

Д. ДЖИЛЬДЕН-ГУЛЕР, Ч. ГАДЖИЕВ

## ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА С СИНГУЛЯРНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИЕЙ ПРИ ОЦЕНКЕ ОРИЕНТАЦИИ НАНОСПУТНИКОВ НА ОСНОВЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

*В статье определяются углы ориентации малых спутников по измерениям звездных датчиков и интегрирующих гироскопов. Дрейф гироскопов учитывается путем добавления смещения нуля в вектор состояния и его оценивания. В качестве метода оценивания применяется двухэтапный фильтр нетрадиционной структуры. На первом этапе используется сингулярная декомпозиция (СД) для формирования измерений, определяющих ориентацию. На втором – сформированные линейные измерения обрабатываются с помощью обобщенного фильтра Калмана (ОФК). Эти два этапа объединены в единый алгоритм ОФК-СД, что обеспечивает высокую точность оценивания ориентации спутника.*

*В предложенном алгоритме ОФК-СД используются два типа моделей – кинематическая (без учета динамики движения спутника) и полная, учитывающая и динамику. Чтобы определить уровень, при котором погрешность ОФК-СД- фильтра, обрабатывающего полную модель, превысит результат обработки им кинематической модели, рассматриваются несколько вариантов априорных значений неопределенностей знания главного момента инерции спутника.*

**Ключевые слова:** оценивание ориентации, кинематика, спутник, интегрирующий гироскоп, звездный датчик, ОФК-СД.

### 1. Введение

Ориентацию спутника можно определить по измерениям в его системе координат и по опорным моделям. С этой целью и для вычисления навигационных параметров применяются алгоритмы оценивания и фильтрации [1–3], чаще всего – фильтр Калмана (ФК) [4]. При вращательном движении спутник имеет нелинейную динамику, как и многие другие реальные системы. По этой причине для оценки параметров спутника предлагается вместо ФК использовать ОФК [5]. В традиционных калмановских алгоритмах оценивания углов ориентации и угловых скоростей спутника задействуются нелинейные векторные измерения, так как математические модели измерений основываются на нелинейных моделях.

В работе [6] для оценивания угловой ориентации спутника, оснащенного гироскопами и звездными датчиками, представлен ОФК с постоянным коэффициентом усиления

---

**Джильден-Гулер** Демет. Доцент, Стамбульский технический университет (Стамбул, Турция). ORCID 0000-0002-3924-5422.

**Гаджиев** Чингиз. Доктор наук, профессор, Стамбульский технический университет. ORCID 0000-0003-4115-341X.

Научный редактор перевода д.т.н. И.В. Белоконов.

ния. Авторы сравнивают предложенный ОФК с традиционным ОФК в части скорости сходимости, точности и вычислительной нагрузки. Эксперименты демонстрируют, что ОФК с постоянным коэффициентом усиления обладает более низкой скоростью сходимости, однако аналогичной точностью и меньшей вычислительной нагрузкой.

В [7] описывается адаптивный алгоритм оценивания, обеспечивающий калибровку низкочастотных погрешностей звездных датчиков. Алгоритм предполагается объединение расширенного и традиционного ФК в системе определения ориентации спутника. В [8] описан подход к определению ориентации с использованием таких средств измерений, как магнитометры и датчики освещенности. ФК на основе магнитных измерений выступает в качестве основного алгоритма, а вспомогательный – QUEST обеспечивает априорное прогнозирование кватерниона, подаваемого в ФК.

В [9] решение задачи ориентации спутника основывается на линейных измерениях, базирующихся на одномоментных векторных наблюдениях на каждом шаге. Используемая при таком подходе СД считается эффективным методом одномоментных определений ориентации, так как отличается более высокой скоростью выполнения операций, чем метод кватернионов Дэвенпорта, и большей робастностью, чем другие «быстрые» методы, в том числе метод быстрой оптимальной матрицы ориентации (Fast Optimal Attitude Matrix – FOAM) и алгоритм оптимального оценивания кватерниона (Estimator of the Optimal Quaternion – ESOQ) [10–12].

В такой схеме углы ориентации, найденные методом одномоментных измерений и снимаемые на выходе СД, непосредственно используются как измерения в ФК. Получение измерений параметров вектора состояния напрямую от СД обеспечивает линейность модели измерений, так как связь между векторами измерений и состояния становится линейной. Подробные сведения о ФК на основе нелинейных и линейных измерений (нетрадиционный подход) можно найти в [2].

В работе [13] рассмотрены методы определения углов ориентации и управления ориентацией спутников с учетом погрешностей выставки датчиков, конструкций спутников и низкой степени резервирования. Метод оценивания угловой скорости маневрирующего спутника при помощи только векторных измерений с учетом возмущений по параметрам ориентации и управляющим моментам представлен в [14]. Методы одномоментных измерений можно интегрировать с рекуррентными методиками оценивания [3]. Это обеспечивает следующие преимущества перед традиционными ФК:

- ОФК на основе линейных уравнений измерений имеет упрощенную форму и компенсирует погрешности на шаге линеаризации;
- на этапе фильтрации применяются обработанные одномоментные измерения, таким образом, входные опорные векторы на первом этапе можно реконфигурировать;
- матрица ковариации измерений обновляется на каждом шаге, что делает фильтр изначально R-адаптивным.

Чтобы смоделировать в фильтре вращательное движение спутника, можно комбинировать кинематическую и динамическую модели. Динамические модели изначально характеризуются погрешностями, например неточным знанием матрицы инерции [15], поэтому можно также задействовать алгоритмы на основе только кинематической модели, не имеющие никаких неопределенностей. В этом случае необходимо учитывать смещение нуля гироскопов. Например, в фильтре, который рассматривается в [16], местоположение, линейная скорость, ориентация и смещение

нуля интегрирующих гироскопов оцениваются с учетом динамики всей нелинейной системы в присутствии шума датчиков. Более того, в [17] используются два нелинейных алгоритма оценивания ориентации и смещения нуля гироскопов с опорой на смещенные измерения гироскопов и инерциальных векторов. Авторы утверждают, что эти алгоритмы обладают лучшими переходными характеристиками по сравнению с нелинейными алгоритмами, встречающимися в литературе.

Закон управления, обеспечивающий достаточную стабильность и точность при воздействии больших неопределенностей параметров и внешних возмущений, описывается в [18]. В [19] предлагается адаптивный ФК на основе кинематического моделирования с привлечением гироскопических и векторных измерений. В фильтре на каждом шаге происходит сброс оценки ориентации до нуля и соответствующий сброс ковариации. В [20], чтобы предупредить снижение точности при оценивании ориентации, производится адаптивная подстройка матрицы ковариации шума измерений при оперативном обнаружении внешних ускорений и магнитных возмущений. Мультипликативный ОФК, предложенный в [21], обеспечивает робастность измерений при различных неопределенностях, в частности при большом ускорении тела, магнитных искажениях и погрешности исходной ориентации.

В [22] обсуждается фильтр для оценивания ориентации в системе без гироскопов или модели динамики ориентации. Система оценивания ориентации строится на основе кинематической модели. В нашей предыдущей работе [23] используется ОФК-СД с другим правилом адаптации на этапе фильтрации. В этой и других публикациях авторов исследуются выходы кинематической и динамической моделей в предположении об отсутствии неопределенностей в моделях для спутника, оснащенного магнитометром и солнечным датчиком. В настоящей статье исследуются выходы упомянутых моделей при неопределенности в знании матрицы, задающей главный момент инерции спутника, оснащенного лишь звездными датчиками. Уровень неопределенности матрицы также рассматривается, чтобы выявить критическую точку, в которой алгоритм, основанный на кинематической модели, лучше справляется с оценкой ориентации.

