УДК 62-50:534
EDN: NVHQYC

Ю. М. ЗАБОЛОТНОВ

ПРИБЛИЖЕННО-ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается задача стабилизации малых колебаний гироскопической системы со многими степенями свободы и медленно изменяющимися параметрами. Для ее решения применяется принцип динамического программирования Беллмана. Приближенная методика синтеза регулятора основывается на асимптотическом решении уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана методом усреднения. Используется квадратичный критерий оптимальности, зависящий от амплитуд колебаний системы и управления. Предлагаемый подход применяется при линейных возмущениях общего вида и возмущениях, связанных с медленным изменением параметров системы, и позволяет осуществить синтез регуляторов в аналитическом виде.

Ключевые слова: стабилизация гироскопических систем, малые колебания, приближенно-оптимальное управление, принцип Беллмана, метод усреднения.

Введение

Метод усреднения является мощным средством анализа и синтеза движений колебательных систем со многими степенями свободы [1–4]. Усреднение позволяет выполнить асимптотическое расщепление решений на быструю и медленную составляющие, причем уравнения для медленных переменных решаются независимо от остальных уравнений системы. Это существенно упрощает построение приближенно-оптимальных управлений для целенаправленного изменения важных характеристик колебательных систем, например амплитуд колебаний, энергии. Впервые метод усреднения как средство построения приближенно-оптимальных управлений, видимо, был применен в задачах механики космического полета при движении космических аппаратов [3, 5, 6], в которых естественным малым параметром полагалась малая тяга реактивных двигателей. Далее асимптотические методы, и в частности метод усреднения, использовались при решении задач управления самыми разнообразными механическими системами [7, 8], имеющими вращательные и колебательные звенья. Была решена задача приближенно-оптимального управления движением несимметричного твердого тела вокруг центра масс в случае Эйлера–Пуансо [7]. В [9] И.И. Блехман использовал принцип усреднения для управления медленными движениями механических систем при действии на них вибраций. Применение асимптотических методов при построении управляемых движений колебательных систем обосновывается в монографии [8], где рассмотрена общая за-

Заболотнов Юрий Михайлович. Доктор технических наук, профессор, Самарский национальный исследовательский университет (Самара). ORCID 0000-0002-0409-3107.

дача управления колебательной системой с одной быстрой фазой. Там же затронуты некоторые аспекты приближенно-оптимального управления многочастотными колебательными системами и приводятся решения нескольких прикладных задач управления. Приближенные методы теории управления применяются в сочетании с принципами максимума Понтрягина и динамического программирования Беллмана [3, 5–8]. В настоящей работе осуществляется синтез регулятора для гироскопической системы со многими степенями свободы и медленно изменяющими параметрами. Обсуждается распространение методики [10], предложенной для колебательной системы со многими степенями свободы, на систему, которая содержит матрицу, определяющую гироскопические слагаемые. Задача решается с помощью принципа динамического программирования Беллмана [11], который составляет теоретическую основу метода АКОР (аналитическое конструирование оптимальных регуляторов) [12, 13]. Процедура синтеза регулятора отличается от классической тем, что уравнение в частных производных Гамильтона – Якоби – Беллмана решается методом усреднения, то есть при записи уравнений регулятора используется усредненная функция Беллмана, зависящая только от амплитуд колебаний системы. Это позволяет в ряде случаев, в частности при наличии возмущений, связанных с медленным изменением параметров системы, получить уравнения регулятора в аналитической форме.

Постановка задачи

Рассматривается гироскопическая система вида

$$\ddot{y}+\Gamma(\tau)\dot{y}+K(\tau)y=\varepsilon f(y,\dot{y},\tau)+\varepsilon u, \tag{1}$$

где $\tau = \varepsilon t$ – медленное время; t – время; $\varepsilon > 0$ – малый параметр; y, $u \in R_n$ – вектор переменных системы и вектор управлений; $K(\tau)$ – симметричная положительно определенная матрица-функция τ; $\Gamma(\tau)$ – кососимметрическая матрица-функция; $f(y, \dot{y}, \tau)$ – вектор-функция возмущений, $\dot{y} = dy / dt$, $\ddot{y} = d^2y / dt^2$. Вектор управлений в уравнениях (1) имеет порядок $O(\varepsilon)$, что соответствует порядку возмущений $\varepsilon f(y, \dot{y}, \tau)$, действие которых может привести к неустойчивым движениям системы.

