

Г. МУРАЛИКРИШНА, Г. МАЛЛЕШАМ, М. КАННАН

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АДАПТИВНОЙ  
КАЛМАНОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ U-D-МЕТОДА  
КВАДРАТНОГО КОРНЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ БИНС  
ПРИ ПРОПАДАНИИ СИГНАЛА ГНСС**

Бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС) служат главным источником навигационной информации на борту летательного аппарата (ЛА) и должны обеспечивать решение задач навигации с высокой точностью. Обычно выработанные инерциальными методами данные интегрируются с данными глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) с применением оптимальной фильтрации, что в конечном итоге и позволяет получить точную навигационную информацию. Некоторые предложенные ранее варианты адаптивного фильтра Калмана (АФК) предполагают моделирование или оценивание матриц ковариации погрешностей измерений  $R_k$  и ковариации  $Q_k$  шума процесса, описывающего динамическую систему. Возможность одновременного оценивания матриц  $R_k$  и  $Q_k$  ограничена, поскольку большая продолжительность полета оказывает влияние на точность реализации навигационных приложений. На практике матрица  $R_k$  во всех случаях подвержена воздействию внешних факторов. В настоящей работе производится адаптивное оценивание  $R_k$  с одновременным точным вычислением  $Q_k$ . Далее предпринимается попытка спрогнозировать ковариацию погрешностей БИНС в случае пропадания сигнала ГНСС при точном моделировании матрицы динамики системы и вычислении соответствующей матрицы  $Q_k$ . Проблема плохой обусловленности ковариационной матрицы  $R_k$  погрешностей БИНС решается применением U-D-модификации метода квадратного корня при реализации соотношений дискретного фильтра Калмана. Точность прогнозирования  $R_k$  оценивается на основании скорости дрейфа инерциального решения; результаты зависят от качества оценивания смещений нулей инерциальных датчиков. Эффективность применения оценок смещений нулей датчиков, а также адаптивного оценивания  $R_k$  и расчета  $Q_k$  продемонстрирована во время летных испытаний. В заключение приводится обзор различных АФК и методик прогноза и делаются выводы о возможностях их практического использования.

**Ключевые слова:** U-D-фильтр, обобщенный фильтр Калмана, инерциальная навигация, гироскопы, акселерометры, гибридная навигация, ГНСС, GPS, аэронавигация.

**Мураликришна** Гуррам. Научный сотрудник, отдел навигационных систем, Исследовательский центр «Имарат» (Хайдарабад, Индия). ORCID: 0009-0007-7458-8571.

**Маллешам** Г. Профессор, факультет электротехники, Колледж приборостроения, Османский университет (Хайдарабад, Индия). ORCID: 0009-0006-0004-4689.

**Каннан** М. Старший научный сотрудник, отдел навигационных систем, Исследовательский центр «Имарат». ORCID: 0009-0003-1178-0604.

Научные редакторы перевода д.ф.-м.н. А.А. Голован, к.т.н. Б.С. Ривкин.

## Введение

В аэронавигационной системе погрешность БИНС, как правило, составляет 1,0 мор. милю в час при инерциальной навигации и менее 10 м при гибридной навигации, т.е. при комплексировании данных БИНС с данными ГНСС. Соответствующая математическая модель содержит все возможные характеристики состояния системы, включая модели параметров и измерений. Однако модели параметров и шумов измерений часто меняются и поэтому требуют адаптивного метода оценивания  $R_k$  и  $Q_k$  в реальном времени [1]. В [2] авторы рассмотрели модели на основе вариации Аллана для моделирования переходной матрицы состояния  $\Phi_{(s)k}$  системы. В [3] предложена концепция фильтра Калмана с пропорциональными и множественными коэффициентами усиления (РМІ) для моделирования матрицы БИНС. Все эти модели были разработаны для усовершенствования существующей матрицы системы, однако они не учитывали накапливающееся влияние векторов смещений нулей акселерометров и гироскопов на прогнозирование погрешностей определения местоположения, скорости и углов ориентации и их коррекцию.

Кроме погрешностей инерциальных датчиков, работу фильтра Калмана затрудняет шум измерений [4], поступающих от приемника ГНСС. Модели квантования шума измерений и цветного шума рассмотрены в [5]. Коэффициент усиления фильтра Калмана вычисляется в соответствии с матрицей  $Q_k$ , прогнозом матрицы  $P_k$  и матрицей  $R_k$ . Далее фильтр Калмана позволяет уточнить оценку вектора состояния системы в предположении, что при реализации алгоритма матрицы  $Q_k$  и  $R_k$  были использованы корректно [5]. В действительности, как указано в спецификации серийно выпускаемого коммерческого приемника, шум измерений никогда не будет постоянным, что приведет к снижению качества работы или расхождению фильтра Калмана вследствие неизвестной матрицы  $R_k$ . Источники погрешностей ГНСС-измерений обычно связаны с внешними факторами, такими как многолучевость [6], ионосферная и тропосферная модели и их поправки. Следовательно, определение матрицы  $R_k$  имеет большое значение.

Другая важная матрица, описывающая состояние динамической системы, – это матрица  $Q_k$ . Как показано в [7] и затем подытожено в [1], адаптивное оценивание  $R_k$  и  $Q_k$  является технически возможным, причем оценивание  $R_k$  обеспечивает большую стабильность вследствие ограниченного числа параметров.  $Q_k$  оценивается не напрямую, поскольку имеется ряд параметров, чей размер пропорционален порядку вектора состояния [2]. Часто оценивание  $Q_k$  приводит к вычислительной неустойчивости вследствие плохой наблюдаемости [8]. Тем не менее в случае БИНС на основе низкоточных МЭМС рекомендуется оценивать  $Q_k$  в реальном времени, а не в процессе определения параметров априорной модели при помощи стохастической модели [9]. Матрица  $Q_k$  вычисляется с учетом спектральных плотностей мощности (СПМ) шумов гироскопов и акселерометров [10]. Эти величины обычно приводятся в спецификациях производителя, их определение занимает много времени, так как связано с многочасовой регистрацией огромных объемов данных на лабораторных испытательных установках. Так что имеет смысл определять стохастические параметры в ходе лабораторных экспериментов с использованием инерциальных датчиков навигационного класса. Обычно СПМ вычисляются при помощи автокорреляционной функции, построенной на экспериментальных данных инерциальных датчиков [9]. После однократного определения

они остаются практически постоянными, поэтому соответствующую матрицу  $Q_k$  для интервала обновления фильтра можно вывести математически.

Если данные ГНСС доступны, расчетные погрешности на ограниченном интервале будут определяться оценками АФК. Матрица коэффициентов усиления обратной связи  $K_k$  будет постепенно уменьшаться и достигнет установившегося значения  $Q_k/R_k$ . Установившиеся значения матрицы ковариации погрешностей зависят от матрицы  $Q_k$  и ее вычисления в реальном времени. В случае потери сигналов ГНСС будет наблюдаться медленный уход БИНС – на несколько метров. При их восстановлении для адекватной коррекции погрешностей системы используют ранее вычисленный коэффициент усиления. Вместе с тем эта процедура работает достаточно медленно и часто приводит к колебаниям или расхождению фильтра. Чтобы избежать колебаний значений оценок вектора состояния БИНС, необходимо при пропадании сигнала ГНСС прогнозировать изменение матрицы  $P_k$ , что требует точного моделирования переходной матрицы состояния  $\Phi_{(s)k}$  и матрицы  $Q_k$ . В [10] описан эффективный прогноз матрицы  $Q_k$  для расширенной модели БИНС высокого порядка. В [11] предлагается применить функцию оценки для контроля работоспособности системы ИНС/GPS. В [12] рассматривается алгоритм слабосвязанного комплексирования при медленно растущих погрешностях невязки с помощью расчета крутизны кривой погрешностей. Статья [13] посвящена робастному АФК на базе сильносвязанного интегрирования, который, тем не менее, применим только в случае заказных приемников ГНСС, а не коммерческих.

В работе [14] представлен двухэтапный АФК, в основе которого лежит оценка больших смещений нулей датчиков, при которых, однако, обычно невозможно обеспечить стабильность навигационных решений и их погрешностей. В [4] исследуется использование АФК при посадке ЛА на авианосец, когда  $Q_k$  подвержена влиянию внешних факторов, а  $R_k$  считается эмпирически определенной в ходе экспериментов, но авторы не приводят практических данных, подтверждающих существенную изменчивость матрицы  $Q_k$ . В [15] предложен модифицированный робастный АФК Сейджа–Хуса (Sage–Husa), позволяющий минимизировать влияние ухода МЭМС-датчиков при помощи вариации Аллана. В [16] приводится робастная схема фильтрации на основе адаптивной матрицы затухания, обеспечивающая уменьшение среднеквадратических погрешностей (СКП) оценки скорости. Работа [17] посвящена АФК на основе одномерной модели нестационарного роста. В [18] описывается прогнозирование погрешностей при пропадании сигнала GPS и применении ансентного АФК.

Тем не менее во всех этих публикациях в качестве вектора состояния рассматривается вектор положения – отдельно либо в комбинации с вектором скорости, но не дается подробных решений задачи стабильного и точного оценивания углов ориентации, векторов смещений нулей гироскопов и акселерометров. В настоящей статье рассматриваются все навигационные параметры. Для прогнозирования темпа роста погрешностей при пропадании сигнала ГНСС предлагается определить матрицу  $P_k$ , а также использовать высокоточное моделирование БИНС.

