w}) \delta\beta_i = 0$ , которые составляют систему двух линейных уравнений относительно  $m$  переменных  $\delta\beta_i, i = 1 \div m$ . Если ранг этой системы равен 2 (что достигается выбором ортов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  в касательной плоскости), то можно выразить  $\delta\beta_i$  для каких-либо двух ГД через  $\delta\beta_i$  для остальных  $m-2$  гирогинов. Подстановка этих двух  $\delta\beta_i$  в выражение для  $\Delta h_u$  приводит к квадратичной форме  $q_n$  порядка  $m-2$  относительно  $\delta\beta_i$ . Если квадратичная форма  $q_n$  является отрицательно определенной, то делается заключение – особая точка является непроходимой в направлении  $\mathbf{u}$ . В [5] без конкретного доказательства утверждается, что выполненный по указанной методике топологический анализ показал принципиальную проходимость всех полностью внутренних сингулярных поверхностей  $\mathbf{h}_k^*$  для СГК *кратных* схем.

В данной статье выполняется топологический анализ особых (сингулярных) состояний двух конкретных *кратных* схем СГК на основе четырех и шести ГД, приводится оригинальный метод и собственно доказательство проходимости всех внутренних сингулярных поверхностей, т.е. для указанных схем доказыва-ется принадлежность внутренних сингулярных поверхностей типу  $\mathbf{h}^*$ , а также представляется решение задачи синтеза *явных* законов настройки таких СГК.

### Постановка задачи

Возможность формирования СГК вектора трехмерного нормированного управляющего момента  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$  в особом состоянии СГК (при  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$ ) теряется только при некоторых вполне определенных расположениях ортов  $\mathbf{h}_i(\beta_i)$  КМ ГД относительно вектора суммарного нормированного КМ СГК  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$ , т.е. только при особых значениях вектора-столбца углов прецессии ГД  $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^*$ . По-

этому при управлении СГК необходимо «приходить» в особые точки  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$  с «неопасным» расположением гиродинов [4, с. 283], используя для этого законы настройки – регулирования взаимного положения избыточного числа ГД за счет организации так называемого *нуль-движения* гиродинов в составе СГК, для которого вектор нормированного управляющего момента СГК  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \sum \mathbf{m}_i^g(\beta_i) \dot{\beta}_i \equiv \mathbf{0}$ . Для синтеза *явных* законов настройки СГК по аналитическим соотношениям недостаточно факта принципиальной проходимости всех полностью внутренних сингулярных поверхностей.

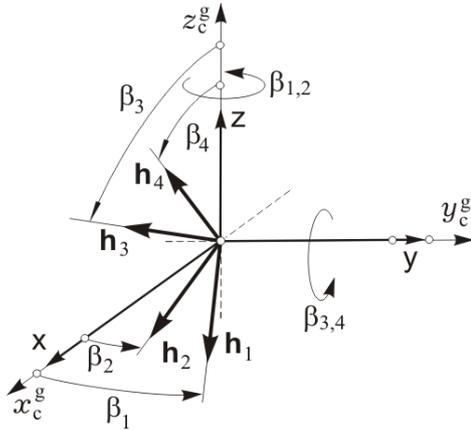


Рис. 1. Схема 2-SPE и отсчет углов ГД

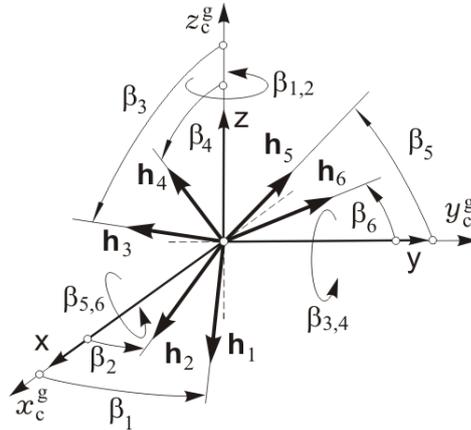


Рис. 2. Схема 3-SPE и отсчет углов ГД

Коллинеарная пара безупорных ГД в известной работе *J.W.Crenshaw* (1973) [6] была названа *Scissored Pair Ensemble (SPE)*, а кратные схемы на основе двух и трех коллинеарных пар ГД – как 2-SPE и 3-SPE. На рис. 1 и 2 представлены канонические структуры указанных схем, когда оси подвесов ГД параллельны осям канонического гироскопического базиса (КГБ)  $Ox_c^g y_c^g z_c^g$ , который считается совпадающим с базисом  $\mathbf{B}$ . Силовые гироскопические комплексы должны обеспечивать требуемую рабочую область  $\mathbf{S}^g \subset \mathbf{S}$  вариации суммарного КМ  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) = \sum \mathbf{h}_i(\beta_i)$ . В «парковом» состоянии СГК при  $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^0$  вектор КМ  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}^0) = \mathbf{0}$ .

Ставится задача исследования свойств двух кратных схем 2-SPE и 3-SPE в части топологического анализа проходимости всех внутренних сингулярных поверхностей, а также синтеза явных законов настройки СГК указанных схем с исключением избыточности и сингулярности в рабочей области  $\mathbf{S}^g$ .

