

В. Н. КОНЕШОВ, И. Э. СТЕПАНОВА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА S-АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСНОЙ ЛИНИИ И ВЫСОТ ГЕОИДА

Описана модифицированная методика S-аппроксимаций аномальных потенциальных полей и обсуждаются ее преимущества. Разработано программное обеспечение для расчета уклонов отвесной линии и высот геоида с использованием предложенной методики. Приведены результаты расчета уклонов отвесной линии для двух районов Атлантического океана.

Ключевые слова: регуляризация, уклонение, представление.

Введение

Уклонения отвесной линии (отклонение направления действительной силы тяжести от направления вектора нормальной силы тяжести) возникают, как известно, вследствие отличия действительного гравитационного поля Земли от нормального. Основным методом расчета уклонов отвесной линии (УОЛ) на сегодняшний день остается гравиметрический. При этом для определения значений УОЛ в отдельных пунктах необходимо знать пространственное распределение аномального гравитационного поля на всей земной поверхности. Детальная гравиметрическая съемка акваторий традиционно выполняется аппаратурой, установленной на судах, и эти работы требуют больших финансовых затрат. Для оценки перспективности конкретных труднодоступных районов относительно их нефтегазоносности все более широкое распространение получает менее дорогостоящая аэрогравиметрическая съемка. Материалы морских и аэрогеофизических работ могут использоваться для расчета УОЛ и высот геоида.

В целом ряде методов, применяемых в настоящее время при интерпретации данных гравиразведки, предлагаются те или иные аппроксимации аномальных физических полей [1–11, 18]. Недостаток современных методов интерпретации геофизических данных заключается в том, что используются идеализации, которые не отвечают либо природным соотношениям, либо экспериментальным исследованиям изучаемых полей (идеализация двумерного поля, идеализация плоской границы «земля–воздух», идеализация задания некоторого элемента поля в узлах регулярной сети и др.). Методики S-аппроксимаций, в основе которых

Конешов Вячеслав Николаевич. Доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, заместитель директора по научной работе, заведующий отделением гравиинерциальных исследований, заведующий лабораторией гравиметрических измерений, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт физики Земли имени О. Ю. Шмидта Российской академии наук (ИФЗ РАН) (Москва). Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

Степанова Инна Эдуардовна. Доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории, ИФЗ РАН.

лежит метод линейных интегральных представлений [5], соответствуют реальной геофизической практике и не включают в себя перечисленные идеализации.

В работе [12] предложена методика расчета УОЛ и высот геоида с использованием метода S-аппроксимаций аномальных геофизических полей. Целью данной статьи является развитие этой методики с учетом новых материалов аэрогравиметрических работ, выполненных над труднодоступными районами со сложным рельефом. При этом необходимость усовершенствования методики была обусловлена двумя факторами. Во-первых, карта аномалий гравитационного поля по результатам аэрогравиметрической съемки изначально определяется для высоты, на которой осуществляется полет. Во-вторых, при расчете УОЛ в районах с пересеченным рельефом необходимо учитывать влияние этого рельефа [13].

Гравиметрический метод расчета УОЛ

Уклонение отвесной линии принято характеризовать его проекциями на плоскости меридиана и первого вертикала – величинами ξ и η соответственно:

$$\xi = -\frac{g_x}{g_z}, \quad \eta = -\frac{g_y}{g_z}. \quad (1)$$

Здесь g_x, g_y, g_z – компоненты вектора силы тяжести в локальной системе координат, когда ось Ox направлена на север, ось Oy – на восток, а ось Oz перпендикулярна земной поверхности в точке наблюдения. Согласно формулам Вининг-Мейнеса и Л. П. Пеллинеца [16], УОЛ можно вычислять следующим образом:

$$\xi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g_F Q(\psi) \cos A dA d\psi, \quad (2)$$

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g_F Q(\psi) \sin A dA d\psi.$$

Здесь Δg_F – аномалия Фая в данной точке, $Q(\psi) = \sin\psi \frac{dS}{d\psi}$, $S(\psi)$ – функция

Стокса, ψ – сферическое расстояние от определяемой точки; A – азимут направления с определяемой точки.

Для упрощения численного интегрирования земная поверхность разбивается на кольцевые области, которые, в свою очередь, делятся на сектора, как показано на рис. 1.

