

УДК 681.511
DOI 10.17285/0869-7035.0099

А. В. НЕБЫЛОВ, А. В. ЛОПАРЕВ, В. А. НЕБЫЛОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РОБАСТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПО ЧИСЛОВЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

Рассмотрена задача робастной линейной фильтрации случайных процессов при заданных ограничениях на дисперсию самого процесса и (или) дисперсии производных, при этом вид спектральной плотности процесса полагается неизвестным. Показано, что ряд задач обработки навигационной информации и управления движением может быть сведен к указанной постановке. Проведен анализ информативности дисперсий производных при их использовании для описания свойств воздействий и эффективности полученных решений. Рассмотрен метод получения данных о дисперсиях воздействий, основанный на анализе числовых характеристик особых точек. Приведены примеры решения прикладных задач.

Ключевые слова: стационарные линейные системы, гарантирование точности, моментные характеристики, параметрическая оптимизация.

Введение

Теория оптимальной линейной фильтрации нашла широкое применение в задачах обработки измерительной информации и управления, в том числе связанных с навигационными приложениями [1–3]. При наличии полной статистической информации о спектрально-корреляционных свойствах сигналов и помех с использованием методов, основанных на теории стохастической фильтрации, могут быть построены алгоритмы, минимизирующие среднеквадратические погрешности (СКП) управления либо оценивания. В тех случаях, когда интерес представляют только установившиеся значения СКП, используется стационарная винеровская фильтрация [1, 2, 4–13]. В то же время любые методы получения аналитических выражений для спектральных плотностей процессов не идеальны, и проверить их полную адекватность сигналам и помехам практически невозможно [4–6, 14–17]. В частности, адекватность может быть нарушена при принятии условия полной стационарности свойств случайных воздействий (полезного сигнала и помехи). Кроме того, важно заметить, что традиционно используемые выражения для спектральных плотностей в виде дробно-рациональных функций квадрата частоты соответствуют моделям

Небылов Александр Владимирович. Доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (С.-Петербург). Главный ученый секретарь международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID 0000-0001-5168-3436.

Лопарев Алексей Валерьевич. Кандидат технических наук, начальник сектора, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО (С.-Петербург). ORCID 0000-0001-5180-0794.

Небылов Владимир Александрович. Кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения. ORCID 0000-0003-1449-6898.

с неограниченными дисперсиями производных (чаще всего уже начиная с первого порядка), хотя у реальных физических процессов дисперсии производных любых порядков конечны. Для устранения этого противоречия приходится повышать порядок моделей. Вместе с тем в ряде случаев на основе физических представлений о природе исследуемых процессов либо путем специальной обработки реализаций могут быть получены адекватные оценки дисперсий производных невысоких порядков (до третьего включительно). Так, в работах [14, 18, 19] представлен метод оценки дисперсии процесса и дисперсий его производных на основе анализа экспериментально полученных статистических характеристик особых точек. В [5, 10, 20–26] показано, как, оперируя полученными моментными характеристиками, без привлечения аналитических выражений для спектральной плотности можно сформулировать и решить задачу построения алгоритма оценивания, обладающего гарантирующими свойствами. В указанном смысле такой подход можно назвать робастным [1, 6, 10, 27–30]. В работах [15, 20] установлена связь получаемых оценок дисперсий ошибок управления (погрешностей оценивания) с H_∞ -нормой.

В настоящей статье рассматриваются некоторые аспекты практического применения указанного подхода, в том числе связанные с анализом качества получаемых оценок.

Статья структурирована следующим образом. Вначале вводится в рассмотрение постановка задачи фильтрации по числовым характеристикам воздействий и описывается общий подход к ее решению. Далее приводится набор типовых задач в рамках этой постановки и решение некоторых из них. Описываются возможности применения полученных соотношений при синтезе алгоритмов комплексной обработки информации. В качестве инструмента получения числовых характеристик воздействий рассмотрен метод анализа характеристик особых точек. Такая информация, безусловно, обладает большей достоверностью, чем спектральные плотности, что приводит к повышению адекватности результатов синтеза. В заключении представлены выводы и ключевые аспекты рассмотренных подходов.

Теоретический материал сопровождается примерами решения прикладных задач синтеза динамических систем по числовым характеристикам воздействий. В этих примерах осуществляется оптимизация линейного стационарного фильтра, выделяющего полезный сигнал с ограниченной дисперсией одной из производных из смеси сигнала с белозумной помехой. По сравнению с винеровским фильтром синтезированные системы незначительно проигрывают в точности, но выигрывают в достоверности результата фильтрации.

Постановка и общий подход к решению задачи фильтрации по числовым характеристикам воздействий

Предположим, что скалярные измерения

$$z(t) = g(t) + v(t) \quad (1)$$

представляют собой аддитивную смесь полезного сигнала $g(t)$ и помехи $v(t)$, которые полагаются центрированными, стационарными и некоррелированными между собой случайными процессами. Будем считать, что мощность помехи равномерно распределена по всей полосе частот и для нее справедливо представление в виде белого шума интенсивности S_v . Спектральную плотность полезного сигнала $S_g(\omega)$ полагаем неизвестной, считая известными моментные характеристики (дисперсии производных)

$$D_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2i} S_g(\omega) d\omega \quad (2)$$

для некоторых $i = i_L, \dots, i_U$ (обычно $i \leq 3$), где i_L, i_U – соответственно низший и высший порядки ограниченных производных. Дополнительно может быть задана максимальная частота спектра воздействия [10, 26], а также введены ограничения, сводящиеся к обязательной унимодальности спектральной плотности [19]. С учетом введенных предположений далее под воздействием с ограниченными дисперсиями производных будем понимать именно полезный сигнал.

Заметим, что найденный тем или иным способом набор дисперсий производных воздействия не может быть свободным набором чисел с размерностью и должен удовлетворять ряду условий. Например, для набора дисперсий производных должно выполняться условие

$$D_1/D_0 \leq \sqrt{D_2/D_0} \leq D_2/D_1 \leq \sqrt{D_3/D_1} \leq D_3/D_2 \leq \dots \quad (3)$$

Неравенства (3) отражают тот факт, что спектр каждой последующей производной не менее высокочастотен, чем предыдущий. В частности, средняя четверичная частота воздействия не превосходит средней квадратичной частоты его производной [1].

