

М. А. БАСАРАБ, В. А. МАТВЕЕВ, Б. С. ЛУНИН, С. В. ФЕТИСОВ

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ТОЛЩИНЫ ОБОЛОЧКИ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА НА ПАРАМЕТРЫ ДЕБАЛАНСА

Получены выражения для компонент дебалансов полусферического волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) с резонатором в виде оболочки неравномерной толщины в меридиональном направлении. Рассмотрены различные зависимости уменьшения толщины резонатора от полюса к краю. Показано, что при возбуждении по второй форме колебаний относительная погрешность в определении компонент дебаланса, связанная с пренебрежением такой неравномерностью и рассмотрением оболочки равномерной толщины, может достигать 10-15 %. Учет закона изменения толщины оболочки может существенно повысить точность балансировки ВТГ, которая является важнейшим процессом при изготовлении приборов средней и высокой точности.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, полусферический резонатор, дебаланс.

Введение

В работах [1, 2] было рассмотрено влияние неоднородного распределения масс на дебаланс полусферического волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) с резонатором, равнотолщинным в полярном (меридиональном) направлении. Вместе с тем, чтобы обеспечить большую однородность напряжений в материале резонатора, толщина оболочки монотонно уменьшается при смещении от полюса полусферы к её краю. Так, в [3] рассматривалась толщина, изменяющаяся, как $h(\alpha) = h_0(1 + \cos \alpha)^2 / 4$, где h_0 – толщина однородного материала резонатора; α – угол между вектором, проведенным из центра полусферы в некоторую точку оболочки, и осью симметрии. В работе [4] для такой зависимости исследовались конечно-элементные и полуаналитические (метод R-функций) модели применительно к задачам динамики и расчета тепловых полей ВТГ.

В [5] было изучено влияние неравномерной толщины резонатора ВТГ на его точностные характеристики. Определены масштабный коэффициент и собственная частота изгибных колебаний в случае, когда неоднородность толщины резонатора имела вид $h(\alpha, \varphi) = h_0 [1 + f(\alpha) \cos m\varphi]$, где $f(\alpha)$ – закон изменения

Басараб Михаил Алексеевич. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Московского государственного технического университета (МГТУ) им. Н.Э. Баумана.

Матвеев Валерий Александрович. Доктор технических наук, профессор, руководитель научно-учебного комплекса «Информатика и системы управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Лунин Борис Сергеевич. Доктор технических наук, ведущий научный сотрудник химического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Фетисов Сергей Васильевич. Инженер-конструктор ЗАО «Инерциальные технологии «Техно-комплекса» (ИТТ) (г. Раменское Моск. обл.).

толщины; m – номер гармоники неоднородности толщины по окружному (или азимутальному) углу φ . В частности, рассмотрен простейший случай, когда $f(\alpha) = \varepsilon(\alpha - \alpha_1/2)$. Отмечено, что малая неоднородность толщины резонатора по полярному углу α вызывает изменение коэффициента прецессии и частоты собственных колебаний резонатора, а также не приводит к взаимосвязи между модами колебаний (при $m = 0$).

В работе [6] методами конечно-элементного моделирования и возмущений решалась задача вычисления расщепления частоты оболочки с произвольным дефектом формы срединной поверхности.

При исследовании колебаний оболочек, имеющих неоднородность в меридиональном направлении, могут быть использованы проекционные алгоритмы, в частности, в [7] предложен подход к расчету динамики (собственные формы колебаний и коэффициент прецессии) оболочки вращения с произвольной формой образующей с помощью метода коллокации.

В то же время вопросы, связанные с балансировкой ВТГ с оболочкой, неравномерной по полярному (меридиональному) углу, по алгоритмам, предложенным в [1], ранее не рассматривались. В данной статье исследуется влияние такой неоднородности на параметры дебаланса. На примере различных моделей показано, что для прецизионных приборов учет закона изменения толщины существен и может на 10-25 % повысить точность последующей балансировки.