Цель настоящего исследования – повысить точность фильтрации при гибридном навигационном решении в неизвестных или частично известных условиях измерений и при откалиброванных параметрах матрицы  $Q_k$  БИНС. Проблема усугубляется в случае плохой обусловленности матрицы  $P_k$ ; ее можно устранить с помощью

U-D-метода квадратного корня при реализации дискретного фильтра Калмана. Кроме того, предпринята попытка улучшить качество моделирования системы путем кинематического прогнозирования погрешностей определения местоположения и скорости, обусловленных смещениями нулей акселерометров и гироскопов. Гибридное решение, вырабатываемое высокоточной навигационной системой, должно обеспечивать дрейф навигационного решения на уровне не более 1 мор. мили в час даже в ситуации периодического пропадания сигналов ГНСС.

Прогноз погрешностей такой высокоточной БИНС осуществляется за счет точного оценивания смещений нулей датчиков в условиях комплексирования данных, которые и определяют дрейф навигационного решения. Для этого требуется точное моделирование переходной матрицы состояния системы, прогнозирование матрицы  $Q_k$  при наличии сигнала ГНСС и, самое главное, матрицы  $P_k$  в отсутствие сигналов ГНСС. Авторы попытались улучшить расчет матрицы  $\Phi_{(s)k}$  за счет кинематического прогнозирования вектора состояния и матрицы  $P_k$ .

Статья имеет следующую структуру. В разделе 1 рассматриваются принцип реализации БИНС, модель возмущения слабых сигналов и схема последовательного обобщенного фильтра Калмана (ОФК). В разделе 2 описываются прогнозирование матрицы  $P_k$  и U-D-фильтрация. В разделе 3 представлены методы адаптивного оценивания и предлагаемый способ прогнозирования погрешностей. В разделе 4 приводятся экспериментальные результаты летных испытаний. В разделе 5 содержатся выводы и определяются пути дальнейших исследований проблемы

## 1. Опорные уравнения БИНС

БИНС обычно рассматривается как нелинейная система, в которой одновременно производится несколько математических операций интегрирования в реальном времени. При моделировании в пространстве состояний в нелинейных системах широко используются анцентный ФК и ОФК [19], которые, как показывают исследования, обладают аналогичными характеристиками и математически эквивалентны [20]. В настоящей работе предложен адаптированный ОФК, который отличается простотой и лучше приспособлен для применения в качестве бортового алгоритма в реальном времени за счет меньшего количества вычислений. Ниже приводятся базовые уравнения навигации и матрицы чувствительности для погрешностей, описывающие предлагаемый процесс адаптации ОФК.

Изменение скорости БИНС в местной системе координат (СК) «север–восток–вниз» (NED) можно описать так:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_e^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^n \end{bmatrix} + g_l^n - \begin{bmatrix} 2w_{ie}^n + w_{en}^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_e^n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $f^n$  – вектор кажущегося ускорения, измеряемый акселерометрами и преобразованный в СК NED в  $f^n = C_b^n f^b$ ;  $f^b$  – вектор кажущегося ускорения, измеряемый акселерометрами в СК БИНС;  $C_b^n$  – матрица преобразования из СК БИНС в СК NED;  $w_{ie}^n$  – вектор угловой скорости вращения Земли, сформированный в СК NED;  $w_{en}^n$  – вектор скорости вращения Земли, определенный в СК NED и вычисленный относительно земной СК;  $g_l^n$  – вектор удельной силы тяжести в СК NED. Компоненты этих векторов запишем следующим образом:

$$[v_e^n] = [v_N \ v_E \ v_D]^T, \quad [f^n] = [f_N \ f_E \ f_D]^T, \quad (2)$$

$$[w_{ie}^n] = [w_N \ 0 \ w_D]^T, \quad (3)$$

$$[w_{en}^n] = [\dot{L}_d \cos(\lambda_d) - \dot{\lambda}_d - \dot{L}_d \sin(\lambda_d)]^T, \quad (4)$$

где  $w_N$  – северная компонента вектора угловой скорости вращения Земли, равная  $w_N = \Omega_{ie} \cos(\lambda_d)$ ;  $w_D$  – направленная вниз компонента вектора угловой скорости вращения Земли, равная  $w_D = \Omega_{ie} \sin(\lambda_d)$ , где  $\lambda_d$  – географическая широта в модели эллипсоида WGS84;  $L_d$  – долгота относительно линии Гринвичского меридиана;  $h_d$  – местная географическая высота в модели эллипсоида WGS84;  $v_N, v_E, v_D$  – компоненты вектора относительной линейной скорости  $v_e^n$ , определенного в СК NED;  $r_e$  – поперечный радиус Земли ( $r_E$ ) +  $h_d$ ;  $r_n$  – нормальный радиус Земли ( $r_N$ ) +  $h_d$ . Изменение координат местоположения представим в виде

$$\dot{\lambda}_d = \frac{v_N}{r_n}, \quad \dot{L}_d = \frac{v_E}{(r_e) \cos(\lambda_d)}, \quad \dot{h}_d = -v_D.$$

Подробно  $r_N$  и  $r_E$  и опорные уравнения навигации приведены в [21].

### 1.1. Матрицы системы при расширенном векторе состояния

Используя модель (1) и соотношения для изменений векторов погрешностей определения местоположения, скорости и углов  $\delta \dot{p}_e^n = [\delta \dot{\lambda}_d \ \delta \dot{L}_d \ \delta \dot{h}_d]^T$ ,  $[\delta \dot{v}_e^n] = [\delta \dot{v}_N \ \delta \dot{v}_E \ \delta \dot{v}_D]^T$  и  $\delta \dot{\epsilon}^n = [\delta \dot{\epsilon}_\alpha \ \delta \dot{\epsilon}_\beta \ \delta \dot{\epsilon}_\gamma]^T$ , получим следующие дифференциальные уравнения линейных погрешностей БИНС:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{p}_e^n \\ \delta \dot{v}_e^n \\ \delta \dot{\epsilon}^n \\ \delta \dot{w}^b \\ \delta \dot{f}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pp} & S_{pv} & S_{pe} & 0 & 0 \\ S_{vp} & S_{vv} & S_{ve} & 0 & S_{vf^b} \\ S_{pe} & S_{ve} & S_{ee} & S_{ew^b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_e^n \\ \delta v_e^n \\ \delta \epsilon^n \\ \delta w^b \\ \delta f^b \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $\delta \epsilon^n$  – вектор углов рассогласования в СК  $n$  (т.е. NED), содержащий следующие компоненты:  $\delta \epsilon_\alpha$  – погрешность угла рассогласования в северном направлении,  $\delta \epsilon_\beta$  – погрешность угла рассогласования в восточном направлении,  $\delta \epsilon_\gamma$  – погрешность угла рассогласования в направлении вниз в СК  $n$ . Соответствующие матрицы чувствительности для погрешностей позиционирования можно записать в виде

$$[S_{pp}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-v_N}{r_n^2} \\ (\frac{v_E}{r_e}) \sin(\lambda_d) c_{2s} & 0 & (\frac{-v_E}{r_e^2}) \sin(\lambda_d) c_{2s} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$[S_{pv}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_n} & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{c_{1s}}{r_e}) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ and } [S_{pe}] = 0. \quad (7)$$

Матрицы чувствительности для погрешностей скорости представим как

$$S_{vp} = \begin{bmatrix} -2w_N v_N - \frac{v_E^2 c_{2s}}{r_e} & 0 & \frac{v_E^2 c_{2s}}{r_e} - \frac{v_N v_D}{r_n^2} \\ 2(w_N v_N + w_D v_D) + \frac{v_N v_E c_{2s}}{r_e} & 0 & -\frac{v_N v_E c_t}{r_e^2} - \frac{v_E v_D}{r_n^2} \\ -2w_D v_E & 0 & \frac{v_N^2}{r_n^2} + \frac{v_E^2}{r_e^2} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $c_t = \tan(\lambda_d)$ ,  $c_{1s} = \sec(\lambda_d)$ ,  $c_{2s} = \sec^2(\lambda_d)$ ;

$$S_{vw} = \begin{bmatrix} \frac{v_D}{r_n} & 2w_D - \frac{2v_E c_t}{r_e} & \frac{v_N}{r_n} \\ -2(w_D) + \frac{v_E c_t}{r_e} & \frac{v_N c_t}{r_e} + \frac{v_D}{r_e} & 2(w_N + \frac{v_E}{r_e}) \\ -2\frac{v_N}{r_n} & -2w_N - \frac{2v_E}{r_e} & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Якобиан погрешностей скорости относительно углов рассогласования рассчитывается следующим образом:

$$S_{ve} = [f^n \times] = \begin{bmatrix} 0 & f_D & -f_E \\ -f_D & 0 & f_N \\ f_E & -f_N & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Частные производные скорости изменения вектора углов ориентации выразим как

$$S_{ep} = \begin{bmatrix} -w_D & 0 & \frac{v_E^2}{r_e^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_N s_{2t}}{r_n^2} \\ w_N + \frac{v_E s_{2t}}{r_e} & 0 & -\frac{v_E c_t}{r_e^2} \end{bmatrix}, S_{ev} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r_e} & 0 \\ \frac{1}{r_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_t}{r_e} & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$S_{ee} = \begin{bmatrix} 0 & w_D - \frac{v_E c_t}{r_e} & \frac{v_N}{r_n} \\ -w_D + \frac{v_E c_t}{r_e} & 0 & w_N + \frac{v_E}{r_e} \\ -\frac{v_N}{r_n} & -w_N - \frac{v_E}{r_e} & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

при этом  $S_{yf^b} = -C_b^n$  и  $S_{\epsilon v^b} = C_b^n$ . Допуская, что векторы смещений нулей гироскопов  $\delta w^b$  и акселерометров  $\delta f^b$  являются случайными постоянными в расширенной модели, соответствующие уравнения погрешностей запишем как  $\delta \dot{w}^b = 0$  и  $\delta \dot{f}^b = 0$  соответственно.