Можно отметить тот факт, что дисперсии производных непосредственно влияют на коэффициенты разложения корреляционной функции в ряд Маклорена, и, казалось бы, наличие данных о дисперсиях способствует получению полноценной информации о спектрально-корреляционных свойствах воздействий. Действительно, если $R_g(\tau)$ – корреляционная функция неограниченно дифференцируемого воздействия, то ее можно представить в виде

$$R_g(\tau) = R_g(0) + R'_g(0)\tau + \frac{1}{2!} R''_g(0)\tau^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i D_i}{(2i)!} \tau^{2i} \quad (4)$$

с учетом того, что производные нечетных порядков в точке $\tau = 0$ равны нулю, а производные четных порядков $R_g^{(2i)}(0) = (-1)^i D_i$ [12, 31]. Таким образом, корреляционную функцию стационарного случайного воздействия можно разложить в степенной ряд, коэффициенты которого образуются из дисперсий производных воздействия. Сходимость ряда (4) обеспечивается в частности для всех спектральных плотностей, отличных от нуля лишь в ограниченной полосе частот. Тем не менее на практике при конечном числе известных дисперсий производных можно восстановить лишь начальную часть кривой $R_g(\tau)$, что не позволяет получать адекватные стохастические модели воздействий и препятствует использованию классических методов оптимальной фильтрации. В то же время, как будет показано ниже, существует возможность нахождения оценок $y(t) = \hat{g}(t)$ полезного сигнала с приемлемым качеством оценивания по трем или даже меньшему количеству дисперсий производных на основе физических представлений о процессах и характеристиках фильтра.

Задача в рассматриваемой далее постановке заключается в том, чтобы найти частотную передаточную функцию $H(j\omega)$ оптимального линейного стационарного фильтра из условия минимума верхней оценки установившейся дисперсии погрешности $e(t) = g(t) - y(t)$ оценивания полезного сигнала:

$$\bar{D}_e = \bar{D}_{eg} + D_{ev} \rightarrow \min .$$

Здесь

$$D_{ev} = \frac{S_v}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega - \quad (5)$$

дисперсия ошибки от помехи;

$$\bar{D}_{eg} \geq D_{eg} - \quad (6)$$

верхняя оценка дисперсии D_{eg} динамической ошибки, где

$$D_{eg} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) |1 - H(j\omega)|^2 d\omega. \quad (7)$$

Заметим, что в некоторых простых случаях удастся получить точные аналитические выражения для верхней границы дисперсии

$$\bar{D}_{eg} = \max_{g(t) \in \Omega_g} D_{eg}$$

в классе воздействий Ω_g , заданных равенствами (2). Тем не менее в общем случае эта задача является неоправданно трудоемкой и заменяется поиском полиномов, мажорирующих функцию $|1 - H(j\omega)|^2$:

$$|1 - H(j\omega)|^2 \leq \sum_{i=i_l}^{i_u} C_i \omega^{2i}.$$

Тогда верхняя оценка дисперсии ошибки представляет собой взвешенную сумму дисперсий производных [10, 26]:

$$\bar{D}_{eg} = \sum_{i=i_l}^{i_u} C_i D_i.$$

Для оценки качества фильтрации интерес также может представлять нижняя граница оценки точности $\underline{D}_{eg} \leq D_{eg}$, соответствующая заданной структуре и параметрам фильтра.

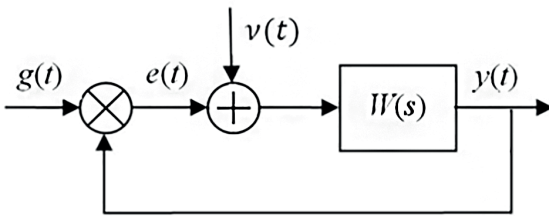


Рис. 1. Структурная схема замкнутой системы управления

К указанной постановке может быть сведена в частности задача минимизации среднеквадратической ошибки управления в линейной системе (рис. 1). Фактически здесь речь идет о поиске передаточной функции $H(j\omega)$ замкнутой системы, зная которую, можно определить передаточную функцию разомкнутого контура [13, 31]:

$$H(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}, \quad W(s) = \frac{H(s)}{1 - H(s)}. \quad (8)$$

Теоретические методы нахождения дисперсий производных особенно эффективны для задач управления движением и сопровождения транспортных аппаратов, прежде всего самолетов. Диапазон дальностей сопровождаемых целей определяет

дисперсию воздействия. Дисперсия первой производной воздействия определяется максимальными скоростными параметрами конкретного типа самолета, а дисперсия второй производной – форсажными и маневренными характеристиками [1, 8].

Оптимизация параметров типовых передаточных функций систем управления

При оптимизации линейных систем управления по точностному критерию наиболее часто используются передаточные функции следующего вида [10]:

$$W(s) = \frac{K_1}{s}, \quad (9)$$

$$W(s) = \frac{K_1}{s(1 + T_1 s)}, \quad (10)$$

$$W(s) = \frac{K_2(1 + \tau s)}{s^2}, \quad (11)$$

при этом обычно задаются соотношением $K_2 \tau^2 = 1$, и

$$W(s) = \frac{K_3(1 + \tau_1 s + \tau_2^2 s^2)}{s^3}, \quad (12)$$

при этом, как правило, $K_3 \tau_1^3 = 1$, $\tau_2 = \sqrt{2} \tau_1$.

Оптимизации подлежат: параметр $K_i > 0$ – добротность системы по скорости ($i = 1$), ускорению ($i = 2$) либо резкости ($i = 3$), а также постоянные времени $T_i > 0$, $\tau_i > 0$. Использование выражений (9)–(12) позволяет получать замкнутые системы с астатизмом первого, второго или третьего порядков и приемлемый запас устойчивости.