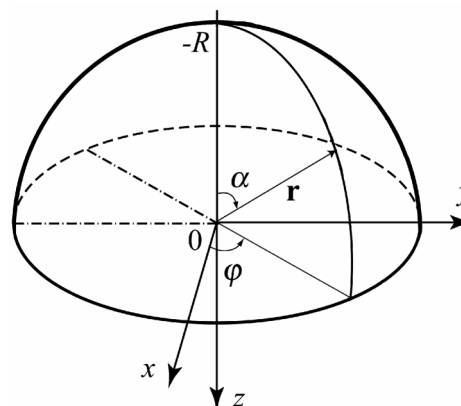
Геометрия резонатора ВТГ

Компоненты произвольной n -й формы колебаний стоячей волны полусферического резонатора ВТГ радиуса R в сферической системе координат (r, φ, α) (см. рисунок) имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} u &= \frac{A}{2} \sin \alpha \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} \cos n(\varphi - \varphi_0) \sin \omega(t - t_0), \\ v &= \frac{A}{2} \sin \alpha \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} \sin n(\varphi - \varphi_0) \sin \omega(t - t_0), \\ w &= \frac{A}{2} (n + \cos \alpha) \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} \cos n(\varphi - \varphi_0) \sin \omega(t - t_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где A – амплитуда колебаний; ω – частота колебаний; t_0 – начальный момент времени; φ_0 – ориентация стоячей волны.

В связанной с резонатором декартовой системе координат положение точки на срединной поверхности оболочки задается вектором



Геометрия полусферического резонатора ВТГ

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin \alpha \cos \varphi \\ R \sin \alpha \sin \varphi \\ -R \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2)$$

а соответствующее перемещение:

$$\Delta \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w \sin \alpha \cos \varphi + u \cos \alpha \cos \varphi - v \sin \varphi \\ -w \sin \alpha \sin \varphi + u \cos \alpha \sin \varphi + v \cos \varphi \\ w \cos \alpha + u \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{A}{4} \sin \alpha \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} \sin \omega(t - t_0) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} - \left(\begin{matrix} [(n+1) \cos(n-1)\varphi + (n-1) \cos(n+1)\varphi] \cos n\varphi_0 + \\ + [(n+1) \sin(n-1)\varphi + (n-1) \sin(n+1)\varphi] \sin n\varphi_0 \end{matrix} \right) \\ \left(\begin{matrix} [(n+1) \sin(n-1)\varphi - (n-1) \sin(n+1)\varphi] \cos n\varphi_0 - \\ - [(n+1) \cos(n-1)\varphi - (n-1) \cos(n+1)\varphi] \sin n\varphi_0 \end{matrix} \right) \\ 2 \frac{1+n \cos \alpha}{\sin \alpha} (\cos n\varphi \cos n\varphi_0 + \sin n\varphi \sin n\varphi_0) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Модель оболочки однородной толщины

Перемещение аномальных масс осесимметричной оболочки переменной толщины, характеризуемых объемной плотностью $\rho(\varphi, \alpha)$, поддерживается системой внешних сил

$$\mathbf{F} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1(\alpha)}^{r_2(\alpha)} r^2 \rho(\varphi, \alpha) \Delta \ddot{\mathbf{r}} \sin \alpha \, dr \, d\varphi \, d\alpha \quad (4)$$

и главным моментом относительно точки опоры, совпадающей с центром оболочки:

$$\mathbf{M} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1(\alpha)}^{r_2(\alpha)} r^2 \rho(\varphi, \alpha) \mathbf{r} \times \Delta \ddot{\mathbf{r}} \sin \alpha \, dr \, d\varphi \, d\alpha. \quad (5)$$

В выражениях (4, 5) для второй производной по времени используется обозначение « $\ddot{}$ », символ « \times » обозначает векторное произведение; $r_1(\alpha)$, $r_2(\alpha)$ – функции, описывающие внутреннюю и внешнюю часть оболочки соответственно; $(r^2 \sin \alpha \, dr \, d\varphi \, d\alpha)$ – элемент объема в сферической системе координат.

Для идеальной полусферической оболочки радиуса R и толщины h , учитывая, что

$$\int_{R-h/2}^{R+h/2} r^2 \, dr = \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \approx R^2 h,$$

имеем

$$\mathbf{F} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{R-h/2}^{R+h/2} r^2 \rho(\varphi, \alpha) \Delta \ddot{\mathbf{r}} \sin \alpha \, dr \, d\varphi \, d\alpha \approx R^2 h \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \alpha) \Delta \ddot{\mathbf{r}} \sin \alpha \, d\varphi \, d\alpha; \quad (6)$$

$$\mathbf{M} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{R-h/2}^{R+h/2} r^2 \rho(\varphi, \alpha) \mathbf{r} \times \Delta \ddot{\mathbf{r}} \sin \alpha \, dr \, d\varphi \, d\alpha \approx R^2 h \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \alpha) \mathbf{r} \times \Delta \ddot{\mathbf{r}} \sin \alpha \, d\varphi \, d\alpha. \quad (7)$$