### 1.2. Уточненная переходная матрица системы

Дискретное преобразование матрицы системы  $S$  (5) можно представить в виде разложения в ряд Тейлора на момент  $k$ :

$$\Phi_{(s)_k} = I + S_k \Delta T + (S_k \Delta T)^2 / 2 + \dots \infty. \quad (13)$$

На практике для всех БИНС с высокоточными кольцевыми лазерными гироскопами (КЛГ) и кварцевыми акселерометрами первый член уравнения будет иметь достаточный вес, чтобы обеспечить требуемую точность. При внимательном рассмотрении матрицы  $\Phi_{(s)_k}$  выясняется, что блочные матрицы  $\Phi_{(s)_k}(1; 3)$ ,  $\Phi_{(s)_k}(1; 4)$ ,  $\Phi_{(s)_k}(1; 5)$  представляют собой нули (0; 0). Это свидетельствует о нулевом вкладе углов рассогласования и смещений нулей гироскопов и акселерометров в погрешности позиционирования [22]. На практике это не так. Следовательно, положим, что в состав матриц входят следующие члены:

$$\Phi_{(s)_k}(1,3) = \Phi_{pe} = -C_b^n * \Delta T, \quad (14)$$

$$\Phi_{(s)_k}(1,5) = \Phi_{pf^b} = -[C_b^n] \frac{(\Delta T)^2}{2} \left( \frac{1}{R_x} \right), \quad (15)$$

$$\Phi_{(s)_k}(1,4) = \Phi_{pw^b} = \left[ \left( \frac{\Delta v_{sf}^b}{\Delta T} C_b^n \right) \times \right] \frac{(\Delta T)^3}{6} \left( \frac{1}{R_x} \right), \quad (16)$$

где 
$$R_x = \begin{bmatrix} r_n & 0 & 0 \\ 0 & r_e * \cos(\lambda_d) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

В (16) оператор  $\times$  представляет кососимметричную матрицу вектора скорости, а  $\Delta v_{sf}^b$  – интегрированный вектор скорости в СК БИНС с интервалом времени  $\Delta T$ , который будет оказывать сглаживающий эффект на измеряемые ускорения в ходе летных испытаний и вносить прямой вклад в предлагаемую модель погрешностей. Аналогичным образом вклад вектора смещений нулей гироскопов в погрешности определения скорости будет обусловлен блочной матрицей

$$\Phi_{(s)_k}(2,4) = \Phi_{vw^b} = \left[ \frac{\Delta v^b}{\Delta T} C_b^n \right] \frac{(\Delta T)^2}{2}. \quad (18)$$

Оставшиеся блочные матрицы  $\Phi_k$  запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \Phi_{(s)_k}(1,1) &= I + S_{pp} \Delta T + \frac{(S_{pp} \Delta T)^2}{2}, \\ \Phi_{(s)_k}(1,2) &= S_{pv} \Delta T \end{cases}, \quad (19)$$

$$\begin{cases} \Phi_{(s)_k}(2,1) = S_{vp}\Delta T \\ \Phi_{(s)_k}(2,2) = I + S_{vv}\Delta T + \frac{(S_{vv}\Delta T)^2}{2}, \\ \Phi_{(s)_k}(2,3) = S_{ve}\Delta T \\ \Phi_{(s)_k}(2,5) = S_{vfb}\Delta T \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \Phi_{(s)_k}(3,1) = S_{ep}\Delta T \\ \Phi_{(s)_k}(3,2) = S_{ev}\Delta T \\ \Phi_{(s)_k}(3,3) = I + S_{ee}\Delta T + \frac{(S_{ee}\Delta T)^2}{2}, \\ \Phi_{(s)_k}(3,4) = S_{ew^b}\Delta T \\ \Phi_{(s)_k}(3,5) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

где блочная матрица  $I$  представляет собой единичную матрицу размером  $3 \times 3$ . Учет членов более высокого порядка остается на усмотрение читателя. Диагональные элементы  $\Phi_{(s)_k}(4; 4)$  и  $\Phi_{(s)_k}(5; 5)$  задаются равными  $I$ , а оставшиеся блочные матрицы  $\Phi_{(s)_k}$  – равными нулевой матрице  $(3; 3)$ .

### 1.3. Построение ковариационной матрицы $Q_k$

Ковариационная матрица  $Q_k$  с использованием модифицированной переходной матрицы системы вычисляется следующим образом:

$$Q_k = \int_0^{\Delta T} \Phi_{(s)_k} [q]_k \Phi_{(s)_k}^T dt. \quad (22)$$

Для упрощения вывода  $Q_k$  матрица  $\Phi_{(s)_k}$  записывается как

$$\Phi_{(s)_k} = \begin{bmatrix} I & \frac{\Delta T}{R_x} I & -\frac{\Delta T^2}{2} I & \frac{\Delta T^3}{6R_x} X C_b^n & -\frac{\Delta T^2}{2R_x} C_b^n \\ 0 & I & -\Delta T X & \frac{\Delta T}{2} X & -\Delta T C_b^n \\ 0 & 0 & I & -\Delta T C_b^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где  $X$  имеет вид кососимметричной матрицы  $\Delta v_{sf}^b$ :

$$X = \left[ \frac{\Delta v_{sf}^b}{\Delta T} \times \right]. \quad (24)$$

Матрица  $Q_k$  зависит от СПМ шумов гироскопов и акселерометров  $q_g$  и  $q_a$  соответственно:

$$[q]_k = \begin{bmatrix} 0_{9 \times 9} & 0 & 0 \\ 0_{3 \times 9} & q_g & 0 \\ 0_{3 \times 9} & 0 & q_a \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Она вычисляется для каждого момента  $k$ :

$$Q_k = [Q_k^1 \quad Q_k^2 \quad Q_k^3 \quad Q_k^4 \quad Q_k^5], \quad (26)$$

$$Q_k^1 = \begin{bmatrix} (\frac{\Delta T^7}{252})XX^T q_g / R_x + (\frac{\Delta T^5}{20})q_a / R_x \\ (\frac{\Delta T^5}{60})XX^T C_b^n q_g + (\frac{\Delta T^4}{8})q_a \\ (\frac{-\Delta T^5}{30})X^T q_g \\ (\frac{\Delta T^4}{24})X^T C_b^{nT} q_g \\ (\frac{-\Delta T^3}{6})X^T C_b^{nT} q_a \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$Q_k^2 = \begin{bmatrix} (\frac{\Delta T^6}{72})XC_b^n X^T q_g / R_x + (\frac{\Delta T^4}{8})q_a / R_x \\ (\frac{\Delta T^4}{16})XX^T q_g + (\frac{\Delta T^3}{3})q_a \\ (\frac{-\Delta T^4}{8})C_b^n X^T q_g \\ (\frac{\Delta T^3}{6})X^T q_g \\ (\frac{-\Delta T^2}{2})X^T C_b^{nT} q_a \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$Q_k^3 = \begin{bmatrix} (\frac{-\Delta T^5}{30})Xq_g / R_x \\ (\frac{-\Delta T^3}{16})XC_b^{nT} q_g \\ (\frac{\Delta T^3}{3})q_g \\ (\frac{-\Delta T^2}{2})C_b^{nT} q_g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$Q_k^4 = \begin{bmatrix} (\frac{\Delta T^4}{24})XC_b^n q_g / R_x \\ (\frac{\Delta T^2}{4})Xq_g \\ (\frac{-\Delta T^2}{2})C_b^n q_g \\ (\Delta T)q_g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$Q_k^s = \begin{bmatrix} \left(\frac{-\Delta T^3}{6}\right)C_b^n q_a / R_x \\ \left(\frac{-\Delta T^2}{2}\right)C_b^n q_a \\ 0 \\ 0 \\ (\Delta T)q_a \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Модель погрешности измерений. Массив данных, полученный от приемника ГНСС, представляет собой векторы положения  $[\lambda_{d,ss} \ L_{d,ss} \ h_{d,ss}]^T$  и линейной скорости  $[v_{N,ss} \ v_{E,ss} \ v_{D,ss}]^T$  в локальной географической СК, при этом полагается, что измерения содержат центрированный гауссовский белый шум  $v_k$ . Уравнение погрешностей позиционирования можно выразить в виде

$$\delta Z_{k,(p)} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_d \\ \tilde{L}_d \\ \tilde{h}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{d,ss} \\ L_{d,ss} \\ h_{d,ss} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

где  $\tilde{\lambda}_d, \tilde{L}_d, \tilde{h}_d$  – оценки определения местоположения, скорректированные с учетом вектора смещения БИНС относительно фазового центра антенны ГНСС  $L_{GNSS}$ :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\lambda}_d &= \lambda_d - \frac{\lambda_{d,corr}}{r_n} \\ \tilde{L}_d &= L_d - \frac{L_{d,corr}}{r_e \cos(\lambda_d)} \\ \tilde{h}_d &= h_d - h_{d,corr} \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

$$[\lambda_{d,corr} \ L_{d,corr} \ h_{d,corr}]^T = C_n^b L_{GNSS}. \quad (34)$$

Аналогично погрешности скорости запишем как

$$\delta Z_{k,(v)} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_N \\ \tilde{v}_E \\ \tilde{v}_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{N,ss} \\ v_{E,ss} \\ v_{D,ss} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

