УДК 621.391.172
DOI 10.17285/0869-7035.0068

О. А. СТЕПАНОВ, Ю. А. ЛИТВИНЕНКО, В. А. ВАСИЛЬЕВ, А. Б. ТОРОПОВ, М. В. БАСИН

АЛГОРИТМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ КВАДРАТИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЯХ В УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ И ИЗМЕРЕНИЙ. ЧАСТЬ I. ОПИСАНИЕ И СОПОСТАВЛЕНИЕ С АЛГОРИТМАМИ КАЛМАНОВСКОГО ТИПА

Рассматриваются задачи фильтрации, решаемые при обработке навигационной информации при наличии нелинейностей квадратичного типа как в уравнениях динамики, так и в уравнениях измерений. Предлагается рекуррентный алгоритм калмановского типа, в котором оценка прогноза и коэффициент усиления на каждом шаге вычисляются исходя из предположения о гауссовском характере апостериорной плотности на предыдущем шаге и стремления минимизировать матрицу ковариаций погрешностей оценивания с использованием линейной относительно текущего измерения процедуры. Обсуждается связь предлагаемого алгоритма с другими алгоритмами калмановского типа, в частности с обобщенным фильтром Калмана и фильтром второго порядка. Излагается методика оценки эффективности и сопоставления алгоритмов.

Ключевые слова: алгоритмы калмановского типа, нелинейная фильтрация, полиномиальный фильтр, навигационная информация.

Степанов Олег Андреевич. Член-корреспондент РАН, доктор технических наук, начальник научно-образовательного центра, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО (С.-Петербург). Вице-президент международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID: 0000-0003-3640-3760.

Литвиненко Юлия Александровна. Кандидат технических наук, начальник сектора, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО. Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID: 0000-0001-5438-2911.

Васильев Владимир Андреевич. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО, СПбГЭТУ «ЛЭТИ» (С.-Петербург). ORCID: 0000-0003-0768-0814.

Торопов Антон Борисович. Кандидат технических наук, старший научный сотрудник, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». ORCID: 0000-0001-6262-7691.

Басин Михаил Валентинович. Профессор, Автономный университет штата Нуэво Леон (Сан-Николас-де-лос-Гарса, Мексика), Университет ИТМО. ORCID: 0000-0002-7274-4303.

1. Введение

При обработке навигационной информации повсеместно используется стохастический подход, основанный на байесовской теории фильтрации. Широкое применение при этом получил фильтр Калмана (ФК), обеспечивающий нахождение оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки вектора состояния при описании динамических систем с помощью линейных дифференциальных или разностных уравнений по линейным измерениям в предположении гауссовского характера порождающих и измерительных шумов [1–18]. ФК представляет собой удобную рекуррентную по отношению к измерениям вычислительную процедуру и обеспечивает получение не только самой оценки, но и соответствующей ей текущей характеристики точности в виде расчетной матрицы ковариаций погрешностей оценивания. Наличие такой характеристики весьма важно при построении современных интегрированных навигационных систем, в которых используются измерения от различных источников, и точность этих измерений необходимо учитывать при их комплексной обработке [6–18]. Возможность эффективного применения таких алгоритмов в навигационных приложениях обусловлена тем, что существует набор задач, который может быть сведен к линейным без заметных потерь в точности. Вместе с тем для широкого круга приложений применение линейных алгоритмов оказывается неприемлемым в силу существенно нелинейного характера уравнений, описывающих динамику оцениваемого вектора состояния и (или) измерений. В таких случаях требуется использовать методы теории нелинейной фильтрации, обеспечивающие нахождение оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки, которая представляет собой математическое ожидание, соответствующее апостериорной плотности для вектора оцениваемых параметров. Нахождение этой плотности, в сущности, и составляет основное содержание задачи нелинейной фильтрации [3, 19–32].

К сожалению, точное ее решение может быть легко получено лишь для линейного гауссовского случая. В связи с этим применительно к нелинейным задачам оценивания на практике разрабатываются различные субоптимальные алгоритмы. Субоптимальный алгоритм принято считать эффективным, если с его помощью удается обеспечить точность, близкую к потенциальной точности, т.е. точности, соответствующей оптимальному алгоритму, и при этом не требуется значительного объема вычислений [17]. Наряду с этим обычно стремятся, чтобы алгоритм был рекуррентным по отношению к измерениям и обеспечивал получение характеристики точности вырабатываемых оценок в виде расчетной матрицы ковариаций их погрешностей, согласованной с действительной матрицей ковариации. При выполнении последнего условия говорят о том, что алгоритм обладает свойством состоятельности [7].

Несмотря на то что в последнее время предложено множество эффективных субоптимальных алгоритмов решения нелинейных задач фильтрации, проблема их разработки остается актуальной [33–63]. Среди всего многообразия субоптимальных рекуррентных алгоритмов можно выделить большую группу алгоритмов калмановского типа, основанных на гауссовской аппроксимации апостериорной плотности на каждом шаге и обработке текущего измерения с помощью процедуры, близкой к той, которая используется в ФК [4, 6, 7, 12–17, 19–22, 25, 27–31, 33–53]. Эти алгоритмы, как правило, оказываются эффективными при решении широкого круга задач в том случае, если апостериорная плотность хотя и отлична от гауссовской, но при этом является одноэкстремальной. Традиционный подход к проектированию алгоритмов калмановского типа основан на линеаризации уравнений динамики и измерений в определенной точке путем вычисления производных от соответствующих нелинейных функций. Различные варианты таких фильтров реализуются в виде обобщенного фильтра Калмана (ОФК) и фильтра с локальными итерациями [4, 6, 12–17, 19–22, 25–31, 33–40]. Еще одна группа алгоритмов калмановского типа, широко применяемая в последнее время, – это так называемые ансцентные (unscented) или сигма-точечные ФК [41–46]. Их еще иногда называют фильтрами, не требующими вычисления производных, поскольку при получении приближенного описания нелинейных функций с помощью их линейных аналогов вычисление производных не предполагается [43]. Линеаризация же здесь осуществляется на основе процедуры, близкой по своему смыслу к процедуре стохастической линеаризации [4, 25, 48, 49]. Нередко решение задачи оценивания упрощается путем ограничения класса алгоритмов, в пределах которого осуществляется их выбор, например в классе линейных алгоритмов [47–49]. Следует также упомянуть алгоритмы, основанные на интерполяции Стирлинга [50], квадратурах Гаусса–Эрмита [51], кубатурных формулах [52], а также на алгоритмах, использующих вариации Байеса [53].

При разработке эффективных алгоритмов при решении прикладных задач нелинейной фильтрации важно принимать во внимание их специфику [17, 20, 22, 47, 48, 54]. В частности, в последнее время активно развиваются методы полиномиальной фильтрации, в которых учитывается тот факт, что нелинейности носят полиномиальный характер [55–63]. Необходимость учета нелинейностей полиномиального типа в навигационных приложениях возникает, например, при решении задач идентификации [60, 61, 64]. С такими задачами приходится также иметь дело и в случае, когда при разложении функций в ряд Тейлора пренебрежение членами второго порядка малости порождает значительные дополнительные погрешности, наличие которых приводит к расходимости традиционных фильтров калмановского типа.

Вопросам построения алгоритмов фильтрации полиномиального типа и посвящена предлагаемая работа, в которой, в том числе в обобщенном виде, представлены результаты, полученные авторами ранее в предыдущих публикациях [55–63]. Тем не менее в отличие от предыдущих работ, где по отдельности исследовались задачи с нелинейностями в уравнениях динамики и измерений, в настоящей статье рассматривается наиболее общий случай, когда эти нелинейности приходится учитывать одновременно. В прикладном плане акцент делается на задачах, связанных с навигационными приложениями. Следует также заметить, что в работах [55, 56] в принципе обсуждается возможность построения алгоритмов для случая, когда нелинейности описываются полиномами третьего и более высокого порядков. В данной же статье авторы ограничиваются случаем, когда полиномиальные функции представляют собой квадратичные формы, т.е. степень полинома равняется двум. Такое ограничение объясняется тем обстоятельством, что при полиномах выше второго порядка значительно усложняются не только выкладки, направленные на получение алгоритмов, но и сами процедуры вычисления оценок и расчетных матриц ковариации их погрешностей становятся весьма громоздкими [55, 56]. Вместе с тем цель настоящей работы заключается в стремлении предложить алгоритм, незначительно усложняющий сами процедуры вычисления оценок по сравнению с алгоритмами, учитывающими только первые слагаемые в разложении Тейлора, и при этом направленный на повышение их эффективности. Следует подчеркнуть, что различные варианты построения алгоритмов, учитывающих в разложении слагаемые второго порядка малости – так называемые фильтры второго порядка, предлагались и ранее [4, 19, 20, 30, 66, 67]. В этой связи в статье также обсуждается связь полученного здесь алгоритма с различными модификациями фильтров второго порядка.

Структура работы следующая. В разделе 2 приводится постановка решаемой задачи полиномиальной фильтрации при наличии нелинейности как в уравнениях динамики, так и в уравнениях измерений. Здесь же в общем виде описывается алгоритм получения оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки и излагается предлагаемый алгоритм полиномиальной фильтрации, называемый далее полиномиальным фильтром (ПФ). В разделе 3 обсуждается взаимосвязь ПФ с обобщенным фильтром Калмана и фильтром второго порядка, а также его отличия от них. Раздел 4 посвящен описанию методики оценки эффективности субоптимальных алгоритмов и их сопоставления между собой.

Во второй части статьи рассматривается методический пример и примеры решения задач обработки навигационной информации с использованием ПФ, поясняющие процедуру их реализации, методику оценки эффективности и иллюстрирующие отличия и преимущества по сравнению с ОФК.

2. Постановка исследуемой задачи нелинейной фильтрации и алгоритмы ее решения

2.1. Постановка исследуемой задачи нелинейной фильтрации

Рассматривается задача нелинейной дискретной фильтрации n-мерного случайного вектора, описываемого с помощью формирующего фильтра

$$x_k = f_k\left(x_{k-1}\right) + \Gamma_k w_k + u_k \tag{1}$$

по m-мерным измерениям следующего вида:

$$y_k = h_k(x_k) + v_k\,. \tag{2}$$

В этих соотношениях предполагается, что k – индекс дискретного времени; $u_k = [u_{1k},\ldots,u_{nk}]^T$ – n-мерный вектор известных входных сигналов (при использовании двойной индексации в подстрочных индексах здесь и далее первый индекс соответствует номеру компоненты, второй – времени); x_0 – n-мерный случайный гауссовский вектор с функцией плотности распределения вероятности (ФПРВ) $p\left(x_0\right) = N\left(x_0; \bar{x}_0, P_0^x\right)$ (здесь и далее обозначение $N(\alpha; \bar{\alpha}, A)$ используется для ФПРВ гауссовского случайного вектора α с математическим ожиданием $\bar{\alpha}$ и матрицей ковариаций A); w_k – n_w-мерный центрированный дискретный гауссовский белый шум, не зависящий от x_0, с известной матрицей ковариаций Q_k размерности $n_w \times n_w$; Γ_k – матрица размерности $n \times n_w$; v_k – m-мерный центрированный дискретный гауссовский белый шум, не зависящий от x_0 и w_k, с ковариационной матрицей R_k. Специфика рассматриваемой задачи нелинейной фильтрации заключается в том, что $f_k(\bullet)$, $h_k(\bullet)$ – нелинейные n- и m-мерные вектор-функции, описывающие динамику для вектора состояний и измерения, представляют собой полиномы второй степени относительно компонент вектора состояния в виде суммы линейных и квадратичных форм векторов x_{k-1}

и x_k соответственно. Используя определение произведения Кронекера для двух матриц, входящие в правые части (1) и (2) нелинейные функции можно записать в виде

$$f_k\left(x_{k-1}\right) = \Phi_k^x x_{k-1} + \left(I_n \otimes x_{k-1}^T\right)\Phi_k^{xx} x_{k-1}, \tag{3}$$

$$h_k(x_k) = H_k^0 + H_k^x x_k + \left(I_m \otimes x_k^T\right) H_k^{xx} x_k, \tag{4}$$

где Φ_k^x, H_k^x и H_k^0 – матрицы размерности $n\times n$, $m\times n$ и $m\times 1$; I_n, I_m – единичные матрицы размерности n и m, а $\otimes$ – символ произведения Кронекера, из определения которого следует, что [68]

$$\left(I_n \otimes x^T\right)\Phi_k^{xx} x = \begin{bmatrix} x^T & 0_{1\times n} & . & 0_{1\times n} \\ 0_{1\times n} & x^T & . & 0_{1\times n} \\ . & . & . & . \\ 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & . & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{\Phi_k^{xx}\right\}_1 x \\ . \\ . \\ \left\{\Phi_k^{xx}\right\}_n x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T \left\{\Phi_k^{xx}\right\}_1 x \\ . \\ . \\ x^T \left\{\Phi_k^{xx}\right\}_n x \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $0_{1\times n}$ – строка размерности n, состоящая из нулей;

$\Phi_k^{xx} = \left(\left\{\Phi_k^{xx}\right\}_1^T, \ldots \left\{\Phi_k^{xx}\right\}_n^T\right)^T$, $H_k^{xx} = \left(\left\{H_k^{xx}\right\}_1^T, \ldots \left\{H_k^{xx}\right\}_m^T\right)^T$ –

блочные матрицы размерности $n^2\times n$ и $mn\times n$, в которых $\left\{\Phi_k^{xx}\right\}_j, \left\{H_k^{xx}\right\}_l$, $j=\overline{1.n}$, $l=\overline{1.m}$ – квадратные матрицы размерности n. Все матрицы, входящие в приведенные выше выражения, предполагаются известными.

Суть решения задачи фильтрации в рамках байесовского подхода заключается в получении оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки вектора состояний $\hat{x}_k^{opt}\left(Y_k\right)$ по измерениям $Y_k = \left[y_1^T, \ldots, y_k^T\right]^T$ и соответствующей ей условной матрицы ковариаций погрешностей оценивания $P_k^{opt}\left(Y_k\right)$, характеризующей ее текущую (соответствующую конкретному набору измерений Y_k) точность.