В системе (1) вектор $\Gamma(\tau)\dot{y}$ определяет гироскопические слагаемые или гироскопические силы. Согласно общему определению силы называются гироскопическими, если сумма их работ на действительном перемещении системы равна нулю [14]. Для того чтобы слагаемые $\Gamma(\tau)\dot{y}$, линейно зависящие от производных $\dot{y}$, были гироскопическими, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\Gamma(\tau)$ удовлетворяла условию косой симметрии [14].

Невозмущенное решение ($\varepsilon = 0$) системы (1) ищется в виде $y = \gamma e^{i\omega t}$, где $i^2 = -1$, γ – собственный вектор невозмущенной системы с комплексными компонентами, который определяется из линейной системы

$$(-\omega^2 E + i\Gamma\omega + K)\gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь E – единичная матрица, а частотное уравнение невозмущенной системы имеет вид:

$$\det(-\omega^2 E + i\Gamma\omega + K) = 0. \tag{3}$$

Совокупность решений уравнения (3) определяет спектр частот невозмущенной системы [14], решение которой в вещественной форме имеет вид

$$y = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} C_j \gamma^{(j)} e^{i\omega_j t}\right), \tag{4}$$

где $\gamma^{(j)}$ – собственный вектор, соответствующий частоте ω_j; C_j – комплексные произвольные постоянные; $\mathrm{Re}(\cdot)$ – вещественная часть комплексного выражения.

Используя представление $C_j = a_j e^{i\varphi_{j0}}$, где $\varphi_j = \omega_j t + \varphi_{j0}$, a_j – вещественные амплитуды, запишем решение (4) как

$$y = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \gamma^{(j)} e^{i\varphi_j}\right). \tag{5}$$

Дифференцируя выражение (5), получим

$$\dot{y} = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} i a_j \omega_j \gamma^{(j)} e^{i\varphi_j}\right). \tag{6}$$

Таким образом, рассматривается задача стабилизации движения гироскопической системы, то есть приведение ее в начало координат ($y = \dot{y} = 0$).

Критерий оптимальности

Для решения сформулированной задачи предлагается использовать интегральный квадратичный критерий оптимальности

$$J = \varepsilon \int_0^T \Psi(a,u)\,dt, \tag{7}$$

где $\Psi(a,u) = \sum_{k=1}^{n}\left(\nu_k a_k^2 + c u_k^2\right)$, ν_k, $c > 0$ – весовые коэффициенты.

Движение системы рассматривается на асимптотически большом интервале времени $0 < t < T = L / \varepsilon$, где $L < \infty$ – некоторая константа, поскольку далее предполагается воспользоваться методом усреднения. При этом функционал (7) изменяется на величину порядка $O(1)$. Критерий (7) можно рассматривать как модификацию стандартного интегрального квадратичного критерия оптимальности, который применяется в методе АКОР [12, 13]. Модификация заключается в том, что величина ошибок регулирования в подынтегральной функции $\Psi(a, u)$ (7) определяется величинами амплитуд колебаний переменных y, а не квадратичной формой этих переменных.

Преобразование системы (1) к переменным «амплитуды–фазы»

Решение возмущенной системы (1) будем искать методом вариации произвольных постоянных с использованием переменных «амплитуды–фазы» (метод медленно изменяющихся амплитуд) [1]. В связи с этим решения (5), (6) можно рассматривать как выражения для замены переменных $(y, \dot{y}) \Rightarrow (a, \varphi)$, где a и φ – векторы амплитуд и фаз. Чтобы выполнить замену переменных, возмущенная система (1) записывается в виде дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = -\Gamma(\tau) z - K(\tau) y + \varepsilon f(y, z, \tau) + \varepsilon u\,, \tag{8}$$