Введем обозначения:

$$\rho_{ks}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \alpha) \sin \alpha \sin k\varphi d\varphi, \quad \rho_{kc}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \alpha) \sin \alpha \cos k\varphi d\varphi; \quad (8)$$

$$k = (n-1), n, (n+1).$$

Аналогично [1] амплитуды сил и моментов, соответствующих $(n-1)$ -й, n -й и $(n+1)$ -й гармоникам дебаланса, имеют вид:

$$\begin{pmatrix} F_x^{(n-1)} \\ F_y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \frac{(n+1)A\omega^2}{4} \begin{pmatrix} \cos n\varphi_0 & \sin n\varphi_0 \\ \sin n\varphi_0 & -\cos n\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{(n-1)c}^F \\ d_{(n-1)s}^F \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} M_x^{(n-1)} \\ M_y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \frac{RA\omega^2}{4} \begin{pmatrix} -\sin n\varphi_0 & \cos n\varphi_0 \\ \cos n\varphi_0 & \sin n\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{(n-1)c}^M \\ d_{(n-1)s}^M \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$F_z^{(n)} = -\frac{A\omega^2}{2} (d_{nc}^F \cos n\varphi_0 + d_{ns}^F \sin n\varphi_0), \quad (11)$$

$$M_z^{(n)} = -\frac{RA\omega^2}{2} (d_{ns}^M \cos n\varphi_0 - d_{nc}^M \sin n\varphi_0), \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} F_x^{(n+1)} \\ F_y^{(n+1)} \end{pmatrix} = \frac{(n-1)A\omega^2}{4} \begin{pmatrix} \cos n\varphi_0 & \sin n\varphi_0 \\ -\sin n\varphi_0 & \cos n\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{(n+1)c}^F \\ d_{(n+1)s}^F \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} M_x^{(n+1)} \\ M_y^{(n+1)} \end{pmatrix} = \frac{RA\omega^2}{4} \begin{pmatrix} \sin n\varphi_0 & -\cos n\varphi_0 \\ \cos n\varphi_0 & \sin n\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{(n+1)c}^M \\ d_{(n+1)s}^M \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$d_{(n-1)\beta}^F = R^2 h \int_{\alpha} \rho_{(n-1)\beta}(\alpha) \sin \alpha \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} d\alpha, \quad d_{(n-1)\beta}^M =$$

$$= R^2 h \int_{\alpha} \rho_{(n-1)\beta}(\alpha) \sin \alpha \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha) d\alpha; \quad (15)$$

$$d_{n\beta}^F = R^2 h \int_{\alpha} \rho_{n\beta}(\alpha) (1 + n \cos \alpha) \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} d\alpha, \quad d_{n\beta}^M = R^2 h \int_{\alpha} \rho_{n\beta}(\alpha) \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} d\alpha; \quad (16)$$

$$d_{(n+1)\beta}^F = R^2 h \int_{\alpha} \rho_{(n+1)\beta}(\alpha) \sin \alpha \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} d\alpha, \quad d_{(n+1)\beta}^M =$$

$$= R^2 h \int_{\alpha} \rho_{(n+1)\beta}(\alpha) \sin \alpha \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha) d\alpha; \quad (17)$$

$$\beta \in \{c, s\}.$$

Все 12 параметров дебаланса (15–17) при известной амплитуде, частоте и ориентации стоячей волны однозначно определяют силовое воздействие на резонатор ВТГ в точке его крепления к основанию. Предположим, что в точке опоры резонатора можно измерить компоненты силы и момента при произвольной ориентации возбужденной в нем стоячей волны:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x^{(n-1)} + F_x^{(n+1)}, & M_x &= M_x^{(n-1)} + M_x^{(n+1)}, \\ F_y &= F_y^{(n-1)} + F_y^{(n+1)}, & M_y &= M_y^{(n-1)} + M_y^{(n+1)}, \\ F_z &= F_z^{(n)}, & M_z &= M_z^{(n)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Возбуждая стоячие волны различной ориентации (например, $\varphi_{01} = 0$, $\varphi_{02} = \pi/2n$), можно вычислить параметры (15–17).