2.2. Оптимальный алгоритм

Известно, что оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\hat{x}_k^{opt}\left(Y_k\right)$ и условная матрица ковариаций $P_k^{opt}\left(Y_k\right)$ определяются следующим образом [17–21, 27, 28]:

$$\hat{x}_k^{opt}\left(Y_k\right) = \int x_k p\left(x_k / Y_k\right) dx_k, \tag{6}$$

$$P_k^{opt}\left(Y_k\right) = E_{p(x_k/Y_k)}\left\{\left(x_k - \hat{x}_k^{opt}\left(Y_k\right)\right)\left(x_k - \hat{x}_k^{opt}\left(Y_k\right)\right)^{\mathrm{T}}\right\}, \tag{7}$$

где $p(x_k/Y_k)$ – апостериорная (условная) к измерениям ФПРВ (далее для простоты – плотность). Важно подчеркнуть, что оптимальная оценка минимизирует не только условную, но и безусловную [38]

$$G_k^{opt} = E_{p(x_k,Y_k)}\left\{\left(x_k - \hat{x}_k^{opt}\left(Y_k\right)\right)\left(x_k - \hat{x}_k^{opt}\left(Y_k\right)\right)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{8}$$

матрицы ковариаций погрешностей оценивания. В приведенных соотношениях E – знак математического ожидания с нижним индексом, поясняющим, по какой плотности оно вычисляется; $p(x_k, Y_k)$ – совместная плотность векторов x_k и Y_k. Условная матрица ковариаций (7) характеризует текущую точность оценивания, соответствующую конкретной реализации измерений Y_k, а безусловная матрица ковариаций (8) – точность, рассчитанную путем вероятностного осреднения по всему возможному набору измерений. Диагональные элементы этой матрицы представляют собой дисперсии погрешностей оптимальных оценок и характеризуют потенциальную точность оценивания соответствующих компонент вектора состояния. Иными словами, диагональные элементы определяют минимально возможные значения дисперсий погрешностей оценивания для рассматриваемой задачи по сравнению с любым другим алгоритмом вычисления искомых оценок.

Как вытекает из представленных соотношений, для решения сформулированной задачи необходимо располагать апостериорной плотностью $p(x_k/Y_k)$. При построении эффективных субоптимальных алгоритмов фильтрации используются различные методы ее аппроксимации, порождающие удобные в вычислительном плане алгоритмы. В рамках настоящей работы речь пойдет о построении рекуррентных по отношению к измерениям алгоритмов. При синтезе таких алгоритмов широко используются следующие рекуррентные соотношения для апостериорной плотности [18–22, 28, 29]:

$$p\left(x_k / Y_k\right) = \frac{p\left(y_k / x_k\right) p\left(x_k / Y_{k-1}\right)}{\int p\left(y_k / x_k\right) p\left(x_k / Y_{k-1}\right) dx_k}, \tag{9}$$

$$p\left(x_k / Y_{k-1}\right) = \int p\left(x_k / x_{k-1}\right) p\left(x_{k-1} / Y_{k-1}\right) dx_{k-1}, \tag{10}$$

где $p(y_k/x_k)$ – функция правдоподобия; $p(x_k/Y_{k-1})$ – плотность прогноза; $p(x_k/x_{k-1})$ – переходная плотность. Принимая во внимание (1), (2) и сделанные предположения, можем записать:

$$p\left(y_k / x_k\right) = N\left(y_k; h_k(x_k), R_k\right), \tag{11}$$

$$p\left(x_k / x_{k-1}\right) = N\left(x_k; f_k\left(x_{k-1}\right) + u_k, \Gamma_k Q_k \left(\Gamma_k\right)^T\right). \tag{12}$$

Построение эффективного субоптимального алгоритма предполагает разработку экономичных в вычислительном отношении процедур, которые обеспечивают получение как самой оценки $\hat{x}_k^{sub}\left(Y_k\right)$, незначительно отличающейся по точности от нелинейной оптимальной оценки, так и адекватной, т.е. согласованной с действительной, расчетной характеристики точности в виде матрицы ковариаций погрешностей оценивания. Алгоритмы, отвечающие последнему требованию, как отмечалось во введении, называются состоятельными [7].

Цель настоящей работы – предложить алгоритм, учитывающий специфику решаемой задачи, порожденную квадратичным характером нелинейностей, незначительно усложняющий сами процедуры вычисления оценок и повышающий их точность по сравнению с традиционными алгоритмами калмановского типа, в частности с ОФК.

2.3. Алгоритм полиномиальной фильтрации

При получении ПФ, как отмечалось выше, предполагается, что апостериорная плотность на каждом шаге может быть аппроксимирована гауссовской плотностью в виде $p\left(x_{k-1}/Y_{k-1}\right)\approx N\left(x_{k-1};\hat{x}_{k-1}^{PF},P_{k-1}^{PF}\right)$, где $\hat{x}_{k-1}^{PF},P_{k-1}^{PF}$ – оценка и матрица ковариаций на k–1 шаге, полученные с использованием ПФ (*PF – polynomial filter*). Обработка же текущего измерения осуществляется исходя из идеологии построения линейного оптимального алгоритма [38, 47–49]. Для этого необходимо реализовать следующую процедуру:

- сформировать составной вектор, содержащий векторы x_k и y_k, удовлетворяющие выражениям (1) и (2);
- с использованием $p\left(x_{k-1}/Y_{k-1}\right)\approx N\left(x_{k-1};\hat{x}_{k-1}^{PF},P_{k-1}^{PF}\right)$ и выражений (1), (2) найти первые два момента для введенного выше составного вектора, с помощью которых можно сформировать гауссовскую аппроксимацию плотности для составного вектора
$$p\left(x_k,y_k/Y_{k-1}\right)\approx N\left(\begin{bmatrix}x_k\\ y_k\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\\ \hat{y}_k^{PF}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}P_{k/k-1}^{PF} & P_{x_k y_k}^{PF}\\ P_{y_k x_k}^{PF} & P_{y_k}^{PF}\end{bmatrix}\right);$$
- с использованием полученной информации о моментах вычислить искомую оценку и соответствующую ей матрицу ковариаций вектора x_k при фиксированном значении вектора y_k согласно следующим соотношениям:

$$\hat{x}_k^{PF}\left(Y_k\right)=\hat{x}_{k/k-1}^{PF}+K_k^{PF}\left(y_k^{PF}-\hat{y}_k^{PF}\right), \tag{13}$$

$$P_k^{PF}=P_{k/k-1}^{PF}-K_k^{PF}\left(P_{x_k y_k}^{PF}\right)^T, \tag{14}$$

где
$$K_k^{PF}=P_{x_k y_k}^{PF}\left(P_{y_k}^{PF}\right)^{-1}. \tag{15}$$

Известно, что с учетом сделанных предположений найденная таким образом оценка минимизирует матрицу ковариаций погрешности оценки при обработке текущего измерения в классе оценок, линейным образом зависящих от измерения y_k [48]. Именно это и определяет тот факт, что оценка называется линейной оптимальной. Полученный алгоритм будет лучшим в классе алгоритмов калмановского типа, в которых текущие измерения обрабатываются линейным образом. Важное достоинство линейного оптимального алгоритма заключается и в том, что вырабатываемая в нем расчетная характеристика точности в виде матрицы ковариаций совпадает с ее действительным значением [48, 49]. Это создает предпосылки для корректного вычисления коэффициента усиления и повышения точности по сравнению с алгоритмами, в которых это условие не выполняется.

Основная трудность при построении описанного выше алгоритма заключается в сложности вычисления необходимых при его реализации математических ожиданий $\hat{x}_{k/k-1}^{PF}$, $\hat{y}^{PF}$ и матриц ковариаций $P_{k/k-1}^{PF}$, $P_{y_k}^{PF}$, $P_{x_k y_k}^{PF}$. Эта сложность обусловлена нелинейным характером функций $f_k(x_{k-1})$ и $h_k(x_k)$. Ясно, что при упрощении процедур вычисления указанных моментов в принципе можно получить целый спектр различных субоптимальных алгоритмов. Особенность рассматриваемого в настоящей работе алгоритма вызвана тем, что мы ограничиваемся случаем нелинейности квадратичного типа в предположении гауссовского характера порождающего и измерительного шумов, что позволяет получить выражения для искомых моментов в замкнутом виде.

При реализации этого алгоритма можно выделить два блока: блок вычисления оценки прогноза $\hat{x}_{k/k-1}$ и расчетной матрицы ковариаций его погрешности $P_{k/k-1}$

и блок коррекции, в котором в соответствии с (13), (14) вычисляются $\hat{x}_k\left(Y_k\right)$ и P_k. Наличие двух блоков и вид уравнений для оценки, содержащих прогноз и корректирующее слагаемое, линейным образом зависящее от невязки $v_k = y_k - \hat{y}_k$, и определяют принадлежность описанного ПФ к алгоритмам калмановского типа.

В целях компактной записи дальнейших соотношений введем следующие матрицы Якоби для функций $f_k(x_{k-1})$ и $h_k(x_k)$, имеющих вид (3), (4), т.е.

$$\Phi_k^{PF}\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right) = \left.\frac{df_k}{dx_{k-1}^T}\right|_{x_{k-1}=\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}} = \Phi_k^x + 2\left(I_n \otimes \left(\hat{x}_{k-1}^{PF}\right)^T\right)\Phi_k^{xx}, \tag{16}$$

$$H_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right) = \left.\frac{dh_k}{dx_k^T}\right|_{x_k=\hat{x}_{k/k-1}^{PF}} = H_k^x + 2\left(I_m \otimes \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)^T\right)H_k^{xx}, \tag{17}$$

где $\hat{x}_{k/k-1}^{PF}$ – прогноз оценки ПФ с предыдущего шага.

В блоке прогноза с использованием $p\left(x_{k-1}/Y_{k-1}\right) \approx N\left(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1}^{PF}, P_{k-1}^{PF}\right)$ и выражения (1) вычисляются два первых момента $\hat{x}_{k/k-1}^{PF}$ и $P_{k/k-1}^{PF}$ для вектора x_k. Принимая во внимание результаты приложения 1, нетрудно получить следующие выражения:

$$\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF} = \left[\Phi_k^x + \left(I_n \otimes \left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)^T\right)\Phi_k^{xx}\right]\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF} + Tr_{n\times 1}\left(\Phi_k^{xx} P_{k\text{-}1}^{PF}\right) + u_k,\ \hat{x}_0^{PF} = E\left(x_0\right), \tag{18}$$

$$P_{k/k-1}^{PF} = \Phi_k^{PF} P_{k-1}^{PF}\left(\Phi_k^{PF}\right)^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T + 2Tr_{n\times n}\left(\Phi_k^{xx} P_{k-1}^{PF}\left(\left(\Phi_k^{xx}\right)^T\left(I_n \otimes P_{k-1}^{PF}\right)\right)\right). \tag{19}$$

Используемый в этих формулах оператор $Tr_{a\times b}: R^{n\cdot a\times n\cdot b} \to R^{a\times b}$ переводит матрицу

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \ldots & M_{1,b} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{a,1} & \ldots & M_{a,b} \end{pmatrix}$$ размерности $n\cdot a\times n\cdot b$ в матрицу

$$Tr_{a\times b}\left(M\right) = \begin{pmatrix} tr\left(M_{1,1}\right) & \ldots & tr\left(M_{1,b}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ tr\left(M_{a,1}\right) & \ldots & tr\left(M_{a,b}\right) \end{pmatrix}$$ размерности $a\times b$,

в которой $M_{i,j}$, $i = 1,\ldots,a$; $j = 1,\ldots,b$ – матрицы размерности $n\times n$.

При реализации блока коррекции необходимо найти первые два момента $\hat{y}^{PF}$, $P_{y_k}^{PF}$ для y_k, которые вычисляются с использованием плотности прогноза $p\left(x_k/Y_{k-1}\right)$ и выражения (2). По аналогии с (18), (19), полагая, что плотность прогноза гауссовская, т.е. $p\left(x_k/Y_{k-1}\right) \approx N\left(x_{k-1}; \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}, P_{k/k-1}^{PF}\right)$, можем записать

$$\hat{y}_k^{PF} = H_k^0 + H_k^x \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF} + \left(I_m \otimes \left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)^T\right)H_k^{xx}\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF} + Tr_{m\times 1}\left(H_k^{xx} P_{k/k-1}^{PF}\right), \tag{20}$$

$$P_{y_k}^{PF} = H_k^{PF} P_{k/k-1}^{PF}\left(H_k^{PF}\right)^T + R_k + 2Tr_{m\times m}\left(H_k^{xx} P_{k/k-1}^{PF}\left(\left(H_k^{xx}\right)^T\left(I_m \otimes P_{k/k-1}^{PF}\right)\right)\right). \tag{21}$$

По сути, $\hat{y}_k^{PF}$ и $P_{y_k}^{PF}$ представляют собой прогноз измерений, т.е. оценку их возможных значений, полученную с использованием измерений, накопленных до текущего момента времени, и матрицу ковариаций их погрешностей. Появление слагаемых $\Gamma_k Q_k \Gamma_k^T$ в (19) и R_k в (21) обусловлено наличием независимых от векторов x_{k-1} и x_k случайных векторов w_k в (1) и v_k в (2) соответственно. Заметим, что матрица $P_{y_k}^{PF}$ в сущности есть не что иное, как матрица ковариаций невязки измерений $\nu_k = y_k - \hat{y}_k^{PF}$.