где  $\tilde{v}_N, \tilde{v}_E$  и  $\tilde{v}_D$  – оценки скорости, скорректированные с учетом вектора  $L_{GNSS}$  [23]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_N \\ \tilde{v}_E \\ \tilde{v}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} - C_n^b (\hat{w}_{ib}^b \times L_{GNSS}). \quad (36)$$

Здесь  $\hat{w}_{ib}^b$  – вектор угловой скорости, измеренный в СК БИНС и пропущенный через фильтр нижних частот. Из уравнений (32) и (35) можно получить вектор измерений

$$\delta Z_{k,(pv)} = [\delta Z_{k,(p)} \ \delta Z_{k,(v)}]^T. \quad (37)$$

Таким образом, уравнение для измерений представим как

$$\delta \hat{Z}_{k,(pv)} = [H_{k,(pv)}] \delta x_k + v_k, \quad (38)$$

где

$$H_{k,(pv)} = \begin{bmatrix} I_{(3 \times 3)} & 0_{(3 \times 3)} & | & 0_{(3 \times 9)} \\ 0_{(3 \times 3)} & I_{(3 \times 3)} & | & 0_{(3 \times 9)} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

При постановке задачи фильтрации подвекторы местоположения, скорости, углов ориентации и смещений нулей датчиков, задействованные в (5), введем в состав единого вектора состояния  $\delta x$ :

$$[\delta x] = [\delta p_e^n \quad \delta v_e^n \quad \delta \epsilon^n \quad \delta w^b \quad \delta f^b]^T. \quad (40)$$

Вектор шумов измерений обозначим как  $v_k$  при  $E[v_k] = 0$ . Полагается, что взаимная корреляция измерений будет  $E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj}$ , где

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}. \quad (41)$$

В результате вектор невязок примет вид:

$$\text{Innov}_k = [\delta Z_{k,(pv)}] - [\delta \hat{Z}_{k,(pv)}]. \quad (42)$$

#### 1.4. Реализация обобщенного фильтра Калмана

Линейная динамическая модель БИНС, описанная уравнением (5), где  $S$  – матрица системы, может быть представлена во временной области как

$$[\delta \dot{x}(t)]_{15 \times 1} = [S]_{15 \times 15} [\delta x(t)]_{15 \times 1} + W(t). \quad (43)$$

Для реализации ОФК уравнение (43) переводится в дискретный вид [24]:

$$\delta x_{k+1} = \Phi_k \delta x_k + W_k, \quad (44)$$

где  $W_k$  – матрица шума, все компоненты которой представляют собой гауссовский шум с нулевым средним –  $E[W_k] = 0$  и  $E[W_k W_j^T] = Q_k \delta_{kj}$  и  $Q_k$ , может быть вычислена по уравнению (26). При нелинейном описании динамики БИНС на интервале обновления фильтра используются различные методы фильтрации: ансамблевый ФК, кубатурный ФК (КФК) и фильтр частиц (ФЧ). Они хорошо подходят для БИНС на базе низкоточных МЭМС-датчиков, однако приводят к увеличению вычислительной нагрузки.

Что касается БИНС с высокоточными КЛГ и кварцевыми акселерометрами, характеризующимися меньшим смещением нуля, применение таких фильтров нецелесообразно. По этой причине было принято решение адаптировать ОФК, обладающий относительно небольшой вычислительной сложностью и позволяющий производить оценивание с высокой точностью, для реализации в бортовом процессоре в режиме реального времени. Линеаризованные модели БИНС, представленные в предыдущем разделе, служат основой для оценивания на основе ОФК [25]. Составные части ОФК описываются ниже.

Уравнения коррекции:

$$\begin{cases} K_k = P_{k+1}^{(-)} H_k^T [H_k P_{k+1}^{(-)} H_k^T + R_k]^{-1}, \\ \delta x_{k+1}^{(+)} = \delta x_{k+1}^{(-)} + K_k [Innov_k], \\ P_{k+1}^{(+)} = (I - K_k H_k) P_{k+1}^{(-)} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T. \end{cases} \quad (45)$$

Уравнения прогноза:

$$\begin{cases} \delta x_{k+1}^{(-)} = \Phi_k \delta x_k^{(+)}, \\ P_{k+1}^{(-)} = \Phi_k P_k^{(+)} \Phi_k^T + Q_k. \end{cases} \quad (46)$$

С целью последовательной обработки данных [26] перепишем уравнение (38), опустив нижний индекс  $pv$ :

$$[\delta \hat{Z}_{k,(1,...,m)}] = [H_{k,(1,...,m)}] \delta \hat{x}_k + [v_{k,(1,...,m)}]. \quad (47)$$

Матрица ковариации погрешностей измерений  $R_k$  считается диагональной, а ее элементы, представляющие дисперсию, – постоянными в предположении, что

$$v_{k,(i)} \sim N(0, R_{k,(i)}) \quad \forall i = 1 \text{ to } m. \quad (48)$$

Последовательная обработка измерений с использованием ФК. Построение ОФК для последовательной обработки данных – ключевой аспект настоящего исследования, посвященного проблематике адаптивного оценивания в полевых условиях. Рассматривается три этапа последовательной фильтрации.

Этап 1. Установление параметров фильтра  $\delta x_0^{(+)} = 0$ ;  $P_0^{(+)}$  с ожидаемой начальной ковариацией и ковариацией погрешностей измерений  $R_k = \text{diag}(R_{k,(1)}, R_{k,(2)}, \dots, R_{k,(m)})$ .

Этап 2. Определение параметров ОФК на каждом шаге  $k$  согласно уравнению (46). Вычисление соответствующей матрицы  $Q_k$  по формуле (26).

Этап 3. Инициализация и обновление апостериорной оценки вектора состояния на каждом временном шаге  $k$ :

- 1) инициализация апостериорной оценки вектора состояния и матрицы  $P_k^{(+)}$ :

$$\delta x_{k,(0)}^{(+)} = \delta x_k^{(+)}, \quad (49)$$

$$P_{k,(0)}^{(+)} = P_0^{(-)}; \quad (50)$$

- 2) выполнение последовательно следующих вычислений для  $i = 1 \dots m$ :

$$\alpha_{(i)} = [H_{k,(i)} P_{k,(i-1)}^{(-)} H_{k,(i)}^T + R_{k,(i)}], \quad (51)$$

$$K_{k,(i)} = \frac{1}{\alpha_{(i)}} P_{k,(i-1)}^{(+)} H_{k,(i)}^T, \quad (52)$$

$$\delta x_{k,(i)}^{(+)} = \delta x_{k,(i-1)}^{(+)} + K_{k,(i)} Innov_{k,(i)}, \quad (53)$$

$$P_{k,(i)}^{(+)} = (I - K_{k,(i)} H_{k,(i)}) P_{k,(i)}^{(+)}; \quad (54)$$

- 3) повторная инициализация апостериорной оценки вектора погрешностей БИНС и соответствующей спрогнозированной ковариации:

$$P_{k+1}^{(+)} = P_{k,(i)}^{(+)}, \quad (55)$$

$$\delta x_{k+1}^{(+)} = \delta x_{k,(i)}^{(+)}; \quad (56)$$

- 4) по окончании обработки  $m$  измерений на  $k$ -й момент фиксация вектора состояния погрешности  $\delta x_k = \delta x_k^{(+)}$  и коррекция фильтра.

## 2. Прогнозирование матрицы $P_k$

Предлагаемая работа посвящена главным образом точному вычислению  $Q_k$  с одновременным оцениванием  $R_k$ , однако немаловажное значение имеет и вклад  $Q_k$  в прогнозирование  $P_k$ , особенно это касается высокоточных навигационных систем, предназначенных для работы в течение длительного периода. Трудности при численной обработке данных возникают и в случае задействования 32-битовых бортовых процессоров даже при небольшой длине машинного слова, в результате  $P_k$  становится неопределенной или несимметричной. Это связано с тем, что погрешность смещений нулей гироскопов определяется с большей точностью, чем погрешность вектора скорости. Ковариация погрешностей вектора скорости  $P_{vv}$  составит примерно  $1,0e^{-2}$  (м/с)<sup>2</sup>, а вектора смещений нулей гироскопов  $P_{ww}$  – порядка  $1,0e^{-20}$  (рад/с)<sup>2</sup>, что приведет к безразмерному числу обусловленности  $P_k$ :

$$\mathcal{K}(P_k) = \frac{P_{vv}}{P_{ww}} = 1.0e^{18}. \quad (57)$$

Метод квадратного корня (U-D-фильтрация) для численной реализации дискретного ФК [27] позволяет эффективно избежать численного округления и применяется в некоторых автономных приложениях. Кроме того, навигационные приложения, предназначенные для эксплуатации в условиях длительных перелетов, требуют положительной полуопределенной матрицы  $P_k$ . Во время работы фильтра диагональные элементы матрицы  $P_k$  уменьшаются и могут привести к ее плохой обусловленности. В значительной степени этот недостаток можно устранить при помощи метода квадратного корня [28]. U-D-фильтрация, предложенная в [29] для решения проблемы плохой обусловленности определения ориентации спутника, обеспечила повышение вычислительной точности ОФК [30]. Впервые применение U-D-фильтрации для адаптивного оценивания было рассмотрено в [31], хотя в работе не содержится никаких математических описаний в целях реализации ее на практике. В настоящей статье для предлагаемого адаптивного оценивания приведены подробные уравнения U-D-фильтрации, так как для ее реализации требуется высокая точность определения векторов смещений нулей датчиков. Основываясь на уравнении (54), представим обновленную матрицу ковариации погрешностей  $P_{k(i)}^{(+)}$  на  $k$ -й момент в виде

$$P_{k(i)}^{(+)} = P_{k,(i-1)}^{(+)} - K_{k,(i)} H_{k,(i)} P_{k,(i-1)}^{(+)} \quad (58)$$