Для однозначного определения параметров дебаланса зафиксируем две произвольные бесконечно тонкие параллели, соответствующие полярным углам α_1 и α_2 , вдоль которых будет выполняться балансировка [1]. Обозначив символом «*» соответствующие параметры дебаланса по этим параллелям, представим в (17) компоненты плотности как взвешенную сумму двух δ -функций по меридиональному углу:

$$\begin{aligned} \rho_{k\beta}(\alpha) &= d_{k\beta}^*(\alpha_1)\delta(\alpha - \alpha_1) + d_{k\beta}^*(\alpha_2)\delta(\alpha - \alpha_2), \\ k &= (n-1), n, (n+1). \end{aligned}$$

Учитывая свойство δ -функции, запишем систему для определения параметров дебаланса по обоим параллелям:

$$\begin{aligned} d_{(n-1)\beta}^*(\alpha_1)\sin\alpha_1 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_1}{2} + d_{(n-1)\beta}^*(\alpha_2)\sin\alpha_2 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_2}{2} &= d_{(n-1)\beta}^F, \\ d_{(n-1)\beta}^*(\alpha_1)\sin\alpha_1 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_1}{2}(1 - \cos\alpha_1) + d_{(n-1)\beta}^*(\alpha_2)\sin\alpha_2 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_2}{2}(1 - \cos\alpha_2) &= d_{(n-1)\beta}^M; \\ d_{n\beta}^*(\alpha_1)\operatorname{tg}^n \frac{\alpha_1}{2}(1 + n\cos\alpha_1) + d_{n\beta}^*(\alpha_2)\operatorname{tg}^n \frac{\alpha_2}{2}(1 + n\cos\alpha_2) &= d_{n\beta}^F, \\ d_{n\beta}^*(\alpha_1)\sin^2\alpha_1 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_1}{2} + d_{n\beta}^*(\alpha_2)\sin^2\alpha_2 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_2}{2} &= d_{n\beta}^M; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} d_{(n+1)\beta}^*(\alpha_1)\sin\alpha_1 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_1}{2} + d_{(n+1)\beta}^*(\alpha_2)\sin\alpha_2 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_2}{2} &= d_{(n+1)\beta}^F, \\ d_{(n+1)\beta}^*(\alpha_1)\sin\alpha_1 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_1}{2}(1 + \cos\alpha_1) + d_{(n+1)\beta}^*(\alpha_2)\sin\alpha_2 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_2}{2}(1 + \cos\alpha_2) &= d_{(n+1)\beta}^M. \end{aligned}$$

Решение (19) имеет вид

$$d_{(n-1)\beta}^*(\alpha_1) = \frac{d_{(n-1)\beta}^M - d_{(n-1)\beta}^F(1 - \cos\alpha_2)}{\sin\alpha_1 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_1}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}; \quad d_{(n+1)\beta}^*(\alpha_1) = \frac{d_{(n+1)\beta}^M - d_{(n+1)\beta}^F(1 + \cos\alpha_2)}{\sin\alpha_1 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_1}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)};$$

$$d_{n\beta}^*(\alpha_1) = \frac{d_{n\beta}^F \sin^2 \alpha_2 - d_{n\beta}^M (1 + n \cos \alpha_2)}{\operatorname{tg}^n \frac{\alpha_1}{2} \left[(1 + n \cos \alpha_1) \sin^2 \alpha_2 - (1 + n \cos \alpha_2) \sin^2 \alpha_1 \right]},$$

$$d_{(n-1)\beta}^*(\alpha_2) = \frac{d_{(n-1)\beta}^M - d_{(n-1)\beta}^F (1 - \cos \alpha_1)}{\sin \alpha_2 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_2}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}; \quad (20)$$

$$d_{(n+1)\beta}^*(\alpha_2) = \frac{d_{(n+1)\beta}^M - d_{(n+1)\beta}^F (1 + \cos \alpha_1)}{\sin \alpha_2 \operatorname{tg}^n \frac{\alpha_2}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)}.$$

$$d_{n\beta}^*(\alpha_2) = \frac{d_{n\beta}^F \sin^2 \alpha_1 - d_{n\beta}^M (1 + n \cos \alpha_1)}{\operatorname{tg}^n \frac{\alpha_2}{2} \left[(1 + n \cos \alpha_2) \sin^2 \alpha_1 - (1 + n \cos \alpha_1) \sin^2 \alpha_2 \right]},$$

Таким образом, выражения для компонент удаляемых дебалансов с обеих параллелей получаются соответствующей заменой полярного угла α_1 на α_2 и наоборот.