куда подставляются выражения (5), (6). После этого получим:

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{a}_j h_{k,j}^{(a)} - \sum_{j=1}^{n}\dot{\varphi}_j a_j h_{k,j}^{(\varphi)} = \varepsilon\Omega_k + \Omega_k^{(0)}, \tag{9}$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\dot{a}_j\omega_j h_{k,j}^{(\varphi)} - \sum_{j=1}^{n}\dot{\varphi}_j a_j\omega_j h_{k,j}^{(a)} = \varepsilon F_k + F_k^{(0)}, \tag{10}$$

где $k = 1,\ldots n$, функции $\Omega_k^{(0)}$ и $F_k^{(0)}$ соответствуют членам $O(1)$ в правых частях уравнений (8) после замены в них переменных (5), (6).

Остальные функции, входящие в систему (9), (10), определяются следующим образом:

$$h_{k,j}^{(a)} = \mathrm{Re}\left(\gamma_k^{(j)}\right)\cos\left(\varphi_j\right) - \mathrm{Im}\left(\gamma_k^{(j)}\right)\sin\left(\varphi_j\right),$$

$$h_{k,j}^{(\varphi)} = \mathrm{Re}\left(\gamma_k^{(j)}\right)\sin\left(\varphi_j\right) + \mathrm{Im}\left(\gamma_k^{(j)}\right)\cos\left(\varphi_j\right),\ \varepsilon\Omega_k = -\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial t}\left(h_{k,j}^{(a)}\right),$$

$$\varepsilon F_k = \varepsilon f_k + \varepsilon u_k + \varepsilon\Phi_k, \quad \varepsilon\Phi_k = \sum_{j=1}^{n} a_j\dot{\omega}_j h_{k,j}^{(\varphi)} + \sum_{j=1}^{n} a_j\omega_j\frac{\partial}{\partial t}\left(h_{k,j}^{(\varphi)}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(h_{k,j}^{(a)}\right) = \mathrm{Re}\left(\dot{\gamma}_k^{(j)}\right)\cos\left(\varphi_j\right) - \mathrm{Im}\left(\dot{\gamma}_k^{(j)}\right)\sin\left(\varphi_j\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(h_{k,j}^{(\varphi)}\right) = \mathrm{Re}\left(\dot{\gamma}_k^{(j)}\right)\sin\left(\varphi_j\right) + \mathrm{Im}\left(\dot{\gamma}_k^{(j)}\right)\cos\left(\varphi_j\right),$$

где $\dot{\omega}_j$, $\frac{\partial}{\partial t}\left(h_{k,j}^{(a)}\right)$, $\frac{\partial}{\partial t}\left(h_{k,j}^{(\varphi)}\right)$ – функции медленного времени порядка $O(\varepsilon)$.

Уравнения (9), (10) можно переписать в матричном виде:

$$A\left(\dot{a} \quad \dot{\varphi}\right)^T = \left(\varepsilon\Omega + \Omega^{(0)} \quad \varepsilon F + F^{(0)}\right)^T, \tag{11}$$

где компоненты матрицы A соответствуют их левым частям,

$$\Omega^{(0)} = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} ia_j\omega_j\gamma^{(j)}e^{i\varphi_j}\right),$$

$$F^{(0)} = -\Gamma(\tau)\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} ia_j\omega_j\gamma^{(j)}e^{i\varphi_j}\right) - K(\tau)\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\gamma^{(j)}e^{i\varphi_j}\right).$$

Из уравнения (11) определяются дифференциальные уравнения для новых переменных (амплитуд и фаз), которые имеют следующий вид:

$$\left(\dot{a} \quad \dot{\varphi}\right)^T = \left(0 \quad \omega\right)^T + B\omega\left(\varepsilon\Omega \quad \varepsilon F\right)^T, \tag{12}$$

где ω – вектор частот системы, $B = A^{-1}$, $(0 \ \ \omega)^T = B(\Omega^{(0)} \ \ F^{(0)})^T$.