Кроме того, для получения коэффициента усиления и матрицы ковариаций погрешностей оценивания в блоке прогноза вычисляется взаимная матрица ковариации погрешностей прогноза вектора состояний и погрешностей прогноза измерений $P_{x_k y_k}^{PF}$:

$$P_{x_k y_k}^{PF} = E_{p(x_k/Y_{k-1})}\left\{\left(x_k - \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\left[H_k^0 + H_k^x x_k + \left(I_m \otimes x_k^T\right) H_k^{xx} x_k - \hat{y}_k^{PF}\right]^T\right\}.$$

Можно показать, что для взаимной матрицы ковариаций справедливо следующее выражение:

$$P_{x_k y_k}^{PF} = P_{k/k-1}^{PF}\left[\left(H_k^x\right)^T + 2\left(H_k^{xx}\right)^T\left(I_m \otimes \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\right] = P_{k/k-1}^{PF}\left(H_k^{PF}\right). \qquad (22)$$

Поясним, как это сделать, полагая для простоты $I_m = 1$. Используя выражение (20), для этой матрицы можем записать:

$$P_{x_k y_k}^{PF} = E_{p(x_k/Y_{k-1})}\left\{\left(x_k - \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\left[H_k^x x_k + x_k^T H_k^{xx} x_k - H_k^x \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF} - \left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)^T H_k^{xx} \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF} - Tr_{m\times 1}\left(H_k^{xx} P_{k/k-1}^{PF}\right)\right]^T\right\} =$$

$$= E_{p(x_k/Y_{k-1})}\left\{\left(x_k - \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\left[H_k^x\left(x_k - \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right) + x_k^T H_k^{xx} x_k - \left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)^T H_k^{xx} \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right]^T\right\} =$$

$$= P_{k/k-1}^{PF}\left(H_k^x\right)^T + E_{p(x_k/Y_{k-1})}\left\{\left(x_k - \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\left[x_k^T H_k^{xx} x_k - \left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)^T H_k^{xx} \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right]^T\right\}.$$

Принимая во внимание справедливость представления

$$x_k^T H_k^{xx} x_k = \left(x_k - \hat{x}_{k/k-1}\right)^T H_k^{xx}\left(x_k - \hat{x}_{k/k-1}\right) + 2\left(x_k - \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)^T H_k^{xx} \hat{x}_{k/k-1} + \left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)^T H_k^{xx} \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}$$

и тот факт, что для центрированного гауссовского вектора нечетные центральные моменты равны нулю, окончательно можно получить искомое соотношение (22).

На заключительном этапе с использованием (13)–(15) можно вычислить искомые оценку вектора состояния и матрицу ковариаций ее погрешностей.

Таким образом, алгоритм ПФ для задачи с квадратичными нелинейностями сводится к реализации соотношений (13)–(22), которые можно представить в виде так называемого псевдокода, приведенного в табл. 1.

Следует обратить внимание на то, что приведенные соотношения (20)–(22) получены в предположении гауссовского характера плотности прогноза.

Таблица 1

Полиномиальный фильтр для задачи фильтрации с квадратичными нелинейностями

1. Вход: $f_k(\bullet)$, $h_k(\bullet)$, Γ_k, Q_k, u_k, y_k, R_k, n, m.

2. Начало: $\hat{x}_0^{PF} = \bar{x}_0$, $P_0^{PF} = P_0^x, k = 0$.

3. Для $k = 1,2\ldots$

3.1. Формирование матриц Φ_k^x, Φ_k^{xx} и с их помощью матриц

$$\Phi_k^{PF}\left(\hat{x}_{k-1}^{PF}\right) = \Phi_k^x + 2\left(I_n \otimes \left(\hat{x}_{k-1}^{PF}\right)^T\right)\Phi_k^{xx}.$$

3.2. Вычисление прогноза и расчетной матрицы ковариаций его погрешностей

$$\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF} = \left[\Phi_k^x + \left(I_n \otimes \left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)^T\right)\Phi_k^{xx}\right]\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF} + Tr_{n\times 1}\left(\Phi_k^{xx} P_{k\text{-}1}^{PF}\right) + u_k,$$

$$P_{k/k-1}^{PF}\left(\hat{x}_{k-1}^{PF}\right) = \Phi_k^{PF}\left(\hat{x}_{k-1}^{PF}\right)P_{k-1}^{PF}\left(\Phi_k^{PF}\left(\hat{x}_{k-1}^{PF}\right)\right)^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T + 2Tr_{n\times n}\left(\Phi_k^{xx} P_{k-1}^{PF}\left(\left(\Phi_k^{xx}\right)^T\left(I_n \otimes P_{k-1}^{PF}\right)\right)\right).$$

3.3. Формирование матриц H_k^0, H_k^x, H_k^{xx} и с их помощью матриц

$$H_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right) = H_k^x + 2\left(I_m \otimes \left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)^T\right)H_k^{xx}.$$

3.4. Вычисление прогноза измерений и матрицы ковариаций его погрешностей

$$\hat{y}_k^{PF} = H_k^0 + \left[H_k^x + \left(I_m \otimes \left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)^T\right)H_k^{xx}\right]\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF} + Tr_{m\times 1}\left(H_k^{xx} P_{k/k-1}^{PF}\right),$$

$$P_{y_k}^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right) = H_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)P_{k/k-1}^{PF}\left(H_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)\right)^T + R_k +$$

$$+2Tr_{m\times m}\left(H_k^{xx} P_{k/k-1}^{PF}\left(\left(H_k^{xx}\right)^T\left(I_m \otimes P_{k/k-1}^{PF}\right)\right)\right).$$

3.5. Вычисление взаимной матрицы ковариаций

$$P_{x_k y_k}^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right) = P_{k/k-1}^{PF}\left(H_k^x\right)^T + 2P_{k/k-1}^{PF}\left(H_k^{xx}\right)^T\left(I_m \otimes \hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right) = P_{k/k-1}^{PF}\left(H_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)\right)^T.$$

3.6. Вычисление коэффициента усиления

$$K_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right) = P_{x_k y_k}^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)\left(P_{y_k}^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)\right)^{-1}.$$

3.7. Вычисление оценки и матрицы ковариаций ее погрешностей на текущем шаге

$$\hat{x}_k^{PF} = \hat{x}_{k/k-1}^{PF} + K_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)\left(y_k - \hat{y}_k^{PF}\right),$$

$$P_k^{PF} = P_{k/k-1}^{PF}\left(\hat{x}_{k-1}^{PF}\right) - K_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)\left(P_{x_k y_k}^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)\right)^T.$$

4. Переход к п.3.

5. Выход: $\hat{x}_k^{PF}$, P_k^{PF}.

Сделаем несколько замечаний.

1. Важно подчеркнуть, что описанный алгоритм направлен на минимизацию матрицы ковариаций при обработке текущего измерения в классе линейных относительно этого измерения процедур обработки, т.е. алгоритм синтезирован исходя из стремления построить лучший в этом смысле алгоритм в классе алгоритмов калмановского типа, содержащих блок прогноза и блок коррекции, в котором текущее измерение обрабатывается с использованием линейной процедуры.

2. Следует иметь в виду, что полученный алгоритм, представленный в табл. 1, строго совпадет с линейным оптимальным алгоритмом при обработке текущего измерения лишь в случае, когда апостериорная плотность на предыдущем шаге гауссовская и при этом нелинейности проявляются по отдельности – либо в уравнении

динамики, либо в уравнении измерений. Это обусловлено тем, что при гауссовской аппроксимации апостериорной плотности на предыдущем шаге при линейных уравнениях динамики плотность прогноза будет тоже гауссовской, что и обеспечивает возможность получения соотношений (20)–(22) при наличии нелинейностей в измерениях. Наличие нелинейностей в уравнениях динамики порождает негауссовский характер плотности прогноза, но при линейном характере измерений достаточно знать только ее первые два момента, которые с помощью выражений (18), (19) определяются точно. Знание этих моментов при линейном характере измерений обеспечивает возможность точного вычисления $\hat{y}^{PF}$, $P_{y_k}^{PF}$ и $P_{x_k y_k}^{PF}$. Если же и измерения нелинейны, то выражения (20)–(22) могут быть получены в предположении гауссовского характера плотности прогноза. Такое предположение в частности обеспечивает обнуление нечетных моментов, которое используется при доказательстве соотношений, приведенных в приложении 1. Таким образом, при наличии нелинейностей в уравнениях динамики и измерений полученные соотношения будут представлять лишь приближенную реализацию процедуры обработки текущего измерения с помощью линейного оптимального алгоритма.

3. Важное достоинство линейного оптимального алгоритма заключается в адекватности вырабатываемой расчетной матрицы ковариаций. Именно это обстоятельство создает предпосылки для более эффективной работы ПФ по сравнению с традиционными алгоритмами калмановского типа. Вместе с тем следует помнить, что в целом при построении ПФ на каждом шаге действительная апостериорная плотность заменяется ее гауссовской аппроксимацией. Такая замена может служить источником дополнительных погрешностей как при получении оценки, так и при вычислении матрицы ковариаций и, как следствие, приводить к нарушению свойства состоятельности алгоритма и увеличению погрешности оценивания по сравнению с нелинейным оптимальным алгоритмом.

3. Взаимосвязь полиномиального фильтра и фильтров калмановского типа

Обсудим взаимосвязь предложенного ПФ с наиболее распространенными фильтрами калмановского типа: обобщенным фильтром Калмана и фильтрами второго порядка.

3.1. Взаимосвязь с обобщенным фильтром Калмана

В целях установления взаимосвязи и отличий алгоритмов ПФ и ОФК (*EKF – Extended Kalman Filter)* целесообразно рассмотреть более общий случай задачи в предположении, что $f_k(x_{k-1})$ и $h_k(x_k)$ – нелинейные дважды дифференцируемые функции общего вида, для которых справедливо приближенное представление в виде разложений Тейлора, аналогичное тому, которое приведено для p-мерной вектор-функции $\varphi(x)$ n-мерного аргумента в приложении 2. Эти представления запишем в виде:

$$\begin{aligned} f_k\left(x_{k-1}\right) &\approx f_k\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right) + f_k'\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right)\left(x_{k-1} - \overset{*}{x}_{k-1}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(I_n \otimes \left(x_{k-1} - \overset{*}{x}_{k-1}\right)^T\right) f_k''\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right)\left(x_{k-1} - \overset{*}{x}_{k-1}\right), \end{aligned} \tag{23}$$

$$h_k\left(x_k\right) \approx h_k\left(\hat{x}^*_{k/k-1}\right) + h'_k\left(\hat{x}^*_{k/k-1}\right)\left(x_k - \hat{x}^*_{k/k-1}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(I_m \otimes \left(x_k - \hat{x}^*_{k/k-1}\right)^T\right) h''_k\left(\hat{x}^*_{k/k-1}\right)\left(x_k - \hat{x}^*_{k/k-1}\right). \tag{24}$$

Входящие в (23) и (24) функции $f'_k\left(x^*_{k-1}\right)$, $f''_k\left(x^*_{k-1}\right)$ и $h''_k\left(\hat{x}^*_{k/k-1}\right)$, $h'_k\left(\hat{x}^*_{k/k-1}\right)$ определяются аналогично выражениям (2.2), (2.3), приведенным в приложении 2, с учетом того факта, что при их конкретизации следует использовать подстрочные индексы с двойной нумерацией, в которой первый индекс соответствует номеру компоненты, а второй – дискретному моменту времени. Так, к примеру, при $e = n$ для $\varphi(x) \equiv f(x)$

$$f'_k\left(x^*_{k-1}\right) = \left.\frac{df_k\left(x_{k-1}\right)}{dx^T_{k-1}}\right|_{x_{k-1}=x^*_{k-1}} = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_{1,k}\left(x_{k-1}\right)}{\partial x_{1,k-1}} & \dots & \dfrac{\partial f_{1,k}\left(x_{k-1}\right)}{\partial x_{n,k-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_{n,k}\left(x_{k-1}\right)}{\partial x_{1,k-1}} & \dots & \dfrac{\partial f_{n,k}\left(x_{k-1}\right)}{\partial x_{n,k-1}} \end{pmatrix}\right|_{x_{k-1}=x^*_{k-1}}; \tag{25}$$

а

$$f''_{j,k}\left(x^*_{k-1}\right) = \left.\frac{d^2 f_{j,k}\left(x_{k-1}\right)}{dx_{k-1}dx^T_{k-1}}\right|_{x_{k-1}=x^*_{k-1}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f_{j,k}\left(x_{k-1}\right)}{\partial x_{1,k-1}\partial x_{1,k-1}} & \dots & \dfrac{\partial^2 f_{j,k}\left(x_{k-1}\right)}{\partial x_{1,k-1}\partial x_{n,k-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f_{j,k}\left(x_{k-1}\right)}{\partial x_{n,k-1}\partial x_{1,k-1}} & \dots & \dfrac{\partial^2 f_{j,k}\left(x_{k-1}\right)}{\partial x_{n,k-1}\partial x_{n,k-1}} \end{bmatrix}\right|_{x_{k-1}=x^*_{k-1}},$$

$$j = \overline{1.n}. \tag{26}$$

Обсуждая взаимосвязь и отличия ПФ и ОФК, целесообразно привести выражения для ОФК и проанализировать их отличие от ПФ.