### Сингулярные поверхности

Введем обозначения проекций ортов КМ каждого ГД на оси ортогонального КГБ  $\mathbf{G}^c (Ox_c^g y_c^g z_c^g)$  (см. рис. 1 и 2):

$$\begin{aligned} x_1 = C_1 \equiv \cos \beta_1; \quad x_2 = C_2 \equiv \cos \beta_2; \quad y_1 = S_1 \equiv \sin \beta_1; \quad y_2 = S_2 \equiv \sin \beta_2; \\ x_3 = S_3 \equiv \sin \beta_3; \quad x_4 = S_4 \equiv \sin \beta_4; \quad z_3 = C_3 \equiv \cos \beta_3; \quad z_4 = C_4 \equiv \cos \beta_4; \\ y_5 = C_5 \equiv \cos \beta_5; \quad y_6 = C_6 \equiv \cos \beta_6; \quad z_5 = S_5 \equiv \sin \beta_5; \quad z_6 = S_6 \equiv \sin \beta_6. \end{aligned}$$

Тогда вектор-столбец нормированного суммарного КМ СГК  $\mathbf{h}$  в ортогональном КГБ  $\mathbf{G}^c$  и градиентная матрица Якоби  $\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \partial \mathbf{h} / \partial \boldsymbol{\beta}$  представляются для схемы 3-SPE в виде

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + S_3 + S_4 \\ S_1 + S_2 + C_5 + C_6 \\ C_3 + C_4 + S_5 + S_6 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} -S_1 & -S_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 & -S_5 & -S_6 \\ 0 & 0 & -S_3 & -S_4 & C_5 & S_6 \end{bmatrix},$$

а для схемы 2-SPE – в виде

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + S_3 + S_4 \\ S_1 + S_2 \\ C_3 + C_4 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} -S_1 & -S_2 & C_3 & C_4 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_3 & -S_4 \end{bmatrix}.$$

Для схемы 2-SPE при обозначениях

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \alpha_2 = \frac{\beta_3 + \beta_4}{2}, \alpha_i \in [-\pi, +\pi]; \delta_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}, \delta_2 = \frac{\beta_3 - \beta_4}{2}, \delta_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

определитель матрицы Грамма выражается в симметричном виде

$$\mathbf{G} = 2 \cdot [(C_{\alpha_1}^2 C_{\delta_1}^2 + S_{\alpha_1}^2 S_{\delta_1}^2) \cdot S_{2\delta_2}^2 + (C_{\alpha_2}^2 C_{\delta_2}^2 + S_{\alpha_2}^2 S_{\delta_2}^2) \cdot S_{2\delta_1}^2],$$

поэтому все естественные сингулярные состояния этой схемы СГК, в которых этот определитель принимает значение  $\mathbf{G} = 0$ , описываются соотношением

$$(C_{\alpha_i} C_{\delta_i} S_{\delta_j} C_{\delta_j} = 0) \& (S_{\alpha_i} S_{\delta_i} S_{\delta_j} C_{\delta_j} = 0),$$

где  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ . Анализ этого соотношения приводит к последовательному аналитическому описанию всех естественных множеств сингулярных состояний СГК по схеме 2-SPE:

$$\mathbf{A}. \mathbf{u} \neq \mathbf{g}_1, \mathbf{u} \neq \mathbf{g}_2$$

$$1. \quad \beta_1 = \beta_2; \beta_3 = \beta_4; \quad (1)$$

$\boldsymbol{\varepsilon} = (++++)$ :  $[(S_{\delta_i} = 0)] \Rightarrow \delta_i = 0, i = 1, 2$ : обе пары ГД находятся во *внешнем* ( $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3 = \mathbf{h}_4$ ), *одинаково* направленном ( $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$ ) сингулярном состоянии, при этом конец вектора  $\mathbf{h}$  принадлежит части трехмерной *внешней* граничной поверхности

$$\mathbf{S}^* = \{\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}): \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 - 2q_y q_z - 8 = 0\},$$

где  $q_s \equiv \sqrt{4 - \mathbf{s}^2}$ ,  $|\mathbf{s}| \leq 2$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , рис. 3 а и рис. 4.

$$2. \quad \beta_1 = \beta_2; \beta_3 = \beta_4; \quad (2)$$

$\boldsymbol{\varepsilon} = (+ + - -)$  или  $\boldsymbol{\varepsilon} = (- - + +)$ :  $[(S_{\delta_i} = 0)] \Rightarrow \delta_i = 0, i = 1, 2$ : обе пары ГД находятся во *внешнем различно* направленном ( $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = -(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2)$ ) сингулярном состоянии, при этом конец вектора  $\mathbf{h}$  принадлежит трехмерной *внутренней* сингулярной поверхности;

$$S_\varepsilon = \{\mathbf{h}(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 + 2q_y q_z - 8 = 0\},$$

см. рис. 3, *a, b* с сечением этой поверхности плоскостью  $z = 0$ .

$$3. \quad \beta_1 = \beta_2 + \pi; \beta_3 = \beta_4; \quad (3)$$

$\varepsilon = (+ - + +)$ :  $[(C_{\delta_i} = 0) \& (S_{\alpha_i} = 0)] \Rightarrow \alpha_i = 0 \vee (\pm\pi); \delta_i = \pm\pi/2, i = 1$ : первая пара ГД находится во *внутреннем* сингулярном состоянии ( $\mathbf{h}_2 = -\mathbf{h}_1$ ), и *одновременно* векторы КМ ее гиродинов направлены перпендикулярно оси  $x$  КГБ; вторая пара находится во *внешнем* сингулярном состоянии, при этом вектор  $\mathbf{h}$  нормированного КМ СГК принадлежит окружности радиуса 2, ортогональной орту  $\mathbf{g}_1$  и с центром в начале координат, см. рис. 3 *a*;