Зашумленные измерения можно отфильтровать путем их интегрирования с соответствующими моделями. С этой же целью кинематическую модель целесообразно строить на базе показаний гироскопов. При этом, однако, дрейф гироскопов со временем будет оказывать влияние на точность оценивания. Чтобы скорректировать измерения, три дополнительных члена, связанных со смещением нуля гироскопа, добавляются в вектор состояния и оцениваются. В данной работе в фильтрах оценивания ориентации исследуются как только кинематическая, так и полная модели движения, однако возможно применение динамической модели без гироскопов, особенно в случае их отказа [24].

Существуют два подхода к оценке ориентации и скорости спутника – кинематический и кинематико-динамический. При замене модели, построенной на данных гироскопов, на модель, выведенную из динамики вращения спутника, в случае кинематического подхода отпадает необходимость в бортовых гироскопах. Однако для такой модификации требуется точная динамическая модель. Чтобы знать, какую стратегию применять в каждом случае, в работе рассматривается критический уровень неопределенности в знании момента инерции. Для математической модели, включающей кинематические и динамические соотношения, неопределенности в динамической

модели могут снизить точность результатов. Следовательно, важно найти допустимый уровень упомянутой неопределенности, который вызывает значимую разницу в погрешностях оценки ориентации, полученных при использовании динамической и чисто кинематической моделей. По этой причине для оценивания двух вариантов алгоритма определения ориентации – с динамической моделью и без нее – анализируются различные уровни неопределенности знания главного момента инерции спутника. На спутниках устанавливаются звездные датчики небольшого размера, невысокой стоимостью и с низким энергопотреблением – этого удалось добиться благодаря развитию технологий и росту интереса к созданию малых спутников без потерь точности [25, 26]. Рассматриваемые гироскопы имеют небольшой размер и вес, а также низкую стоимость, но накапливают погрешности со временем. Таким образом, в обоих случаях речь идет об алгоритме с исключенным смещением нуля гироскопов.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 описывается математическая модель вращательного движения спутника. В разделе 3 представлены подробные сведения о методах СД и ОФК-СД. Моделирование и полученные результаты анализируются в разделе 4. В разделе 5 приводятся выводы.

## 2. Математические модели

Кинематические уравнения можно вывести с помощью последовательности поворотов 3-2-1 на углы Эйлера (угол рыскания в направлении надира  $\psi$ , угол тангажа в направлении отрицательной нормали к орбите  $\theta$  и угол крена  $\phi$ , дополняющий систему до правосторонней системы координат (СК):

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\psi)/c(\theta) & s(\psi)/c(\theta) & 0 \\ -s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ c(\psi)t(\theta) & s(\psi)t(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_I \\ \omega_J \\ \omega_K \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $c(\cdot)$ ,  $s(\cdot)$  и  $t(\cdot)$  – функции косинуса, синуса и тангенса;  $\bar{\omega}_{BR} = [\omega_K \ \omega_J \ \omega_I]^T$  – вектор ориентации корпусной СК относительно опорной СК, где  $I, J, K$  обозначают оси  $3 \equiv z, 2 \equiv y, 1 \equiv x$  [9].

Используемые в данной работе СК представлены на рис. 1. Кинематические уравнения в дискретном времени запишем с помощью метода Эйлера с постоянным временным шагом. Матрица перехода первого типа от орбитальной к связанной СК с последовательностью поворотов 3-2-1 примет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\phi) & c(\theta)s(\phi) & -s(\theta) \\ -c(\psi)s(\phi) + s(\psi)s(\theta)c(\phi) & c(\psi)c(\phi) + s(\psi)s(\theta)s(\phi) & s(\psi)c(\theta) \\ s(\psi)s(\phi) + c(\psi)s(\theta)c(\phi) & -s(\psi)c(\phi) + c(\psi)s(\theta)s(\phi) & c(\psi)c(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Преобразование в угловых скоростях выразим с помощью соотношения между вектором угловой скорости  $\omega_{BI}$  связанной СК относительно инерциальной СК и  $\omega_{BR}$ :

$$\omega_{BR} = \omega_{BI} - A \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_o \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $\omega_o$  – орбитальная угловая скорость, которую можно рассчитать для круговой орбиты в виде  $\omega_o = (\mu / r_0^3)^{1/2}$ ;  $\mu$  – произведение универсальной гравитационной постоянной и массы Земли;  $r_0$  – текущий радиус-вектор спутника. Динамические уравнения получим из закона сохранения момента количества движения:

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = N_x + (J_y - J_z)\omega_y\omega_z, \tag{4a}$$

$$J_y \frac{d\omega_y}{dt} = N_y + (J_z - J_x)\omega_z\omega_x, \tag{4b}$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = N_z + (J_x - J_y)\omega_x\omega_y, \tag{4c}$$

где  $\omega_{BI} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ ;  $J_x, J_y$  и  $J_z$  – главные моменты инерции;  $N_x, N_y$  и  $N_z$  – внешние возмущения, действующие на спутник. Уравнения динамики в дискретном времени могут быть записаны при помощи метода Эйлера с постоянным временным шагом. В настоящем исследовании рассматривается пассивное движение спутника без учета управляющих моментов. С учетом только гравитации Земли как идеального сферического тела внешние возмущения описываются следующим уравнением [27]:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = -3 \frac{\mu}{r_0^3} \begin{bmatrix} (J_y - J_z) A_{23} A_{33} \\ (J_z - J_x) A_{13} A_{33} \\ (J_x - J_y) A_{13} A_{23} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где нижние индексы при  $A$  обозначают ряд и столбец матрицы преобразования соответственно.

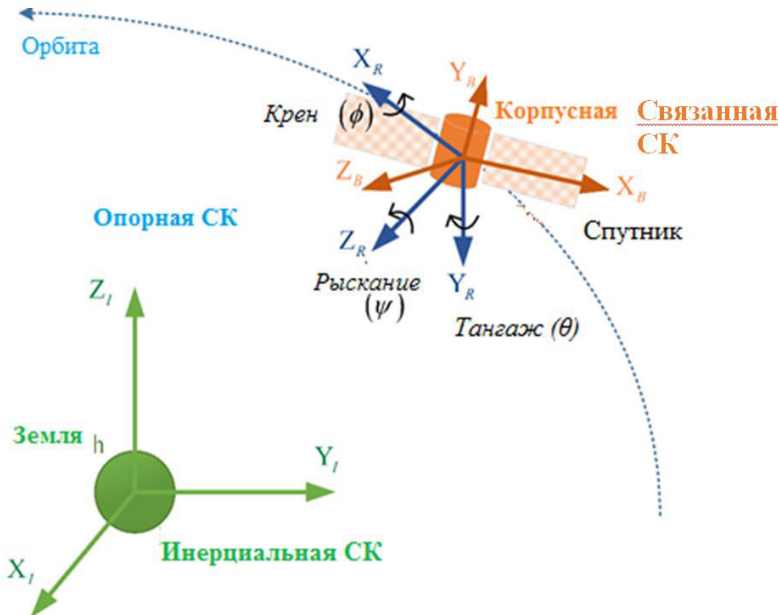


Рис. 1. Инерциальная, орбитальная и связанная СК

Измерения интегрирующих гироскопов (с нижним индексом  $g$ ) можно представить следующим образом:

$$\omega_{Bl_m}(k) = \omega_{Bl}(k) + \eta_g(k) + b_g(k). \quad (6)$$

Здесь  $b_g(k)$  – вектор смещения нуля гироскопа в момент  $t(k)$ ;  $\eta_g$  – центрированный белый шум с нормальным распределением с характеристикой  $E[\eta_g(k)\eta_g^T(j)] = I_{3 \times 3} \sigma_g^2 \delta(kj)$ , где  $E[\cdot]$  – оператор статистического осреднения,  $\delta(kj)$  – дельта-функция Кронекера,  $\sigma_g$  – стандартное отклонение погрешности гироскопа. Характеристика смещения нуля гироскопа  $b_g = [b_{gx} \quad b_{gy} \quad b_{gz}]^T$  равна

$$b_g(k) = b_g(k-1) + \eta_2 \times \Delta t, \quad (7)$$

где  $\eta_2$  – центрированный белый шум с нормальным распределением с характеристикой

$$E[\eta_2(k)\eta_2^T(j)] = I_{3 \times 3} \sigma_{gb}^2 \delta(kj), \quad (8)$$

где  $\sigma_{gb}$  – стандартное отклонение смещения нуля,  $I_{3 \times 3}$  – единичная матрица  $3 \times 3$ .