С учетом введенных обозначений нетрудно записать набор выражений для ОФК, содержащий блок прогноза вектора состояния

$$\hat{x}^{EKF}_{k/k\text{-}1} = f_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k\text{-}1}\right) + u_k, \tag{27}$$

$$P^{EKF}_{k/k-1}\left(\hat{x}^{EKF}_{k\text{-}1}\right) = f'_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k\text{-}1}\right) P^{EKF}_{k/k-1}\left(\hat{x}^{EKF}_{k\text{-}1}\right)\left(f'_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k\text{-}1}\right)\right)^T + \Gamma_k Q_k \Gamma^T_k, \tag{28}$$

и блок коррекции оценки. В этом блоке вычисляются прогноз для измерений и матрица ковариаций его погрешностей

$$\hat{y}^{EKF}_k = h_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k/k\text{-}1}\right), \tag{29}$$

$$P^{EKF}_{y_k}\left(\hat{x}^{EKF}_{k/k\text{-}1}\right) = h'_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k/k\text{-}1}\right) P^{EKF}_{k/k-1}\left(h'_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k/k\text{-}1}\right)\right)^T + R_k, \tag{30}$$

взаимная матрица ковариации

$$P_{x_k y_k}^{EKF}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{EKF}\right)=P_{k/k-1}^{EKF}\left(h_k'\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{EKF}\right)\right)^T= \\ =\left(f_k'\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{EKF}\right)P_{k-1}^{EKF}\left(f_k'\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{EKF}\right)\right)^T+\Gamma_k Q_k \Gamma_k^T\right)\left(h_k'\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{EKF}\right)\right)^T, \quad (31)$$

коэффициент усиления, искомая оценка вектора состояний и соответствующая ей матрица ковариаций

$$K_k^{EKF}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{EKF}\right)=P_{x_k y_k}^{EKF}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{EKF}\right)\left(P_{y_k}^{EKF}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{EKF}\right)\right)^{-1}, \quad (32)$$

$$\hat{x}_k^{EKF}=\hat{x}_{k/k-1}^{EKF}+K_k^{EKF}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{EKF}\right)\left(y_k-\hat{y}_k^{EKF}\right), \quad (33)$$

$$P_k^{EKF}=P_{k/k-1}^{EKF}\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{EKF}\right)-K_k^{EKF}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{EKF}\right)\left(P_{x_k y_k}^{EKF}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{EKF}\right)\right)^T. \quad (34)$$

Принимая во внимание структуру ПФ, описанную в предыдущем подразделе, результаты, приведенные в приложении 2, и сопоставляя алгоритм ПФ с выражениями (27)–(34), нетрудно убедиться в том, что для построения ПФ при наличии тех или иных нелинейностей необходимо к уравнениям, аналогичным уравнениям для ОФК, указанным в скобках во второй колонке табл. 2, добавить дополнительные слагаемые, которые представлены в третьей колонке. Причины появления дополнительных слагаемых указаны в первой колонке.

Таблица 2

Дополнительные к ОФК слагаемые в ПФ

Причина	Куда входит	Вид дополнительного слагаемого
Нелинейность в уравнении динамики	в выражение для прогноза вектора состояния вида (27)	$d_k^f\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)=Tr_{n\times 1}\left(\Phi_k^{xx}P_{k\text{-}1}^{PF}\right)=0.5Tr_{n\times 1}\left(f_k''\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k\text{-}1}^{PF}\right)$
	в выражение для матрицы ковариаций погрешности прогноза вектора состояния вида (28)	$D_k^f\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)=2Tr_{n\times n}\left(\Phi_k^{xx}P_{k-1}^{PF}\left(\left(\Phi_k^{xx}\right)^T\left(I_n\otimes P_{k-1}^{PF}\right)\right)\right)=$ $=0.5Tr_{n\times n}\left(f_k''\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k-1}^{PF}\left(\left(f_k''\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)\right)^T\left(I_n\otimes P_{k-1}^{PF}\right)\right)\right)$
	в выражение для матрицы ковариаций погрешности прогноза текущего измерения вида (30)	$D_k^{fh}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF},\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)=H_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)D_k^f\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)H_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)=$ $=h_k'\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\left[0.5Tr_{n\times n}\left(f_k''\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k-1}^{PF}\left(\left(f_k''\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)\right)^T\left(I_n\otimes P_{k-1}^{PF}\right)\right)\right)\right]\left(h_k'\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\right)^T$
	в выражение для взаимной матрицы ковариации вида (31)	$F_k\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF},\hat{x}_{k-1}^{PF}\right)=2Tr_{n\times n}\left(\Phi_k^{xx}P_{k-1}^{PF}\left(\left(\Phi_k^{xx}\right)^T\left(I_n\otimes P_{k-1}^{PF}\right)\right)\right)\left(H_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)\right)^T=$ $=D_k^f\left(\hat{x}_{k-1}^{PF}\right)\left(H_k^{PF}\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}\right)\right)^T=$ $=0.5Tr_{n\times n}\left(f_k''\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k-1}^{PF}\left(\left(f_k''\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)\right)^T\left(I_n\otimes P_{k-1}^{PF}\right)\right)\right)\left(h_k'\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\right)^T$

Нелинейность в уравнениях динамики и измерений*	в выражение для прогноза текущего измерения вида (29)	$d_k^h\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)=Tr_{m\times 1}\left(H_k^{xx}P_{k/k-1}^{PF}\right)=0.5Tr_{m\times 1}\left(h_k''\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k/k-1}^{PF}\right)$
	в выражение для матрицы ковариаций погрешности прогноза текущего измерения вида (30)	$D_k^h\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF},\hat{x}_{k-1}^{PF}\right)=2Tr_{m\times m}\left(H_k^{xx}P_{k/k-1}^{PF}\left(\left(H_k^{xx}\right)^T\left(I_m\otimes P_{k/k-1}^{PF}\right)\right)\right)=$ $=0.5Tr_{m\times m}\left(h_k''\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k/k-1}^{PF}\left(\left(h_k''\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\right)^T\left(I_m\otimes P_{k/k-1}^{PF}\right)\right)\right)$

*Примечание. Влияние нелинейностей в уравнениях динамики на величину D_k^h проявляется в соотношениях в правой части таблицы вследствие наличия дополнительного слагаемого $D_k^f\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)$ в матрице $P_{k/k-1}^{PF}=f_k'\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k-1}^{PF}\left(f_k'\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)\right)^T+\Gamma_k Q_k\Gamma_k^T+D_k^f\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)$.

Вводя матрицу

$$\tilde{P}_{k/k-1}(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF})=f_k'\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k-1}^{PF}\left(f_k'\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)\right)^T+\Gamma_k Q_k\Gamma_k^T$$

и используя введенные обозначения для дополнительных слагаемых, можем свести описанные алгоритмы ПФ и ОФК в единую табл. 3, наглядно иллюстрирующую отличия ПФ и ОФК.

Таблица 3

Единая запись алгоритмов ПФ и ОФК

N	$\mu = PF, EKF$
	Вычисление прогноза и расчетных матриц ковариаций его погрешностей
1	$\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{\mu}=\begin{cases}f_k\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{EKF}\right)+u_k, & \mu=EKF\\ f_k\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)+d_k^f+u_k, & \mu=PF,\end{cases}$ где $d_k^f=\left[0.5Tr_{n\times 1}\left(f_k''\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k\text{-}1}^{PF}\right)\right]$
2	$P_{k/k-1}^{\mu}\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{\mu}\right)=\begin{cases}f_k'\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{EKF}\right)P_{k-1}^{EKF}\left(f_k'\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{EKF}\right)\right)^T+\Gamma_k Q_k\Gamma_k^T, & \mu=EKF,\\ \tilde{P}_{k/k-1}(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF})+D_k^f(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}), & \mu=PF,\end{cases}$ где $\tilde{P}_{k/k-1}(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF})=f_k'\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k-1}^{PF}\left(f_k'\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)\right)^T+\Gamma_k Q_k\Gamma_k^T$, $D_k^f\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)=\left[0.5Tr_{n\times n}\left(f_k''\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k-1}^{PF}\left(\left(f_k''\left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}\right)\right)^T\left(I_n\otimes P_{k-1}^{PF}\right)\right)\right)\right]$
	Вычисление прогноза измерений и матрицы ковариаций его погрешностей
3	$\hat{y}_k^{\mu}=\begin{cases}h_k\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{EKF}\right), & \mu=EKF,\\ h_k\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)+0.5Tr_{m\times 1}\left(h_k''\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)P_{k/k-1}^{PF}\right), & \mu=PF\end{cases}$

<table>
<tr><td>4</td><td>

$$P^{\mu}_{y_k}\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k\text{-}1}\right)=\begin{cases} h'_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k/k\text{-}1}\right)P^{EKF}_{k/k-1}\left(h'_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k/k\text{-}1}\right)\right)^T+R_k, & \mu=EKF,\\ h'_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1}\right)\tilde{P}^{PF}_{k/k-1}\left(h'_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1}\right)\right)^T+R_k+D^{fh}_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1},\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right)+D^{h}_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1},\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right), & \mu=PF,\end{cases}$$

где

$$D^{fh}_k=h'_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1}\right)\left[0.5Tr_{n\times n}\left(f''_k\left(\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right)P^{PF}_{k-1}\left(\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right)\left(\left(f''_k\left(\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right)\right)^T\left(I_n\otimes P^{PF}_{k-1}\right)\right)\right)\right]\left(h'_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1}\right)\right)^T,$$

$$D^{h}_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1},\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right)=0.5Tr_{m\times m}\left(h''_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1}\right)P^{PF}_{k/k-1}\left(\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right)\left(\left(h''_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1}\right)\right)^T\left(I_m\otimes P^{PF}_{k/k-1}\left(\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right)\right)\right)\right)$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вычисление взаимной матрицы ковариаций</td></tr>
<tr><td>5</td><td>

$$P^{\mu}_{x_k y_k}\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k\text{-}1},\hat{x}^{\mu}_{k\text{-}1}\right)=\begin{cases} P^{EKF}_{k/k-1}\left(\hat{x}^{EKF}_{k\text{-}1}\right)\left(h'_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k/k\text{-}1}\right)\right)^T, & \mu=EKF,\\ \tilde{P}^{PF}_{k/k-1}\left(\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right)\left(h'_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1}\right)\right)^T+F_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1},\hat{x}^{PF}_{k-1}\right), & \mu=PF,\end{cases}$$

где

$$F_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1},\hat{x}^{PF}_{k-1}\right)=\left[0.5Tr_{n\times n}\left(f''_k\left(\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right)P^{PF}_{k-1}\left(\left(f''_k\left(\hat{x}^{PF}_{k\text{-}1}\right)\right)^T\left(I_n\otimes P^{PF}_{k-1}\right)\right)\right)\right]\left(h'_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k\text{-}1}\right)\right)^T$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вычисление коэффициента усиления</td></tr>
<tr><td>6</td><td>

$$K^{\mu}_k\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k\text{-}1}\right)=P^{\mu}_{x_k y_k}\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k\text{-}1}\right)\left(P^{\mu}_{y_k}\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k\text{-}1}\right)\right)^{-1}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вычисление оценки и матрицы ковариаций ее погрешностей на текущем шаге</td></tr>
<tr><td>7</td><td>

$$\hat{x}^{\mu}_k=\hat{x}^{\mu}_{k/k-1}+K^{\mu}_k\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k\text{-}1}\right)\left(y_k-\hat{y}^{\mu}_k\right),$$

$$P_k{}^{\mu}=P^{\mu}_{k/k-1}\left(\hat{x}^{\mu}_{k\text{-}1}\right)-K^{\mu}_k\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k\text{-}1}\right)\left(P^{\mu}_{x_k y_k}\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k\text{-}1}\right)\right)^T$$

</td></tr>
</table>

Целесообразно заметить, что при решении конкретных задач какие-то слагаемые могут оказаться несущественными, и при реализации алгоритма ПФ ими можно пренебречь. Это порождает различные варианты построения упрощенных (субоптимальных) ПФ.

Сопоставляя ОФК и ПФ, отметим следующее.

ПФ и ОФК имеют одинаковую структуру, соответствующую алгоритмам калмановского типа и содержащую блок прогноза, задаваемый формулами в строках 1 и 2 табл. 3, и блок коррекции, задаваемый соотношениями в остальных строках. Общим для двух обсуждаемых алгоритмов являются их рекуррентный по отношению к измерениям характер и предположение о гауссовской аппроксимации плотности на предыдущем шаге обработки. Следует также отметить, что оба эти алгоритма, несмотря на линейность процедуры обработки текущего измерения, в целом являются нелинейными. Это объясняется тем обстоятельством, что при реализации алгоритмов используются значения нелинейных функций и их производных, вычисляемых в точках, зависящих от оценок на предыдущих шагах, в свою очередь зависящих от всех предыдущих измерений.

Заметим, что ОФК можно рассматривать как приближенную реализацию ПФ, т.е. приближенную реализацию процедуры получения линейной оптимальной оценки при обработке текущего измерения.

Основные отличия двух алгоритмов обусловлены тем фактом, что при вычислении математических ожиданий и матриц ковариаций для прогноза оценки вектора состояний (графы 1 и 2), прогноза измерений (графы 3, 4) и взаимной матрицы ковариаций (графа 5) в ПФ используются более точные выражения, поскольку в них учитывается наличие нелинейных, точнее, квадратичных членов. Это явно проявляется в виде дополнительных слагаемых в выражениях, приведенных в табл. 3. В случае ОФК эти слагаемые отсутствуют, что и является причиной ухудшения точности ОФК по сравнению с ПФ.

Как следует из табл. 3, наличие нелинейностей в уравнениях динамики и уравнениях измерений похожим образом проявляется в соотношениях для прогноза вектора состояний и прогноза измерений и соответствующих им матриц ковариаций. Нелинейность в уравнениях динамики проявляется еще и в уравнениях для прогноза измерений и матрицы ковариаций их погрешностей. Кроме того, важно иметь в виду, что, несмотря на общую структуру алгоритмов, их отличия порождены еще и тем, что значения функций и производных от них в этих алгоритмах рассчитываются в разных точках.

Специфика проявления отмеченных отличий во второй части статьи обсуждается на конкретных примерах. Здесь же проиллюстрируем приведенные соотношения для простейшего случая задачи фильтрации для скалярной величины

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k,\ x_0 \in N\left(x_0; \bar{x}_0, \sigma^2\right) \tag{35}$$

по скалярным измерениям

$$y_k = h(x_k) + v_k. \tag{36}$$

В этих соотношениях w_k, v_k – независимые друг от друга и от x_0 центрированные дискретные гауссовские белые шумы с дисперсиями σ_w^2 и σ_v^2.

В рассматриваемом примере можем записать следующий приводимый ниже в табл. 4 набор соотношений для ПФ и ОФК.