В результате интегралы (2) представляются следующим образом:

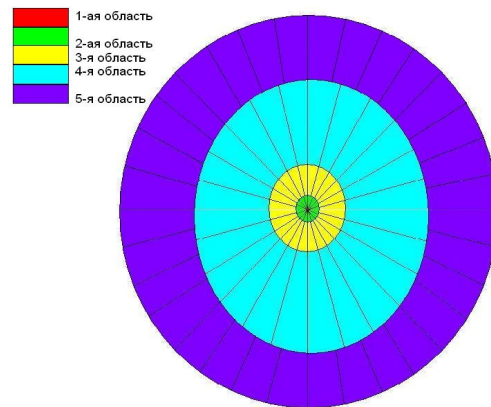


Рис. 1. Деление земной поверхности на области и сектора

$$\begin{aligned}
 \xi = & -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g_F Q(r) \cos AdAdr - \frac{1}{2\pi R} \sum_{i=0}^{15} \int_5^{100} \int_{\frac{i\pi}{8}}^{\frac{(i+1)\pi}{8}} \Delta g_F Q(r) \cos AdAdr - \\
 & -\frac{1}{2\pi R} \sum_{i=0}^{23} \int_{100}^{300} \int_{\frac{i\pi}{12}}^{\frac{(i+1)\pi}{12}} \Delta g_F Q(r) \cos AdAdr - \frac{1}{2\pi R} \sum_{i=0}^{23} \int_{300}^{1000} \int_{\frac{i\pi}{12}}^{\frac{(i+1)\pi}{12}} \Delta g_F Q(r) \cos AdAdr - \\
 & -\frac{1}{2\pi R} \sum_{i=0}^{31} \int_{1000}^{2000} \int_{\frac{i\pi}{6}}^{\frac{(i+1)\pi}{6}} \Delta g_F Q(r) \cos AdAdr, \\
 \eta = & -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g_F Q(r) \sin AdAdr - \frac{1}{2\pi R} \sum_{i=0}^{15} \int_5^{100} \int_{\frac{i\pi}{8}}^{\frac{(i+1)\pi}{8}} \Delta g_F Q(r) \sin AdAdr - \\
 & -\frac{1}{2\pi R} \sum_{i=0}^{23} \int_{100}^{300} \int_{\frac{i\pi}{12}}^{\frac{(i+1)\pi}{12}} \Delta g_F Q(r) \sin AdAdr - \frac{1}{2\pi R} \sum_{i=0}^{23} \int_{300}^{1000} \int_{\frac{i\pi}{12}}^{\frac{(i+1)\pi}{12}} \Delta g_F Q(r) \sin AdAdr - \\
 & -\frac{1}{2\pi R} \sum_{i=0}^{31} \int_{1000}^{2000} \int_{\frac{i\pi}{6}}^{\frac{(i+1)\pi}{6}} \Delta g_F Q(r) \sin AdAdr.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Для вычисления интегралов, составляющих суммы (3), используются формулы Гаусса с 12 узлами по каждому измерению [17]. Интегралы вычисляются по формуле

$$\int_a^b \int_c^d F(A, r) dAdr = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} q_{A_j} q_{r_i} f(A_j, r_i). \tag{4}$$

Узлы A_j и r_i находятся по формулам:

$$A_j = \frac{a+b}{2} + u_j \frac{b-a}{2}, \quad j=1, \dots, 12, \tag{5}$$

$$r_i = \frac{c+d}{2} + v_i \frac{d-c}{2}, \quad i=1, \dots, 12, \tag{6}$$

где величины u_j (v_i), $j=1, \dots, 12$ являются корнями многочлена Лежандра 12-й степени, определенного на отрезке $[-1, 1]$. Веса q_{A_j} и q_{r_i} вычисляются по формуле

$$q_{A_j} = q_{r_j} = \frac{2}{(1-u_j) \left(P'_{12}(u_j) \right)^2} \quad j=1, \dots, 12, \tag{7}$$

где $P'_{12}(u_j)$ – первая производная многочлена Лежандра 12-й степени, определенного на отрезке $[-1, 1]$.

Функция f представляет собой функцию $\Delta g_F(A, r)Q(r)\cos A$ или функцию $\Delta g_F(A, r)Q(r)\sin A$. Пределы интегрирования a , b , c и d являются пределами интегрирования из (3).