Усредненная система без управления

Рассматриваются три вида возмущений, два из которых линейные и входят в возмущающую функцию $\varepsilon f(y, \dot{y}, \tau) = \varepsilon f^{(1)}(y, \tau) + \varepsilon f^{(2)}(\dot{y}, \tau)$, где $\varepsilon f^{(1)}(y, \tau) = \varepsilon R^{(1)}(\tau)y$,

$\varepsilon f^{(2)}(\dot{y}, \tau) = \varepsilon R^{(2)}(\tau)\dot{y}$, $R^{(1)}(\tau)$ и $R^{(2)}(\tau)$ – известные в общем случае несимметричные матрицы. Третий вид возмущения связан с медленным изменением частот системы $\omega_j(\tau)$ и, следовательно, собственных векторов $\gamma^{(j)}(\tau)$ и характеризуется вектор-функциями $\varepsilon\Omega$ и $\varepsilon\Phi$. Здесь можно отметить, что усреднение рассматриваемых возмущений можно осуществлять независимо, так как они аддитивны. При получении усредненной системы необходимо учитывать некоторые важные свойства матрицы B, а именно: компоненты строк этой матрицы с номерами k и $k + n(k = 1,\ldots n)$ являются линейными функциями $\cos(\varphi_k)$ и $\sin(\varphi_k)$ (не зависят от других фаз) и поэтому могут быть представлены в виде $b_{k,j} = b_{k,j}^{(c)} \cos\varphi_k + b_{k,j}^{(s)} \sin\varphi_k \ (k = 1,\ldots 2n)$. При этом компоненты $b_{k,j}(k = 1,\ldots n)$, определяющие уравнения для амплитуд, не зависят от них, а компоненты $b_{k,j}(k = n + 1,\ldots 2n)$, определяющие уравнения для фаз, могут быть представлены в виде $b_{k,j} = b_{k,j}^{(k)} / a_k$, где компоненты $b_{k,j}^{(k)}$ также не зависят от амплитуд. С другой стороны, рассматриваемые возмущения после подстановки в них замены переменных (5), (6) линейно зависят от a_k, $\cos(\varphi_k)$, $\sin(\varphi_k)$. В связи с этим после процедуры усреднения правых частей системы (12) по фазам все уравнения становятся независимыми друг от друга и имеют простой вид:

$$\dot{a}_k^o = \varepsilon a_k^o H_k(\tau), \quad \dot{\varphi}_k^o = \omega_k(\tau) + \varepsilon P_k(\tau), \quad k = 1,\ldots n, \tag{13}$$

где a_k^o и $\dot{\varphi}_k^o$ – переменные усредненной системы, $H_k(\tau)$ и $P_k(\tau)$ – известные функции, которые определяются в соответствии с действующими возмущениями.

Так как в правых частях системы (12) имеет место перемножение функций, линейно зависящих от $\cos(\varphi_k)$ и $\sin(\varphi_k)$, то отличны от нуля только члены вида $\left\langle \cos^2(\varphi_k) \right\rangle = \left\langle \sin^2(\varphi_k) \right\rangle = 1/2$, где $\langle\cdot\rangle$ – стандартный оператор усреднения по фазе φ_k. При этом остальные члены усредненной системы равны нулю вследствие ортогональности тригонометрических функций на любом интервале длиной 2π.

В ходе процедуры усреднения системы (12) рассматривается нерезонансный случай, то есть предполагается, что

$\left| \sum_{k=1}^{n} m_k \omega_k(\tau) \right| > c_1^{-1} |m|^{-c_2}$ [4] для всех целочисленных векторов m, где $c_{1,2} > 0$ – некоторые константы,

$|m| = \sum_{k=1}^{n} |m_k|$ – порядок резонанса.

Тогда переменные метода усреднения $a_k^{(0)}$ и $\dot{\varphi}_k^{(0)}$ определяются соответственно с точностью $O(\varepsilon)$ и $O(1)$ на асимптотически большом интервале времени $0 \le t < T = L/\varepsilon$.