Подставляя коэффициент усиления фильтра Калмана  $K_k$  из (52) в (58), получаем:

$$P_{k(i)}^{(+)} = P_{k,(i-1)}^{(+)} - \frac{1}{(\alpha_{(i)})} P_{k,(i-1)}^{(+)} H_{k,(i)}^T H_{k,(i)} P_{k,(i-1)}^{(+)} \quad (59)$$

За счет факторизации  $P_{k,(i-1)}^{(+)}$  в виде

$$P_{k,(i-1)}^{(+)} = U_{k,(i-1)}^{(+)} D_{k,(i-1)}^{(+)} [U_{k,(i-1)}^{(+)}]^T \quad (60)$$

перепишем (59) как обновленное уравнение ковариации:

$$P_{k(i)}^{(+)} = U_{k,(i-1)}^{(+)} M_{k,(i)}^{(+)} [U_{k,(i-1)}^{(+)}]^T, \quad (61)$$

где

$$M_{k,(i)}^{(+)} = D_{k,(i-1)}^{(+)} - \frac{1}{(\alpha_{(i)})} [N_{k,(i)}^{(+)}][N_{k,(i)}^{(+)}]^T, \quad (62)$$

$$N_{k,(i)}^{(+)} = D_{k,(i-1)}^{(+)} [U_{k,(i-1)}^{(+)}]^T H_{k,(i)}^T. \quad (63)$$

Факторизуем  $M_{k,(i)}^{(+)}$  в виде

$$M_{k,(i)}^{(+)} = \tilde{U}_{k,(i)}^{(+)} \tilde{D}_{k,(i)}^{(+)} [\tilde{U}_{k,(i)}^{(+)}]^T. \quad (64)$$

Вычислим  $U_{k,(i)}^{(+)}$  и  $D_{k,(i)}^{(+)}$ :

$$U_{k,(i)}^{(+)} = U_{k,(i-1)}^{(+)} \tilde{U}_{k,(i)}^{(+)}, \quad (65)$$

$$D_{k,(i)}^{(+)} = [\tilde{D}_{k,(i)}^{(+)}]. \quad (66)$$

После обработки  $m$  измерений на  $k$ -й момент  $m$ -е обновленные матрицы  $U_{k,(m)}^{(+)}$  и  $D_{k,(i)}^{(+)}$  можно использовать для расчета обновленной матрицы ковариации:

$$P_k^{(+)} = U_{k,(m)}^{(+)} D_{k,(m)}^{(+)} [U_{k,(m)}^{(+)}]^T. \quad (67)$$

Далее U-D-фильтрация осуществляется в два этапа:

- формируются уравнения прогноза (подробно они представлены в [32] и используются в качестве основы в данной работе) и выполняется U-D-факторизация  $P_k$ ;
- выводится алгоритм обработки измерений и соответствующая ортогонализация Грама–Шмидта (более детально это рассматривается в [33], а здесь служит базой для предлагаемого последовательного процесса U-D-фильтрации).

Математическое описание прогнозирования  $P_k$  и точного вычисления  $Q_k$  на основе откалиброванных значений СПМ шума играет важную роль в обеспечении процесса адаптивного оценивания. Если прогнозирование  $P_k$  выполняется за короткий цикл обновления фильтра Калмана  $\Delta T$  между двумя последовательными измерениями ГНСС, требования к точности определения  $Q_k$  по СПМ не очень строгие. Однако при более длительном отсутствии сигнала ГНСС прогнозирование  $P_k$  и точное моделирование  $\Phi_k$  и  $Q_k$  и откалиброванных СПМ становятся крайне необходимыми. Корректность такого прогноза можно проверить по времени установления векторов состояния после возобновления сигнала ГНСС. Случаи пропадания сигнала ГНСС на длительное время подробно рассмотрены в разделе 5. Функциональная блок-схема прогнозирования ковариации погрешностей при долговременном отсутствии сигнала ГНСС и схема адаптивного оценивания  $R_k$  показаны на рис. 1. Рассматриваются два вида прогноза  $P_k$ :

- 1) при наличии сигнала ГНСС на интервале обновления фильтра;
- 2) при пропадании сигнала ГНСС на более длительное время.

Первая часть экспериментальных исследований посвящена прогнозированию  $P_k$  при пропадании сигнала ГНСС и проверке этого прогноза после возобновления сигнала, вторая – возможности применения АФК для различных летных сценариев.

### 3. Адаптивное оценивание матрицы $R_k$

Схема адаптивного оценивания матрицы  $R_k$  и прогнозирования матрицы  $P_k$  при пропадании сигнала ГНСС показана на рис. 1. Выше были представлены модели прогно-

зирования и высокоточного вычисления  $Q_k$  и соответствующих переходных матриц. В данном разделе подробно описывается адаптивное оценивание  $R_k$ . Точность измерений ГНСС зависит от соотношения «сигнал–шум», значения геометрического фактора (PDOP) и многолучевости. В связи с этим при работе приемника в течение нескольких часов в районах без систем дифференциальной коррекции дисперсии измерений могут меняться. Следовательно, желательно применять адаптивное оценивание  $R_k$  параллельно с фильтрацией. Матрица ковариации шума  $Q_k$  также меняется в различных условиях, поэтому вычисляется динамически на основе СПМ, а также параметров инерциальных датчиков, указанных в их спецификациях. В статье оценка  $R_k$  производится наряду с последовательной обработкой измерений ГНСС. С учетом предварительного исследования, проведенного в [31], оценка дисперсии шума измерений при комплексировании данных ИНС и ГНСС выполнена при помощи АФК. Показана важность U-D-фильтрации при использовании АФК для оценивания  $R_k$  в ограниченном диапазоне.

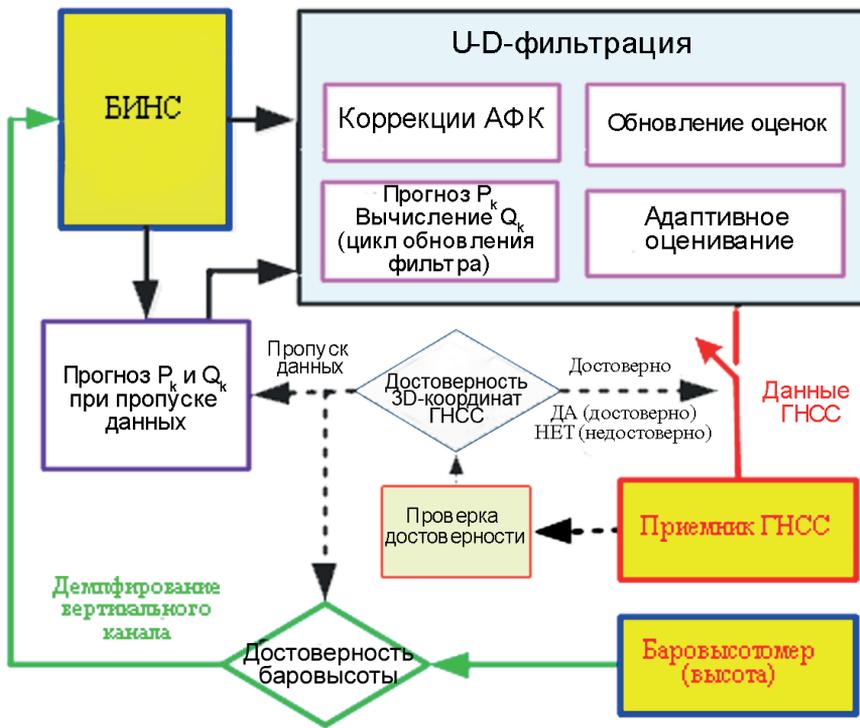


Рис. 1. Функциональная блок-схема предлагаемого прогнозирования ковариации погрешностей при долговременном пропадании сигнала ГНСС и адаптивного оценивания  $R_k$  при достоверности 3D-координат ГНСС

Далее рассматривается методика адаптивного оценивания на основе невязок, или остаточных разностей, при которой ковариация входящих измерений определяется по последовательному набору измерений.

### 3.1. Адаптивное оценивание на основе невязок методом скользящего окна

Пусть  $C_{k,\delta z}$  – ковариация предыдущих  $l$  измерений на  $k$ -й момент, рассчитываемая следующим образом:

$$\delta C_{k,(i)} = \frac{1}{l} \sum_{j=k-l}^k [(Innov)_{j,(i)}][[(Innov)_{j(i)}^T]] \forall i = 1, 2, \dots, m. \quad (68)$$

Обновляя диагональные элементы матрицы  $\hat{R}_{k,(i)}$ , получаем

$$\hat{R}_{k,(i)} = \delta C_{k,(i)} - H_{k,(i)} P_{k,(i)}^{(+)} H_{k,(i)}^T, \quad (69)$$

где нижний индекс  $i$  обозначает  $i$ -й ряд матриц  $P_k^{(+)}$  и  $H_k$  соответственно.