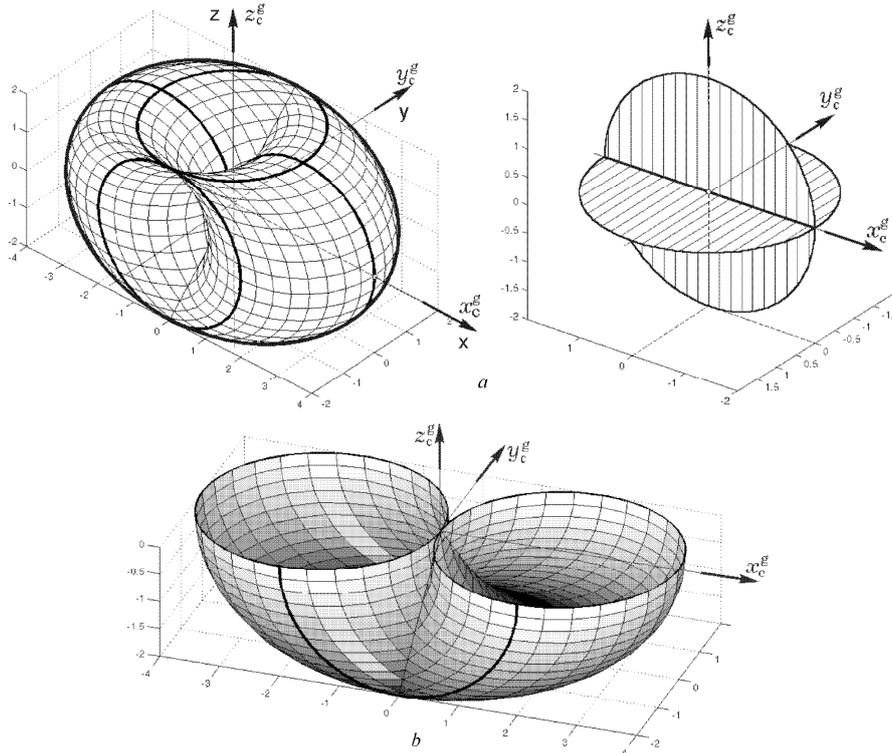


Рис. 3. Естественные сингулярные состояния схемы 2-SPE

$$4. \quad \beta_1 = \beta_2; \beta_3 = \beta_4 + \pi; \quad (4)$$

$\varepsilon = (+ + + -)$ :  $[(C_{\delta_i} = 0) \& (S_{\alpha_i} = 0)] \Rightarrow \alpha_i = 0 \vee (\pm\pi); \delta_i = \pm\pi/2, i = 2$ : вторая пара ГД находится во *внутреннем* сингулярном состоянии ( $\mathbf{h}_4 = -\mathbf{h}_3$ ), и *одновременно* векторы КМ ее гиродинов направлены перпендикулярно оси  $x$  КГБ; первая пара находится во *внешнем* сингулярном состоянии, при этом вектор  $\mathbf{h}$  КМ СГК принадлежит окружности радиуса 2, ортогональной орту  $\mathbf{g}_2$  и с центром в начале координат, см. рис. 3 *a*;

$$5. \quad \beta_1 = \beta_2 + \pi; \beta_3 = \beta_4 + \pi; \quad (5)$$

$\varepsilon = (+ - + -)$ :  $[C_{\delta_i} = 0] \Rightarrow \delta_i = \pm\pi/2, i = 1, 2$ : обе пары ГД находятся во *внутреннем* сингулярном состоянии ( $\mathbf{h}_2 = -\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_4 = -\mathbf{h}_3$ ), вектор  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ , см. рис. 3 *a*;

$$\mathbf{B}. \mathbf{u} = \mathbf{g}_1.$$

$$6. \quad \beta_3 = \beta_4, \quad (6)$$

получаются круговые плоскости границ области вариации вектора КМ СГК, ортогональные орту  $\mathbf{g}_1$  (рис. 4).

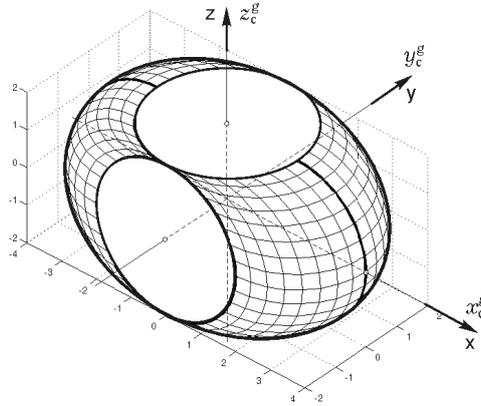


Рис. 4. Оболочка области  $\mathbf{S}$  схемы 2-SPE

$$7. \quad \beta_3 = \beta_4 + \pi, \quad (7)$$

получается внутренность круга, ограниченного окружностью (3), см. рис. 3 а.

$$\mathbf{C}. \mathbf{u} = \mathbf{g}_2.$$

$$8. \quad \beta_1 = \beta_2, \quad (8)$$

получаются круговые плоскости границ области вариации вектора КМ СГК, ортогональные орту  $\mathbf{g}_2$  (см. рис. 4).

$$9. \quad \beta_1 = \beta_2 + \pi, \quad (9)$$

получается внутренность круга, ограниченного окружностью (4), см. рис. 3 а.