Модифицированные S-аппроксимации УОЛ и высот геоида

При применении описанного метода S-аппроксимаций теряется существенная часть информации о геометрии носителя масс: его гладкости, симметрии, приблизительной локализации. Постановка обратной задачи по поиску распределения плотности в классе равномерно непрерывных или равномерно дифференцируемых функций значительно усложнит алгоритм, что приведет к неизбежным погрешностям при его использовании. По этой причине одной из проблем является выбор такой постановки обратной задачи в рамках S-аппроксимации, в которой сочетались бы простота и наиболее полный учет априорной информации об исследуемой области. Искомую постановку обратной задачи можно назвать в некотором смысле комплексной, так как при интерпретации данных в рамках S-аппроксимации предполагается возможным использование результатов других методов разведочной геофизики. При построении аппроксимационной конструкции по недостаточно емкой информации о поле обусловленность матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) сильно ухудшается. S-аппроксимации в результате решения системы с плохо обусловленной матрицей становятся физически неадекватными и приводят к бессмысленным с геофизической точки зрения результатам.

Одним из способов устранения указанных проблем является введение особого функционала, позволяющего уточнять некоторые пробные решения СЛАУ в зависимости от имеющейся априорной информации. Основная конструкция S-аппроксимации на начальном этапе сохраняется, поэтому такой метод называется *модифицированным методом S-аппроксимаций* [14].

Не ограничивая общности, рассмотрим локальный вариант S-аппроксимации, когда сферичностью Земли можно пренебречь. Пусть, как и ранее, задано N точек наблюдения $M_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, в которых известны значения некоторого элемента поля силы тяжести в следующем виде: $f_{i,\delta} = f_i + \delta f_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, где число $0 < \delta < 1$ – общее для всех $i = 1, 2, \dots, N$. Если рассматривается вертикальная составляющая поля, то производится аппроксимация суммой простого и двойного слоев. Далее ставится следующая вариационная задача:

$$\begin{aligned} \Omega(\rho) + \mu \Xi(\rho) &= \sum_{r=1}^R \iint_D \left(\rho_{1,r}^2(\hat{\xi}) + \rho_{2,r}^2(\hat{\xi}) \right) d\mu_r(\hat{\xi}) + \mu \Xi(\rho) = \min_{\rho(\hat{\xi})}, \\ f_{i,\delta} - \sum_{r=1}^R \iint_D \left(\rho_{1,r}(\hat{\xi}) Q_{1,r}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,r}(\hat{\xi}) Q_{2,r}^{(i)}(\hat{\xi}) \right) d\mu_r(\hat{\xi}) &= 0, \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\rho = (\rho_{s,r})$, $s = 1, 2$, $1 \leq r \leq R$, $\hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, $\mu_r(\hat{\xi})$ – мера, заданная на множестве D_r ; $\rho_{1,r}(\hat{\xi}) \in L_2(D_r)$ – плотность r -го простого слоя; $\rho_{2,r}(\hat{\xi}) \in L_2(D_r)$ – плот-

ность r -го двойного слоя; $D = \bigcup_{r=1}^R D_r$, где D_r – r -я плоскость, на которой распределены простой и двойной слои, а подынтегральные функции $Q_{1,r}^{(i)}(\hat{\xi})$ и $Q_{2,r}^{(i)}(\hat{\xi})$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_{1,r}^{(i)}(\hat{\xi}) &= \frac{z_i - H_r}{r_{M_i \hat{\xi}}^3}, \\ Q_{2,r}^{(i)}(\hat{\xi}) &= \frac{2(z_i - H_r)^2 - (x_i - \xi_1)^2 - (y_i - \xi_2)^2}{r_{M_i \hat{\xi}}^5}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$r_{M_i \hat{\xi}} = \sqrt{(x_i - \xi_1)^2 + (y_i - \xi_2)^2 + (z_i - H_r)^2}, \quad 1 \leq r \leq R, 1 \leq i \leq N,$$