В итоге из (20) получаем выражения для амплитуд и ориентаций дебалансов:

$$|d_{n-1}^*(\alpha_1)| = \sqrt{[d_{(n-1)c}^*(\alpha_1)]^2 + [d_{(n-1)s}^*(\alpha_1)]^2}, \quad \arg [d_{n-1}^*(\alpha_1)] = \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{d_{(n-1)s}^*(\alpha_1)}{d_{(n-1)c}^*(\alpha_1)};$$

$$|d_{n-1}^*(\alpha_2)| = \sqrt{[d_{(n-1)c}^*(\alpha_2)]^2 + [d_{(n-1)s}^*(\alpha_2)]^2}, \quad \arg [d_{n-1}^*(\alpha_2)] = \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{d_{(n-1)s}^*(\alpha_2)}{d_{(n-1)c}^*(\alpha_2)};$$

$$|d_n^*(\alpha_1)| = \sqrt{[d_{nc}^*(\alpha_1)]^2 + [d_{ns}^*(\alpha_1)]^2}, \quad \arg [d_n^*(\alpha_1)] = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{d_{ns}^*(\alpha_1)}{d_{nc}^*(\alpha_1)}; \quad (21)$$

$$|d_n^*(\alpha_2)| = \sqrt{[d_{nc}^*(\alpha_2)]^2 + [d_{ns}^*(\alpha_2)]^2}, \quad \arg [d_n^*(\alpha_2)] = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{d_{ns}^*(\alpha_2)}{d_{nc}^*(\alpha_2)};$$

$$|d_{n+1}^*(\alpha_1)| = \sqrt{[d_{(n+1)c}^*(\alpha_1)]^2 + [d_{(n+1)s}^*(\alpha_1)]^2}, \quad \arg [d_{n+1}^*(\alpha_1)] = \frac{1}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{d_{(n+1)s}^*(\alpha_1)}{d_{(n+1)c}^*(\alpha_1)};$$

$$|d_{n+1}^*(\alpha_2)| = \sqrt{[d_{(n+1)c}^*(\alpha_2)]^2 + [d_{(n+1)s}^*(\alpha_2)]^2}, \quad \arg [d_{n+1}^*(\alpha_2)] = \frac{1}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{d_{(n+1)s}^*(\alpha_2)}{d_{(n+1)c}^*(\alpha_2)}.$$

Балансировка (компенсация) параметров дебаланса на обеих параллелях независимо может быть выполнена по алгоритмам, приведенным в [9]. Здесь следует отметить, что балансировка по бесконечно тонким параллелям соответствует представлению функции плотности по меридиональному углу α в виде линейной комбинации δ -функций, что практически не реализуемо. Другие варианты аппроксимации функции плотности рассмотрены в [2].

Модель оболочки переменной толщины

Рассмотрим теперь произвольный случай, когда $r_1(\alpha)$ и $r_2(\alpha)$ не являются постоянными, а изменяются по какому-либо закону. Тогда, интегрируя (4, 5) по переменной r , получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{R-h/2}^{R+h/2} r^2 \rho(\varphi, \alpha) \Delta \ddot{\mathbf{r}} \sin \alpha \, dr \, d\varphi \, d\alpha = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} [r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)] \rho(\varphi, \alpha) \Delta \ddot{\mathbf{r}} \sin \alpha \, d\varphi \, d\alpha; \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{R-h/2}^{R+h/2} r^2 \rho(\varphi, \alpha) \mathbf{r} \times \Delta \ddot{\mathbf{r}} \sin \alpha \, dr \, d\varphi \, d\alpha \approx \\ &\approx \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} [r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)] \rho(\varphi, \alpha) \mathbf{r} \times \Delta \ddot{\mathbf{r}} \sin \alpha \, d\varphi \, d\alpha. \end{aligned} \tag{23}$$