Пример 1. Рассмотрим решение задачи оптимизации системы с астатизмом первого порядка, разомкнутая передаточная функция которой имеет вид (9). При сравнительно богатом наборе исходных данных – известных дисперсиях задающего воздействия D_0 и первых двух его производных D_1 и D_2 – можно записать следующие выражения для верхней и нижней оценок дисперсии динамической ошибки управления [26]:

$$\bar{D}_{eg} = \frac{D_1}{K_1^2 + D_1/D_0}, \quad (13)$$

$$\underline{D}_{eg} = \frac{D_1}{K_1^2 + D_2/D_1}. \quad (14)$$

Отсутствие данных о дисперсии D_0 может быть интерпретировано как отсутствие ограничений на эту величину. Соответственно, при $D_0 \rightarrow \infty$ выражение (13) примет вид $\bar{D}_{eg} = D_1/K_1^2$, в то время как на нижнюю оценку неограниченность D_0 не влияет. Заметим, что для более сложных передаточных функций получить нижнюю оценку дисперсии ошибки аналитически затруднительно, а верхнюю – можно. Кроме того, даже при наличии данных о трех дисперсиях при решении задачи оптимизации фильтра часто приходится использовать только одно из этих значений, что позволяет решить задачу аналитически. Показано [15, 26], что при выборе этой единственной

дисперсии, ограничение на которую принимается за основу при упрощенной процедуре синтеза фильтра, преимуществом должна обладать старшая из ограниченных производных. Порядок фильтра и порядок астатизма целесообразно принять равными порядку старшей из ограниченных производных. Перечисленные здесь рекомендации позволяют выбрать структуру фильтра из физических соображений, а не получить математически путем решения задачи классической винеровской фильтрации. В этом смысле далее речь будет идти не о структурной, а о параметрической оптимизации системы по числовым характеристикам воздействий.

С учетом (5), (8), (9) можно получить выражение для дисперсии ошибки от помехи $D_{ev} = K_1 S_v / 2$ и сформировать целевую функцию

$$\bar{D}_e = D_1 / K_1^2 + K_1 S_v / 2 \rightarrow \min.$$

Отсюда получим оптимальное значение добротности системы

$$K_1^0 = 2^{2/3} (D_1 / S_v)^{1/3} = 1,59 (D_1 / S_v)^{1/3}, \quad (15)$$

обеспечивающей минимум верхней оценки дисперсии суммарной ошибки

$$\bar{D}_e = 3 \cdot 2^{-4/3} D_1^{1/3} S_v^{2/3} = 1,19 D_1^{1/3} S_v^{2/3}. \quad (16)$$

Аналогичным образом могут быть получены выражения для минимальной верхней оценки дисперсии в системах с астатизмом второго и третьего порядков при наличии данных о дисперсиях производных задающего воздействия соответствующих порядков. Так, для передаточной функции вида (11) получим

$$\bar{D}_e = 5/4 \cdot (5/3)^{3/5} D_2^{1/5} S_v^{4/5} = 1,70 D_2^{1/5} S_v^{4/5}, \quad (17)$$

а для передаточной функции (12)

$$\bar{D}_e = 35 (D_3 / 5)^{1/7} (S_v / 18)^{6/7} = 2,33 D_3^{1/7} S_v^{6/7}. \quad (18)$$

Пример 1. Рассмотрим задачу управления высотой малого беспилотного вертолета при его посадке на палубу корабля [1, 8]. Закон управления формируется на основе сравнения измеренных координат практически неподвижного корабля и непрерывно измеряемых по показаниям спутниковой навигационной системы (СНС) текущих координат летящего вертолета. Исходя из передаточной функции вида (9), зададим значения дисперсии высоты $D_0 = 5 \text{ м}^2$, дисперсии ее первых трех производных $D_1 = 6,0 \text{ м}^2/\text{с}^2$, $D_2 = 9 \text{ м}^2/\text{с}^4$, $D_3 = 3 \text{ м}^2/\text{с}^6$ и интенсивности шума измерений $S_v = 3 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$. По формуле (15) определим значение добротности системы $K_1^0 = 2,0 \text{ с}^{-1}$ и далее, используя соотношения (13), (14), получим верхнюю и нижнюю оценки дисперсии динамической ошибки управления: $\bar{D}_{eg} = 1,154 \text{ м}^2$; $\underline{D}_{eg} = 1,091 \text{ м}^2$. Верхняя и нижняя оценки дисперсии суммарной ошибки управления составят $\bar{D}_e = \bar{D}_{eg} + K_1^0 S_v / 2 = 4,154 \text{ м}^2$ и $\underline{D}_e = \underline{D}_{eg} + K_1^0 S_v / 2 = 4,091 \text{ м}^2$ соответственно. Таким образом, относительные потери в точности управления, вызванные незнанием спектральной плотности полезного сигнала, в данном случае не превышают $(\bar{D}_e - \underline{D}_e) / \underline{D}_e = 0,0154$, или 1,54%.

Заметим, однако, что этот результат получен в рамках принятой структуры (9) передаточной функции разомкнутого контура системы и не свидетельствует о проигрыше по отношению к точности фильтра Винера, оптимального не только по параметрам, но и по структуре. В работе [26] отмечается, что отношения $D_{i-1}D_{i+1}/D_i^2$, $i = 1, 2, \dots$, характеризуют ширину спектра воздействия. При $D_{i-1}D_{i+1}/D_i^2 = 1$ воздействие приобретает вид гармонической функции, имеющей одну спектральную линию на частоте $\omega_1 = \sqrt{D_{i+1}/D_i}$, при этом дисперсия погрешности винеровской фильтрации стремится к нулю. Этот факт говорит о том, что в указанном случае информация о дисперсии только одной из производных воздействия является недостаточной для получения эффективного закона управления (алгоритма фильтрации).