Определение приближенно оптимального управления

В соответствии с принципом динамического программирования Беллмана оптимальное управление определяется из условия

$$\min_u (dV/dt + \varepsilon\Psi(a, u)) = 0, \tag{14}$$

где $V(a, \varphi, \tau)$ – функция Беллмана.

Производная dV/dt определяется в силу системы (12) с управлением $u \neq 0$. Тогда, выделяя в условии (14) члены, зависящие от управления, получим

$$\min_{u_k} \sum_{k=1}^{n}\left[cu_k^2 + u_k S_k\left(V,a,\varphi,\tau\right)\right]=0\,, \tag{15}$$

где $S_k\left(V,a,\varphi,\tau\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial V}{\partial a_j}b_{j,n+k}\left(\varphi_j,\tau\right)+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_j}b_{n+j,n+k}\left(\varphi_j,\tau\right)$.

В результате из условия минимума (15) найдем оптимальное управление, зависящее от функции Беллмана:

$$u_k^o=-\frac{1}{2c}S_k\left(V,a,\varphi,\tau\right),\quad (k=1,2,\ldots n). \tag{16}$$

Подставляя выражение (16) в условие (14), приходим к уравнению в частных производных Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\begin{aligned}\varepsilon\frac{\partial V}{\partial \tau}+\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\varepsilon\nu_k a_k^2+\frac{\partial V}{\partial a_k}\left(\frac{da_k}{dt}\right)^{(-)}+\frac{\partial V}{\partial \varphi_k}\left(\frac{d\varphi_k}{dt}\right)^{(-)}+\\ +\frac{\partial V}{\partial \varphi_k}\omega_k-\varepsilon\frac{S_k\left(V,a,\varphi,\tau\right)^2}{4c}\Bigg]=0,\end{aligned} \tag{17}$$

где $(da_k / dt)^{(-)}$ и $(d\varphi_k / dt)^{(-)}$ – правые части неусредненной системы (12) порядка $O(\varepsilon)$ без первого слагаемого, определенные при $u = 0$.

Приближенное решение уравнения (11) находится методом усреднения. В этом случае используется замена переменных [2, 3]:

$$a=a^o+\varepsilon\eta_1\left(a^o,\varphi^o,\tau\right)+\varepsilon^2\ldots,\quad \varphi=\varphi^o+\varepsilon\mu_1\left(a^o,\varphi^o,\tau\right)+\varepsilon^2\ldots, \tag{18}$$

где a^o, φ^o – новые переменные метода усреднения, $\eta_1(a^o, \varphi^o, \tau)$, $\mu_1(a^o, \varphi^o, \tau)$ – периодические функции по каждой из фаз φ_k $(k = 1,2,\ldots n)$ с периодом 2π, удовлетворяющие условиям

$$\left\langle \eta_1\left(a^o,\varphi^o,\tau\right)\right\rangle=\left\langle \mu_1\left(a^o,\varphi^o,\tau\right)\right\rangle=0\,.$$

Приближенные решения уравнения (17) также ищутся в виде асимптотического ряда

$$V\left(a^o,\varphi^o,\tau\right)=V^o\left(a^o,\tau\right)+\varepsilon V_1\left(a^o,\varphi^o,\tau\right)+\varepsilon^2\ldots, \tag{19}$$

где функция $V^o(a^o, \tau)$ соответствует первому приближению метода усреднения. Здесь также $\left\langle V_1\left(a^o,\varphi^o,\tau\right)\right\rangle=0$.

Подставляя ряды (18), (19) в уравнение (17) и сохраняя только члены $O(\varepsilon)$, получим

$$\varepsilon\frac{\partial V^o}{\partial \tau}+\sum_{k=1}^{n}\left[\varepsilon\nu_k\left(a_k^o\right)^2+\frac{\partial V^o}{\partial a_k^o}\left(\frac{da_k^o}{dt}\right)^{(-)}+\varepsilon\frac{\partial V_1}{\partial \varphi_k^o}\omega_k-\frac{\varepsilon}{4c}S_k\left(V^o,a^o,\varphi^o\right)^2\right]=0\,. \tag{20}$$