Проекция всех 25 поверхностей возможных сингулярных состояний и оболочка области вариации вектора КМ СГК кратной схемы 3-SPE представлены на рис. 5, пространственные изображения этих поверхностей приведены в работе [7].

### Анализ проходимости сингулярных состояний

Квадратичная форма  $\Delta h_u$  представляется в векторно-матричном виде как  $\Delta h_u = -\frac{1}{2} \sum_i (1/p_i) (\delta\beta_i)^2 = -\frac{1}{2} \delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{P}^{-1} \delta\boldsymbol{\beta}$ , где диагональная матрица  $\mathbf{P} = \text{diag} \{p_i\}$ . Для анализа проходимости сингулярных состояний СГК кратных схем, в частности всех аналитически описанных выше сингулярных состояний СГК схемы 2-SPE, предлагается и применяется *новый подход*, основанный на формировании вектора-столбца вариации углов ГД  $\delta\boldsymbol{\beta}$  из условия представления *только нуль-движений* ГД (т.е. когда  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \sum \mathbf{m}_i^g(\beta_i) \dot{\beta}_i \equiv \mathbf{0}$  при  $\dot{\beta}_i(t) \neq 0$ ) в окрестности известного особого состояния  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$  СГК с учетом набора знаков  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$ . С этой целью принимается  $\delta\boldsymbol{\beta} = \delta\boldsymbol{\beta}_n \equiv a_1 \mathbf{e}_1^n + \dots + a_{m-2} \mathbf{e}_{m-2}^n$ , где скалярные величины  $a_i$ ,  $i = 1 \div (m-2)$  представляют малые углы произвольного знака,

а векторы-столбцы  $\mathbf{e}_i^n \in \mathbf{R}^m$  размерности  $m$  выбираются из условия обеспечения только нуль-движений ГД.