где H_r – глубина залегания r -й горизонтальной плоскости функции. Отличие такой постановки задачи от аналогичной ей в «обычной» локальной S -аппроксимации состоит в наличии функционала качества решения $\Xi(\rho)$ и параметра регуляризации μ . При $\mu = 0$ приходим к классическому варианту метода S -аппроксимаций. Если же варьировать параметр μ от 0 до 1, то получаем семейство решений обратной задачи, в котором при различных значениях параметра μ учитывается определенная априорная информация об искомым геологических объектах: геометрия источников поля, их примерная локализация, средняя плотность и т.д. Граничные условия для квадрата нормы невязки, соответствующие различным значениям параметра регуляризации μ , запишем в следующем виде:

$$\hat{\lambda}^\mu: (\delta_{min}^\mu)^2 \leq \|A\hat{\lambda}^\mu - f_\delta\|_E^2 \leq (\delta_{max}^\mu)^2, \quad \mu \in [0,1], \quad (10)$$

где $\|\cdot\|_E$ – евклидова норма в пространстве R^N , вектор $f_\delta = \delta(f_1, \dots, f_N)^T$ состоит из величин f_i , умноженных на число δ .

Для каждого значения параметра μ находится свое приближенное решение СЛАУ, для которого выполняется условие (10). Нижнее и верхнее значения квадрата нормы невязки δ_{min}^μ и δ_{max}^μ также корректируются для различных значений параметра μ . Делается это потому, что постановка обратной задачи (20) накладывает определенные ограничения на выбор решения системы.

Как было показано в [14], определение функционала качества решения $\Xi(\rho)$ зависит как от априорной информации, накладывающей ограничения на распределения масс в недрах, так и от конкретной проблемы, которую приходится решать исследователю. Можно представить функционал качества в виде суммы нескольких функционалов, каждый из которых накладывает свое ограничение на распределения плотностей простого и двойного слоев. Тем не менее подобная постановка задачи в то же время усложняет сам алгоритм поиска таких аппроксимаций, что может привести к «неверному» решению. В данном случае под «неверным» решением подразумеваются именно его физико-геологический смысл и интерпретация результатов. Например, в локальном случае

S-аппроксимаций выбор количества и глубины залегания плоскостей, на которых распределены простой и двойной слои, остается за исследователем. Если же задана какая-либо априорная информация (примерная локализация образующих аномалии объектов, их формы, глубины залегания и т.д.), то функционал качества решения для поставленных целей можно представить в виде суммы двух компонент, одна из которых соответствует заданной априорной информации, а другая – одному из функционалов, предложенных в работе [14]. Таким образом, аналитическая аппроксимация высот геоида может быть получена с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций с большей точностью, чем с применением описанного выше варианта этого метода.

Практический пример расчета УОЛ

Для расчета УОЛ по предложенной методике было разработано специальное программное обеспечение, а также применялся пакет программ П-СППМ [15].

В качестве полигона для расчета УОЛ были выбраны два участка детальной гравиметрической съемки, которые представляют собой прямоугольники $16^\circ \times 25^\circ$ по широте и долготе соответственно на эллипсоиде Красовского с шагом $2'$ по каждой координате. Съемка производилась как на морской поверхности, так и над прилегающей сушей. С целью проверки эффективности описанной методики для каждого участка была выбрана область, в которой необходимо рассчитать значения УОЛ. Размеры областей полагались равными $2^\circ \times 1^\circ$ по широте и долготе и $3^\circ \times 5^\circ$ соответственно для первого и второго участков (центральная часть моря). С помощью методики S-аппроксимаций находились плотности простого и двойного слоев, распределенных на плоскостях, создающих гравитационное поле в указанной области. Слои были распределены на плоскости, залегающей на глубине $l = 15$ км ниже дневной поверхности. В рассматриваемом примере можно использовать сферический вариант S-аппроксимаций, поскольку диаметр области превышает 300 км. Однако можно применить и плоский вариант. Тогда носитель простого и двойного слоев расположен ниже сферической дневной поверхности на расстоянии приблизительно 15 км от вершины сферического сегмента. Расчеты на практических и модельных примерах показали, что точность аппроксимации при этом не ниже, чем в региональном варианте S-аппроксимаций, а время вычислений меньше. Полученные аппроксимации гравитационного поля затем были использованы для определения значений поля в произвольно заданной точке (для расчета по формулам Венинг-Мейнеса).