Соответственно вместо (15–17) получим следующие выражения для дебалансов с учетом переменной толщины оболочки:

$$d_{(n-1)\beta}^F = \frac{1}{3} \int_{\alpha} [r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)] \rho_{(n-1)\beta}(\alpha) \sin \alpha \, \text{tg}^n \frac{\alpha}{2} \, d\alpha, \tag{24}$$

$$d_{(n-1)\beta}^M = \frac{1}{3} \int_{\alpha} [r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)] \rho_{(n-1)\beta}(\alpha) \sin \alpha \, \text{tg}^n \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha) \, d\alpha;$$

$$d_{n\beta}^F = \frac{1}{3} \int_{\alpha} [r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)] \rho_{n\beta}(\alpha) (1 + n \cos \alpha) \, \text{tg}^n \frac{\alpha}{2} \, d\alpha, \tag{25}$$

$$d_{n\beta}^M = \frac{1}{3} \int_{\alpha} [r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)] \rho_{n\beta}(\alpha) \sin^2 \alpha \, \text{tg}^n \frac{\alpha}{2} \, d\alpha;$$

$$d_{(n+1)\beta}^F = \frac{1}{3} \int_{\alpha} [r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)] \rho_{(n+1)\beta}(\alpha) \sin \alpha \, \text{tg}^n \frac{\alpha}{2} \, d\alpha, \tag{26}$$

$$d_{(n+1)\beta}^M = \frac{1}{3} \int_{\alpha} [r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)] \rho_{(n+1)\beta}(\alpha) \sin \alpha \, \text{tg}^n \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha) \, d\alpha.$$

Из (24-26) для оболочки постоянной малой толщины h можно получить (15-17), т.к.

$$r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha) = \left(R + \frac{h}{2}\right)^3 - \left(R - \frac{h}{2}\right)^3 = h \left(3R^2 + \frac{h^2}{4}\right) \approx 3R^2 h.$$

Пример 1. Рассмотрим оболочку резонатора ВТГ, внутренняя и внешняя поверхности которой описываются соответственно функциями:

$$r_1(\alpha) = \sqrt{R_1^2 - l_1^2 \sin^2 \alpha} + l_1 \cos \alpha, \quad r_2(\alpha) = \sqrt{R_2^2 - l_2^2 \sin^2 \alpha} + l_2 \cos \alpha,$$

где R_1, R_2 – радиусы внутренней и внешней полусфер, а l_1, l_2 – смещение их центров в отрицательном направлении оси OZ (см. рисунок).

Рассмотрим вторую рабочую форму колебаний ($n = 2$) и положим, для определенности, что имеется 1-я гармоника массового дебаланса вида

$$\rho(\alpha, \varphi) = \rho_0(1 + \varepsilon \cos \varphi) \quad (27)$$

с относительной амплитудой $\varepsilon = 0,001$.

Примем в расчетах: $R_1 = 23$ мм, $l_1 = 2$ мм; $R_2 = 25$ мм, $l_2 = 3$ мм; материал резонатора – кварц ($\rho_0 = 2200$ кг/м³).

Рассчитаем сначала средний радиус оболочки

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} = 24 \text{ мм}$$

и её усредненную толщину (близкий результат получится, если взять $h = R_2 - R_1$)

$$h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [r_2(\alpha) - r_1(\alpha)] d\alpha \approx 2,59 \text{ мм.}$$

Тогда из (15) для модели оболочки постоянной толщины имеем

$$\tilde{d}_{1c}^F \approx 2,84 \text{ мг, } \tilde{d}_{1c}^M \approx 2,07 \text{ мг,}$$

в то время как по формуле (24) получаем

$$d_{1c}^F \approx 3,26 \text{ мг, } d_{1c}^M \approx 2,29 \text{ мг.}$$

Таким образом, относительная погрешность определения дебаланса d_{1c}^F по формуле (11) составляет более 13%, а d_{1c}^M – более 9%. Это приводит, как следствие, и к существенным погрешностям при расчете компонент дебаланса d_{1c}^* на параллелях α_1, α_2 по формулам (20). Выберем, к примеру, $\alpha_1 = \pi/2$ (кромка резонатора), $\alpha_1 = \pi/3$ (Получим (синусные компоненты равны нулю):

$$\begin{aligned} d_{1c}^*(\alpha_1) &\approx 1,31 \text{ мг, } d_{1c}^*(\alpha_2) \approx 6,78 \text{ мг;} \\ \tilde{d}_{1c}^*(\alpha_1) &\approx 1,31 \text{ мг, } \tilde{d}_{1c}^*(\alpha_2) \approx 5,29 \text{ мг.} \end{aligned}$$

Если на кромке относительная погрешность меньше 1%, то на параллели α_2 она достигает 22%.