Таблица 4

Единая запись алгоритмов ПФ и ОФК для скалярного примера	
N	Вычисление прогноза и расчетных матриц ковариаций его погрешностей
1	$$\hat{x}^{\mu}_{k/k-1} = \begin{cases} f_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k-1}\right), & \mu = EKF \\ f_k\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right) + d^f_k\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right), & \mu = PF, \end{cases}$$ где $$d^f_k\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right) = 0.5 f''\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right)\left(\sigma^{PF}_{k-1}\right)^2.$$

2	$\left(\sigma^{\mu}_{k/k-1}\left(\hat{x}^{\mu}_{k-1}\right)\right)^2 = \begin{cases} \left(f'\left(\hat{x}^{EKF}_{k-1}\right)\right)^2\left(\sigma^{EKF}_{k-1}\right)^2+\sigma_w^2, & \mu=EKF, \\ \left(\tilde{\sigma}^{PF}_{k/k-1}(\hat{x}^{PF}_{k-1})\right)^2 + D^f_k(\hat{x}^{PF}_{k-1}), & \mu=PF, \end{cases}$ где $\left(\tilde{\sigma}^{PF}_{k/k-1}(\hat{x}^{PF}_{k-1})\right)^2 = \tilde{P}_{k/k-1}(\hat{x}^{PF}_{k-1}) = \left(f'\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right)\right)^2\left(\sigma^{PF}_{k-1}\right)^2+\sigma_w^2,$ $D^f_k\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right) = 0.5\left(f''\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right)\right)^2\left(\sigma^{PF}_{k-1}\right)^4.$
	Вычисление прогноза измерений и матрицы ковариаций его погрешностей
3	$\hat{y}^{\mu}_k = \begin{cases} h_k\left(\hat{x}^{EKF}_{k/k-1}\right), & \mu=EKF, \\ h_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1}\right)+d^h_k(\hat{x}^{PF}_{k/k-1},\hat{x}^{PF}_{k-1}), & \mu=PF, \end{cases}$ где $d^h_k(\hat{x}^{PF}_{k/k-1},\hat{x}^{PF}_{k-1}) = 0.5h''\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1}\right)\left(\sigma^{PF}_{k/k-1}\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right)\right)^2.$
4	$\left(\sigma^{\mu}_{y_k}\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k-1}\right)\right)^2 = \begin{cases} \left(h'\left(\hat{x}^{EKF}_{k/k-1}\right)\right)^2\left(\sigma^{EKF}_{k/k-1}(\hat{x}^{EKF}_{k-1})\right)^2+R_k, & \mu=EKF, \\ \left(h'\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1}\right)\right)^2\left(\tilde{\sigma}^{PF}_{k/k-1}(\hat{x}^{PF}_{k-1})\right)^2+R_k+D^{fh}_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1},\hat{x}^{PF}_{k-1}\right)+D^h_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1},\hat{x}^{PF}_{k-1}\right), & \mu=PF, \end{cases}$ где $D^{fh}_k = 0.5\left(f''\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right)\right)^2\left(\sigma^{PF}_{k-1}\right)^4\left(h'_k\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k-1}\right)\right)^2,$ $D^h_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1},\hat{x}^{PF}_{k-1}\right) = 0.5\left(h''\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1}\right)\right)^2\left(\sigma^{PF}_{k/k-1}\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right)\right)^4.$
	Вычисление взаимной матрицы ковариаций
5	$\left(\sigma^{\mu}_{x_k y_k}\left(\hat{x}^{\mu}_{k/k-1},\hat{x}^{\mu}_{k-1}\right)\right)^2 = \begin{cases} h'\left(\hat{x}^{EKF}_{k/k-1}\right)\left(\sigma^{EKF}_{k/k-1}\right)^2, & \mu=EKF, \\ h'\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1}\right)\left(\tilde{\sigma}^{PF}_{k/k-1}\right)^2+F_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1},\hat{x}^{PF}_{k-1}\right) & \mu=PF, \end{cases}$ где $F_k\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1},\hat{x}^{PF}_{k-1}\right) = 0.5h'\left(\hat{x}^{PF}_{k/k-1}\right)\left[\left(f''\left(\hat{x}^{PF}_{k-1}\right)\right)^2\left(\sigma^{PF}_{k-1}\right)^4\right].$

Обращаем внимание на то, что дополнительные слагаемые D^f_k, D^h_k, D^{fh}_k, которые следует добавлять в уравнения, соответствующие дисперсиям, положительные. В этой связи любопытно отметить следующий факт: уравнения для ПФ в рассматриваемом примере формально будут совпадать с уравнениями для ОФК, синтезированного для решения задачи нестационарной фильтрации скалярной величины, соответствующей модели

$$x_k = f(x_{k-1}) + d_k^f + w_k + \tilde{w}_k\,,\ x_0 \in N\left(x_0; \bar{x}_0, \sigma^2\right), \tag{37}$$

по скалярным измерениям

$$y_k = h(x_k) + d_k^h + v_k + \tilde{v}_k + h'_k\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\tilde{w}_k\,. \tag{38}$$

В этих уравнениях величины $d_k^f(\hat{x}_{k-1}^{PF})$, $d_k^h(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF})$ и $h'_k\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)$ в текущий момент трактуются как известные значения, $\tilde{w}_k$ – как дополнительный порождающий шум с дисперсией $D_k^f(\hat{x}_{k-1}^{PF})$, а $\tilde{v}_k$ – как дополнительный белый шум с дисперсией $D_k^h(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF})$. Эти шумы считаются независимыми от w_k и v_k. Наличие дополнительного измерительного шума $h'_k\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}\right)\tilde{w}_k$, коррелированного с порождающим шумом $\tilde{w}_k$, обеспечивает наличие дополнительного слагаемого $D_k^{fh}\left(\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF}\right)$ в уравнении для дисперсии погрешности прогноза измерения и слагаемого $F_k\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF}\right)$ в выражении для взаимной матрицы ковариации. Формальность совпадения в частности проявляется в том, что значения, при которых вычисляются указанные параметры, для ОФК и ПФ будут различными.

Поскольку ОФК, используемый для решения задачи (35), (36), синтезируется для модели, в которой не предполагается наличия величин d_k^f, $\tilde{w}_k$ в уравнениях динамики и $d_k^h, \tilde{v}_k, h'_k\tilde{w}_k$ в уравнениях измерений, то наблюдается ухудшение точности ОФК по сравнению с ПФ.

Во второй части статьи будет показано, что отмеченная аналогия может быть установлена и при решении конкретных прикладных задач и оказывается полезной при проведении приближенного анализа точности ПФ и исследовании его специфики по сравнению с ОФК.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что в табл. 3 приведены соотношения для алгоритма ПФ, ориентированные на представление нелинейных функций с помощью разложений (23), (24). Вместе с тем понятно, что эти же соотношения для функций $f_k(x_{k-1})$ и $h_k(x_k)$ можно записать в виде (3) и (4):

$$f_k\left(x_{k-1}\right) \approx \Phi_k^0 + \Phi_k^x x_{k-1} + \left(I_n \otimes x_{k-1}^T\right)\Phi_k^{xx} x_{k-1}\,, \tag{39}$$

$$h_k\left(x_k\right) \approx H_k^0 + H_k^x x_k + \left(I_m \otimes x_k^T\right) H_k^{xx} x_k\,, \tag{40}$$

если векторы Φ_k^0 и H_k^0 и матрицы Φ_k^x, Φ_k^{xx}, H_k^x, H_k^{xx} задать как

$$\Phi_k^0\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right) = f_k\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right) - f'_k\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right)\overset{*}{x}_{k-1} + \frac{1}{2}\left(I_n \otimes \left(\overset{*}{x}_{k-1}\right)^T\right) f''_k\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right)_k \overset{*}{x}_{k-1}\,,$$

$$\Phi_k^x\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right) = f'_k\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right) - \left(I_n \otimes \left(\overset{*}{x}_{k-1}\right)^T\right) f''_k\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right),\ \Phi_k^{xx}\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right) = \frac{1}{2} f''_k\left(\overset{*}{x}_{k-1}\right),$$

$$H_k^0\left(\overset{*}{x}_k\right) = h_k\left(\overset{*}{x}_k\right) - h'_k\left(\overset{*}{x}_k\right)\overset{*}{x}_k + \frac{1}{2}\left(I_m \otimes \left(\overset{*}{x}_k\right)^T\right) h''_k\left(\overset{*}{x}_k\right)\overset{*}{x}_k\,,$$

$$H_k^x\left(\overset{*}{x}_k\right) = h'_k\left(\overset{*}{x}_k\right) - \left(I_m \otimes \left(\overset{*}{x}_k\right)^T\right) h''_k\left(\overset{*}{x}_k\right),\ H_k^{xx}\left(\overset{*}{x}_k\right) = \frac{1}{2} h''_k\left(\overset{*}{x}_k\right).$$

В этом случае при реализации алгоритма ПФ можно использовать выражения, приведенные в табл. 1.

3.2. Взаимосвязь с фильтрами второго порядка

Для решения рассматриваемых задач с квадратичными нелинейностями можно применить и так называемые фильтры второго порядка (*Second-Order Kalman Filter*, *SOKF*), при синтезе которых тем или иным образом учитывается наличие квадратичных слагаемых при использовании представления нелинейных функций в виде разложения Тейлора. Обсудим связь предложенного ПФ с фильтрами второго порядка, которые также представляют собой фильтры калмановского типа, содержащие блок прогноза и блок коррекции. Различные модификации фильтров второго порядка появились достаточно давно, и учет квадратичных слагаемых в них проводился путем тех или иных уточнений блоков прогноза и (или) блока коррекции [4, 19, 30, 65–67].

Анализ известных авторам вариантов построения фильтров второго порядка показал, что одна из наиболее близких к предложенному алгоритму ПФ модификаций таких фильтров рассматривается в [30; с. 413, 419]. В этой модификации прогноз реализуется с помощью равенств

$$\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{SOKF} = \Phi_k^x \hat{x}_{k\text{-}1}^{SOKF} + \left(I_n \otimes \left(\hat{x}_{k\text{-}1}^{SOKF} \right)^T \right) \Phi_k^{xx} \hat{x}_{k\text{-}1}^{SOKF} + Tr_{n\times 1}\left(\Phi_k^{xx} P_{k\text{-}1}^{SOKF} \right) + u_k, \quad \hat{x}_0^{SOKF} = E\left(x_0 \right), \tag{41}$$

$$P_{k/k-1}^{SOKF} = \Phi_k^{SOKF} P_{k-1}^{SOKF} \left(\Phi_k^{SOKF} \right)^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T, \tag{42}$$

а обработка измерений в блоке коррекции выполняется точно так же, как и в ПФ, с помощью выражений, аналогичных (20)–(22).

Из (41) и (42) видно, что в обсуждаемой модификации фильтра второго порядка [30; с. 413, 419] оценка прогноза вычисляется по структуре ПФ, а матрица ковариаций ее погрешностей – по структуре ОФК, что приводит к потере дополнительного слагаемого D_k^f.

Блок вычисления оценки на текущем шаге и соответствующей ей расчетной матрицы ковариаций ее погрешности при обработке очередного измерения в SOKF по структуре совпадает с таким же блоком для ПФ, где $\hat{x}_{k\text{-}1}^{PF}$, $\hat{x}_{k/k\text{-}1}^{PF}$ следует заменить на $\hat{x}_{k\text{-}1}^{SOKF}$ и $\hat{x}_{k/k-1}^{SOKF}$. Тем не менее отсутствие дополнительного слагаемого D_k^f приводит также и к потере слагаемых D_k^{fh} в матрице ковариаций погрешностей прогноза измерений и $F_k\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF}\right)$ во взаимной матрице ковариации.

Из сказанного следует, что описанный в работе [30, с. 413, 419] фильтр второго порядка представляет собой приближенную реализацию ПФ, в которой не учитывается наличие слагаемых D_k^f, D_k^{fh} и $F_k\left(\hat{x}_{k/k-1}^{PF}, \hat{x}_{k-1}^{PF}\right)$, что в конечном счете может приводить к дополнительным погрешностям оценивания по сравнению с ПФ.

В работе [67] рассмотрен еще один вариант фильтра второго порядка, в котором приближенно вычисляются слагаемые, обусловленные нелинейностями в измерениях. В то же время в ряде работ приведены соотношения для фильтров второго порядка при наличии нелинейностей только в измерениях, полностью совпадающие в этом случае с ПФ.

Пренебрегая различными дополнительными слагаемыми при реализации ПФ, получаем целый набор упрощенных (субоптимальных) ПФ, которые можем трактовать как различные варианты фильтров второго порядка, понимая под этим алгоритмы, учитывающие в том или ином виде наличие квадратичных нелинейностей.

В свою очередь, рассматриваемый в настоящей работе алгоритм ПФ можно интерпретировать как одну из модификаций фильтров второго порядка, позволяющую учесть наличие квадратичных слагаемых в наиболее полном объеме.

4. Методика оценки эффективности алгоритмов и их сопоставления

Выше отмечались преимущества ПФ по сравнению с ОФК и фильтрами второго порядка. При решении конкретных задач желательно привлекать некоторые количественные характеристики, позволяющие оценивать преимущества сравниваемых алгоритмов. Опишем используемую далее методику оценки эффективности алгоритмов.

При анализе эффективности синтезируемых алгоритмов и их сопоставлении будем использовать безусловные матрицы ковариаций типа (8), расчет которых осуществляется с помощью метода статистических испытаний, т.е. согласно следующим выражениям [38]:

$$G_k^{\mu} \approx \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}(x_k^{(j)} - \hat{x}_k^{\mu}(Y_k^{(j)}))(x_k^{(j)} - \hat{x}_k^{\mu}(Y_k^{(j)}))^T, \ \mu = opt, PF, EKF, SOKF. \quad (43)$$

Здесь $x_k^{(j)}$ и $(Y_k^{(j)})$, $j=\overline{1.L}$, представляют собой реализации случайных векторов, полученные путем моделирования в соответствии с равенствами (1) и (2); $\hat{x}_k^{\mu}(Y_k^{(j)})$, $\mu = opt, PF, EKF, SOKF$ – оценки, вычисленные для j-х реализаций $x_k^{(j)}$ и $Y_k^{(j)}$, $j=\overline{1.L}$. При этом $\hat{x}_k^{PF}\left(Y_k^{(j)}\right)$, $\hat{x}_k^{EKF}\left(Y_k^{(j)}\right)$ и $\hat{x}_k^{SOKF}\left(Y_k^{(j)}\right)$ – оценки, полученные с использованием ПФ, ОФК и фильтра второго порядка по измерениям $Y_k^{(j)}$, а $\hat{x}^{opt}\left(Y_k^{(j)}\right)$ – оптимальная оценка, вычисляемая согласно (6).