### 3.2. Метод Сейджа–Хуса

Пусть  $C_{k,\delta z}$  – ковариация на  $k$ -й момент и

$$\delta C_{k,(i)} = \frac{1}{l} [(Innov)_{j,(i)}][[(Innov)_{j(i)}^T]]. \quad (70)$$

Здесь нижний индекс  $i$  обозначает  $i$ -е последовательное измерение. Обновляя матрицу ковариации измерений, получаем

$$\hat{R}_{k,(i)} = d_k [\delta C_{k,(i)} - H_{k,(i)} P_{k,(i)}^{(+)} H_{k,(i)}^T] + (1 - d_k) \hat{R}_{k-1,(i)}, \quad (71)$$

где  $d_k$  – весовой коэффициент, определяемый как

$$d_k = \frac{1 - b}{1 - b^{k+1}}, \quad (72)$$

при этом  $b$  – коэффициент устаревания, считающийся равным  $0 < b < 1$  и придающий больший вес последнему измерению.

### 3.3. Модифицированный метод скользящего окна

В основу подхода положен метод скользящего окна: последние  $l$  измерений накапливаются в буфере как отдельный набор данных и обрабатываются с коэффициентом устаревания. Метод используется для предварительной подготовки измерений, которые затем обрабатываются методом Сейджа–Хуса для оценивания матрицы  $R_k$ . Пусть  $C_{k,\delta z}$  – ковариация на  $k$ -й момент, которая вычисляется следующим образом:

$$\delta C_{k,(i)} = \frac{1}{l} \sum_{j=k-l}^k [(Innov)_{j,(i)}][[(Innov)_{j(i)}^T]] \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad (73)$$

где нижний индекс  $i$  обозначает  $i$ -е последовательное измерение. Обновление матрицы  $R_k$  представим в виде

$$\hat{R}_{k,(i)} = \hat{R}_{k-1,(i)} + d_k [\delta C_{k,(i)} - H_{k,(i)} P_{k,(i)}^{(+)} H_{k,(i)}^T - \hat{R}_{k-1,(i)}], \quad (74)$$

где  $d_k$  – весовой коэффициент, рассчитываемый по формуле (72).

Ковариацию в (74) можно спрогнозировать с помощью (67):

$$P_{k,(i)}^{(+)} = U_{k,(i)}^{(+)} D_{k,(i)}^{(+)} [U_{k,(i)}^{(+)}]^T \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (75)$$

Следует отметить, что диагональные элементы  $P_{k(i)}^{(+)}$  матрицы  $P_k^{(+)}$  в уравнении (75) используются для вычисления диагональных элементов  $\hat{R}_{k(i)}$ .

#### 4. Экспериментальное исследование и результаты летных испытаний

##### 4.1. Конфигурация блока инерциальных датчиков

Чтобы соответствовать высоким требованиям к навигации ЛА, в БИНС используется инерциальный измерительный блок на основе кольцевых лазерных гироскопов и кварцевых акселерометров, его технические данные приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Технические характеристики блока датчиков

Датчики	Параметр	1 $\sigma$
Гироскопы	Стабильность смещения нуля	0,01 °/ч
	Случайный уход по углу	0,003 °/ $\sqrt{\text{ч}}$
Акселерометры	Стабильность смещения нуля	50 $\mu\text{g}$
	Стабильность масштабного коэффициента	50 ppm

##### 4.2. Приемник ГНСС в качестве источника корректирующих данных

Приемник ГНСС встроен в БИНС, частота съема данных составляет 1 Гц. Приемник обеспечивает определение местоположения и скорости в СК «север–восток–вниз», при благоприятных условиях измерения должны иметь гауссовский шум. Технические параметры приемника, включая время первого определения местоположения, приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Технические характеристики приемника ГНСС

Параметр	Значение
Точность позиционирования	10 м (СКП)
Точность определения скорости	0,2 м/с (СКП)
Время первого определения местоположения (при холодном старте)	$\leq 48$ с
Ускорение	8 g
Скорость измерения ускорения	4 g/с
Скорость	600 м/с

##### 4.3. Конфигурация системы и консольная установка для летных испытаний

Данные БИНС по местоположению и скорости обновляются с частотой 50 Гц. Измерения приемника ГНСС задействуются для построения интегрированного на-

вигационного алгоритма с частотой 1 Гц. При этом используется адаптивный ОФК на основе U-D-метода. На рис. 2 приведена блок-схема потоков данных, на которой показаны циклы прогноза предлагаемой реализации фильтра наряду с выработанными фильтром поправками.

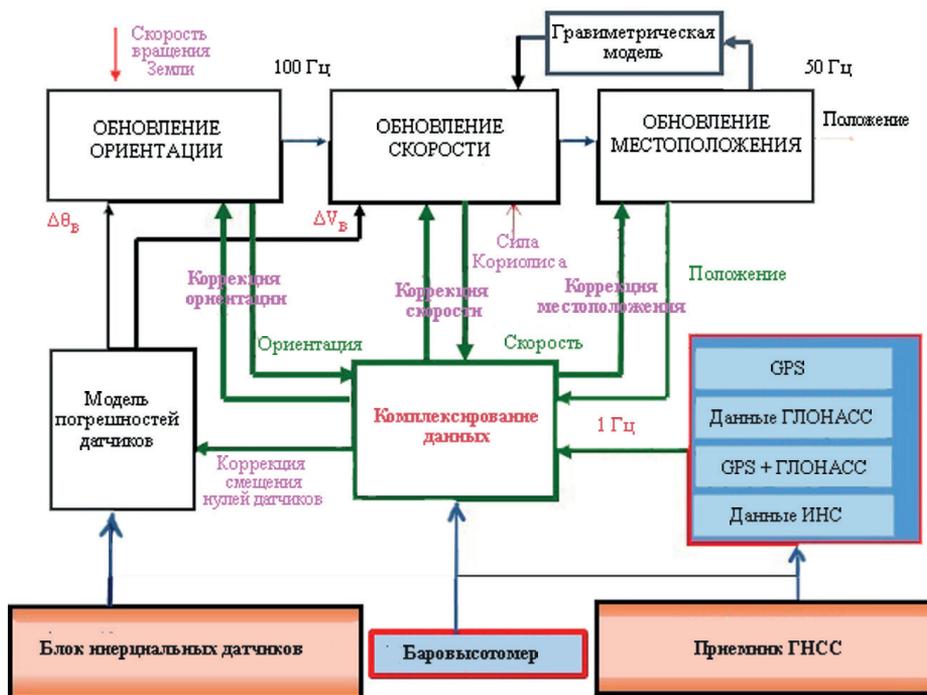


Рис. 2. Блок-схема потоков данных, на которой показаны циклы прогноза БИНС и выработанные фильтром поправки

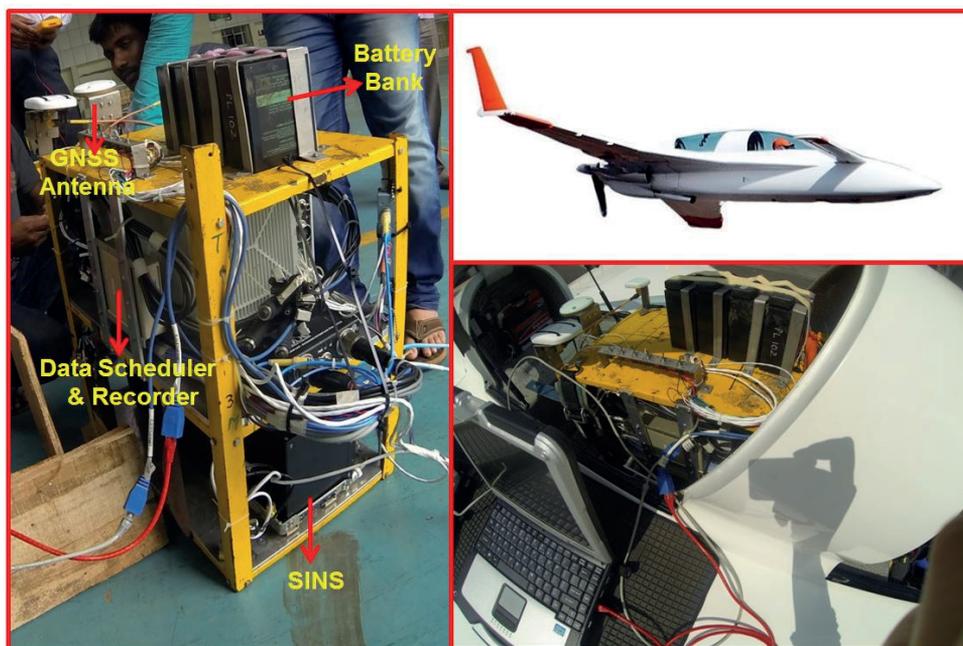


Рис. 3. Размещение БИНС на консоли (слева) и ее установка на ЛА в ходе летных испытаний (справа)

Баровысотомер производства компании Advanced Navigation определяет среднюю высоту над уровнем моря и используется для демпфирования вертикальной погрешности при пропадании сигнала ГНСС (подробно в настоящей статье это не рассматривается). Выработанные фильтром поправки подаются обратно на функциональные блоки (рис. 2). Чтобы оценить работу БИНС со встроенным приемником ГНСС, ее помещают на механическую консоль (рис. 3, слева).