Усредняя уравнение (20) по фазам, запишем в первом приближении метода усреднения (учитываются только члены $O(\varepsilon)$) выражение

$$\frac{\partial V^o}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{n}\left[\nu_k\left(a_k^o\right)^2+\frac{\partial V^o}{\partial a_k^o}a_k^oH_k\left(\tau\right)-\frac{1}{4c}\left\langle S_k\left(V^o,a^o,\varphi^o,\tau\right)^2\right\rangle\right]=0\,, \qquad (21)$$

где $\left\langle S_k\left(V^o,a^o,\varphi^o,\tau\right)^2\right\rangle=\left\langle\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V^o}{\partial a_j^o}b_{j,n+k}\left(\varphi_j^o,\tau\right)\right)^2\right\rangle$

или $\left\langle S_k\left(V^o,a^o,\varphi^o,\tau\right)^2\right\rangle=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V^o}{\partial a_j^o}\right)^2\left\langle b_{j,n+k}^2\left(\varphi_j^o,\tau\right)\right\rangle\right)$,

так как $\left\langle b_{j,n+k}\left(\varphi_j^o,\tau\right)b_{i,n+k}\left(\varphi_i^o,\tau\right)\right\rangle=0$ при $j\neq i$.

Здесь следует отметить, что порядок погрешности определения функции $V^o(a^o, \tau)$, а именно $O(\varepsilon)$, на асимптотически большом интервале времени $0 \le t < T = L / \varepsilon$ соответствует порядку погрешности определения вектора амплитуд a^o.

С учетом вида функции $\Psi(a, u)$, входящей в критерий (7), и линейности усредненной системы (13) без управления, решение уравнения (21) ищется в виде канонической квадратичной формы методом неопределенных коэффициентов:

$$V^o\left(a,\tau\right)=\sum_{k=1}^{n}G_k\left(\tau\right)a_k^2\,, \qquad (22)$$

где $G_k(\tau)$ – определяемые коэффициенты. Здесь и далее для простоты индекс (^{o}) при записи амплитуд будет опущен.

Тогда, подставляя решение (22) в уравнение (21) и приравнивая к нулю члены при a_k^2, получим

$$dG_k\,/\,d\tau=-\nu_k-2H_k\left(\tau\right)G_k+G_k^2Y_k\left(\tau\right)/\,c\,,\ (k=1,2,\ldots n), \qquad (23)$$

где $Y_k\left(\tau\right)=\left\langle\left(\sum_{j=1}^{n}b_{j,n+k}^2\left(\varphi_k,\tau\right)\right)\right\rangle$.

Чтобы получить уравнения регуляторов для нестационарных систем, при решении дифференциальных уравнений для коэффициентов, аналогичных (23), можно использовать интегрирование с отрицательным шагом по времени [12]. Этот способ заключается в следующем: задают интервал $\tau\in[0, L]$, на котором будет решаться задача управления (обычно такой интервал в прикладных задачах известен заранее). Далее полагают $G_k(L) = 0$ и интегрируют уравнения (23) с отрицательным шагом до момента, когда $\tau = 0$. Полученная зависимость (заданная с некоторой дискретностью) определяет функцию $V^o(a, \tau)$ (22) и, следовательно, управление (16). При этом вследствие вида правых частей уравнений (23) $G_k(\tau) \ge 0$, причем эта функция обращается в ноль только при $\tau = L$. Указанный прием определения функции Беллмана имеет теоретическое обоснование. Уравнения (23) представляют собой частный случай матричного дифференциального уравнения Риккати. Известно [16], что при $t\to -\infty$ решение уравнения Риккати при определенных начальных и некоторых других условиях (для уравнений (23) они имеют вид ν_k, c, $Y_k > 0$ и выполняются) – положительно определенная матрица. Соответственно, для уравнений (23) имеем $G_k(\tau) > 0$ при $-\infty < \tau < L$, если $G_k(L) = 0$.