Решающую роль при анализе эффективности субоптимальных алгоритмов играет следующий факт: для оптимального алгоритма (6)–(7) диагональные элементы ковариационных матриц безусловных погрешностей (8) определяют минимально возможные дисперсии погрешностей оценки компонент вектора состояния и количественно определяют потенциальную точность оценивания. Как уже отмечалось во введении, необходимо учитывать, что в общем случае реализация оптимального алгоритма решения задач нелинейной фильтрации затруднена. Вместе с тем следует иметь в виду, что исследование эффективности алгоритмов и вычисление необходимой для этого матрицы, характеризующей потенциальную точность, осуществляется путем моделирования в камеральном режиме. Таким образом, объем вычислений в данном случае не является существенным ограничением и не имеет большого значения. Это позволяет использовать для вычисления оптимальной оценки (6) алгоритмы, в которых удается проанализировать погрешность численного интегрирования и уменьшить ее до желаемого уровня, изменив соответствующие настройки. В частности, для этих целей могут быть использованы методы Монте-Карло и различные их модификации в виде так называемых фильтров частиц (particle filters) [21–24, 26–31, 69–71]. Отличительная особенность методов Монте-Карло заключается в том, что имеется принципиальная возможность анализировать точность решения задачи непосредственно в ходе расчетов и повышать ее за счет увеличения числа моделируемых реализаций [71]. Метод Монте-Карло и будет использован далее для реализации оптимального алгоритма в примерах, рассматриваемых во второй части статьи.

Важным обстоятельством при сопоставлении является факт адекватности вырабатываемой в алгоритмах расчетной характеристики точности ее действительным значениям. Поясним, как это можно проверить.

Известно, что для оптимального алгоритма справедливо следующее соотношение:

$$\tilde{G}_k^{opt} = E_{p(Y_k)}\left\{P_k^{opt}(Y_k)\right\} = \int P_k^{opt}(Y_k)p(Y_k)dY_k \equiv G_k^{opt}, \qquad (44)$$

в котором $P_k^{opt}(Y_k)$ – условная матрица ковариаций (7); $p(Y_k)$ – функция плотности вектора измерений Y_k. Другими словами, $\tilde{G}_k^{opt} \equiv G_k^{opt}$, т.е. матрицы G_k^{opt}, $\tilde{G}_k^{opt}$, вычисленные с использованием (43) и (44), совпадают [38]. В сущности, из последнего равенства следует достаточно очевидный факт: расчетная матрица ковариаций, вычисляемая в оптимальном алгоритме, согласована с действительной матрицей ковариаций. Иначе говоря, оптимальный алгоритм обладает свойством состоятельности [7]. В то же время для субоптимальных алгоритмов такое совпадение имеет место не всегда [72]. В связи с этим при анализе эффективности субоптимальных алгоритмов крайне желательно проверять согласованность расчетных матриц ковариаций погрешностей оценивания с их реальными значениями. Для этих целей наряду с матрицами (43) вычисляют ковариационные матрицы типа (44) по формулам:

$$\tilde{G}_k^{\mu} \approx \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} P_k^{\mu}(Y_k^{(j)}), \ \ \mu = opt, PF, EKF, SOKF, \qquad (45)$$

где $P_k^{\mu}(Y_k^{(j)})$ для $\mu = PF, EKF, SOKF$, $j = \overline{1,L}$ – расчетные ковариационные матрицы погрешностей оценивания сопоставляемых субоптимальных алгоритмов.

Будем считать далее, что расчетная матрица ковариаций погрешностей оценивания, вырабатываемая в анализируемом алгоритме, согласована с реальной ковариационной матрицей, если выполняется следующее приближенное равенство:

$$\tilde{G}_{iik}^{\mu} \approx G_{iik}^{\mu}, i = \overline{1.n}, \ \mu = opt, PF, EFK, SOKF, \qquad (46)$$

где $\tilde{G}_{iik}^{\mu}$, G_{iik}^{μ} – диагональные элементы соответствующих ковариационных матриц.

Следует заметить, что в силу нелинейного характера задачи случайные значения погрешностей оценивания компонент вектора состояния $\varepsilon_{ki}^{\mu(j)} = \left(x_{ki}^{(j)} - \hat{x}_{ki}^{\mu(j)}\left(Y_k^{(j)}\right)\right)$ в общем случае могут быть негауссовскими даже тогда, когда выполнено соотношение (46). В связи с этим желательно, помимо дисперсий этих компонент, задаваемых диагональными элементами матриц (45), оценивать для них вид плотности. Сделать это можно в рамках процедуры расчета самих дисперсий путем построения гистограмм для реализаций $\varepsilon_{ki}^{\mu(j)} = \left(x_{ki}^{(j)} - \hat{x}_{ki}^{\mu(j)}\left(Y_k^{(j)}\right)\right)$, $j = \overline{1,L}$. Наличие таких гистограмм в том числе позволяет анализировать и максимально возможные значения погрешностей оценивания. Далее в примерах, приводимых во второй части статьи, будет проиллюстрирован вид гистограмм для компонент погрешностей оценивания.

Последовательность вычислений матриц ковариаций и построения гистограмм описана в табл. 5 в виде псевдокода.

Таблица 5

Алгоритм вычисления безусловных характеристик точности и построения гистограмм

1. Вход**:** $f_k(\bullet)$, $h_k(\bullet)$, Γ_k, Q_k, u_k, y_k, R_k, n, m, L.

2. Начало**:** $G_k^{opt} = \tilde{G}_k^{opt} = G_k^{\mu} = \tilde{G}_k^{\mu} = 0$, $\mu = PF, EKF, SOKF$.

3. Для $j = 1,2..L$

 3.1. Моделирование начальных значений вектора состояния и матриц ковариаций:

$$x_0^j \sim N\left(x_0; \bar{x}_0, P_0^x\right),\ \hat{x}_0^{opt} = \hat{x}_0^{\mu} = \bar{x}_0,\ P_0^{opt} = P_0^{\mu} = P_0^x .$$

 3.2. Для $k = 1,2\ldots$

  3.2.1. Моделирование порождающих шумов и шумов измерений:

$$w_k^j \sim N\left(w_k; 0, Q_k\right),\ \ v_k^j \sim N\left(v_k; 0, R_k\right).$$

  3.2.2. Моделирование реализаций вектора состояния и измерений:

$$x_k^j = f_k\left(x_{k-1}^j\right) + \Gamma_k w_k^j + u_k,$$

$$y_k^j = h_k(x_k^j) + v_k^j.$$

  3.2.3. Запуск оптимального алгоритма оценивания:

вход: y_k^j, $\left(\hat{x}_{k-1}^{opt}\right)^j$, $\left(P_{k-1}^{opt}\right)^j$,

выход: $\left(\hat{x}_k^{opt}\right)^j$, $\left(P_k^{opt}\right)^j$.

  3.2.4. Вычисление погрешностей оценивания и матрицы ковариаций оптимального алгоритма:

$$\varepsilon_k^{opt\,j} = x_k^j - \hat{x}_k^{opt\,j},$$

$$G_k^{opt} := \left(G_k^{opt}\right)^j + \varepsilon_k^{opt\,j}\left(\varepsilon_k^{opt\,j}\right)^T, \tilde{G}_k^{opt} := \left(\tilde{G}_k^{opt}\right)^j + \left(P_k^{opt}\right)^j.$$

  3.2.5. Запуск субоптимального алгоритма оценивания:

вход: y_k^j, $\left(\hat{x}_{k-1}^{\mu}\right)^j$, $\left(P_{k-1}^{\mu}\right)^j$,

выход: $\left(\hat{x}_k^{\mu}\right)^j$, $\left(P_k^{\mu}\right)^j$.

  3.2.6. Вычисление погрешностей оценивания и матрицы ковариаций субоптимального алгоритма:

$$\varepsilon_k^{\mu j} = x_k^j - \hat{x}_k^{\mu\,j},$$

$$G_k^{\mu} := \left(G_k^{\mu}\right)^j + \varepsilon_k^{\mu\,j}\left(\varepsilon_k^{\mu\,j}\right)^T, \tilde{G}_k^{\mu} := \left(\tilde{G}_k^{\mu}\right)^j + \left(P_k^{\mu}\right)^j.$$

  3.2.7. Переход к п. 3.2.

4. Переход к п. 3.

5. Осреднение:

$$G_k^{opt} = \frac{1}{L}G_k^{opt}, \tilde{G}_k^{opt} = \frac{1}{L}\tilde{G}_k^{opt},$$

$$G_k^{\mu} = \frac{1}{L}G_k^{\mu}, \tilde{G}_k^{\mu} = \frac{1}{L}\tilde{G}_k^{\mu}.$$

6. Построение гистограмм по массивам $\varepsilon_k^{\mu\, j}, \varepsilon_k^{opt\, j}$, $j = 1,2..L$.

7. Выход: $G_k^{opt}, \tilde{G}_k^{opt}, G_k^{\mu}, \tilde{G}_k^{\mu}$, гистограммы.

Во второй части статьи будут приведены примеры сопоставления алгоритмов при решении прикладных задач обработки навигационной информации с использованием описанной процедуры.

5. Заключение

1. Рассмотрена задача дискретной во времени нелинейной фильтрации при наличии квадратичных нелинейностей как в уравнениях динамики, так и в уравнениях измерений.

2. Предложен и подробно описан ПФ, представляющий собой рекуррентный алгоритм калмановского типа, в котором оценка прогноза, невязка измерений и коэффициент усиления на каждом шаге при обработке текущего измерения вычисляются с учетом наличия квадратичных нелинейностей исходя из предположения о гауссовском характере апостериорной плотности на предыдущем шаге и стремления минимизировать матрицу ковариаций погрешностей оценивания с использованием линейной относительно текущего измерения процедуры.

3. Отмечается, что полученные соотношения для ПФ обеспечивают точное вычисление линейной оптимальной оценки на текущем шаге обработки только при раздельном проявлении нелинейностей квадратичного типа в уравнениях динамики либо в уравнениях измерений. В том случае, когда такие нелинейности проявляются одновременно в уравнениях динамики и измерений, полученные соотношения обеспечивают лишь приближенное нахождение линейной оптимальной оценки с точностью до гауссовской аппроксимации плотности прогноза.

4. Обсуждена связь ПФ с ОФК. Показано, что ПФ может быть получен на основе соотношений для ОФК, в которые в общем случае добавляются дополнительные слагаемые как в уравнения для прогноза вектора состояний и прогноза измерений, так и в уравнения для матриц ковариаций их погрешностей, а также в выражение для взаимной матрицы ковариаций погрешностей прогноза вектора состояний и погрешностей прогноза измерений.

5. Получены соотношения для дополнительных слагаемых, появляющихся в выражениях для ПФ по сравнению с ОФК, и проанализирован их смысл. Отмечается, что отсутствие дополнительных слагаемых в ОФК и является причиной ухудшения его точности по сравнению с ПФ.

6. Рассмотрена связь ПФ с фильтрами второго порядка. Обращается внимание на то, что ПФ может трактоваться как фильтр второго порядка, в котором корректно учитывается наличие квадратичных нелинейностей как в выражениях для оценки прогноза для вектора состояний и измерений, так и в соответствующих им матрицах ковариаций. В свою очередь, различные модификации фильтров второго порядка могут трактоваться как варианты приближенной реализации ПФ в зависимости от полноты учета дополнительных слагаемых при реализации алгоритма.

7. Изложена методика, позволяющая оценить эффективность ПФ и сопоставить его с другими алгоритмами калмановского типа, в частности с ОФК.

Примеры использования предложенного алгоритма для решения прикладных задач обработки навигационной информации и описанной методики для сопоставления алгоритмов будут приведены во второй части статьи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-19-00627, https://rscf.ru/project/18-19-00627.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kalman, R.E.**, A new approach to linear filtering and prediction problems, *Trans. ASME. Series D, J. Basic Engineering*, 82, 1960, pp. 35-45.
2. **Челпанов И.Б.** Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах. М.: Наука, 1967.
3. **Стратонович Р.Л.** Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966. 319 с.
4. **Gelb, A**., Applied Optimal Estimation. M.I.T. Press, Cambridge, 1974.
5. **Autolas A.S., ed.,** *Mathematical System Theory. The Influence of R.E.Kalman*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
6. **Дмитриев С.П.** Высокоточная морская навигация. Судостроение, Санкт-Петербург, 1991, 223 с.
7. **Bar-Shalom Y., Li, X., Kirubarajan, T**.. Estimation with applications to tracking and navigation, New York, Wiley–Interscience, 2001, 581 p.
8. **Алёшин Б.С., Афонин А.А., Веремеенко К.К., Кошелев Б.В., Плеханов В.Е.** Ориентация и навигация подвижных объектов. Современные информационные технологии. Москва, 2006.
9. **Граничин О.Н., Поляк Б.Т.** Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. Москва, 2003.
10. **Степанов О.А.** Фильтр Калмана: история и современность (к 80-летию Рудольфа Калмана) // Гироскопия и навигация. 2010. № 2 (69). С. 107–121.
11. **Голован А.А., Парусников Н.А.** Математические основы навигационных систем: в 3 ч. / 3-е изд., испр. и доп. Москва: Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, 2011.
12. **Gibbs, B.P.,** Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook, John Wiley&Sons, Inc., 2011.
13. **Brown, R.G., Hwang, P.Y.C.,** Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, 4rd Ed., John Wiley, 2012.
14. **Grewal, M.S., Andrews, A.P., Bartone, Ch.G.,** *Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration*, Third edition, John Wiley & Sons, Inc., 2013.
15. **Groves, P.D.,** *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*, 2nd edition, Artech Hous, Boston, London, 2013, 763p.
16. **Markley, F.L., Crassidis, J.L.,** *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*, Springer New York, 2014, 1286 p.
17. **Stepanov, O.A.,** Optimal and sub-optimal filtering in integrated navigation systems, *Aerospace Navigation Systems*, 2016, Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd., pp. 244–298.
18. **Степанов О.А.** Методы обработки навигационной измерительной информации. Санкт-Петербург, 2017, 196 с.
19. **Jazwinski, A. H.,** *Stochastic process and filtering theory*, New York: Academic Press, 1970.
20. **Дмитриев С.П., Шимелевич Л.И.** Нелинейные задачи обработки навигационной информации. Л.: ЦНИИ «РУМБ», 1977. 84 с.
21. **Степанов О.А.** Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 1998. 370 с.
22. **Bergman, N.,** *Recursive Bayesian estimation. Navigation and tracking applications. Linkoping Studies in Science and Technology*, Dissertations no. 579, Department of Electrical Engineering Linkoping University, SE-581-83 Linkoping, Sweden, 1999.
23. **Gustafsson, F.,** *Adaptive Filtering and Change Detection*, John Wiley & Sons Ltd, 2000.
24. **Doucet, A., Freitas, N., Gordon, N.,** Sequential Monte Carlo Methods in Practice, New York, NY, Springer New York, 2001, 590 p.
25. **Lefebvre, T., Bruyninckx, H., de Schutter, J.,** *Nonlinear Kalman Filtering for Force-Controlled Robot Tasks*, Berlin: Springer, 2005, 265 p.