Следует отметить, что в рассмотренном примере относительная погрешность не зависит от амплитуды дебаланса ε и определяется лишь соотношением между параметрами R_1, R_2, l_1, l_2 . Аналогичные результаты можно получить и для других гармоник дебаланса, а также номеров форм возбужденных стоячих волн.

Пример 2. Пусть теперь внутренняя поверхность оболочки представляет собой полусферу радиуса $r_1(\alpha) = R_1 = 23$ мм, а внешняя поверхность описывается выражением

$$r_2(\alpha) = R_1 + h_0 \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)^2,$$

где $h_0 = 2,5$ мм – максимальная толщина оболочки у полюса.

Усредненная толщина

$$h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} h_0 \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)^2 d\alpha = h_0 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{3}{8} \right) \approx 1,73 \text{ мм}.$$

Примем ту же модель неоднородности (27), что и в примере 1. Расчет компонент дебаланса по формулам (15) (с радиусом $R = R_1$) дает слишком грубые оценки

$$\tilde{d}_{1c}^F \approx 2,26 \text{ мг}, \quad \tilde{d}_{1c}^M \approx 1,65 \text{ мг},$$

по сравнению с полученными в соответствии с выражениями (24):

$$d_{1c}^F \approx 1,42 \text{ мг}, \quad d_{1c}^M \approx 0,93 \text{ мг}.$$

В то же время, если задаться изначально постоянной толщиной $h = h_0$, но функцию плотности взять при этом как

$$\rho(\alpha, \varphi) = \rho_0 \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)^2 (1 + \varepsilon \cos \varphi),$$

а средний радиус

$$R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{R_1 + r_2(\alpha)}{2} d\alpha = R_1 + \frac{h}{2} \approx 24 \text{ мм},$$

то из (15) получим

$$\tilde{d}_{1c}^F \approx 1,45 \text{ мг}, \quad \tilde{d}_{1c}^M \approx 0,96 \text{ мг}.$$

Компоненты дебалансов на параллелях $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pi/3$ равны

$$d_{1c}^*(\alpha_1) \approx 0,44 \text{ мг}, \quad d_{1c}^*(\alpha_2) \approx 3,37 \text{ мг};$$

$$\tilde{d}_{1c}^*(\alpha_1) \approx 0,47 \text{ мг}, \quad \tilde{d}_{1c}^*(\alpha_2) \approx 3,41 \text{ мг}.$$

Относительная погрешность на параллели α_1 – 5%, на параллели α_2 – 1,3%.

Несмотря на то, что в данном случае результат существенно лучше, тем не менее такая относительная погрешность может негативно сказаться на точности балансировки.

Заключение

Полученные выражения для идентификации компонент дебалансов позволяют повысить точность идентификации параметров дебаланса и последующей балансировки по выбранным параллелям в случае резонатора с произвольной толщиной оболочки в меридиональном направлении и при различных формах колебаний $n \geq 2$. Решение вопроса выбора параллелей также представляет большой практический интерес, так как эффект от удаления массы зависит от расстояния от места её съема до кромки резонатора и проявляется в изменении жесткости оболочки и её масштабного коэффициента прецессии. Описанные в статье подходы могут быть также использованы для более точной аппроксима-

ции функции плотности по поверхности оболочки резонатора [2] и последующей поверхностной балансировки ВТГ [10], что в свою очередь позволит повысить точность датчиков первичной информации инерциальных навигационных систем на их основе [11, 12].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жбанов Ю.К., Каленова Н.В.** Поверхностный дебаланс волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 11–18.
2. **Матвеев В.А., Басараб М.А., Лунин Б.С.** Аппроксимация распределения плотности резонатора волнового твердотельного гироскопа по измеренным параметрам дебаланса // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 10. С. 9–16.
3. **Lynch D.D.** Bell gyro and improved means for operating same // Патент США. НКИ 73/505. No. 3656354. (1972).
4. **Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А.** Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. М.: Физматлит, 2008. 240 с.
5. **Меркурьев И.В., Подалков В.В.** Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.
6. **Вахлярский Д.С., Гуськов А.М., Басараб М.А., Матвеев В.А.** Использование метода конечных элементов совместно с методом возмущений в задаче вычисления расщепления частоты оболочки с дефектом формы срединной поверхности // Наука и образование. Электронное научно-техническое издание. Май 2016. № 05. DOI: 10.7463/0516.0839190.
7. **Басараб М.А., Кравченко В.Ф., Матвеев В.А., Пустовойт В.И.** Атомарные функции в задаче определения функций Рэлея и коэффициента прецессии резонатора волнового твердотельного гироскопа // Доклады РАН. 2001. Т. 376. № 4. С.474–479.
8. **Новожилов В.В.** Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 380 с.
9. **Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.** О балансировке волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 4. С. 4–16.
10. **Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Чуманкин Е.А.** Балансировка полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов методом химического травления // Гироскопия и навигация. 2015. Т. 88. № 1. С. 61–70.
11. **Мейер Д., Розелле Д.** Инерциальная навигационная система на основе миниатюрного волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2012. № 3. (78). С. 45–54.
12. **Жанруа А., Буве А., Ремиллье Ж.** Волновой твердотельный гироскоп и его применение в морском приборостроении // Гироскопия и навигация. 2013. № 4 (83). С. 24–34.