Другой способ, описанный во многих работах, например в [13, 16], состоит в непосредственном использовании квазистатического решения уравнения Риккати, то есть полагают $dG_k / d\tau = 0$ и определяют коэффициенты $G_k(\tau)$ из решения квадратного уравнения в виде

$$G_k(\tau) = \frac{c}{Y_k(\tau)}\left(H_k(\tau) + \sqrt{H_k^2(\tau) + \frac{\nu_k}{c} Y_k(\tau)}\right) > 0, \quad (k = 1,2,\ldots n). \tag{24}$$

Рассмотренные приемы позволяют найти положительно определенную функцию (22) $V^o(a, \tau) \geq 0$ при $\tau \in [0, L]$. Тогда с учетом (22) управление (16) принимает вид:

$$u_k^o = -\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} G_j(\tau) a_j b_{j,n+k}(\varphi_j, \tau) + \varepsilon\ldots, \quad (k = 1,2,\ldots n). \tag{25}$$

Здесь необходимо отметить, что найденное приближенно-оптимальное управление (25) зависит от фаз колебаний φ_j. Это связано с тем, что приближенно определяется только функция Беллмана $V^o(a, \tau)$, которая подставляется в выражение (16), полученное без каких-либо допущений. Кроме того, как будет показано ниже, запись управления в виде (25) позволяет после определения управления в переменных «амплитуды–фазы» записать (25) через исходные переменные системы y, $\dot{y}$, что обращает примененную ранее замену переменных.

Подставляя (25) в условие (14) и определяя полную производную функции $V^o(a, \tau)$ в силу усредненной системы, получим

$$dV^o / dt = -\varepsilon\Psi(a, u^o) \leq 0, \tag{26}$$

то есть $V^o(a, \tau)$ является функцией Ляпунова усредненной системы, что обеспечивает устойчивость решения $a = 0$.

Монотонное уменьшение амплитуд колебаний усредненной системы также можно показать (причем с оценкой скорости их изменения) путем подстановки управления (25) в систему (12) и за счет процедуры усреднения уравнений для амплитуд. Тогда

$$\dot{a}_k = \varepsilon a_k H_k(\tau) - G_k a_k Y_k(\tau) / c. \tag{27}$$

После подстановки коэффициентов (24) в (27) окончательно получим:

$$\dot{a}_k = -\varepsilon a_k \sqrt{H_k^2(\tau) + \nu_k Y_k(\tau) / c}, \quad (k = 1,2,\ldots n). \tag{28}$$

Соответствие свойств устойчивости усредненной и исходной систем уравнений обеспечивается общими теоремами метода усреднения [1, 2, 17].

Чтобы использовать полученное управление для исходной системы (1), необходимо записать его как функцию переменных y, $\dot{y}$. Для этого управления записываются в виде

$$u_k^o = -\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} G_j(\tau) a_j \left(b_{j,n+k}^{(c)}(\tau)\cos\varphi_j + b_{j,n+k}^{(s)}(\tau)\sin\varphi_j\right) + \varepsilon\ldots. \tag{29}$$

Тогда для определения управлений как функций от векторов y, $\dot{y}$ используется замена переменных (5), (6), которую можно записать в матричной форме:

$$
\begin{gathered}
\left(y_1 \quad \ldots \quad y_n \quad \dot{y}_1 \quad \ldots \quad \dot{y}_n\right)^T = \\
= M\left(a_1\cos\varphi_1 \quad \ldots \quad a_n\cos\varphi_n \quad a_1\sin\varphi_1 \quad \ldots \quad a_n\sin\varphi_n\right)^T,
\end{gathered} \tag{30}
$$

где $M = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{Re}\left(\gamma_n^{(1)}\right) & \ldots & \mathrm{Re}\left(\gamma_n^{(n)}\right) & -\mathrm{Im}\left(\gamma_n^{(1)}\right) & \ldots & -\mathrm{Im}\left(\gamma_n^{(n)}\right) \\ 0 & \ldots & 0 & -\omega_1 & \ldots & -\omega_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\omega_1\mathrm{Im}\left(\gamma_n^{(1)}\right) & \ldots & -\omega_n\mathrm{Im}\left(\gamma_n^{(n)}\right) & -\omega_1\mathrm{Re}\left(\gamma_n^{(1)}\right) & \ldots & -\omega_n\mathrm{Re}\left(\gamma_n^{(n)}\right) \end{pmatrix}$.