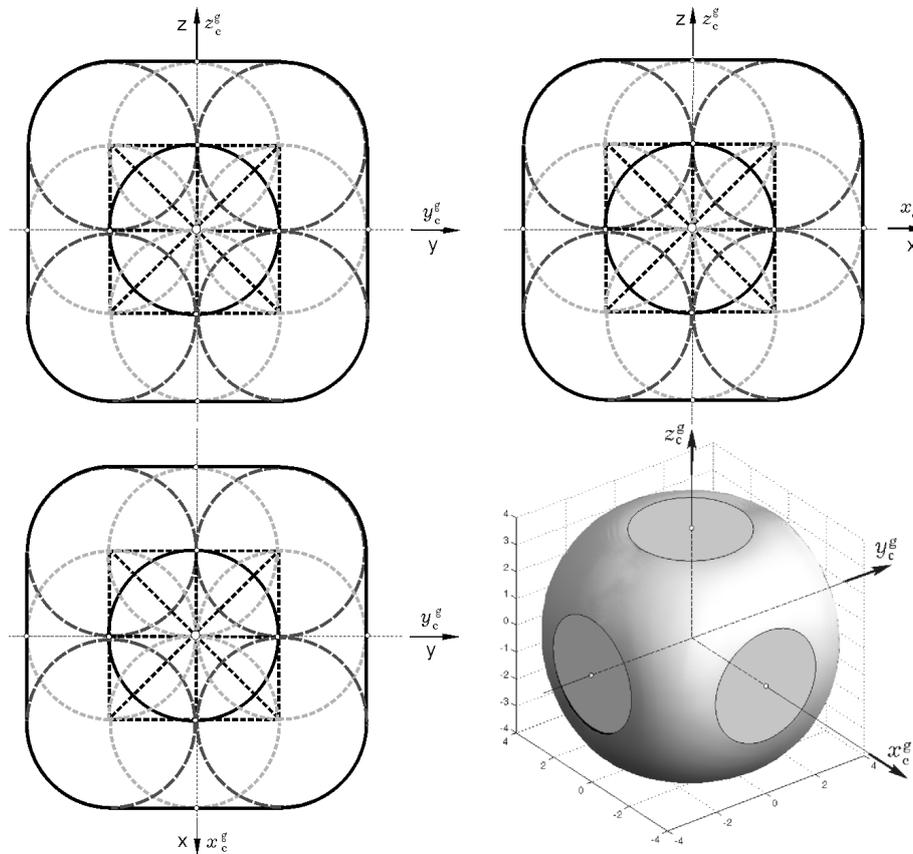


Рис. 5. Сингулярные состояния и оболочка области вариации КМ схемы 3-SPE

Для удобства будем считать, что для любых ГД каждой  $s$ -й группы ( $s = 1 \div k$ ) всегда параметр  $p_i \equiv 1/(\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{u}) \geq 0$ , и введем параметр  $\tilde{p}_i \equiv \varepsilon_i p_i$ , который далее используется вместо параметра  $p_i$ . При таком выборе вектора-столбца  $\delta\mathbf{b}$  вариации углов ГД квадратичная форма  $\Delta h_u$  порядка  $m$  превращается в квадратичную форму  $(m-2)$ -го порядка относительно компонентов вектора-столбца  $\mathbf{a} = \{a_i\}$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{m-2}$ :  $\Delta h_u = q_n = -\frac{1}{2} \delta\mathbf{b}_n^T \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \delta\mathbf{b}_n = -\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{Q}_n \mathbf{a}$ . Здесь симметричная матрица  $\mathbf{Q}_n$  представляется в виде  $\mathbf{Q}_n = (\mathbf{E}_n)^T \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{E}_n$ , где диагональная матрица  $\tilde{\mathbf{P}} = \text{diag} \{\tilde{p}_i\}$  и прямоугольная матрица  $\mathbf{E}_n = [\mathbf{e}_i^n, i = 1 \div (m-2)]$ . Далее предполагается, что читателю известны классические понятия теории квадратичных форм, см. например [8], а именно понятия их ранга, определенности, неопределенности, полуопределенности и вырожденности. Очевидно, что для анализа проходимости особых состояний схемы 2-SPE, где число гироидов  $m = 4$ , на всех внутренних сингулярных поверхностях необходимо выполнить исследование проходимости лишь внутренних сингулярных поверхностей (2), (3), (5) и (7). Это следует из того, что пары поверхностей (3) и (4), (7) и (9) отличаются лишь номером группы (в данном случае пары) ГД.

**Внутренняя пространственная сингулярная поверхность  $S_\varepsilon$  (2)**,  $\varepsilon = (+ + - -)$ . Независимые нуль-движения ГД при  $\mathbf{h} \in S_\varepsilon$  реализуются при  $\mathbf{e}_1^n = \{1, -1, 0, 0\}$ ;  $\mathbf{e}_2^n = \{0, 0, 1, -1\}$  и матрице  $\mathbf{Q}_n = (\mathbf{E}_n)^T \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{E}_n = \text{diag}\{2/p_1, -2/p_2\}$ . Форма  $q_n = -\frac{1}{2}(2a_1^2/p_1 - 2a_2^2/p_2) = -a_1^2/p_1 + a_2^2/p_2$  является неопределенной, следовательно, любая особая точка этой внутренней поверхности проходима.

**Окружность (3), ортогональная орту  $\mathbf{g}_1$ , с центром в начале координат,  $\varepsilon = (+ - + +)$** . Независимые нуль-движения ГД реализуются при векторах-столбцах  $\mathbf{e}_1^n = \{1, 1, 0, 0\}$ ;  $\mathbf{e}_2^n = \{0, 0, 1, -1\}$ , потому квадратичная форма

$$q_n = -\frac{1}{2}(a_1^2/p_1 - a_1^2/p_1 + 2a_2^2/p_2) = -a_2^2/p_2 \leq 0$$

является полуопределенной (частично вырожденной), ее ранг равен 1. Следовательно, любая особая точка внутренней сингулярной поверхности (3), фактически плоской замкнутой кривой, проходима. Если орт  $\mathbf{u}$  лежит в плоскости, которой принадлежат орты  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$  осей подвеса соответствующей пары ГД, то ранг матрицы  $\mathbf{A}_n$  становится равным 1. В этом случае для анализа проходимости внутренней сингулярной окружности (3) используется третий вектор  $\mathbf{e}_3^n = \{1, 0, -1, 0\}$ , линейно зависимый от векторов  $\mathbf{e}_1^n$  и  $\mathbf{e}_2^n$ . Здесь принимается  $\delta\mathbf{b}_n \equiv a_1\mathbf{e}_1^n + a_2\mathbf{e}_2^n + a_3\mathbf{e}_3^n$ , при этом квадратичная форма

$$q_n = -\frac{1}{2}((a_1 + a_3)^2/p_1 - a_1^2/p_1 + (a_2 - a_3)^2/p_2 + a_2^2/p_2)$$

является неопределенной, поэтому любая особая точка внутренней сингулярной плоской кривой (3) проходима и в этом случае.

**Начало координат (5),  $\varepsilon = (+ - + -)$** . Независимые нуль-движения ГД реализуются при векторах-столбцах  $\mathbf{e}_1^n = \{1, 1, 0, 0\}$ ;  $\mathbf{e}_2^n = \{0, 0, 1, 1\}$ , квадратичная форма  $q_n = -\frac{1}{2}(a_1^2/p_1 - a_1^2/p_1 + a_2^2/p_2 - a_2^2/p_2) \equiv 0$  является полностью вырожденной. Формально согласно указанному выше определению точка  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  проходима, но требует пристального внимания при синтезе законов настройки в силу ограниченности скоростей поворота ГД на практике. Если орт  $\mathbf{u}$  лежит в плоскости, которая содержит орты  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$  осей подвеса ГД, то для анализа проходимости начала координат (5) используется третий вектор  $\mathbf{e}_3^n = \{1, 0, -1, 0\}$ , линейно зависимый от векторов  $\mathbf{e}_1^n$  и  $\mathbf{e}_2^n$ . При  $\delta\mathbf{b}_n \equiv a_1\mathbf{e}_1^n + a_2\mathbf{e}_2^n + a_3\mathbf{e}_3^n$  квадратичная форма  $q_n = -\frac{1}{2}((a_1 + a_3)^2/p_1 - a_1^2/p_1 + (a_2 - a_3)^2/p_2 + a_2^2/p_2)$  является неопределенной, поэтому начало координат (2) и в этом случае проходимо.