### 3. Обобщенный фильтр Калмана с сингулярной декомпозицией для оценивания ориентации

#### 3.1 Метод сингулярной декомпозиции

Углы ориентации можно определить с помощью двух или более векторов методом одномоментных измерений с минимизацией функции потерь Вахбы (9). Мы использовали метод сингулярной декомпозиции (разложение по сингулярным значениям) [11]. Потери вызваны отличием измерений от соответствующих опорных моделей:

$$L(A) = \frac{1}{2} \sum_i a_i |b_i - Ar_i|^2, \quad (9)$$

где  $A$  – матрица ориентации,  $b_i$  – вектор измерений,  $r_i$  – опорный вектор,  $a_i$  – неотрицательный вес [10]. Тогда представим матрицу  $B$  как [11]

$$B = \sum a_i b_i r_i^T. \quad (10)$$

Далее приведем следующие уравнения [11]:

$$L(A) = \sum a_i - tr(AB^T), \quad (11)$$

$$B = USV^T = U \text{diag}([S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33}]) V^T. \quad (12)$$

$U$  и  $V$  – левая и правая ортогональные матрицы, определенные в СД [11]. Они выражают матрицу  $B$  с первичными сингулярными значениями ( $S_{11}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{33}$ ) [11]:

$$A_{opt} = U \text{diag}[1 \quad 1 \quad \det(U) \det(V)] V^T. \quad (13)$$

Измерения углов Эйлера можно получить с помощью матрицы ориентации  $A_{opt}$ . За счет перехода от матрицы ориентации к углам Эйлера [9] углы ориентации можно использовать в качестве вектора измерений на этапе фильтрации. Матрица ковариации погрешностей оценок ориентации ( $P_{SYD}$ ) равна:

$$P_{SVD} = U \text{diag}[(s_2 + s_3)^{-1} \quad (s_3 + s_1)^{-1} \quad (s_1 + s_2)^{-1}] U^T, \quad (14)$$

где  $s_1 = S_{11}$   $s_2 = S_{22}$   $s_3 = \det(U)\det(V)S_{33}$  [11].

### 3.2 Обобщенный фильтр Калмана с СД

Модель ориентации спутника выразим как

$$x(k) = f[x(k-1)] + G(k, k-1)w(k-1), \quad (15)$$

$$Z(k) = Hx(k) + b(k) + v(k), \quad (16)$$

где  $x(k)$  – вектор состояния,  $f[\cdot]$  – нелинейная функция системы,  $G(k, k-1)$  – матрица прогноза порождающего шума,  $w(k-1)$  – порождающий шум,  $Z(k)$  – вектор измерений,  $H$  – матрица измерений,  $b(k)$  – смещение нуля измерений,  $v(k)$  – шум измерений. В фильтре калмановского типа используется динамика дискретного времени. Шумы процесса и измерений  $w(k)$  и  $v(k)$  – нормально распределенные белые шумы. Их ожидаемые значения ( $E[\cdot]$ ) следующие:

$$\begin{aligned} E[w(k)] &= 0, \quad E[w(k)w^T(j)] = Q(k)\delta(kj), \quad E[v(k)] = 0, \\ E[v(k)v^T(j)] &= R(k)\delta(kj), \quad E[w(k)v^T(j)] = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\delta(\cdot)$  – дельта-символ Кронекера,  $Q$  – матрица ковариации шума процесса,  $R$  – матрица ковариации шума измерений. Параметры вращательного движения оценим с помощью уравнений (18)–(23) нетрадиционного фильтра ОФК-СД. В общем смысле они не отличаются от уравнений обычного ОФК, хотя состав матриц измерений и ковариации шума измерений сильно отличается. Это происходит потому, что ОФК-СД представляет собой комбинацию двух алгоритмов – метода СД и ОФК.

Матрица ковариации погрешности экстраполяции примет вид

$$P(k|k-1) = \frac{\partial f[\hat{x}(k-1)]}{\partial \hat{x}(k-1)} P(k-1|k-1) \frac{\partial f^T[\hat{x}(k-1)]}{\partial \hat{x}(k-1)} + G(k, k-1)Q(k-1)G^T(k, k-1), \quad (18)$$

а ковариация погрешности оценки –

$$P(k|k) = [I - K(k)H]P(k|k-1). \quad (19)$$

Коэффициент усиления ОФК описывается формулой

$$K(k) = P(k|k-1)H^T [HP(k|k-1)H^T + R(k-1)]^{-1}, \quad (20)$$

невязка –

$$e(k|k-1) = Z(k) - H\hat{x}(k|k-1). \quad (21)$$

Уравнение экстраполяции имеет вид:

$$\hat{x}(k|k-1) = f[\hat{x}(k-1|k-1)]. \quad (22)$$

Оцениваемый вектор  $\hat{x}(k/k)$  представим как

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)e(k|k-1). \quad (23)$$

Матрица ковариации шума измерений  $R$  рассчитывается методом СД как  $R = P_{SVD}$  на каждом шаге, так как обе они являются матрицами ковариации погрешности измерений углов ориентации. Поскольку матрица ковариации измерений адаптируется за счет данных от СД, интегрированный фильтр становится адаптивным. Калмановские фильтры такого типа способны настраивать матрицы ковариации шума измерений при помощи правила адаптации, в то время как ОФК-СД изначально обладает свойством адаптивности, поскольку его матрица ковариации шума измерений уже настроена на каждом временном шаге посредством метода СД  $P_{SVD}$ . Благодаря своей адаптивной структуре ОФК-СД может оценивать параметры вращательного движения спутника вокруг его центра масс.

В настоящей статье в качестве датчиков ориентации и скорости служат гироскопы и звездные датчики. Последние измеряют минимум два вектора, которые затем привлекаются на этапе СД для получения измерений углов ориентации. Звездные датчики, определяют векторы измерений в связанной СК, обозначенные  $b_i$  в (9). Направленные на соответствующие звезды опорные векторы обозначены в (9) как  $r_i$ . Векторы измерений и опорные векторы обрабатываются по методу СД, чтобы получить измерения углов ориентации. Показания звездных датчиков моделируются в (16) в предположении, что их показания не содержат смещения нуля.

Углы Эйлера можно определить путем преобразования оптимальной матрицы ориентации  $A_{opt}$  найденной методом СД в (13). Измерения ориентации на выходе СД представим в виде

$$\begin{aligned} Z_\phi(k) &= \phi(k) + v_\phi(k), \\ Z_\theta(k) &= \theta(k) + v_\theta(k), \\ Z_\psi(k) &= \psi(k) + v_\psi(k), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $Z_\phi(k)$ ,  $Z_\theta(k)$ ,  $Z_\psi(k)$  – углы ориентации, определенные методом СД,  $v_{(\cdot)}(k)$  – шум измерения углов ориентации. Измерения СД можно представить в виде  $Z_1(k) = [Z_\phi(k) \ Z_\theta(k) \ Z_\psi(k)]^T$ . Вектор измерений поступает на фильтрацию после процесса преобразования опорных векторов в углы ориентации методом СД. При сингулярной декомпозиции также инициализируется ОФК для оценивания углов ориентации, следовательно, они не выбираются случайным образом. Измерения гироскопов, описанные в (6), можно представить в виде  $\tilde{Z}_2(k) = \omega_{Bl_m}(k)$ .