Механическая консоль оборудована аккумулятором, диспетчером данных, баровысотомером, регистратором и антенной ГНСС и размещена внутри ЛА (рис. 3, справа). Данные инерциальных датчиков и ГНСС сохраняются в блоке регистрации для оценки прогноза и адаптивной фильтрации. Общее время полета, начиная с руления и взлета и заканчивая посадкой и возвращением к исходной точке, составило около 4200 с.

#### *4.4. Методика летных испытаний при долговременных пропаданиях сигнала ГНСС*

Испытания предполагают оценивание всех компонент вектора состояния, включая смещений нулей акселерометров и гироскопов, с достаточно хорошей точностью при наличии сигналов ГНСС, чтобы воспользоваться ими, если воздушное судно попадет в неблагоприятные условия, при которых сигналы ГНСС недоступны. Поскольку последнее зависит от окружающей обстановки, исследования в области навигации без ГНСС в настоящее время активно развиваются. В случае преднамеренных помех – глушении сигналов с последующим спуфингом (трансляцией поддельных сигналов), разумно продолжать работать в инерциальном режиме до окончания миссии. В одном из рассмотренных выше примеров при длительном отсутствии сигнала ГНСС корректность математической модели проверяется по времени установления всех компонент вектора состояния. Подробнее эти сценарии описаны ниже.

На рис. 4 показана земная проекция траектории (изменение долготы и широты относительно исходной точки), а также профиль высоты. Соответствующий профиль скорости представлен на рис. 5. Пропадание сигнала ГНСС задается вручную на интервале 1700–3100 с, строится схема комплексирования данных, которые распределяются по трем группам в зависимости от реализуемого сценария:

- случай (а): номинальная гибридная навигация при наличии сигнала ГНСС;
- случай (б): отсутствие прогнозирования ковариации погрешностей при пропадании сигнала ГНСС;
- случай (с): прогнозирование ковариации погрешностей при пропадании сигнала ГНСС.

Основные навигационные параметры вектора состояния (местоположение, скорость, углы ориентации, смещения нулей гироскопов и акселерометров) оцениваются в БИНС в течение полета при помощи предлагаемой U-D-фильтрации и служат опорными данными для гибридной навигации в случае (а). Реализация сценариев (б) и (с) позволяет проверить корректность прогнозирования  $P_k$  при пропадании сигнала ГНСС и сравнить полученные результаты с параметрами вектора состояния, вычисленными в случае (а). Пропадание сигнала ГНСС показано на временной диаграмме на рис. 6. На отметке 1700 с позиционирование с помощью ГНСС становится недоступным, система навигации начинает работать в инерциальном режиме, и появляется дрейф – вплоть до момента восстановления сигналов ГНСС на отметке 3100 с.

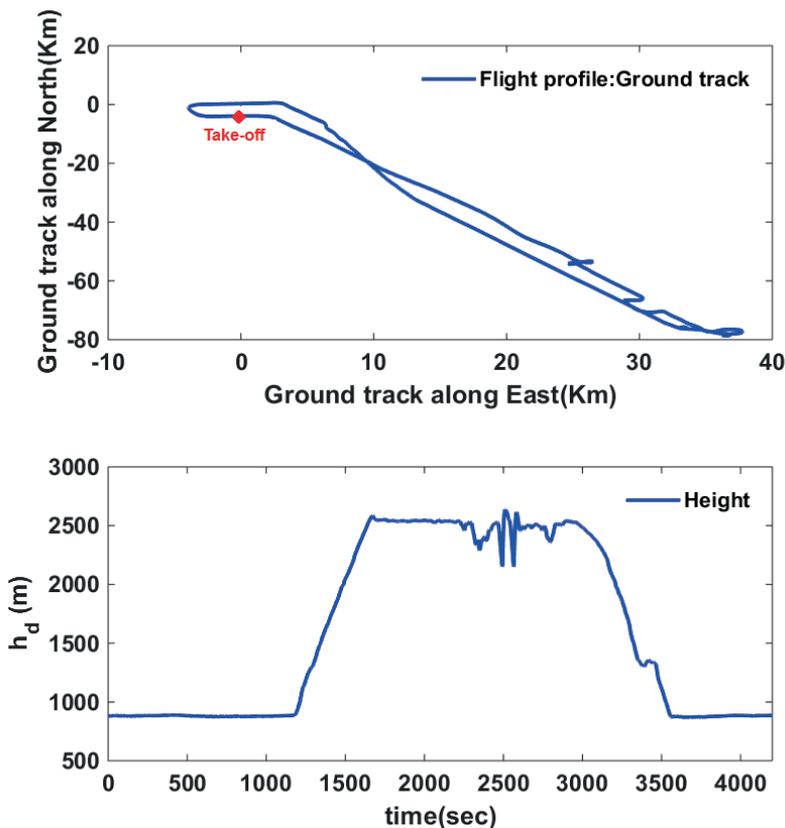


Рис. 4. Траектория полета: земная проекция, показывающая изменение долготы и широты в км (вверху) и профиль высоты (внизу)

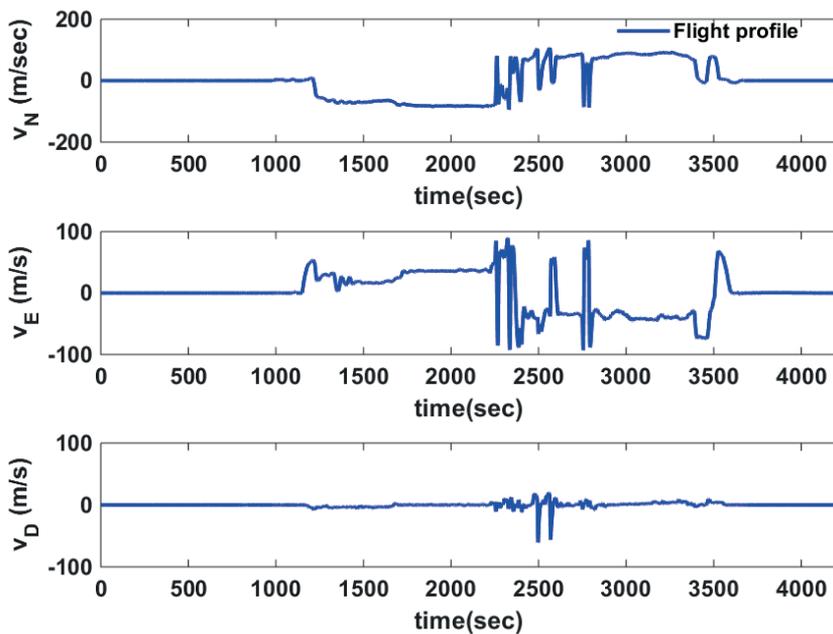


Рис. 5. Профиль скорости в ходе летных испытаний

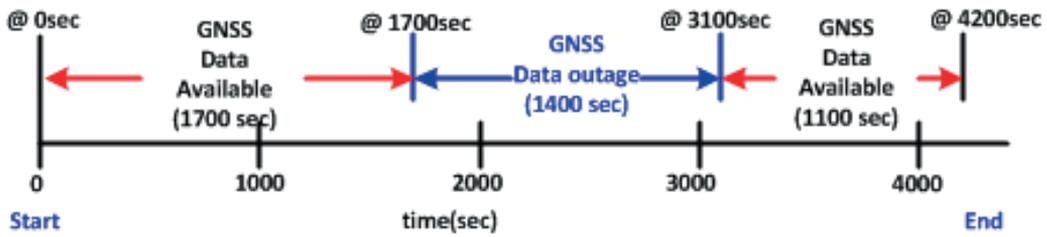


Рис. 6. Временная диаграмма, на которой отмечены моменты пропадания и присутствия сигналов ГНСС

В период отсутствия сигнала ГНСС общей продолжительностью 1400 с погрешность позиционирования составила 500 м, скорости – 0,5 м/с. При этом в случае (с) возобновление сигналов ГНСС на отметке 3100 с позволяет скорректировать погрешности определения местоположения и скорости всего лишь за несколько циклов АФК, в то время как в случае (b) для этого потребовалось большее количество циклов продолжительностью до 1000 с. Изменения погрешностей определения местоположения и скорости показаны на рис. 7 и 8, а их значения и время установления приведены в табл. 3. Изменение величины погрешностей в случае (b) обусловлено использованием ковариации  $P_k$  в момент пропадания сигнала ГНСС – на 1700-й секунде и в момент его возобновления – на 3100-й секунде. В случае (с) ковариация  $P_k$ , вычисленная в момент пропадания сигнала, далее прогнозируется в процессе обновления фильтра (см. раздел 3).