**Внутренность круга (7), ограниченного окружностью (3)**. Независимые нуль-движения ГД реализуются при векторах-столбцах  $\mathbf{e}_1^n = \{0, 0, 1, 1\}$ ;  $\mathbf{e}_2^n = \{a, b, 1, -1\}$  с произвольными параметрами  $a$  и  $b$ . При этом квадратичная форма  $q_n = -\frac{1}{2}((a_1 + a_2)^2/p_1 - (a_1 - a_2)^2/p_2)$  является неопределенной. Поэтому любая особая точка внутри круга (7), ограниченного окружностью (3), также проходима.

Важную дополнительную информацию о проходимости внутренних особых точек дает знак гауссовой кривизны, вычисленный в этой точке. При обозначениях  $c_{ij}^2 \equiv (\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_j \times \mathbf{u}))^2 \geq 0$  и  $\tilde{p}_i \equiv \varepsilon_i p_i$  с  $p_i \geq 0$  гауссова кривизна  $\kappa$  сингуляр-

ной поверхности в малой окрестности особой точки  $\mathbf{h}^*$  СГК кратной схемы определяется соотношением  $1/\kappa = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{ij}^2 \tilde{p}_i \tilde{p}_j$ , правая часть которого с учетом  $c_{ii}^2 = 0$  и  $c_{ij}^2 = c_{ji}^2$  представляет собой симметричную квадратичную форму относительно параметров  $\tilde{p}_i$ . При наличии только одного отрицательного знака  $\varepsilon_i$  в наборе  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$ , например соответствующего второму ГД в первой паре, получается такой результат:

$$1/\kappa = \frac{1}{2} ((p_1 - p_1) \sum_j \tilde{p}_j c_{1j}^2 + \sum_{j \neq 1} \sum_{k \neq 1} \tilde{p}_j \tilde{p}_k c_{jk}^2) > 0.$$

Если же в наборе  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$  имеются два отрицательных знака, то возможны *два варианта*: (i) отрицательные знаки  $\varepsilon_i$  соответствуют ГД в разных парах, и (ii) оба отрицательных знака  $\varepsilon_i$  соответствуют гироспинам в одной паре. В *первом* варианте сингулярное состояние СГК проявляется только в начале координат (5) КГБ, где вектор нормированного суммарного кинетического момента СГК  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ . Во *втором* варианте сингулярное состояние СГК происходит на внутренней пространственной сингулярной поверхности  $S_\varepsilon$  (2), которая содержит то же самое начало координат  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ . В обоих этих вариантах знак гауссовой кривизны  $\kappa$  может не быть положительным, что отражается в вырожденности либо неопределенности соответствующих форм  $q_n$ .

Таким образом, все внутренние сингулярные поверхности схемы *2-SPE* теоретически, без учета ограничений на скорости прецессии ГД, являются проходимыми, но характер такой проходимости существенно зависит от типа сингулярной поверхности. Наибольшего внимания при синтезе законов настройки СГК требуют сингулярные поверхности, в точках которых происходит вырождение соответствующих квадратичных форм  $q_n$ , либо имеются два отрицательных знака в наборе  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$ , а именно внутренняя пространственная сингулярная поверхность  $S_\varepsilon$  (2), где  $\boldsymbol{\varepsilon} = (+ + - -)$  или  $\boldsymbol{\varepsilon} = (- - + +)$ , и особенно начало координат (5), где  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon} = (+ - + -)$ .

Детальный топологический анализ сингулярных состояний схемы *3-SPE* и проходимости внутренних сингулярных поверхностей данной схемы показывает, что все эти поверхности проходимы. При этом наиболее сложно в исследовании начало КГБ – центра сгустка сингулярных поверхностей, см. рис. 5, где  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  и набор знаков  $\boldsymbol{\varepsilon} = (+ - + - + -)$ .

### Синтез явных законов настройки СГК

Вводятся обозначения сразу для обеих рассматриваемых кратных схем:

$$\begin{aligned} x_{12} &= x_1 + x_2; & x_{34} &= x_3 + x_4; & y_{12} &= y_1 + y_2; \\ y_{56} &= y_5 + y_6; & z_{34} &= z_3 + z_4; & z_{56} &= z_5 + z_6; \\ \tilde{x}_{12} &= \frac{x_{12}}{\sqrt{4 - y_{12}^2}}; & \tilde{x}_{34} &= \frac{x_{34}}{\sqrt{4 - z_{34}^2}}; & \tilde{y}_{12} &= \frac{y_{12}}{\sqrt{4 - x_{12}^2}}; \\ \tilde{y}_{56} &= \frac{y_{56}}{\sqrt{4 - z_{56}^2}}; & \tilde{z}_{34} &= \frac{z_{34}}{\sqrt{4 - x_{34}^2}}; & \tilde{z}_{56} &= \frac{z_{56}}{\sqrt{4 - y_{56}^2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $|\tilde{x}_{12}| \leq 1$  и  $|\tilde{x}_{34}| \leq 1$ , а в трехмерном пространстве КГБ множества  $\tilde{x}_{12} = a$  и  $\tilde{x}_{34} = a$ , где параметр  $a$  удовлетворяет условию  $|a| \leq 1$ , представляют собой части двух плоскостей, которые пересекаются по оси  $Ox_c^g$  КГБ. При значении  $a = 0$  условия  $\tilde{x}_{12} = 0$  и  $\tilde{x}_{34} = 0$  приводят к двум множествам  $Q_y^g \equiv \{x = 0; y = 0; |z| \leq 2\}$  и  $Q_z^g \equiv \{x = 0; |y| \leq 2; z = 0\}$  соответственно. Эти множества располагаются в средней части области  $S$  и имеют центр в начале КГБ, т.е. в самой критической точке внутреннего сингулярного состояния данной кратной схемы. Введем функцию  $g(\Delta\tilde{x}) = (\Delta\tilde{x})^2 / 2$ , где разность  $\Delta\tilde{x}$  нормированных проекций вектора КМ схемы 2-SPE на ось  $Ox_c^g$  КГБ представляется в виде  $\Delta\tilde{x} = \tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{34}$ .