В качестве альтернативы передаточной функции вида (9) могут быть также рассмотрены варианты систем с астатизмом второго и третьего порядков, которым соответствуют передаточные функции (11) и (12). Используя соотношения (17) и (18) для рассматриваемого примера, получим соответственно $\bar{D}_e = 6,35 \text{ м}^2$ для системы с астатизмом второго порядка и $\bar{D}_e = 7,00 \text{ м}^2$ для системы с астатизмом третьего порядка. Таким образом, в данном случае повышение порядка астатизма нецелесообразно.

Рекомендации по снижению порядка системы по сравнению с гипотетическим винеровским фильтром являются характерными для рассмотренного подхода. Обычно они согласуются и с рекомендациями на основе эвристического анализа [2, 9, 18].

Заметим, что уровень спектральной плотности помехи S_v существенно влияет на выбор порядка квазиоптимального фильтра. При снижении мощности помехи и прочих равных условиях рекомендуемый порядок фильтра обычно повышается. К примеру, в рамках рассмотренной задачи при снижении S_v в 15 раз ($S_v = 0,2 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$) верхние оценки дисперсии суммарной ошибки составят $0,77 \text{ м}^2$, $0,74 \text{ м}^2$ и $0,68 \text{ м}^2$ соответственно, что обосновывает в данном случае целесообразность использования системы третьего порядка с передаточной функцией (12).

Закон управления беспилотным вертолетом может быть построен также для случая движения корабля с определенными ограничениями на производные. При этом появится дополнительный фактор неопределенности при нахождении верхней оценки дисперсии суммарной ошибки, поскольку требуется обрабатывать не одно, а два полезных воздействия с разными наборами ограниченных производных [1, 26, 34, 35, 38].

Использование метода фильтрации по числовым характеристикам воздействий при решении задач комплексной обработки информации

Рассмотрим возможности метода фильтрации по числовым характеристикам воздействий при синтезе алгоритмов комплексной обработки информации. Будем полагать, что интегрированный измеритель построен по инвариантной схеме в соответствии с рис. 2 [4], где x – полезный (оцениваемый) сигнал, \hat{x} – его оценка; z_1, z_2 – выходные сигналы измерительных каналов, причем во втором канале осуществляется измерение непосредственно полезного сигнала, а в первом – его производной порядка ℓ (как правило, скорости изменения сигнала либо ускорения). Погрешности первичных измерений обозначены v_1, v_2 . Для компенсации погрешности измерений во втором канале формируется оценка интеграла от погрешности v_1 с обратным знаком. Очевидно, что погрешность оценивания $e = x - \hat{x}$ может быть при этом представлена в операторной форме как

$$e(t) = -\frac{1-H(p)}{p^\ell} v_1(t) - H(p)v_2(t),$$

где p – оператор дифференцирования.

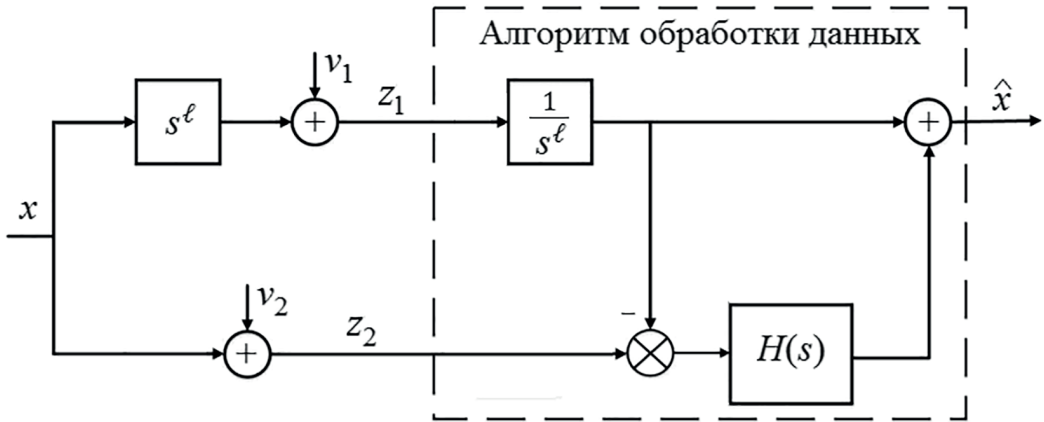


Рис. 2. Структура инвариантного интегрированного измерителя

Тогда, полагая

$$g(t) = -\frac{1}{p^\ell} v_1(t), v(t) = -v_2(t)$$

и задаваясь дисперсией D_ℓ погрешности $v_1(t)$, получаем исходную задачу с заданной дисперсией производной сигнала $g(t)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу построения интегрированного измерителя высоты полета летательного аппарата на основе обработки выходных сигналов приемника СНС и акселерометра с вертикальной осью чувствительности, измеряющего вторую производную искомой координаты [11, 31, 34, 35]. Считаем, что ось чувствительности акселерометра идеально стабилизирована вдоль вертикальной оси и перекрестные помехи от ускорений в горизонтальной плоскости отсутствуют.

Будем полагать, что дисперсия погрешности акселерометра составляет $D_2 = 9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}^4$ (или, по крайней мере, ограничена этой величиной). Спектральную плотность погрешности СНС считаем равномерной с уровнем $S_v = 1,0 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$. Используя соотношение (17), соответствующее системе с астатизмом второго порядка, получим верхнюю оценку дисперсии результирующей погрешности измерения $\bar{D}_e = 6,62 \times 10^{-2} \text{ м}^2$; отсюда верхняя оценка СКП составит 0,26 м. При этом оптимальное значение коэффициента K_2 будет равно [26]

$$K_2^0 = 1,77(D_2/S_v)^{2/5} = 2,69 \times 10^{-3} \text{ с}^{-2}, \tag{19}$$

а искомая передаточная функция $H(s)$ с учетом (8), (11) и соотношения $K_2^0 \tau^2 = 1$ имеет вид

$$H(s) = \frac{K_2^0 + \sqrt{K_2^0} s}{K_2^0 + \sqrt{K_2^0} s + s^2}. \tag{20}$$

Оценка дисперсий производных воздействий на основе анализа характеристик особых точек

Одним из наиболее эффективных методов нахождения дисперсий производных воздействий представляется метод, основанный на анализе экспериментально полученных статистических характеристик особых точек. Он может быть применен при наличии реализации эргодического случайного процесса, полученной с использованием высокоточных измерений, и наличии информации о законе распределения процесса, который чаще всего предполагается гауссовым.