По методике модифицированных S-аппроксимаций находилось решение СЛАУ [10]. Гравитационное поле определялось с относительной точностью (имеется в виду лучший результат, полученный с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций) – $\Delta = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E} = 2 \cdot 10^{-4}$. Здесь Ax – полученное

с помощью аппроксимации гравитационное поле; f_δ – исходное гравитационное поле (измеренное в точках соответствующей выборки); $\|\cdot\|_E$ означает евклидову норму вектора. Следует подчеркнуть, что входная информация не является эталоном. Она была получена с использованием модели ПЗ-90, утвержденной для представления аномального поля Земли полем суммы точечных источников.

После того как была найдена аналитическая аппроксимация гравитационного поля вблизи исследуемой точки (в которой вычислялось значение УОЛ), по формулам Венинг-Мейнеса рассчитывались составляющие УОЛ. На рис. 2 и 3 представлены карта УОЛ, построенная по исходным данным, и карта изолиний разности между исходными данными и значениями УОЛ, полученными с помощью предложенной методики для описанного выше участка №2. Точность восстановления УОЛ для первого участка составила 1,2", а для второго (большого по площади) – 2,1". Стоит отметить, что намеренно были взяты те же самые участки для расчета УОЛ, что и в [12]. Верхняя и нижняя границы точности расчетов в соответствии с концепцией, изложенной в [5], устанавливались заранее. По этой причине УОЛ были получены с приблизительно такой же точностью, что и ранее в работе [12]. Разница заключается в существенном (в 4 раза) ускорении процесса вычислений.

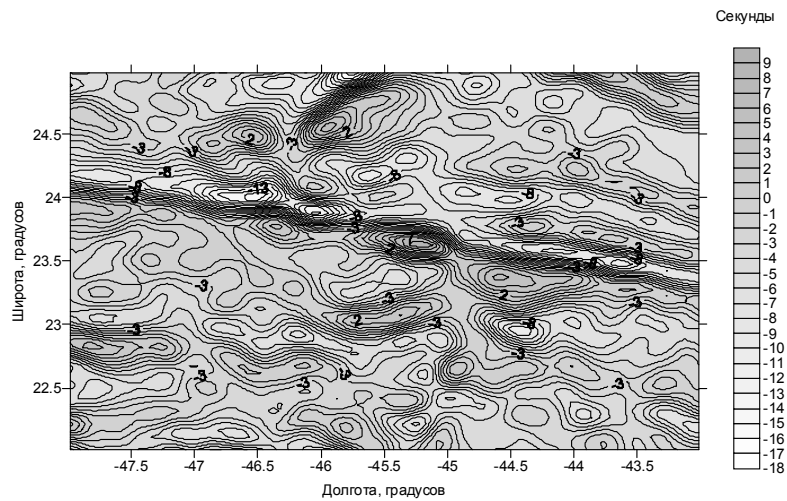


Рис. 2. Карта изолиний составляющей УОЛ ξ

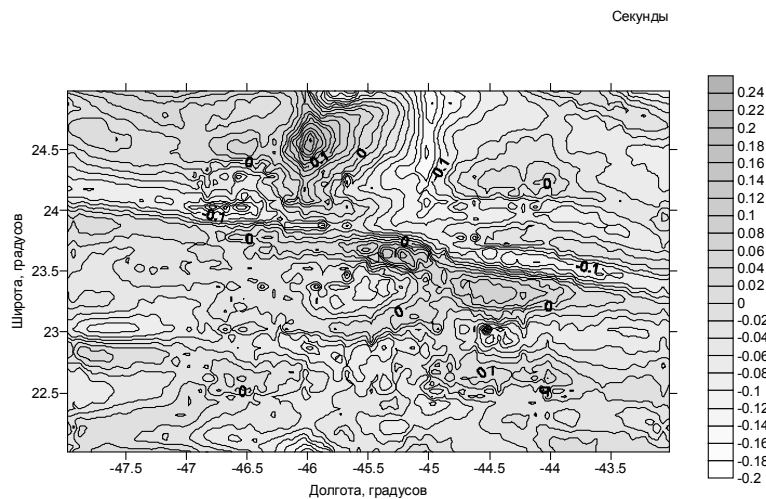


Рис. 3. Карта изолиний разности между исходными значениями УОЛ и значениями, полученными с помощью методики S -аппроксимаций