### 3.3 Оценка ориентации на основе кинематической модели

Модель кинематики углового движения спутника представлена в (1). Таким образом, нелинейная функция системы состоит из

$$\begin{bmatrix} \phi(k) \\ \theta(k) \\ \psi(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(k-1) \\ \theta(k-1) \\ \psi(k-1) \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} c(\psi(k-1))/c(\theta(k-1)) & s(\psi(k-1))/c(\theta(k-1)) & 0 \\ -s(\psi(k-1)) & c(\psi(k-1)) & 0 \\ c(\psi(k-1))\tau(\theta(k-1)) & s(\psi(k-1))\tau(\theta(k-1)) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_l(k-1) \\ \omega_j(k-1) \\ \omega_k(k-1) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

При привлечении только кинематических соотношений измерением для фильтра служит  $Z(k) = Z_1(k)$ . Это означает, что входной вектор измерений состоит из измере-



ний ориентации на выходе СД. Здесь и далее  $Z_1(k)$  – измерения от СД с использованием векторных измерений звездного датчика, а  $Z_2(k)$  – измерения угловой скорости от гироскопов с исключенным смещением нуля:  $Z_2(k) = \tilde{Z}_2(k) - b_{g_{est}}(k-1)$ , где  $b_{g_{est}}(k-1)$  – определяемый фильтром вектор смещения нуля гироскопа. Расширенный вектор состояния системы имеет вид

$$x(k) = [\phi(k) \quad \theta(k) \quad \psi(k) \quad b_{g_x}(k) \quad b_{g_y}(k) \quad b_{g_z}(k)]^T. \quad (26)$$

Структура алгоритма с применением только кинематической модели приведена на рис. 2, а. Как видно из рисунка, смещения нуля в измерениях гироскопов отфильтровываются за счет оценок на выходе ОФК-СД. Затем оценки угловой скорости снова подаются в кинематическую модель.

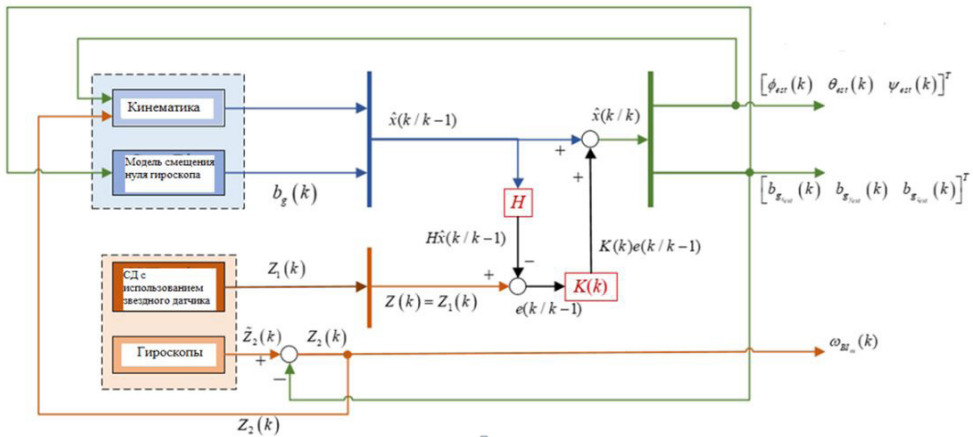


Рис. 2 (а). Блок-схема алгоритма с использованием кинематических соотношений

### 3.4 Оценивание ориентации на основе полной модели

В этом случае математическая модель вращательного движения спутника выражается с помощью кинематического уравнения (1) и динамических уравнений (4а), (4б), (4с). Таким образом, функция системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \phi(k) \\ \theta(k) \\ \psi(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(k-1) \\ \theta(k-1) \\ \psi(k-1) \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} c(\psi(k-1))/c(\theta(k-1)) & s(\psi(k-1))/c(\theta(k-1)) & 0 \\ -s(\psi(k-1)) & c(\psi(k-1)) & 0 \\ c(\psi(k-1))t(\theta(k-1)) & s(\psi(k-1))t(\theta(k-1)) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x(k-1) \\ \omega_y(k-1) \\ \omega_z(k-1) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x(k) \\ \omega_y(k) \\ \omega_z(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x(k-1) \\ \omega_y(k-1) \\ \omega_z(k-1) \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} (N_x + (J_y - J_z)\omega_y(k-1)\omega_z(k-1))/J_x \\ (N_y + (J_z - J_x)\omega_z(k-1)\omega_x(k-1))/J_y \\ (N_z + (J_x - J_y)\omega_x(k-1)\omega_y(k-1))/J_z \end{bmatrix}. \quad (28)$$

В случае использования как кинематического, так и динамических уравнений в качестве измерений в фильтре задействуется  $Z(k) = [Z_1(k) \quad Z_2(k)]$ . Эти измерения включают измерения углов ориентации по методу СД и измерения угловой

скорости от гироскопов с исключенным смещением нуля. Расширенный вектор состояния в этом случае равен

$$x(k) = [\phi(k) \quad \theta(k) \quad \psi(k) \quad \omega_x(k) \quad \omega_y(k) \quad \omega_z(k) \quad b_{g_x}(k) \quad b_{g_y}(k) \quad b_{g_z}(k)]^T. \quad (29)$$

Структура алгоритма с использованием полной модели показана на рис. 2, б. Оценивание углов ориентации, угловых скоростей и смещений нуля гироскопов производится посредством алгоритма ОФК-СД. На рис. 2, с представлена схема работы алгоритма и соответствующие соотношения.

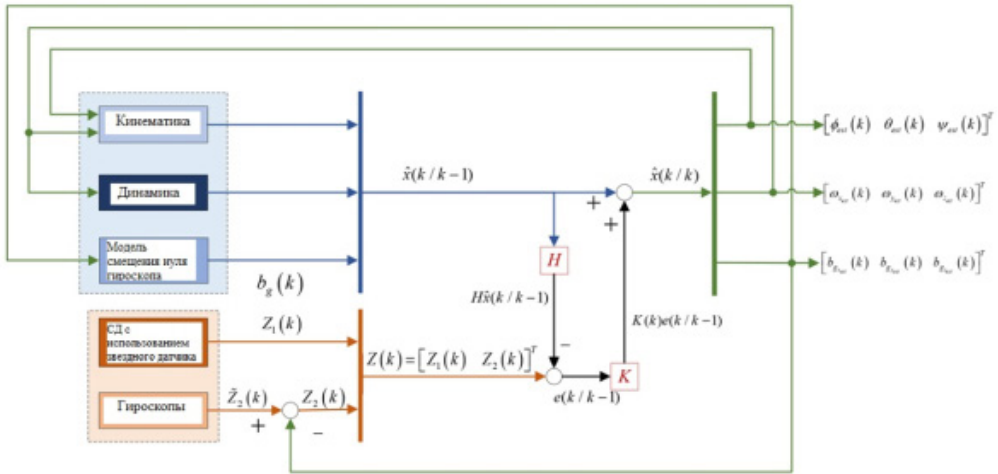


Рис. 2 (б). Блок-схема алгоритма с использованием кинематико-динамических соотношений