Предположим, что гауссово воздействие $g(t)$ дифференцируемо по крайней мере N раз. В качестве статистических характеристик особых точек будем рассматривать:

- n_{ic} – среднее число пересечений производной $g^{(i)}(t)$ заданного уровня C_i , $0 \leq i \leq N$;
- m_i – среднее число экстремумов (максимумов и минимумов) производной $g^{(i)}(t)$.

При $C_i = 0$ очевидна справедливость формулы $n_{ic} = n_{i0} = m_{i-1}$. Заметим также, что среднее число экстремумов при делении на две равные части дает среднее число максимумов и среднее число минимумов.

Среднее число особых точек в единицу времени оценивается в результате подсчета их общего числа в исследуемой реализации и его деления на длительность реализации.

При этом для нахождения дисперсий производных i -го, $(i + 1)$ -го и $(i + 2)$ -го порядков можно воспользоваться формулами [12, 14]:

$$D_i = \frac{C_i^2}{2 \ln(n_{i0}/n_{ic})}, \quad (21)$$

$$D_{i+1} = \pi^2 n_{i0}^2 D_i, \quad (22)$$

$$D_{i+2} = \pi^2 m_i^2 D_{i+1} = \pi^4 n_{i0}^2 m_i^2 D_i. \quad (23)$$

В частности, формула (21) может быть применена для нахождения дисперсий воздействия $g(t)$ (при $i = 0$). Таким образом, определив по кривой $g(t)$ три величины n_{00} , n_{0c} и m_0 , получим дисперсию самого воздействия и его первых двух производных.

Очевидно, точность оценок искомых дисперсий обуславливается точностью оценок характеристик самих особых точек. Последняя зависит от точности воспроизведения анализируемой реализации процесса, корреляционных свойств воздействия и длительности обрабатываемой реализации T_H . Величину T_H можно ориентировочно выбрать исходя из требования, чтобы число особых точек в пределах рассматриваемой реализации было порядка 10^2 .

Пример 3. Проиллюстрируем применение метода анализа характеристик особых точек для получения оценки текущего профиля неровной земной поверхности при движении беспилотного летательного аппарата (БПЛА) в режиме следования рельефу местности (рис. 3). Легкий БПЛА самолетного типа совершает полет без горизонтальных маневров над холмистой земной поверхностью, отслеживая неровности этой поверхности за счет выдерживания требуемой геометрической высоты полета $h_{\text{БПЛА}}$ относительно низкочастотной компоненты профиля рельефа [21, 37, 38]. Автопилот легкого БПЛА практически без динамической ошибки поддерживает выработанную геометрическую высоту, воздействуя на закрылки и руль высоты.

Текущая вертикальная координата h может быть определена по разности показаний СНС

$$z_1(t) = h(t) + h_{\text{БПЛА}}(t) + v_1(t) \quad (24)$$

и радиовысотомера (РВ)

$$z_2(t) = h_{\text{БПЛА}}(t) + v_2(t). \quad (25)$$

Здесь $v_{1,2}$ – соответственно погрешности измерений СНС и РВ. Формируем разностные измерения

$$z(t) = z_1(t) - z_2(t) = h(t) + v_1(t) - v_2(t) = h(t) + v(t), \quad (26)$$

сводя рассматриваемую задачу к задаче фильтрации полезного сигнала $g(t) = h(t)$ из его аддитивной смеси с помехой $v(t) = v_1(t) - v_2(t)$.

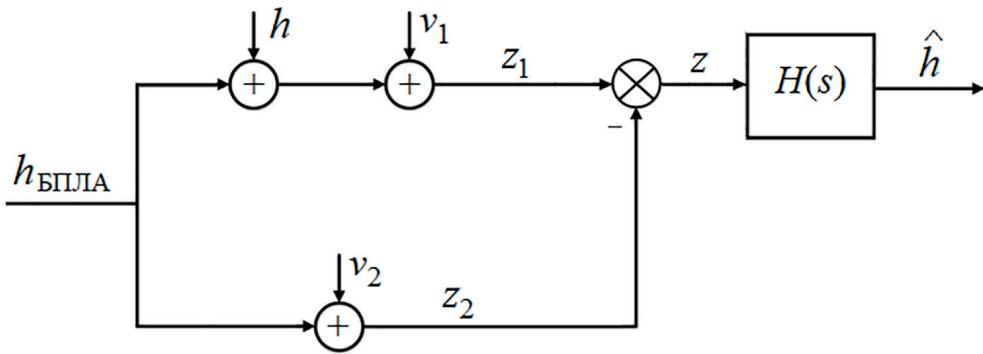


Рис. 3. Структура измерителя профиля неровной поверхности

Имея реализацию профиля поверхности и зная скорость полета V , можно получить оценки дисперсий вертикальной координаты и первых двух ее производных. Действительно, при постоянстве скорости V с учетом соотношения

$$V = \sqrt{\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{dh}{dt} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2},$$

где x – горизонтальная координата, производную вертикальной координаты по времени можно определить как

$$\dot{h}(t) = V \frac{\partial h}{\partial x} \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \right)^{-1/2}.$$

При незначительных уклонах холмов (до 20-30°) можно приближенно записать:

$$\dot{h}(t) \approx V \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Далее, принимая во внимание полученное значение производной наивысшего (второго) порядка, с использованием выражений (19), (20) можно построить соответствующий алгоритм фильтрации.

С целью оценки эффективности метода анализа характеристик особых точек построим модель дважды дифференцируемого случайного процесса с заданными

значениями его дисперсии и дисперсий производных и на основе полученной по результатам моделирования реализации произведем оценку дисперсий производных. Дисперсию самой координаты будем считать известной (ее оценку можно найти обычным осреднением квадрата высоты, не прибегая к анализу особых точек).