Очевидно, что в начале КГБ, где  $\tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{34} = 0$ , выполняется условие  $g(\Delta\tilde{x}) = 0$ . Функция распределения вектора КМ между парами ГД определяется из условий положительности функции  $g(\Delta\tilde{x})$  и ее градиента  $\text{grad } g(\Delta\tilde{x}) = \Delta\tilde{x}$  для всех точек внутри области  $S$  с *одновременным* достижением значений  $g(\Delta\tilde{x}) = 0$  и  $\text{grad } g(\Delta\tilde{x}) = 0$  только на границе  $S^*$  области  $S$ , когда произведение  $\tilde{x}_{12} \tilde{x}_{34} = 1$ , т.е. когда  $\tilde{x}_{12}$  и  $\tilde{x}_{34}$  *одновременно* равны 1 либо  $-1$  и обе пары ГД находятся в состоянии одностороннего насыщения. Отсюда следует требование  $\text{grad } g(\Delta\tilde{x}) = \psi(\tilde{x}_{12}, \tilde{x}_{34}) \geq 0$  при выборе функции  $\psi(\tilde{x}_{12}, \tilde{x}_{34})$  с *симметричным* вхождением аргументов, которая должна обращаться в нуль только при условии  $\tilde{x}_{12} \tilde{x}_{34} = 1$ . Выбор  $\psi(\tilde{x}_{12}, \tilde{x}_{34}) = 1 - \tilde{x}_{12} \tilde{x}_{34}$  приводит к функции распределения вектора нормированного КМ СГК между парами ГД с фиксированным параметром  $\rho$  в виде

$$f_{\rho 1}(\beta) \equiv \tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{34} + \rho(\tilde{x}_{12}\tilde{x}_{34} - 1) = 0, \quad (10)$$

где  $0 < \rho < 1$ . При условии  $f_{\rho 1}(\beta) = 0$  внутри области  $S$  остаются сингулярными (но проходимыми!) только два одномерных множества:

$$\begin{aligned} S_y &= \{(x/(2\rho))^2 + (z/2)^2 = 1, x < 0; y = 0, |y_1| = |y_2| = 1\}; \\ S_z &= \{(x/(2\rho))^2 + (y/2)^2 = 1, x > 0; z = 0, |z_3| = |z_4| = 1\}, \end{aligned} \quad (11)$$

в которые трансформируются множества  $Q_y^g$  и  $Q_z^g$  (см. рис. 6 в [9]). В соотношениях (11) учтены направления запрещенного перераспределения вектора КМ СГК между парами ГД при условии  $h(\beta(t)) \in S_{yz} \equiv S_y \cup S_z$ .

Закон настройки СГК по схеме 2-SPE принимается в виде

$$D^+ f_{\rho 1}(\beta) = \Phi_\rho(f_{\rho 1}(\beta), h(\beta)) \equiv \begin{cases} -\text{Sat}(\phi_\rho, \mu_\rho, f_{\rho 1}(\beta)) & h(\beta) \in S \setminus Q_{yz}; \\ \phi_\rho \text{Relh}(a_s, l_\rho, r_s) & h(\beta) \in Q_s, s = y, z. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь  $D^+$  – символ правой производной по времени,  $\phi_\rho, \mu_\rho$  и  $l_\rho$  – положительные параметры и используются нелинейные функции

$$\text{Relh}(a, l_\rho, x) \equiv \begin{cases} 1 & x > -l_\rho; \\ -1 & x < l_\rho; \end{cases} \quad \text{Relh}(a_s, l_\rho, r_s(\beta(t_0))) = a_s \in \{-1; 1\};$$

$$r_y \equiv M_\pi(\beta_1 - \beta_2 - \pi) \text{ и } r_z \equiv M_\pi(\beta_3 - \beta_4 - \pi), \text{ где } M_\pi(\alpha) \equiv \begin{cases} \alpha & |\alpha| \leq \pi; \\ \alpha - 2\pi \text{Sign}(\alpha) & |\alpha| > \pi. \end{cases}$$

При законе настройки (12) обеспечиваются принадлежность конца нормированного вектора  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})$  КМ СГК множеству  $\mathbf{Q}_{yz}(\boldsymbol{\beta})$  внутренних сингулярных состояний только в отдельные моменты времени (меры нуль по Лебегу) и биективная связь вектора  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta})$  с векторами-столбцами  $\boldsymbol{\beta}$  и  $\mathbf{u}^g = \hat{\boldsymbol{\beta}}$ . Анализ (11) приводит к такому результату: в КГБ для любых значений  $\mathbf{h} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ , принадлежащих сфере  $\mathbf{S}_r^g \equiv \{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 \leq r_g^2\}$  радиуса  $r_g < 2\rho$ , отсутствуют сингулярные состояния СГК.