26. **Gustafsson, F., Gunnarsson, F., Bergman, N., et al.,** Particle filters for positioning, navigation, and tracking, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002.
27. **Chen, Z.,** *Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond. Adaptive Systems Lab.*, McMasterUniv., Hamilton, Canada, 2003.
28. **Ristic, B., Arulampalam, S., and Gordon, N.,** *Beyond the Kalman Filter: Particle Filter for Tracking Applications*, Artech House Radar Library, 2004.
29. **Daum, F.,** Nonlinear Filters: Beyond the Kalman Filter, *IEEE Aerospace and Electronic Systems. Tutorials*, 2005, vol. 20(8), pp. 57–71.
30. **Simon, D.,** *Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches, John Wiley and Sons*, Hoboken, NJ, USA, 2006.
31. **Särkkä, S**., *Bayesian Filtering and Smoothing, Cambridge University Press*, 2013.
32. **Рыбаков К.А.** Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. Москва: Изд-во МАИ, 2017. 176 с.
33. **Li, X.R., Jilkov, V.P.**, A survey of maneuvering target tracking: Approximation techniques for nonlinear filtering, *Proc. SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets*, 2004, pp. 537–550.
34. **Руденко Е.А.** Оптимальные дискретные нелинейные фильтры порядка объекта и их гауссовские приближения // Автоматика и телемеханика. 2010. № 2. С. 159–178.
35. **Zhang, F., Xue, W.F., Liu, X.,** Overview of Nonlinear Bayesian Filtering Algorithm, *Procedia Engineering*, 2011, 15, pp. 489–495.
36. **Stano, P., Lendek, Z., Braaksma, J., Babuska, R., de Keizer, C., den Dekker, A.J.**, Parametric Bayesian filters for nonlinear stochastic dynamical systems: A survey, *IEEE Trans. Cybernetics*, 2013, vol. 43, no. 6, pp. 1607–1624.
37. **Afshari, H.H., Gadsden, S.A., Habibi, S.,** Gaussian filters for parameter and state estimation: A general review of theory and recent trends, *Signal Processing*, 2017, vol. 135, pp. 218–238.
38. **Степанов О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации / изд. 3-е, исправленное и дополненное. Ч. 1. Введение в теорию оценивания, СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 509 с.
39. **Руденко Е.А.** Сопоставление алгоритмов стохастической фильтрации // XXXII конференция памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н. Н. Острякова, 2020. С. 295–300.
40. **Тупысев В.А., Литвиненко Ю.А., Исаев А.М.** Применение фильтров калмановского типа для обработки навигационной информации при нелинейности в уравнениях динамики и измерений // XXVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. 2020. С. 360–363.
41. **Julier, S.J., Uhlmann, J.K.,** Unscented filtering and nonlinear estimation, *Proceedings of the IEEE*, 2004, vol. 92(3), pp. 401–422.
42. **Crassidis, J.L**., Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 750–756.
43. **Šimandl, M., Straka, O., and Duník, J.,** Efficient adaptation of design parameters of derivative-free filters, 2016, Automation and Remote Control, vol. 77(2), pp. 261–276,
44. **Шаврин В.В., Тисленко В.И., Лебедев В.Ю., Конаков А.С., Филимонов В.А., Кравец А.П.** Квазиоптимальная оценка параметров сигналов ГНСС в режиме когерентного приема с использованием алгоритма сигма-точечного фильтра Калмана // Гироскопия и навигация. 2016. № 3 (94). С. 26–37.
45. **Аль Битар Н., Гаврилов А.И.** Сравнительный анализ алгоритмов комплексирования в слабосвязанной инерциально-спутниковой системе на основе обработки реальных данных // Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27. №3. С. 31–52.
46. **Kulikov, G.Yu., Kulikova, M.V.,** A Comparative Study of Kalman-like Filters for State Estimation of Turning Aircraft in Presence of Glint Noise, *Proceedings of IFAC-V*, 2020, Germany.
47. **Zhankue Zhao, Rong, X., Li, V., Jilkov, P.,** Best Linear Unbiased Filtering with Nonlinear Measurements for Target Tracking, *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*, 2004, vol. 40, no. 4, pp. 1324–1336.
48. **Степанов О.А.** Линейный оптимальный алгоритм в нелинейных задачах обработки навигационной информации // Гироскопия и навигация. 2006. № 4 (55). С. 11–20.
49. **Степанов О.А., Торопов А.Б.** Сравнительное исследование линейного и нелинейного оптимальных алгоритмов в задачах обработки навигационной информации // Гироскопия и навигация. 2010. № 3 (70). С. 24–36.

50. **Nørgaard, M., Poulsen, N.K., Ravn, O.,** New Developments in State Estimation for Nonlinear Systems, *Automatica*, 2000, vol. 36, issue 11, pp. 1627–1638.
51. **Arasaratnam, I., Haykin, S., Elliott, R.J.,** Discrete-Time Nonlinear Filtering Algorithms using Gauss-Hermite Quadrature, *Proceedings of the IEEE*, 2007, vol. 95, №5, pp. 953–977.
52. **Arasaratnam, I., Haykin, S.,** Cubature Kalman filters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6), pp. 1254–1269.
53. **Luhtala, J.A., Särkkä, S., and Piché, R.,** Gaussian filtering and variational approximations for Bayesian smoothing in continuous-discrete stochastic dynamic systems, *Signal Processing*, 2015, 111, 124–136.
54. **Кошаев Д.А.** Многоальтернативный алгоритм одномаяковой навигации автономного необитаемого подводного аппарата без априорных данных о его местоположении. Часть 1. Математическое описание // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28. №2 (109). С. 109–130.
55. **Basin, M. and Hernandez-Gonzalez, M.,** Discrete-time filtering for nonlinear polynomial systems over linear observations, *International Journal of Systems Science*, 2014, vol. 45(7), pp. 1461–1472.
56. **Басин М.В.** Среднеквадратическая фильтрация состояния полиномиальных стохастических систем с мультипликативным шумом // Автоматика и телемеханика. 2016. №2. С. 69–93.
57. **Hernandez-Gonzalez, M., Basin, M., and Stepanov, O.A.,** Discrete-time state estimation for stochastic polynomial systems over polynomial observations, *International Journal of General Systems*, 2018, vol. 47(5), pp. 512–528.
58. **Toropov, A.B., Stepanov, O.A., Basin, M.V., Vasiliev, V.A., Loparev, A.B.,** Polynomial Filtering Algorithm For Single-Beacon Navigation Problem, *17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018), IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 619–623.
59. **Степанов О.А., Торопов А.Б., Васильев В.А.** Решение задачи навигации по геофизическим полям с использованием алгоритма полиномиальной фильтрации // Юбилейная XXV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 2018. С. 69–72.
60. **Stepanov, O. A., Vasiliev, V.A., Toropov, A.B., Loparev, A.V., Basin, M.V.,** Efficiency analysis of a filtering algorithm for discrete-time linear stochastic systems with polynomial measurement, *Journal of the Franklin Institute*, 2019, vol. 356, pp. 5573–5591.
61. **Васильев В.А.** Применение алгоритма полиномиальной фильтрации в задаче идентификации параметров узкополосного процесса // Навигация и управление движением. Сборник тезисов докладов Международного семинара / под общей редакцией И.В. Белоконова. Самара, 2020. С. 79–81.
62. **Торопов А.Б., Лопарев А.В., Пелевин А.Е.** Сравнение алгоритмов оценивания местоположения подводного аппарата при одномаяковой навигации // XXXII конференция памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н. Н. Острякова. 2020. *С*. 332–336.
63. **Stepanov, O.A., Vasiliev, V.A., Basin,** M.V., **Tupysev, V.A., Litvinenko, Y.A.,** Efficiency Analysis of Polynomial Filtering Algorithms in Navigation Data Processing for a Class of Nonlinear Discrete Dynamical Systems, *IET Control Theory & Applications*, 2021, 15, pp. 248–559.
64. **Пелевин А.Е.** Идентификация параметров модели объекта в условиях внешних возмущений // Гироскопия и навигация. 2014. №4 (87). С. 111–120.
65. **Дэнхем В.Ф., Пайнз С.** Методы вычисления последовательной оценки для случая, когда нелинейность функции измерения сравнима по величине с ошибкой измерения // Ракетная техника и космонавтика. 1966. №6. С. 142–150.
66. **Логинов В.П., Устинов Н.Д.** Приближенные алгоритмы нелинейной фильтрации // Зарубежная радиоэлектроника. 1975. Ч. I. № 2. С. 28–48; 1976. Ч. 2. №3. С. 3–28.
67. **Henriksen, R.,** The truncated second-order nonlinear filter revisited, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, AC-27(1), pp. 247–251.
68. **Белман Р.** Введение в теорию матриц. Москва: Наука, 1976. 351 с.
69. **Schön, Th., Gustafsson, F., and Nordlund, P.-J.**, Marginalized Particle Filters for Mixed Linear/Nonlinear State-Space Models, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, (53), 7, 2279–2289.
70. **Степанов О.А., Торопов А.Б.** Применение последовательных методов Монте-Карло с использованием процедур аналитического интегрирования при обработке навигационной информации // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 3324–3337.
71. **Берковский Н.А., Степанов О.А.** Исследование погрешности вычисления оптимальной байесовской оценки методом Монте-Карло в нелинейных задачах// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. №3. С. 16–23.

72. **Болотин Ю.В., Брагин А.В., Гулевский Д.В.** Исследование состоятельности расширенного фильтра Калмана в задаче навигации пешехода с БИНС, закрепленными на стопах // Гироскопия и навигация. 2021. Том 29. №2 (113). С. 59–77.
73. **Kendrick, D.,** *Stochastic control for economic models*, McGraw-Hil, New-York, 1981, 242 p.

Приложения

Приложение 1. К выводу соотношений для ПФ

Для вывода необходимых соотношений ПФ полезными будут следующие формулы [73]:

$$E_{p(z)}\left(z^T Az\right) = tr\left(AP_z\right) + \bar{z}^T A\bar{z}\ , \tag{1.1}$$

$$E_{p(\tilde{z})}\left(\tilde{z}^T A\tilde{z}\tilde{z}^T B\tilde{z}\right) = 2tr\left(AP_{\tilde{z}}BP_{\tilde{z}}\right) + tr\left(AP_{\tilde{z}}\right)tr\left(BP_{\tilde{z}}\right), \tag{1.2}$$

в которых предполагается, что z – гауссовский вектор размерности n с математическим ожиданием $\bar{z}$ и матрицей ковариаций P_z, $\tilde{z} = z - \bar{z}$, т.е. $p(z) = N(z;\bar{z},P_z)$; $p(\tilde{z}) = N(\tilde{z},0,P_z)$; A и B – известные квадратные симметрические матрицы.

Здесь и далее $E_{p(\bullet)}$ означает знак математического ожидания, соответствующего плотности случайного вектора, указанного в качестве аргумента.