Минимальный порядок дробно-рациональной спектральной плотности дважды дифференцируемого процесса равен 6, поэтому запишем в общем виде:

$$S_g(\omega) = \frac{b_0}{|(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2j\omega + a_3|^2}. \quad (27)$$

Нетрудно убедиться в справедливости соотношений: $a_2 = D_2/D_1$, $a_1 = (D_0/D_1)a_3$, $b_0 = 2D_1(a_1a_2 - a_3)$. Таким образом, спектральная плотность (27) полностью характеризуется величинами D_0 , D_1 , D_2 и a_3 .

Будем полагать $D_0 = 4 \cdot 10^4 \text{ м}^2$; $D_1 = 100 \text{ м}^2/\text{с}^2$ (что соответствует скорости полета $V = 29 \text{ м/с}$ при среднеквадратическом уклоне холмов 20°); $D_2 = 100 \text{ м}^2/\text{с}^4$; $a_3 = 0,1 \text{ с}^{-3}$. Отметим, что выбор указанных значений не противоречит неравенствам (3). График спектральной плотности (27) с указанными параметрами показан на рис. 4; реализация $h(t)$ на интервале 10 мин, полученная по результатам моделирования с учетом среднего значения высоты над уровнем моря 400 м, приведена на рис. 5.

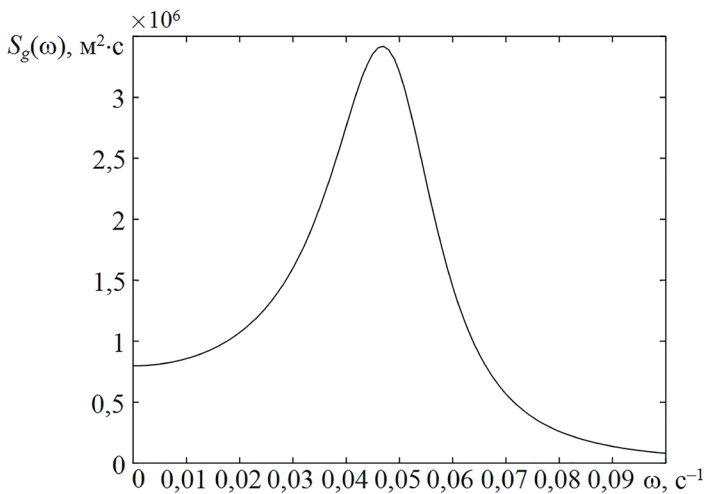


Рис. 4. Спектральная плотность моделируемого процесса

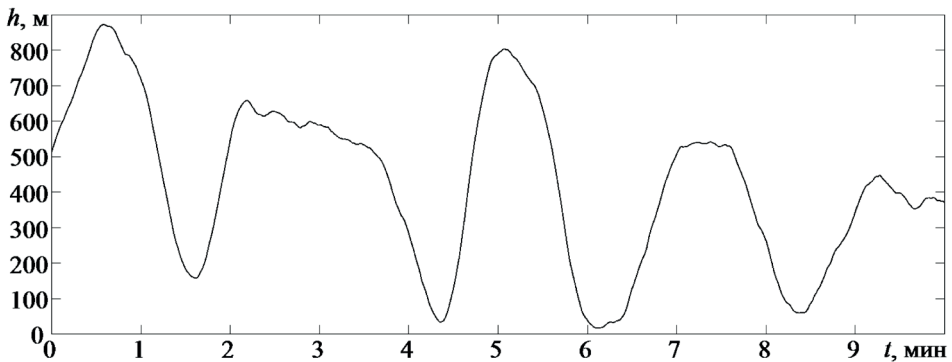


Рис. 5. Реализация моделируемого процесса

Произведем оценку дисперсий производной D_1 и второй производной D_2 по этой реализации, варьируя длительность интервала наблюдения. Значения n_{i0} и m_i определим соответственно как соотношенные к интервалу наблюдения количество пересечений реализацией нулевого уровня и количество локальных экстремумов. На рис. 6 и 7 представлены графики изменения оценок дисперсий в зависимости от интервала наблюдения; на этих же рисунках пунктирной линией показаны «истинные» значения дисперсий, использовавшиеся при построении модели процесса.