Заключение

Описана новая методика S-аппроксимаций аномальных геофизических полей, а также ее применение при расчете УОЛ и высот геоида. Главным ее достоинством является простота выражений, используемых для построения аппроксимаций элементов поля, а также функций, описывающих рельеф местности. Методика позволяет с приемлемой точностью (1,5-2") рассчитывать значения УОЛ в произвольно заданной точке Земли и существенно ускорить процесс вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Balmino, G., Barriot, J.P., Vales, N.**, Non-singular Formulation of the Gravity Vector and Gravity Gradient Tensor in Spherical Harmonics, *Manuscripta Geodaetica*, 1990, 15, pp. 11–16.
2. **Naidu, P.**, Spectrum of the potential field due to randomly distributed sources, *Geophysics*, 1968, 33, pp. 337–345.
3. **Мартышко П.С., Пруткин И.Л.** Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал, 2003. Т. 25. №3. С. 159–168.
4. **Серкерев С.А.** Спектральный анализ в гравиразведке и магниторазведке. М.: Недра, 1991. 279 с.
5. **Страхов В.Н.** Геофизика и математика. М.: ОИФЗ РАН, 1999. 64 с.
6. **Страхов В.Н., Степанова И.Э.** Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // Физика Земли. 2002. № 7. С. 3–12.
7. **Страхов В.Н., Степанова И.Э.** Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физика Земли. 2002. № 2. С. 3–19.
8. **Страхов В.Н., Страхов А.В.** О решении систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданной правой частью, возникающих при решении задач гравиметрии и магнитометрии // Известия секции наук о Земле РАЕН. 1999. Вып. 3, ноябрь. С. 20–22.
9. **Страхов В.Н., Страхов А.В.** Основные методы нахождения устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач гравиметрии и магнитометрии. II. М.: ОИФЗ РАН, 1999. 52 с.
10. **Страхов В.Н., Степанова И.Э.** Метод нахождения устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений с матрицами, возникающими в задачах гравиметрии и магнитометрии // Актуальные вопросы математической геофизики. Т. 2. Ч. 1. М.: ОИФЗ РАН, 2001. С. 73–95.
11. **Страхов В.Н., Степанова И.Э., Гричук Л.В., Керимов И.А., Страхов А.В.** Метод линейных интегральных представлений при решении задач гравиметрии и магнитометрии // Геофизика и математика: Материалы 1-й Всероссийской конференции. Москва, 22–26 ноября 1999 г. М.: ОИФЗ РАН, 1999. С. 173–183.
12. **Конешов В.Н., Осика И.В., Степанова И.Э.** Методика расчета уклонения отвесной линии // Физика Земли. 2007. № 6. С. 16–25.
13. **Пеллинен Л.П.** О вычислении уклонений отвеса и высот квазигеоида в горах // Труды ЦНИИГАиК. 1969. Вып. 176. С. 99–112.
14. **Степанова, И.Э., Раевский Д.Н.** О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. 2015. №2. С. 44–54.
15. **Степанова И.Э., Раевский Д.Н., Щепетиллов А.В.** О повышении эффективности модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. 2016. №1. С. 149–160.
16. **Шимбирев Б.П.** Теория фигуры Земли. М.: Недра, 1975. 431 с.
17. **Крылов В.И., Шульгина Л.Т.** Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966. 372 с.
18. **Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли /** Под общей ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова; науч. редактор д.т.н. О.А. Степанов. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 390 с.

Koneshov, V.N. and Stepanova, I.E. (Schmidt Institute of Physics of the Earth (IFZ), Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)

Using the Method of S -approximations to Determine Deflections of the Vertical and Geoid Heights, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2018, vol. 26, no. 4 (103), pp. 14–22.

Abstract. A modified method for S -approximations of anomalous potential fields is described; its advantages are discussed. Software has been developed to calculate deflections of the vertical (DOV) and geoid heights using the proposed technique. The results of DOV calculations for two regions of the Atlantic Ocean are given.

Key words: regularization, deflection, representation.