Из соотношения (30) с помощью обратной матрицы M^{-1} определяются $a_j\cos\varphi_j$, $a_j\sin\varphi_j$ ($j = 1,2\ldots n$), и, следовательно, управления выражаются через компоненты векторов y, $\dot{y}$.

Заключение

Разработана методика синтеза приближенно-оптимального регулятора для стабилизации движения линейной гироскопической системы со многими степенями свободы и медленно изменяющимися параметрами. Методика основывается на приближенном решении уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана методом усреднения для квадратичного критерия оптимальности. Первое приближение метода усреднения позволяет получить положительно определенную функцию Беллмана–Ляпунова, зависящую только от амплитуд колебаний, и, соответственно, записать уравнения регулятора в аналитическом виде для рассматриваемых линейных возмущений, медленно изменяющихся по времени. Существование положительно определенной функции Беллмана–Ляпунова обеспечивает устойчивость рассматриваемой гироскопической системы на асимптотически большом интервале времени. Применение методики при наличии других, в частности нелинейных, возмущений связано с возможностью определения асимптотических решений уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана и требует дополнительных исследований. Предложенная методика является развитием подходов для определения приближенно-оптимальных управлений при движении твердого тела вокруг неподвижной точки (или центра масс) [18, 19], уравнения движения которого имеют специальную форму. Развитие заключается в распространении методики на гироскопические динамические системы достаточно общего вида со многими степенями свободы и медленно изменяющимися параметрами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №21-51-53002, https://kias.rfbr.ru/index.php.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
2. **Волосов В.М., Моргунов Б.И.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

3. **Моисеев Н.Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1986. 378 с.
4. **Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.** Математические аспекты классической и небесной механики. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
5. **Лебедев В.Н.** Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 108 с.
6. **Салмин В.В., Ишков С.А., Старинова О.Л.** Методы решения вариационных задач механики космического полета с малой тягой. Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2006. 162 с.
7. **Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.** Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
8. **Акуленко Л.Д.** Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
9. **Вибрации в технике:** справочник / под ред. И.И. Блехмана. Т. 2. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.
10. **Воеводин П.С., Заболотнов Ю.М.** Квазиоптимальная стабилизация колебательных систем со многими степенями свободы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. №2. С.23–38.
11. **Беллман Р.** Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
12. **Летов А.М.** Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
13. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
14. **Меркин Д.Р.** Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
15. **Журавлев В.Ф.** Спектральные свойства линейных гироскопических систем // Известия РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 3–6.
16. **Дмитриевский А.А., Иванов Н.М., Лысенко Л.Н., Богодистов С.С.** Баллистика и навигация ракет. М.: Машиностроение, 1985. 310 с.
17. **Хапаев М.М.** Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986. 192 с.
18. **Заболотнов Ю.М., Лобанков А.А.** Синтез регулятора для стабилизации движения твердого тела вокруг неподвижной точки // Известия РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 59–71.
19. **Zabolotnov, Yu.M.,** Approximate optimal method for controlling the angular motion of a spacecraft as part of an orbital tether system, 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 984 012024.

Zabolotnov, Yu.M. (Samara National Research University, Russia)

Approximately Optimal Stabilization of a Gyroscopic System with Many Degrees of Freedom and Slowly Varying Parameters, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2023, vol. 31, no. 1 (120), pp. 142–151.

Abstract. The problem of stabilization of small oscillations of a gyroscopic system with many degrees of freedom and slowly varying parameters is considered and solved using Bellman's principle of dynamic programming. The approximate procedures for the controller synthesis are based on the asymptotic solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation by the averaging method. A quadratic optimality criterion is used, depending on the oscillation amplitudes of the system and control. The proposed method is applied to linear disturbances of the general type and those associated with a slow change in system parameters. The new approach allows the design of controllers in analytical form.

Key words: stabilization of gyroscopic systems, small oscillations, approximately optimal control, Bellman principle, averaging method.

Материал поступил 10.11.2022