Как следствие можем также записать:

$$E_{p(\tilde{z})}\left(\tilde{z}^T A\tilde{z}\right) = tr\left(AP_z\right), \tag{1.3}$$

$$E_{p(\tilde{z})}\left(\left(\tilde{z}^T A\tilde{z}\right)^2\right) = 2tr\left[\left(AP_{\tilde{z}}\right)^2\right] + \left[tr\left(AP_{\tilde{z}}\right)\right]^2. \tag{1.4}$$

<u>Лемма 1.</u> Если заданы квадратичные функции $\xi_1(z) = z^TAz + c^Tz$, $\xi_2(z) = z^TBz + d^Tz$, в которых A и B – известные квадратные симметрические матрицы, c и d – векторы размерности n, z – гауссовский вектор размерности n с плотностью $p(z) = N(z;\bar{z},P_z)$, то

$$\bar{\xi}_1 = E_{p(z)}(\xi_1(z)) = E_{p(z)}\left(z^T Az + c^T z\right) = tr\left(AP_z\right) + \bar{z}^T A\bar{z} + c^T\bar{z}\ , \tag{1.5}$$

$$\bar{\xi}_2 = E_{p(z)}(\xi_2(z)) = E_{p(z)}\left(z^T Bz + d^T z\right) = tr\left(BP_z\right) + \bar{z}^T B\bar{z} + d^T\bar{z}\ , \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} &E_{p(z)}\left((\xi_1(z)-\bar{\xi}_1)(\xi_2(z)-\bar{\xi}_2)^T\right) = \\ &= 2tr\left(AP_zBP_z\right) + 4\bar{z}^T AP_zB\bar{z} + 2\bar{z}^T AP_zd + 2c^T P_zB\bar{z} + c^T P_zd = \\ &= \left[c^T + 2\bar{z}^T A\right]P_z\left[d + 2B\bar{z}\right] + 2tr\left(AP_zBP_z\right). \end{aligned} \tag{1.7}$$

<u>Доказательство леммы 1.</u>

Выражения (1.5), (1.6), по сути, есть следствие (1.1). Для получения (1.7) представим, например, $\xi_1(z)$ с помощью разложения Тейлора с точкой линеаризации, равной математическому ожиданию $\bar{z}$, в виде

$$\xi_1(z) = \xi_1(\bar{z}) + \left.\frac{d\xi_1(z)}{dz^T}\right|_{z=\bar{z}}(z-\bar{z}) + \frac{1}{2}(z-\bar{z})^T\left.\frac{d^2\xi_1(z)}{dzdz^T}\right|_{z=\bar{z}}(z-\bar{z}), \tag{1.8}$$

где первая и вторая производные $\frac{d\xi_1(\bar{z})}{dz}$ и $\frac{d^2\xi_1(\bar{z})}{dz^2}$ для функции $\xi_1(z)$ определяются как

$$\frac{d\xi_1(z)}{dz^T} \equiv \phi_1(\bar{z}) = c^T + 2z^T A, \tag{1.9}$$

$$\frac{d^2\xi_1(z)}{dzdz^T} = 2A. \tag{1.10}$$

Заметим, что, поскольку $\xi_1(z)$ представляет собой полином второй степени, соотношение (1.8) является точным. Из (1.8)–(1.10) следует, что

$$\xi_1(z) = c^T\bar{z} + \bar{z}^T A\bar{z} + \phi_1(\bar{z})(z-\bar{z}) + (z-\bar{z})^T A(z-\bar{z}). \tag{1.11}$$

Принимая во внимание (1.5), можем записать:

$$\xi_1(z) = \bar{\xi} + \phi_1(\bar{z})(z-\bar{z}) + (z-\bar{z})^T A(z-\bar{z}) - tr\left(AP_z\right). \tag{1.12}$$

Отсюда получаем:

$$\xi_1(z) - \bar{\xi}_1 = \phi_1(\bar{z})\tilde{z} + \tilde{z}^T A\tilde{z} - tr\left(AP_z\right), \tag{1.13}$$

где $\tilde{z} = z - \bar{z}$.

Записывая аналогичное представление для $\xi_2(z)$ и подставляя его в левую часть (1.7), убеждаемся, перемножая и приводя подобные члены, в справедливости (1.7) с учетом симметричности матриц A и B и того факта, что нечетные центральные моменты центрированного гауссовского вектора равны нулю.

Лемма 2. Если задан случайный s-мерный вектор ξ в виде

$$\xi(z) = \Theta z + (I_s \otimes z^T)\Psi z, \tag{1.14}$$

где z – n-мерный гауссовский случайный вектор с плотностью $p(z) = N(z, \bar{z}, P_z)$;

Θ и $\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \dots \\ \Psi_s \end{bmatrix}$ – известные матрицы размерности $s \times n$ и $sn \times n$ соответственно,

то для математического ожидания и матрицы ковариаций этого вектора справедливы следующие соотношения:

$$\bar{\xi} = E_{p(z)}\left(\xi(z)\right) = E_{p(z)}\left(\Theta z + \left(I_s \otimes z^T\right)\Psi z\right) = \Theta\bar{z} + \left(I_s \otimes \bar{z}^T\right)\Psi\bar{z} + Tr_{s\times 1}\left(\Psi P_z\right), \tag{1.15}$$

$$\begin{gathered} E_{p(z)}\left[\left(\xi - \bar{\xi}\right)\left(\xi - \bar{\xi}\right)^T\right] = \\ = E_z\left\{\left[\Theta z + \left(I_s \otimes z^T\right)\Psi z - \Theta\bar{z} - \left(I_s \otimes \bar{z}^T\right)\Psi\bar{z} - Tr_{s\times 1}\left(\Psi P_z\right)\right]\right. \\ \left.\left[\Theta z + \left(I_s \otimes z^T\right)\Psi z - \Theta\bar{z} - \left(I_s \otimes \bar{z}^T\right)\Psi\bar{z} - Tr_{s\times 1}\left(\Psi P_z\right)\right]^T\right\} = \\ = 2Tr_{s\times s}\left(\Psi P_z\left(\Psi^T\left(I_s \otimes P_z\right)\right)\right) + 4\left(I_s \otimes \bar{z}^T\right)\Psi P_z \Psi^T\left(I_s \otimes \bar{z}\right) + \\ +2\Theta P_z \Psi^T\left(I_s \otimes \bar{z}\right) + 2\left(I_s \otimes \bar{z}^T\right)\Psi P_z \Theta^T + \Theta P_z \Theta^T. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Используемый в этих выражениях оператор $Tr_{a\times b}$:$R^{n\cdot a\times n\cdot b}\to R^{a\times b}$ переводит матрицу $M=\begin{pmatrix} M_{1,1} & \ldots & M_{1,b} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{a,1} & \ldots & M_{a,b} \end{pmatrix}$ размерности $n\cdot a\times n\cdot b$ в матрицу

$$Tr_{a\times b}(M)=\begin{pmatrix} tr(M_{1,1}) & \ldots & tr(M_{1,b}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ tr(M_{a,1}) & \ldots & tr(M_{a,b}) \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

размерности $a\times b$, где $M_{i,j}$, $i=1,\ldots,a$; $j=1,\ldots,b$ – матрицы размерности $n\times n$.

Введем матрицу $\Phi(\overline{z})=\Theta+2\left(I_s\otimes\overline{z}^T\right)\Psi$. При этом нетрудно убедиться в том, что

$$E_{p(z)}\left[\left(\xi-\overline{\xi}\right)\left(\xi-\overline{\xi}\right)^T\right]=2Tr_{s\times s}\left(\Psi P_z\left(\Psi^T\left(I_s\otimes P_z\right)\right)\right)+$$
$$+\left(\Theta+2\left(I_s\otimes\overline{z}^T\right)\Psi\right)P_z\left(\Theta+2\left(I_s\otimes\overline{z}^T\right)\Psi\right)^T,$$

т.е. для матрицы ковариаций $E_{p(z)}\left[\left(\xi-\overline{\xi}\right)\left(\xi-\overline{\xi}\right)^T\right]$ можно получить компактное представление

$$E_{p(z)}\left[\left(\xi-\overline{\xi}\right)\left(\xi-\overline{\xi}\right)^T\right]=2Tr_{s\times s}\left(\Psi P_z\left(\Psi^T\left(I_s\otimes P_z\right)\right)\right)+\Phi(\overline{z})P_z\Phi^T(\overline{z}). \tag{1.18}$$

<u>Доказательство леммы 2.</u> Формулу (1.15) легко получить с учетом (1.1):

$$E_{p(z)}\left(\Theta z+\left(I_s\otimes z^T\right)\Psi z\right)=\Theta\overline{z}+E_z\begin{pmatrix} z^T\Psi_1 z \\ \ldots \\ z^T\Psi_s z \end{pmatrix}=\Theta\overline{z}+\begin{pmatrix} \overline{z}^T\Psi_1\overline{z} \\ \ldots \\ \overline{z}^T\Psi_s\overline{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} tr\left(\Psi_1 P_z\right) \\ \ldots \\ tr\left(\Psi_s P_z\right) \end{pmatrix}=$$
$$=\Theta\overline{z}+\left(I_s\otimes\overline{z}^T\right)\Psi\overline{z}+Tr_{s\times 1}\left(\Psi P_z\right).$$

Формулы (1.16) и, как следствие, (1.18) по сути являются многомерным обобщением выражения (1.7), и точно так же, как и в лемме 1, их можно получить с использованием (1.5)–(1.7), принимая во внимание симметричность матриц Ψ_1, $\Psi_2,\ldots,\Psi_s$ и тот факт, что нечетные центральные моменты центрированного гауссовского вектора $\tilde{z}$ равны нулю.

Приложение 2. Приближенное представление нелинейных функций

Пусть $\varphi(x)=\left(\varphi_1(x),\ldots\varphi_l(x)\right)^T$ – l-мерная вектор-функция n-мерного векторного аргумента с компонентами $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1.l}$. Будем полагать, что для каждой компоненты справедливы следующие представления:

$$\varphi_j(x)\approx\varphi_j\left(x^*\right)+\varphi'_j\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)+\frac{1}{2}\left(x-x^*\right)^T\varphi''_j\left(x^*\right)\left(x-x^*\right),\ j=\overline{1.l}, \tag{2.1}$$

где

$$\varphi'_j\left(x^*\right)=\left.\frac{d\varphi_j\left(x\right)}{dx^T}\right|_{x=x^*}=\left(\frac{\partial\varphi_j\left(x\right)}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial\varphi_j\left(x\right)}{\partial x_n}\right)_{x=x^*}, \tag{2.2}$$

$$\varphi''_j\left(x^*\right)=\left.\frac{d^2\varphi_j\left(x\right)}{dxdx^T}\right|_{x=x^*}=\left.\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\varphi_j\left(x\right)}{\partial x_1\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2\varphi_j\left(x\right)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2\varphi_j\left(x\right)}{\partial x_n\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2\varphi_j^2\left(x\right)}{\partial x_n\partial x_n}\end{bmatrix}\right|_{x=x^*}. \tag{2.3}$$

Для получения компактной записи введем следующие обозначения для $l\times n$ матрицы Якоби $\varphi'(x^*)$ и блочной $ln\times n$ матрицы Гессе $\varphi''(x^*)$:

$$\varphi'\left(x^*\right)=\begin{bmatrix}\varphi'_1\left(x^*\right)\\ \cdot\\ \varphi'_j\left(x^*\right)\\ \cdot\\ \varphi'_l\left(x^*\right)\end{bmatrix},\ \varphi''\left(x^*\right)=\begin{bmatrix}\varphi''_1\left(x^*\right)\\ \cdot\\ \varphi''_j\left(x^*\right)\\ \cdot\\ \varphi''_l\left(x^*\right)\end{bmatrix},$$

в которых $\varphi'_j\left(x^*\right)$ и $\varphi''_j\left(x^*\right)$, $j=\overline{1.l}$.

В этом случае выражение (2.3) можем записать в виде

$$\varphi\left(x\right)\approx\varphi\left(x^*\right)+\varphi'\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)+\frac{1}{2}\left(I_e\otimes\left(x-x^*\right)^T\right)\varphi''\left(x^*\right)\left(x-x^*\right). \tag{2.4}$$

Предположим теперь, что x – n-мерный гауссовский случайный вектор с плотностью $p(x) = N(x; x^*, P_x)$.

Опуская знак приближения, можем записать:

$$E_{p(x)}\left[\varphi\left(x\right)\right]=\overline{\varphi}=\varphi\left(x^*\right)+\frac{1}{2}Tr_{l\times 1}\left(\varphi''\left(x^*\right)P_x\right), \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}E_{p(x)}\left[\left(\varphi\left(x\right)-\overline{\varphi}\right)\left(\varphi\left(x\right)-\overline{\varphi}\right)^T\right]=\varphi'\left(x^*\right)P_x\left(\varphi'\left(x^*\right)\right)^T+\\ +\frac{1}{2}Tr_{l\times l}\left(\varphi''\left(x^*\right)P_x\left(\varphi''\left(x^*\right)\right)^T\left(I_l\otimes P_x\right)\right).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Используемый здесь оператор $Tr_{a\times b}:R^{n\cdot a\times n\cdot b}\to R^{a\times b}$ задан в виде (1.17), в частности

$$Tr_{l\times 1}\left(\varphi''\left(x^*\right)P_x\right)=\begin{bmatrix} tr\left(\varphi''_1\left(x^*\right)P_x\right) \\ . \\ tr\left(\varphi''_j\left(x^*\right)P_x\right) \\ . \\ tr\left(\varphi''_l\left(x^*\right)P_x\right) \end{bmatrix}.$$

Соотношения (2.5), (2.6) нетрудно получить из результатов, приведенных в лемме 2 (приложение 1), где вместо матрицы Θ выступает матрица Якоби $\varphi'(x^*)$, вместо матрицы Ψ – матрица $\varphi''(x^*)$, а в качестве вектора z рассматривается вектор $(x-x^*)$ с нулевым математическим ожиданием.

Stepanov, O.A., Litvinenko, Yu.A. (Concern CSRI Elektropribor, JSC, St. Petersburg, Russia; ITMO University, St. Petersburg, Russia), **Vasiliev, V.A.** (Concern CSRI Elektropribor, JSC; ITMO University; St. Petersburg Electrotechnical University LETI, Russia), **Toropov, A.B.** (Concern CSRI Elektropribor, JSC), and **Basin, M.V.** (ITMO University; Autonomous University of Nuevo León, San Nicolás de los Garza, Mexico)
Polynomial Filtering Algorithm Applied to Navigation Data Processing under Quadratic Nonlinearities in System and Measurement Equations. Part 1. Description and Comparison with Kalman Type Algorithms, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2021, vol. 29, no. 3 (114), pp. 3–33.

Abstract. The paper considers the filtering problems solved in navigation data processing under quadratic nonlinearities both in system and measurement equations. A Kalman type recursive algorithm is proposed, where the predicted estimate and gain at each step are calculated based on the assumption on the Gaussian posterior proba-bility density function of the estimated vector at the previous step and minimization of estimation error covariance matrix using a linear procedure with respect to the current measurement. The similarities between this algorithm and other Kalman type algorithms such as extended and second-order Kalman filters are discussed. The procedure for estimating the performance and comparing the algorithms is presented.

Key words: Kalman type algorithms, nonlinear filtering, polynomial filter, navigation data.

Материал поступил 15.07.2021