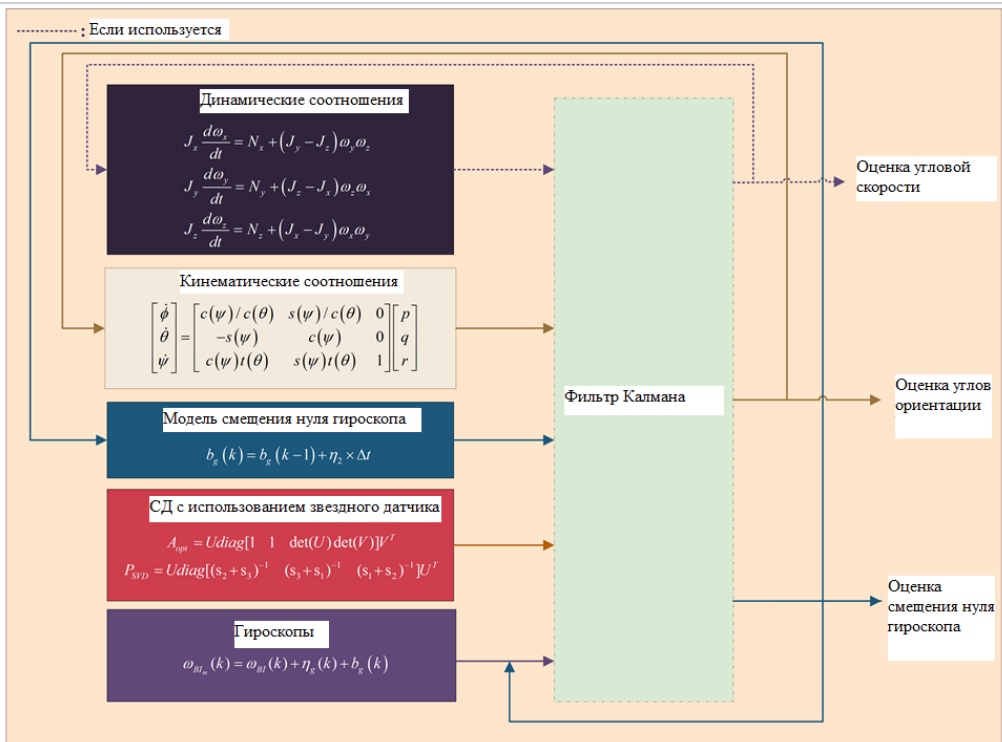


Рис. 2 (с). Логическая схема алгоритмов с указанием соответствующих соотношений

Дисперсия шума вектора измерений определяется на каждом этапе по алгоритму СД и подставляется в ОФК, что повышает его скорость сходимости. Применение дисперсии на каждом шаге делает фильтр изначально адаптивным к сбоям в измерениях. Поскольку правило адаптации измерений не задается извне, есть возможность его задания для шума процесса внутри фильтра. Другое преимущество состоит в том, что фильтр можно легко реконфигурировать при изменении источника входящих измерений. Например, при переходе от безопасного режима к номинальному и включении в вектор измерений данных не только от солнечного датчика, но и данных магнитометра (возможны любые другие комбинации датчиков) не нужно перестраивать фильтр, что потребовалось бы в других случаях.

#### 4. Результаты моделирования и анализ

В данной работе рассматривается малый спутник с массовым моментом инерции  $J = \text{diag}([2,1 \times 10^{-3} \ 2,0 \times 10^{-3} \ 1,9 \times 10^{-3}]) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , относящийся к классу пикоспутников [28] и оснащенный звездными датчиками и гироскопами для определения ориентации и угловой скорости. Предполагается, что при моделировании оба датчика работают с частотой 1 Гц. Значения стандартных отклонений выбираются для гипотетического спутника без учета ограничений, накладываемых его конструкцией. Матрица ковариации шума измерений вектора ориентации рассчитывается методом СД. Стандартное отклонение измерений гироскопов составляет  $5 \times 10^{-6}$  рад/с, смещений нуля гироскопов (ухудшение во времени) –  $1 \times 10^{-6}$  рад/с, а изначально смещение нуля выбрано  $1 \times 10^{-6}$  рад/с.

Задача определения ориентации формулируется с помощью углов Эйлера, что позволяет легко визуализировать три угла поворота. Тем не менее следует отметить, что в некоторых случаях при использовании углов Эйлера возникают сингулярности. Для решения этой проблемы можно задействовать другие представления ориентации, например посредством кватернионов и модифицированных параметров Родрига. Здесь рассматриваются два варианта фильтра: с применением уравнений динамики вращательного движения спутника и без них. Механизмы коррекции этих фильтров различны: в одном варианте кинематические соотношения корректируются непосредственно по измерениям гироскопов (без привлечения динамики), а во втором – за счет динамической модели с оценками угловой скорости, полученными от фильтра. В качестве такового выступает ОФК-СД, который является нетрадиционным подходом к оцениванию ориентации. Результаты сравнения других алгоритмов (традиционных ОФК и ансамблевого ФК (АФК), R-адаптивного ФК) с ОФК-СД приведены в [29]. В некоторых случаях на практике ОФК оказывается вычислительно более эффективным и стабильным, чем АФК [30], и активно применяется в космических миссиях.

##### 4.1 Вариант 1: алгоритм с использованием только кинематических соотношений

Параметры ОФК-СД перечислены в табл. 1. Исходная матрица ковариации выбирается случайным образом. Исходный вектор состояния задается как  $x_0 = [0.001 \ 0.001 \ 0.005 \ 10^{-6} \ 10^{-6} \ 10^{-6}]^T$ , причем первые три компонента измеряются в радианах, а последние три – в рад/с. Составляющие, связанные со смещением нуля, имеют меньшие значения и другие единицы измерения (градус – град/с). Оцен-

ки углов ориентации характеризуются крайне низкими погрешностями – на уровне угл. с даже при наличии смещения нуля, поэтому исходные компоненты вектора состояния выбраны такими же. Они оцениваются без привлечения динамики вращательного движения спутника. Кинематические соотношения корректируются напрямую по измерениям гироскопов с исключенным смещением нуля (без динамических соотношений). В (9) введены следующие векторы:  $b_i$  – вектор измерений по данным звездного датчика,  $r_i$  – опорный вектор, взятый из звездного каталога,  $a_i$  – неотрицательный вес, являющийся величиной, обратной дисперсии погрешностей звездных датчиков.

Т а б л и ц а 1

Параметры ОФК-СД (вариант 1)	
Параметр	Значение
Исходная матрица ковариации погрешности оценивания	$P = 0,001I_{6 \times 6}$
Переходная матрица порождающего шума	$G = I_{6 \times 6}$
Матрица ковариации порождающего шума	$Q = 0,001I_{6 \times 6}$
Матрица измерений	$H = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$

На рис. 3 представлены оценки углов ориентации ( $a$ ) и их абсолютные погрешности ( $b$ ) по каждой оси, полученные с помощью звездных датчиков. Как видно из рис. 3,  $a$ , они имеют одинаковый порядок. На рис. 3,  $b$  показан порядок абсолютных погрешностей: он составляет около 1 угл. с. Синими линиями обозначены границы  $3\sigma$  (утроенное среднеквадратическое отклонение).

На рис. 4 приведены погрешности оценивания смещения нуля гироскопов во времени – около 0,002 град/с.

Для определения средней нормализованной среднеквадратической погрешности (НСКП) выполнено пять моделирований, так как генератор случайных чисел (random seed generator) может выдавать разные результаты. Погрешности оценки ориентации рассчитываются по формуле  $\sqrt{\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2} / \sqrt{\sum_{k=1}^n \|X_k^{true}\|^2}$ , где  $e_k = X_k^{true} - X_k^{est}$  – вектор абсолютной погрешности оценивания за все время моделирования. В табл. 2 приведены погрешности НСКП в виде процентов для углов крена, тангажа, рыскания, а также смещения нуля гироскопов по каждой оси. Делается вывод о том, что ОФК-СД способен оценивать углы ориентации и смещение нуля гироскопов с использованием только кинематических соотношений.