REFERENCES

1. **Balmino, G., Barriot, J.P., and Vales, N.**, Non-singular formulation of the gravity vector and gravity gradient tensor in spherical harmonics, *Manuscripta Geodaetica*, 1990, no. 15, pp. 11–16.
2. **Naidu, P.**, Spectrum of the potential field due to randomly distributed sources, *Geophysics*, 1968, no. 33, pp. 337–345.
3. **Martyshko, P.S. and Prutkin, I.L.**, Technology for identification of the sources of the gravitational field by depth, *Geofizicheskii zhurnal*, 2003, vol. 25, no. 3, pp. 159–168.
4. **Serkerov, S.A.**, *Spektral'nyi analiz v gravirazvedke i magnitorazvedke* (Spectral Analysis in Gravimetric Survey and Magnetic Prospecting), Moscow: Nedra, 1991.
5. **Strakhov, V.N.**, *Geofizika i matematika* (Geophysics and Mathematics), Moscow: OIFZ RAN, 1999.
6. **Strakhov, V.N. and Stepanova, I.E.**, S -approximation method and its application to solution of gravimetry problems (regional version), *Fizika Zemli*, 2002, no. 7, pp. 3–12.
7. **Strakhov, V.N. and Stepanova, I.E.**, S -approximation method and its application to solution of gravimetry problems (local version), *Fizika Zemli*, 2002, no. 2, pp. 3–19.
8. **Strakhov, V.N. and Strakhov, A.V.**, Solving systems of linear algebraic equations with an approximately given right-hand side that occur in the solution of gravimetry and magnetometry problems, *Izvestiia seksii nauk o Zemle RAEN*, 1999, vol. 3, November, pp. 20–22.
9. **Strakhov, V.N. and Strakhov, A.V.**, *Osnovnye metody nakhozhdeniya ustoychivyykh priblizhennykh reshenii sistem lineinykh algebraicheskikh uravnenii, vznikayushchikh pri reshenii zadach gravimetrii i magnetometrii* (Basic Methods for finding Stable Approximate Solutions of Systems of Linear Algebraic Equations in the Solution of Gravimetry and Magnetometry Problems). II, Moscow: OIFZ RAN, 1999.
10. **Strakhov, V.N. and Stepanova, I.E.**, A Method for finding stable approximate solutions of systems of linear algebraic equations with matrix occurred in the solution of gravimetry and magnetometry problems, *Aktual'nye voprosy matematicheskoi geofiziki*, vol. 2, part 1, Moscow: OIFZ RAN, 2001, pp. 73–95.
11. **Strakhov, V.N., Stepanova, I.E., Grichuk, L.V., Kerimov, I.A., and Strakhov, A.V.**, A method of linear integral representations in solving gravimetry and magnetometry problems, *Geofizika i matematika: Materialy 1-i Vserossiiskoi konferentsii*, Moscow, November 22–26, 1999, Moscow: OIFZ RAN, 1999, pp. 173–183.
12. **Koneshov, V.N., Osika, I.V., and Stepanova, I.E.**, The method for calculating deflections of the vertical, *Fizika Zemli*, 2007, no. 6, pp. 16–25.
13. **Pellinen, L.P.**, Calculation of deflections of the vertical and quasigeoid heights in the mountains, *Trudy TSNIGAiK*, 1969, vol. 176, pp. 99–112.
14. **Stepanova, I.E. and Raevskii, D.N.**, Solution of inverse problems of gravimetry using the modified method of S -approximations, *Fizika Zemli*, 2015, no. 2, pp. 44–54.
15. **Stepanova, I.E., Raevskii, D.N., and Shchepetilov A.V.**, Improving the efficiency of the modified method of S -approximations, *Fizika Zemli*, 2016, no. 1, pp. 149–160.
16. **Shimbirev, B.P.**, *Teoriya figury Zemli* (Theory of the Earth's Figure), Moscow: Nedra, 1975.
17. **Krylov, V.I. and Shul'gina, L.T.**, *Spravochnaya kniga po chislennomu integrirovaniyu* (Reference Book on Numerical Integration), Moscow: Nauka, 1966.
18. **Peshkxonov, V.G. and Stepanov O.A.** (Eds.), *Sovremennye metody i sredstva izmerenya parametrov gravitatsionnogo polya Zemli* (Modern Technologies and Methods for Measuring the Earth's Gravity Field Parameters), St. Petersburg, Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2017.

Материал поступил 15.03.2018