Basarab M.A., Matveev V.A. (Bauman Moscow State Technical University, Russia), **Lunin B.S., Fetisov S.V.** (Lomonosov Moscow State University (MSU), Russia)

Influence of the Nonuniform Thickness of the Hemispherical Resonator Gyro Shell on its Unbalance Parameters // *Гироскопия и Навигация*. 2016. Vol. 24. No. 4 (95). P. 14–24.

Abstract. Formulas for the unbalance components of the hemispherical resonator gyro (HRG) with a shell of thickness variable in the meridional direction are obtained. Various laws of thickness reduction from the pole to the edge are considered. It is shown that for the second form of excited oscillations, relative error in unbalance components (with the thickness variation neglected) can reach 10-15%. The obtained formulas for unbalance components, taking into account the variable thickness of the shell, can significantly improve the accuracy of HRG balancing, which is the most important process in the manufacture of medium and high precision devices.

Key words: solid-state wave gyro, hemispherical resonator, unbalance

REFERENCES

1. **Zhbanov Yu.K. and Kalenova, N.V.** Surface imbalance hemispherical resonator gyro // *Izvestiya RAN, Mekhanika tverdogo tela*. 2001. No. 3. P. 11–18.
2. **Matveev V.A., Basarab M.A., and Lunin B.S.** Approximation of density distribution of solid-state wave gyro resonator with respect to measured disbalance parameters // *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika*. 2015. No. 10. P. 9–16.
3. **Lynch D.D.** Bell gyro and improved means for operating same. U.S. Patent 3656354, 1972.
4. **Matveev V.A., Lunin B.S., and Basarab M.A.** Navigatsionnye sistemy na volnovykh tverdotel'nykh giroskopakh (Navigation Systems Based on Solid-State Wave Gyroscopes). Moscow: Fizmatlit, 2008.
5. **Merkuryev I.V. and Podalkov V.V.** Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov (Dynamics of Micromechanical and Solid-State Wave Gyroscopes). Moscow: Fizmatlit, 2009.
6. **Vakhlyarskiy D.S., Gus'kov A.M., Basarab M.A., and Matveev V.A.** Using a combination of FEM and perturbation method in frequency split calculation of a nearly axisymmetric shell with middle surface shape defect // *Nauka i obrazovanie*. May 2016. No. 05. P. 152–174. DOI: 10.7463/0516.0839190.
7. **Basarab M.A., Kravchenko V.F., Matveev V.A., and Pustovoit V.I.** Atomic functions in the problem of evaluating the Rayleigh functions and the precession coefficient for the resonator of a wave solid-state gyroscope // *Doklady Physics*. 2001. Vol. 46. No. 2. P. 113–118.
8. **Novozhilov V.V.** The Theory of Thin Shells. P. Noordhoff, 1964. Enlarged second edition.
9. **Zhbanov Yu.K. and Zhuravlev V.F.** On balancing a hemispherical resonator gyro // *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 1998. No. 4. P. 4–16.
10. **Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., and Chumankin E.A.** Balancing of hemispherical resonator gyros by chemical etching // *Gyroscopy and Navigation*. 2015. Vol. 88. No. 1. P. 21–224. DOI: 10.17285/0869-7035.2015.23.1.061-070.
11. **Meyer D. and Rozelle D.** Milli-HRG inertial navigation system // *Gyroscopy and Navigation*. 2012. Vol. 3. No. 4. P. 227–234.
12. **Jeanroy A., Bouvet A., and Remillieux G.** HRG and marine applications // *Gyroscopy and Navigation*. 2014. Vol.5. No. 2. P. 67–74.

Материал поступил 01.08. 2015