Т а б л и ц а 2

НСКП оценок параметров в варианте 1 (5 реализаций)

НСКП (%)	
Крен	0,0547
Тангаж	0,0489
Рыскание	0,0430
$b_x$	4,1268
$b_y$	1,1021
$b_z$	1,2511

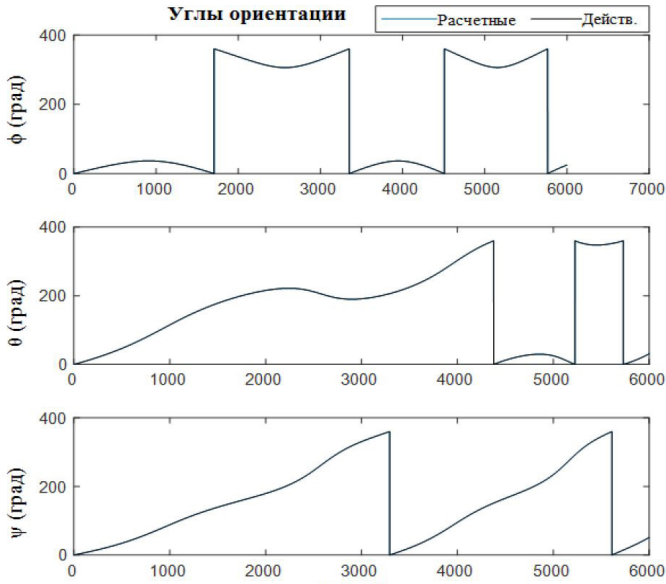


Рис. 3 (а). Оценки углов ориентации, полученные методом ОФК-СД (вариант 1)

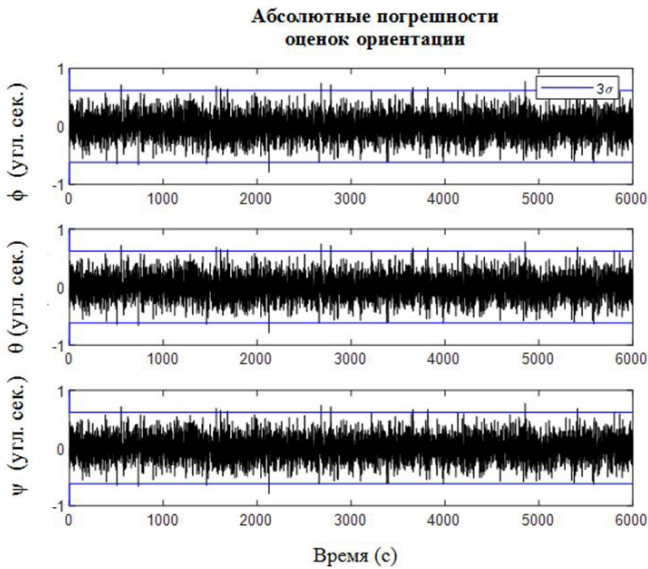


Рис. 3 (б). Погрешности оценок углов ориентации, полученных методом ОФК-СД (вариант 1)

Параметры ОФК-СД, в котором используются кинематические и динамические соотношения, перечислены в табл. 3. Исходный вектор состояния задан следующим образом

$$x_0 = \left[ 10^{-3} \quad 10^{-3} \quad 5 \times 10^{-3} \quad 10^{-3} \quad 2 \times 10^{-4} \quad 10^{-3} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6} \right]^T,$$

причем первые три компонента измеряются в радианах, а последние шесть – в рад/с. Компоненты вектора состояния процесса оцениваются с учетом динамики вращательного движения спутника. Математическая модель корректируется по оценкам угловой скорости.

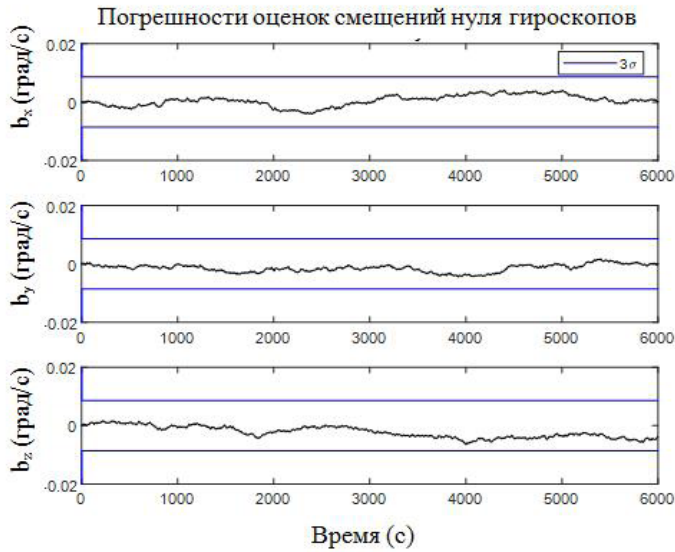


Рис. 4. Погрешности оценок смещений нуля гироскопов, полученных методом ОФК-СД (вариант 1)

4.2 Вариант 2: алгоритм с использованием кинематических и динамических соотношений

Т а б л и ц а 3

Параметры ОФК-СД (вариант 2)

Параметр	Значение
Исходная матрица ковариации погрешности оценивания	$P = 0,001I_{9 \times 9}$
Переходная матрица порождающего шума	$G = I_{9 \times 9}$
Матрица ковариации порождающего шума	$Q = 0,001I_{9 \times 9}$
Матрица измерений	$H = \begin{bmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 3} \end{bmatrix}$

На рис. 5 представлены абсолютные погрешности оценок ориентации, полученных предложенным алгоритмом с использованием звездных датчиков. Видно, что их значение составляет около 1 угл. с, как и в варианте 1.

На рис. 6 приведены погрешности оценивания смещения нуля гироскопов во времени в идеальном случае, т.е. при отсутствии неопределенности динамики. Они составляют порядка 0,002 град/с, это лучший результат по сравнению с вариантом 1, что также видно из табл. 2 и 4. Это означает, что во втором варианте, когда в фильтре используются динамические соотношения, смещение нуля оценивается точнее, чем в первом варианте (рис. 4, 6). Данные, приведенные в табл. 2 и 4, получены на основе моделирования, осредненных за пять реализаций. Следует отметить, что достижение более точных оценок было ожидаемо, поскольку предполагалось, что динамическая модель фильтра точно известна и неопределенности параметров отсутствуют.

Наконец, кроме динамической модели с известными параметрами, мы учли и неопределенности в знании главных моментов инерции спутника (рис. 7). До критического уровня неопределенности результаты оценивания сходятся. Это отслеживается и при анализе методом Монте-Карло. При достижении 10% неопределенности знания главного момента инерции от номинала оценки смещения нуля начинают немного расходиться.