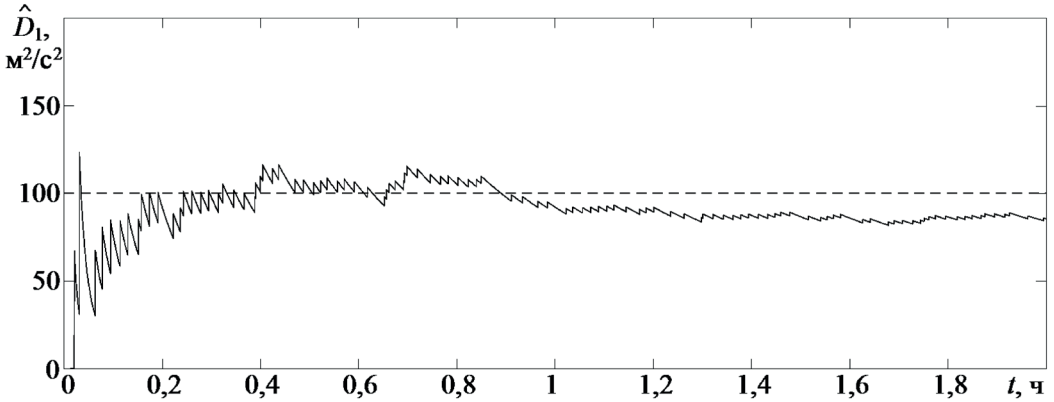


Рис. 6. Оценка дисперсии первой производной по особым точкам

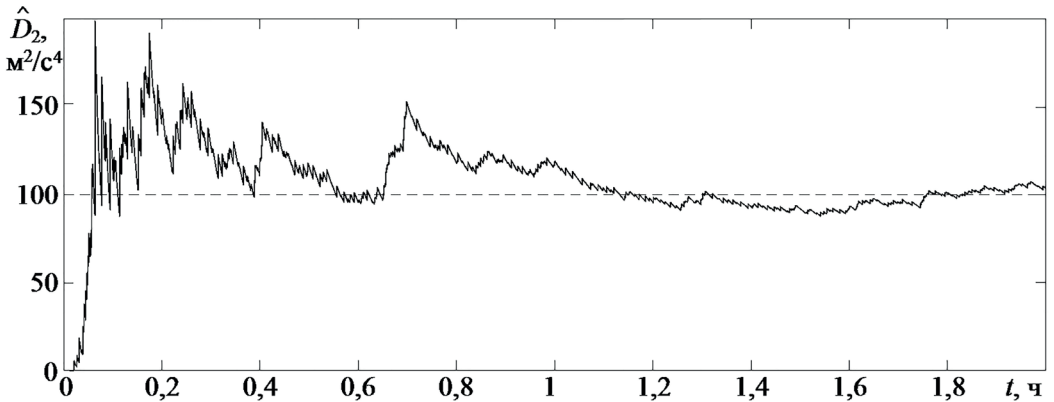


Рис. 7. Оценка дисперсии второй производной по особым точкам

Можно заметить, что средний период случайного процесса составляет $T = 2\pi\sqrt{D_0/D_1} \approx 2$ мин. Количество пересечений нулевого уровня при этом будет примерно равно $2 \cdot 60 = 120$, что согласуется с указанным выше требованием к длительности реализации.

Несмотря на то что погрешности оценок искомых дисперсий могут достигать 20-30%, это не приводит к существенным потерям в точности оценивания высоты.

По существу, полагая в формулах (17), (19) $S_v = 1,0 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$, $D_2 = 130 \text{ м}^2/\text{с}^4$, определим $K_2^0 = 1,77(D_2/S_v)^{2/5} = 12,4 \text{ с}^{-1}$, $\bar{D}_e = 4,5 \text{ м}^2$. После подстановки в (5) и (7) выражения (20) можно получить действительную погрешность оценивания $D_e = D_{eg} + D_{ev} = 3,6 \text{ м}^2$. Если же положить $D_2 = 70 \text{ м}^2/\text{с}^4$, то получим $K_2^0 = 9,7 \text{ с}^{-1}$, $\bar{D}_e = 4,0 \text{ м}^2$ соответственно. При этом реальная точность оценивания характеризуется величиной $D_e = 3,2 \text{ м}^2$. В обоих

случаях полученная верхняя оценка дисперсии результирующей погрешности соответствует реальной точности.

Заключение

Описанная процедура синтеза стационарных алгоритмов обработки информации по числовым характеристикам воздействий позволяет получать эффективные решения задач управления и оценивания параметров движения в отсутствие полной информации о спектрально-корреляционных свойствах воздействий. Поиск оценок искомым параметров и оценок точности получаемых решений основывается на объективных данных, как следствие, такие оценки обладают большей достоверностью по отношению к методам оптимальной фильтрации. Оптимизация коэффициентов алгоритмов обработки осуществляется по минимуму верхней оценки среднеквадратической погрешности в соответствии с критерием, аналогичным используемому при синтезе фильтров Винера. Полученная таким образом система обладает гарантирующими свойствами в смысле наличия реальной погрешности оценивания, среднеквадратическое значение которой не превышает расчетной величины.

В приведенном ниже списке литературы позиции [1–6, 10, 11, 15–17, 20–23, 25, 27, 32–38] содержат описания практических приложений, где возможно и эффективно применение рассмотренного в статье подхода. Класс таких линейных стационарных систем навигации и управления движением ограниченного порядка охватывает интегрированные системы навигации, использующие инерциальные средства совместно с позиционными датчиками, например СНС. В задачах управления движением по сложной траектории она также может быть охарактеризована ограничениями на ее производные.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nebylov A., Watson J. (ed.),** *Aerospace Navigation Systems*, J. Wiley & Sons, UK, 2016, 371 p.
2. **Степанов О.А., Лопарев А.В., Челпанов И.Б.** Частотно-временной подход к решению задач обработки навигационной информации // *Автоматика и телемеханика*. 2014. №6. С. 132–153.
3. **Dunik, J., Biswas, S.K., Dempster, A.G., Pany, T., Closas, P.,** State Estimation Methods in Navigation: Overview and Application, *IEEE A&E Systems Magazine*, 2020, vol. 12, no. 35, pp. 16–31, doi: 10.1109/MAES.2020.3002001.
4. **Степанов О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1: Введение в теорию оценивания. Изд. 3-е, испр. и доп. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 509 с.
5. **Лопарев А.В., Степанов О.А., Кулакова В.И.** Приближенное решение задачи робастной фильтрации с использованием метода локальных аппроксимаций спектральных плотностей // *Гирокоспия и навигация*. 2013. №3. С. 85–90.
6. **Небылов А.В., Желудев А.М., Калинин В.Н.** Совместные использования калмановского и робастного методов фильтрации при обработке навигационной информации // III Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 1996. С. 26–32.
7. **Бендат Дж., Пирсол А.** Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.
8. **Агеев А.М., Беляев В.В., Бондарев В.Г., Проценко В.В.** Системы автоматической посадки беспилотных летательных аппаратов: проблемы и пути решения // *Военная мысль*. 2020. №4. С. 130–136.
9. **Лившиц Н.А., Пугачев В.Н.** Вероятностный анализ систем автоматического управления. Т.1: Вероятностные и статистические характеристики воздействий и процессов. М.: Сов. радио, 1963.
10. **Бесекерский В.А., Небылов А.В.** Робастные системы автоматического управления. М.: Наука, 1983. 240 с.