Для схемы 2-SPE глобальный максимум определителя матрицы Грамма  $\mathbf{G} = 64/27$  достигается при  $\rho = 2\sqrt{6}/5$  в точках  $(\mathbf{x} = \{0, \pm 4\sqrt{2}/3; \mathbf{y} = 0; \mathbf{z} = 0\})$ . Выбор значения  $\rho = 2\sqrt{6}/5$  оптимизирует радиус сферы  $\mathbf{S}_r^g$ , и рекомендуется назначать рабочую область  $\mathbf{S}^g = \mathbf{S}_r^g$  в виде сферы радиусом  $r_g = 1,5$ . Возможно использование также и периферийной части области  $\mathbf{S}$ , но при этом закон настройки (12) существенно усложняется [10].

Для схемы 3-SPE компоненты векторной функции  $\mathbf{f}_\rho(\boldsymbol{\beta}) = \{f_{\rho 1}, f_{\rho 2}, f_{\rho 3}\} = \mathbf{0}$  распределения КМ СГК между гиродинами принимаются в виде

$$\begin{aligned} f_{\rho 1}(\boldsymbol{\beta}) &\equiv \tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{34} + \rho(\tilde{x}_{12}\tilde{x}_{34} - 1) = 0; \\ f_{\rho 2}(\boldsymbol{\beta}) &\equiv \tilde{y}_{56} - \tilde{y}_{12} + \rho(\tilde{y}_{56}\tilde{y}_{12} - 1) = 0; \\ f_{\rho 3}(\boldsymbol{\beta}) &\equiv \tilde{z}_{34} - \tilde{z}_{56} + \rho(\tilde{z}_{34}\tilde{z}_{56} - 1) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где постоянный параметр  $\rho$  также удовлетворяет условию  $0 < \rho < 1$ , а явный векторный закон настройки СГК – в виде  $\dot{\mathbf{f}}_\rho(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{Sat}(\phi_\rho, \mu_\rho \mathbf{f}_\rho(\boldsymbol{\beta}))$ . Данный закон обеспечивает отсутствие сингулярных состояний СГК по схеме 3-SPE для всех внутренних точек области  $\mathbf{S}$  вариации вектора его суммарного КМ. Здесь рациональным является выбор параметра  $\rho = 0,65$  и рекомендуется назначать рабочую область  $\mathbf{S}^g = \mathbf{S}_r^g$  в виде сферы радиусом  $r_g = 3$ .

### Заключение

На основе предложенной оригинальной методики выполнен топологический анализ поверхностей особых состояний двух СГК кратных схем на основе четырех и шести гиродинов. Аналитически доказана проходимость сингулярных состояний, проведен синтез явных законов настройки таких СГК. Методы нелинейного анализа динамики и проектирования систем управления ориентацией КА с помощью СГК по схеме 2-SPE представлены в [11].

*Работа поддержана РФФИ (грант 11-08-01037) и Отделением энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН (программа 14).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Управление** силовыми гироскопическими комплексами космических аппаратов /Е.И.Сомов [и др.] // Труды X Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ЦНИИ «Электроприбор». - 2003. - С. 278-294.
2. **Токарь, Е.Н.** Проблемы управления гиросиловыми стабилизаторами // Космические исследования. - 1978. – Т. 16, № 2. - С. 179-187.
3. **Токарь, Е.Н.** Исследование особых поверхностей систем безупорных гиросиловых / Е.Н.Токарь, В.Н. Платонов // Космические исследования. - 1978. - Том 16. - № 5. - С. 675-685.
4. Теоретические основы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов / В.В.Кульба [и др.]. - М.: Наука, 2006. - 579 с.
5. Кратные гиросиловые системы / Е.Н.Токарь [и др.] // Космические исследования. - 1981. - Том 19. - № 6. - С. 813-822.
6. **Crenshaw, J.W.** 2-SPEED, a single gimbal control moment gyro attitude control systems // AIAA Paper. –1973. – N 73-895 – P. 1-10.
7. **Сомов, Е.И.** Оценка реализуемости поворотного маневра космического аппарата при неопределенности накопленного кинетического момента силового гироскопического комплекса / Е.И. Сомов, С.С. Мещеряков // Известия Самар. науч. центра РАН. - 2008. – Т. 9, № 3. - С. 799-807.
8. **Ефимов, Н.В.** Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. - М.: Наука, 1970. - 528 с.
9. **Сомов, Е.И.** Топологический анализ сингулярных состояний и синтез явных законов настройки силовых гироскопических кратных схем // Изв. Самарского науч. центра РАН. - 2009. – Т. 11, № 3. - С. 131-140.
10. **Сомов, Е.И.** Явный логико-динамический закон настройки минимально избыточной системы гиросиловых для маневрирующего космического аппарата / Е.И. Сомов, С.А. Бутырин // Управление движением и навигация летательных аппаратов. Самара: СГАУ им. С.П. Королева. - 2002. - С. 179-185.
11. **Somov, Ye.I.** Methods and software for research and design of the spacecraft robust fault tolerant control systems // Automatic Control in Aerospace. Oxford: Elsevier Science. - 2002. - P. 28-40.

**Abstract.** Topological analysis of the singular states at the gyromoment clusters (GMCs) by multiply schemes based on four and six gyrodines, is developed and explicit tuning laws for such GMCs are suggested.

**Key words:** gyromoment cluster, topological analysis, explicit tuning law

Материал поступил 13.09.2009