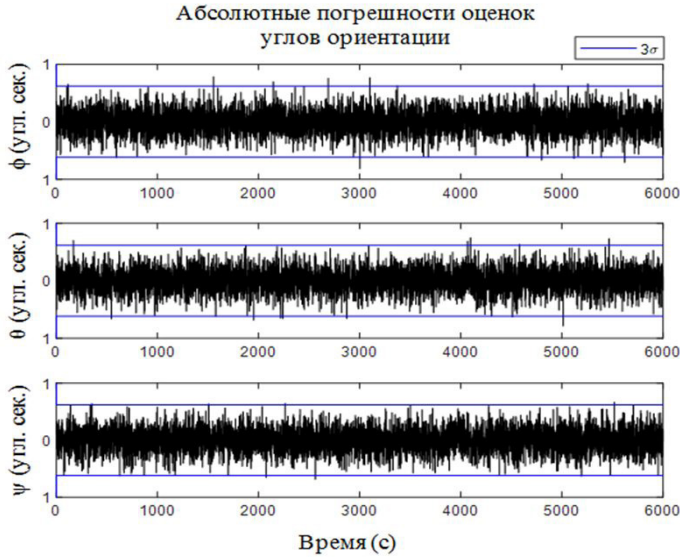


Рис. 5. Погрешности оценок углов ориентации, полученных ОФК-СД (вариант 2)

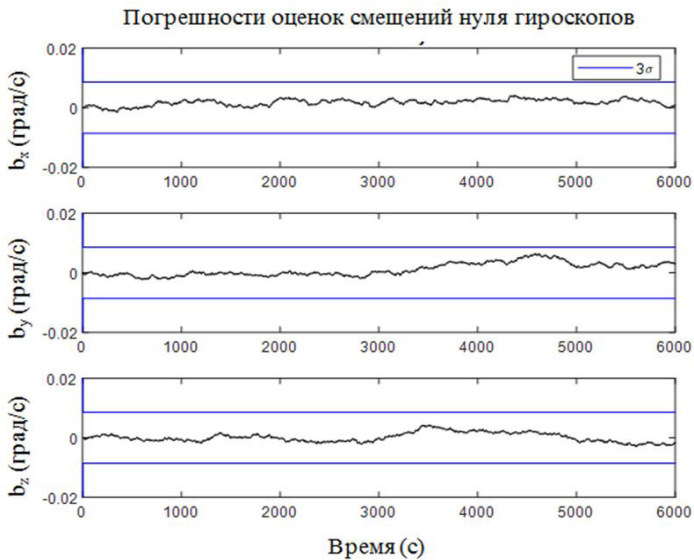


Рис. 6. Погрешности оценок смещений нуля гироскопов, полученных ОФК-СД (вариант 2)

Для определения НСКП выполнено пять моделирований при значениях неопределенности знания моментов инерции спутника 0, 2, 3, 5 и 10% от номинала; смещения нуля гироскопов по каждой оси приведены в табл. 4. Оценки углов ориентации очень близки и полностью совпадают до двух десятичных знаков, как видно из табл. 4. Различия начинаются после четырех десятичных знаков. Это вызвано применением звездных датчиков, данные которых обладают высокой точностью и практически не содержат погрешностей оценивания после обработки фильтром. Со своей стороны неопределенности выявляются в системе и измеряются гироскопами, но неточно моделируются в динамических соотношениях.

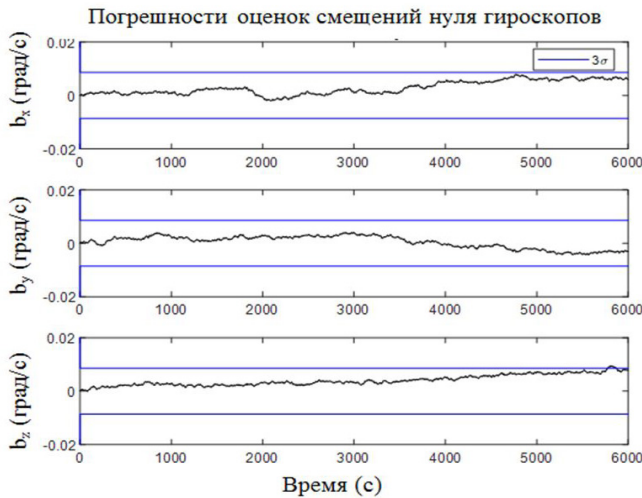


Рис. 7. Погрешности оценок углов ориентации, полученных ОФК-СД (вариант 2 – неопределенность 10%)

Таблица 4

НСКП оценок параметров в варианте 2 (5 реализаций)

Неопределенность	НСКП (%)				
	0%	2%	3%	5%	10%
$b_x$	0,1813	2,3523	4,1268	4,5234	5,1211
$b_y$	0,7878	0,8190	1,1185	1,2640	1,5543
$b_z$	0,1468	1,2908	1,2647	1,4887	1,4888
Крен			0,0547		
Тангаж			0,0489		
Рыскание			0,0430		

В настоящей работе матрица ковариации шума измерений изначально корректируется на каждом шаге, однако матрица ковариации порождающего шума постоянна. Поскольку неопределенности обнаруживаются в системе, для их компенсации можно адаптировать матрицу ковариации порождающего шума путем установления внешнего правила адаптации. При этом задача исследования – в нахождении критического уровня неопределенности знания главных моментов инерции, когда кинематический фильтр превосходит динамический; оказалось, что это уровень 3%. Отсюда следует вывод, что, хотя эта неопределенность составляет всего 3%, точность оценивания немного снижается по сравнению с алгоритмом с кинематическими соотношениями (вариант 1 – табл. 2), и это не связано со знанием момента инерции.

Таким образом, в реальных спутниковых приложениях, где ожидается неопределенность знания момента инерции на уровне 3%, оценку ориентации можно производить только по кинематическим соотношениям. Кинематический алгоритм не предполагает применение динамической модели, а значит, он не подвержен влиянию ее неопределенности. В этом случае в модели в качестве опорных данных служат показания гироскопов, а не динамические соотношения, что приводит к связанным с измерениями проблемам. Поскольку результаты сильно зависят от значений главного момента инерции спутника, внедрение соответствующего алгоритма в специальные приложения должно быть тщательно продумано. Насколько известно



авторам, критический уровень неопределенности знания главного момента инерции был исследован впервые. Поскольку рецензент статьи указал, что обе модели находят применение во многих исследованиях, необходимо отметить, что он может быть критическим и требует дальнейшего изучения.

## 5. Заключение

В работе описываются два варианта метода оценивания ориентации малого спутника, комбинированного с методом одномоментных измерений ориентации, – с использованием кинематической модели без описания динамики спутника, а также как кинематических, так и динамических соотношений. Для определения ориентации и угловой скорости на борту спутника установлены звездные датчики и гироскопы. Углы ориентации рассчитываются по данным звездных датчиков методом сингулярной декомпозиции и подаются в качестве измерений в ОФК-СД. С его помощью оцениваются углы ориентации и смещения нуля гироскопов, которые затем отфильтровываются из измерений гироскопов. После этой процедуры оценки угловой скорости подаются в кинематическую модель, также задействованную в ОФК-СД. Алгоритм работает рекуррентно, и испытания показывают, что фильтр на основе кинематико-динамической модели обеспечивает более высокую точность оценивания при отсутствии неопределенностей в знании главного момента инерции пикоспутника.

В реальных полетах малых спутников ожидается, что неопределенность в знании главного момента инерции может снизить качество работы фильтра. Чтобы найти уровень, когда погрешность оценивания кинематико-динамического фильтра превысит погрешность, достигаемую при использовании только кинематических соотношений, было проанализировано несколько уровней знания неопределенности главного момента инерции спутника. При неопределенности на уровне 3% предпочтительно оценивать ориентацию только по кинематическим соотношениям. В этом случае в алгоритме оценки ориентации исключается влияние неопределенностей динамических параметров.

В дальнейших исследованиях предполагается для повышения точности динамической модели оценивать параметры главного момента инерции в составе расширенного вектора состояния, что, однако, может значительно увеличить вычислительную нагрузку и снизить точность оценивания. Другая интересная тема для исследования – определение правила адаптации шума процесса, помимо правила адаптации исходной матрицы ковариации шума измерений в ОФК-СД, для компенсации неопределенности знания массового момента инерции.

*Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Nebylov, AV., Loparev, A.V., Nebylov, V.A.**, Methods for Robust Filtering Based on Numerical Characteristics of Input Processes in Solving Problems of Navigation Information Processing and Motion Control, *Gyroscopy and Navigation*, 2022, 13, 170–179, <https://doi.org/10.1134/S2075108722030063>.
2. **Stepanov, O.A., Toropov, A.B.**, A comparison of linear and nonlinear optimal estimators in nonlinear navigation problem, *Gyroscopy and Navigation*, 2010, 1, 183–190, <https://doi.org/10.1134/S2075108710030053>.
3. **Hajiyev, C., Cilden-Guler, D.**, Review on Gyroless Attitude Determination Methods for Small Satellites, *Progress in Aerospace Sciences*, 2017, 90, 54–66, <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2017.03.003>.