11. Лопарев А.В., Степанов О.А., Челпанов И.Б. Использование частотного подхода при синтезе нестационарных алгоритмов обработки навигационной информации // Гироскопия и навигация. 2011. №3. С. 115–132.
12. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
13. Васильев К.К. Теория автоматического управления (следящие системы): Учебное пособие. 2-е изд. Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001. 98 с.
14. Тихонов В.И., Хименко В.И. Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука, 2012.
15. Кулакова В.И., Небылов А.В., Степанов О.А. Применение H_2/H_∞ подхода в задаче авиационной гравиметрии // Гироскопия и навигация. 2008. № 2 (61). С. 53–62.
16. Архипов А.С., Семенихин К.В. Минимаксное линейное оценивание по вероятностному критерию при наличии унимодальных помех и ограниченных параметров // Автоматика и телемеханика. 2020. №7. С. 14–33.
17. Оморов Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления. Специальность 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление». Автореферат дисс. ... д.т.н. СПб., 1992.
18. Ахизер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматлит, 1961. 312 с.
19. Уланов Г.М., Сенявин М.М. Теория оптимизации и задача накопления отклонений // Доклады АН СССР. 1983. Т. 269. № 4. С. 818–821.
20. Кулакова В.И. Гарантированное оценивание сигналов с ограниченными дисперсиями производных: исследования во временной и частотной областях. Автореферат ... дисс. канд. техн. наук. СПб., 2005.
21. Кулакова В.И., Небылов А.В. Гарантированное оценивание сигналов с ограниченными дисперсиями производных // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 83–90.
22. Chaoping Jia, Jun Hu, Variance-constrained filtering for nonlinear systems with randomly recursive scheme and boundedness analysis occurring quantized measurements, *Advances in Difference Equations*, 2019, no. 53, 811.
23. Rybinskii, V.O., Rosenwasser, E.N., Lampe, B.P., Guaranteed Performance for Sampled-Data Systems with Generalized Higher-Order Hold, *Proc. 8th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems*, Rostock-Warnemünde, 2010.
24. Ladish, J., Lampe, B.P., Rosenwasser, E.N., Rybinskii, V.O., Design of digital control systems of gliders movement at uncertainty of external stochastic disturbance, *Proc. International Conference on Naval Architecture and Ocean Engineering* [Electronic resource], 2016.
25. Рыбинский В.О. Оптимизация цифровой системы управления с запаздыванием для подводного аппарата по критерию минимума оценки мгновенной дисперсии // Морской вестник. 2014. №2 (50). С. 80–82.
26. Небылов А.В. Гарантирование точности управления. М.: Наука-Физматлит, 1998. 304 с.
27. Jemin, G., Freeman, R., Lynch, K., Robust dynamic average consensus algorithm for signals with bounded derivatives, *Mathematics, Computer Science, American Control Conference (ACC)*, 2017, 1963. 896 p., doi:10.23919/ACC.2017.7962978/радио.
28. Ferreira Erasmo, Javier Sesma, Two-point derivative dispersion relations, *Journal of Mathematical Physics*, 2013, 54, 033507, <https://doi.org/10.1063/1.4795116>.
29. Bucz, Š., Kozáková, A., Advanced Methods of PID Controller Tuning for Specified Performance, 2018, doi: 10.5772/intechopen.76069.
30. Shamsuzzoha, M., *PID Control for Industrial Processes*, 2018.
31. Бесекерский В.А., Елисеев А.А., Небылов А.В. и др. Радиоавтоматика: учеб. пособие для студ. вузов / под ред. В.А. Бесекерского. М.: Высш. шк., 1985. 271 с.
32. Celentano, L., Basin, M.V., Optimal Estimator Design for LTI Systems with Bounded Noises, Disturbances, and Nonlinearities, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2021, vol. 40, pp. 3266–3285, doi: <https://doi.org/10.1007/s00034-020-01635-z>.
33. Celentano, L., Tracking Controllers Design of References with Bounded Derivative, *Applied Mathematical Sciences*, 2012, vol. 6, no. 95, pp. 4709–4728.
34. Tupysev, V.A., Stepanov, O.A., Loparev, A.V., Litvinenko, Yu.A., Guaranteed Estimation in the Problems of Navigation Information, *3rd IEEE Multi-conf. on Systems and Control*, Saint Petersburg, 2009, pp. 1672–1677.

35. Langel, S., Crespillo, O.G., Joerger, M., Overbounding the effect of uncertain Gauss-Markov noise in Kalman filtering, *Navigation: Journal of the Institute of Navigation*, June 2021, vol. 68 (2), pp. 259–276, doi: <https://doi.org/10.1002/navi.419>.
36. Небылов А.В., Желудев А.М. Гарантирование точности комплексированного измерителя координат // *Гирокоспия и навигация*. 1997. №1. С. 45–55.
37. Небылов А.В., Небылов В.А. Принципы построения системы управления полетом тяжелого транспортного аппарата с экраным эффектом // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2011. Т. 54. №8. С. 35–43.
38. Кулешов Е.Л. Непараметрические методы выделения полезного сигнала и спектрального оценивания при неполной информации в прикладных системах анализа случайных процессов. Автореферат дисс. ... д.т.н. Владивосток, 1997.

Nebylov, A.V. (Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI), St. Petersburg, Russia), Loparev, A.V. (Concern CSRI Elektropribor, JSC, St. Petersburg, Russia; ITMO University, St. Petersburg, Russia), and Nebylov, V. A. (Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation) Methods for Robust Filtering based on Numerical Characteristics of Input Processes in Solving Problems of Navigation Information Processing and Motion Control, *Girokopiya i Navigatsiya*, 2022, vol. 30, no. 3 (118), pp. 65–79.

Abstract. A problem of robust linear filtering of random processes is considered under given constraints on the variance of the process itself and (or) the variances of derivatives, while the form of the power spectral density of the process is assumed to be unknown. It is shown that a number of problems of navigation information processing and motion control can be reduced to the above formulation. Informativity of variances of derivatives and the effectiveness of the solutions obtained are analyzed when the variances are used to describe the properties of input processes (IP). A method for obtaining data on IP variances based on the analysis of the numerical characteristics of critical points is considered. Examples of solutions of applied problems are given.

Key words: stationary linear systems, guaranteed accuracy, variances of derivatives, parametric optimization.

Материал поступил 10.01.2022