4. **Lefferts, E.J., Markley, F.L., Shuster, M.D.** (1982) Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 5:417–429. <https://doi.org/10.2514/3.56190>
5. **Markley, F.L., Crassidis, J.L., Cheng, Y.** (2005) Nonlinear Attitude Filtering Methods. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. San Francisco, California
6. **Hua, S., Huang, H., Yin, F., Wei, C.** (2018) Constant-gain EKF algorithm for satellite attitude determination systems. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology AEAT-03-2017-0088*. <https://doi.org/10.1108/AEAT-03-2017-0088>
7. **Xiong, K., Wei, C.** (2017) Multiple-model adaptive estimator for spacecraft attitude sensor calibration. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology* 89:457–467. <https://doi.org/10.1108/AEAT-02-2015-0029>
8. **Kramlikh, A.V., Nikolaev, P.N., Rylko, D.V.** (2023) Onboard Two-Step Attitude Determination Algorithm for a SamSat-ION Nanosatellite. *Gyroscopy and Navigation* 14:138–153. <https://doi.org/10.1134/S2075108723020050>
9. **Wertz, J.R.** (2002) *Spacecraft Attitude Determination and Control*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland
10. **Vinther, K., Jensen, K.F., Larsen, J.A., Wisniewski, R.** (2011) Inexpensive Cubesat Attitude Estimation Using Quaternions and Unscented Kalman Filtering. *Automatic Control in Aerospace*
11. **Markley, F.L., Mortari, D.** (2000) Quaternion Attitude Estimation using Vector Observations. *Journal of the Astronautical Sciences* 48:359–380. <https://doi.org/10.1007/BF03546284>
12. **Cilden-Guler, D., Conguroglu, E.S., Hajiyev, C.** (2017) Single-Frame Attitude Determination Methods for Nanosatellites. *Metrology and Measurement Systems* 24:313–324
13. **He, L., Ma, W., Guo, P., Sheng, T.** (2020) Developments of attitude determination and control system of microsats: A survey. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 235:1733–1750. <https://doi.org/10.1177/0959651819895173>
14. **Jo, S., Bang, H., Leeghim, H.** (2017) A Vector Measurement-based Angular Velocity Estimation Scheme for Maneuvering Spacecraft. *Journal of the Astronautical Sciences* 64:310–332. <https://doi.org/10.1007/s40295-016-0109-x>
15. **Crassidis, J.L., Markley, F.L., Cheng, Y.** (2007) Survey of Nonlinear Attitude Estimation Methods. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 30:12–28. <https://doi.org/10.2514/1.22452>
16. **Batista, P., Silvestre, C., Oliveira, P.** (2014) Tightly coupled long baseline/ultra-short baseline integrated navigation system. *Int J Syst Sci* 47:1837–1855. <https://doi.org/10.1080/00207721.2014.955070>
17. **Tong, X., Chen, M., Yang, F.** (2021) Passive and Explicit Attitude and Gyro-Bias Observers Using Inertial Measurements. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 68:8942–8952. <https://doi.org/10.1109/TIE.2020.3018061>
18. **Kailil, A., Mrani, N., Touati, M.M.** et al (2008) Low Earth-orbit satellite attitude stabilization with fractional regulators. *Int J Syst Sci* 35:559–568. <https://doi.org/10.1080/00207720412331285878>
19. **Zhang, S., Chang, G., Chen, C.** et al (2020) Attitude determination using gyros and vector measurements aided with adaptive kinematics modeling. *Measurement* 157:107679. <https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2020.107679>
20. **Ding, W., Gao, Y.** (2021) Attitude Estimation Using Low-Cost MARG Sensors with Disturbances Reduction. *IEEE Trans Instrum Meas* 70:. <https://doi.org/10.1109/TIM.2021.3104395>
21. **Ghobadi, M., Singla, P., Esfahani, E.T.** (2018) Robust attitude estimation from uncertain observations of inertial sensors using covariance inflated multiplicative extended Kalman filter. *IEEE Trans Instrum Meas* 67:209–217. <https://doi.org/10.1109/TIM.2017.2761230>
22. **Zhang, S., Xing, F., Sun, T., You, Z.** (2018) Quaternion-Based Filtering for Gyroless Attitude Estimation without an Attitude Dynamics Model. *Metrology and Measurement Systems* 25:631–643. <https://doi.org/10.24425/123903>
23. **Hajiyev, C., Cilden-Guler, D.** (2021) Satellite attitude estimation using SVD-Aided EKF with simultaneous process and measurement covariance adaptation. *Advances in Space Research* 68:3875–3890. <https://doi.org/10.1016/J.ASR.2021.07.006>
24. **Burton, R., Rock, S., Springmann, J., Cutler, J.** (2017) Online attitude determination of a passively magnetically stabilized spacecraft. *Acta Astronaut* 133:269–281. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.01.024>
25. **Grace, J., Soares, L.M.P., Loe, T., Bellardo, J.** (2022) A Low Cost Star Tracker for CubeSat Missions. *AIAA Science and Technology Forum and Exposition, AIAA SciTech Forum 2022*. <https://doi.org/10.2514/6.2022-0520>

26. **Zhao, H.** (2020) Development of a low-cost multi-camera star tracker for small satellites - CORE. Graduate College of the University of Illinois at Urbana-Champaign
27. **Hughes, P.C.** (2004) Spacecraft Attitude Dynamics. Dover Publications, Mineola, New York
28. **Hajiyev, C., Soken, H.E.** (2014) Robust Adaptive Unscented Kalman Filter for Attitude Estimation of Pico Satellites. *Int J Adapt Control Signal Process* 28:107–120. <https://doi.org/10.1002/acs.2393>
29. **Hajiyev, C., Cilden-Guler, D.** (2022) Attitude and gyro bias estimation by SVD-aided EKF. *Measurement* 205:112209. <https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2022.112209>
30. **Yang, C., Shi, W., Chen, W.** (2017) Comparison of Unscented and Extended Kalman Filters with Application in Vehicle Navigation. *The Journal of Navigation* 70:411–431. <https://doi.org/10.1017/S0373463316000655>

---

**Cilden-Guler, D., Hajiyev, Ch.** (Istanbul Technical University, Istanbul, Turkey).

SVD-Aided EKF for Nanosatellite Attitude Estimation Based on Kinematic and Dynamic Relations, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2023, vol. 31, no. 4 (123), pp. 138–156.

**Abstract.** *Small satellite attitude angles are estimated using measurements of star trackers and rate gyro in this study. The issue related to gyro drifts is overcome by adding the bias terms into the state vector in order to estimate them. As an estimation method, two-stage non-traditional filter is used. In the first stage, singular value decomposition (SVD) is used for determining the attitude measurements. As a second stage, an extended Kalman filter (EKF) is designed based on linear attitude measurements. These two stages are integrated for the whole estimation algorithm in order to have estimations with high accuracy, and it is called SVD-Aided EKF.*

*The proposed SVD-Aided EKF is used with two attitude models of satellite: only the kinematics model which does not include the dynamics of a satellite, and both kinematics and dynamics relations. Several scales of uncertainties on the principal moment of inertia of the satellite are considered in order to determine the level when estimation error of the kinematics and dynamics-based filter exceeds the error of the case using only kinematics relations.*

**Key words:** attitude estimation, kinematics, satellite, rate gyro, star tracker, SVD-Aided EKF.

Материал поступил 03.10.2023