Т а б л и ц а 3

**Погрешности определения местоположения и скорости при пропадании сигналов ГНСС и время установления погрешностей после их возобновления на 3100-й секунде**

Параметр	Местоположение (случай (b))			Местоположение (случай (c))			Скорость (случай (b))			Скорость (случай (c))		
	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$	$v_N$	$v_E$	$v_D$	$v_N$	$v_E$	$v_D$
Погрешность (м, м/с) при пропадании сигналов на 1700-й секунде	-1,5	-2,2	-0,8	-1,5	-2,2	-0,8	0,02	0,03	0,10	0,02	0,03	0,1
Погрешность (м, м/с) при возобновлении сигналов на 3100-й секунде	-123,0	-463,0	-12,0	-123,0	-463,0	-12	-0,27	-0,46	0,09	-0,27	-0,46	0,09
Погрешность (м, м/с) на 3200-й секунде	-36,3	-124,0	1,4	-1,4	0,2	0,6	0,30	1,20	-0,10	-0,03	0,01	-0,07
Установившаяся погрешность состояния (м, м/с)	1,5	1,2	7	1	0,6	5	-0,05	0,09	0,04	-0,02	-0,03	0,03
Время затухания (90%) (с)	210	200	150	3	2	2	410	390	2	3	2	2
Время установления (99%) (с)	648	1100	80	5	5	3	520	1020	1	5	3	1

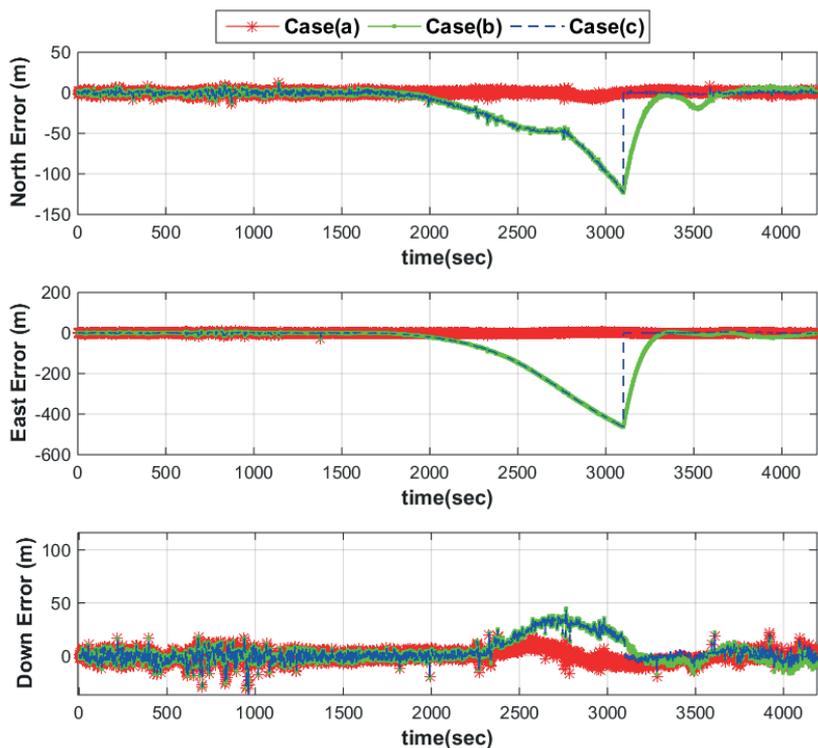


Рис. 7. Погрешности позиционирования при пропадании сигнала ГНСС при прогнозе (с) и отсутствии прогноза ковариации погрешностей (b) в сравнении с номинальным гибридным решением (a)

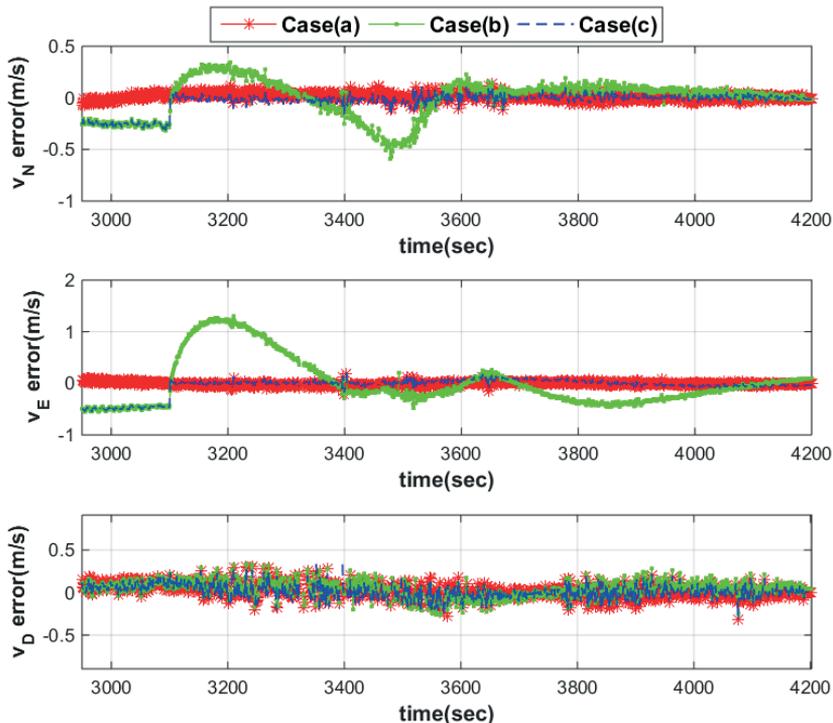


Рис. 8. Погрешности определения скорости при пропадании сигнала ГНСС при прогнозе (с) и отсутствии прогноза ковариации погрешностей (b) в сравнении с номинальным гибридным решением (a)

В случае (с) время установления погрешностей составляет 2-3 с, что значительно меньше, чем в случае (b) – 1100 с. Более быстрая сходимость фильтра за 2-3 цикла в сценарии (с) связана с точным моделированием матрицы  $\Phi_k$  и вычислением матрицы шума  $Q_k$ , описанным в разделе 1.3. Значения СПМ шумов гироскопов и акселерометров согласно их спецификациям составляют  $q_a = 1.0e^{-15}$  (м/с/с<sup>2</sup>)<sup>2</sup>/Гц и  $q_g = 1.0e^{-18}$  (рад/с)<sup>2</sup>/Гц соответственно. В случае (с) на основе спрогнозированной матрицы ковариации в момент возобновления сигналов ГНСС вычисляется новый коэффициент усиления и надлежащим порядком выполняются коррекции вектора состояния. В сценарии (b) коэффициент усиления фильтра  $K_k$ , рассчитанный в момент пропадания сигналов ГНСС на 1700-й секунде, будет повторно использован как псевдокоэффициент на 3100-й секунде. Сценарий (b) аналогичен ситуации определения постоянной матрицы  $Q_k$  без прогнозирования  $P_k$  в отсутствие сигналов ГНСС. Таким образом, в сценарии (b) воспроизводятся условия, при которых получено последнее обновленное значение  $P_k$ , однако это наихудший вариант для проверки предложенного АФК непосредственно после возобновления сигналов ГНСС.

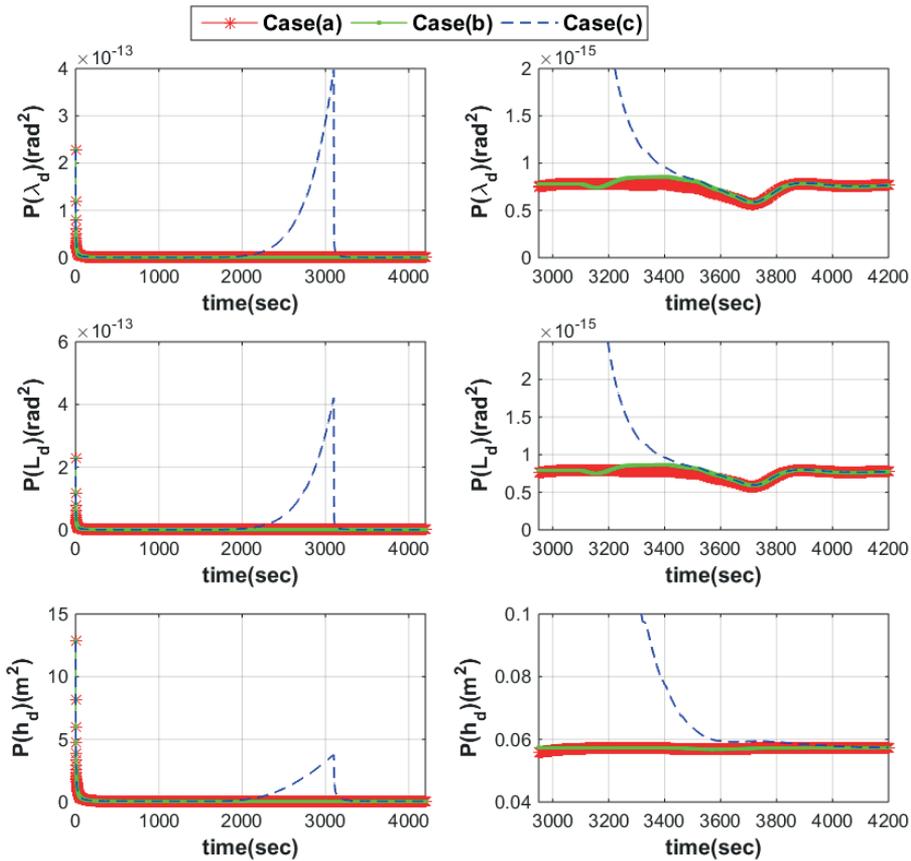


Рис. 9. Ковариация погрешностей определения местоположения (слева), увеличенный интервал 2950–4200 с (справа)

Для упрощения анализа диагональные элементы матрицы  $P_k$  представлены в виде графиков на рис. 9, 10 и 11. Спрогнозированные величины  $P(\delta\lambda_d, \delta L_d, \delta h_d)$  приведены на рис. 9: согласно модели прогноза, описанной в разделе 2 для случая (с), значения ковариации погрешностей БИНС экспоненциально растут до момента возобновления

сигналов ГНСС на 3100-й секунде. Это же явление наблюдается для ковариации погрешностей векторов скорости и углов ориентации, показанных на рис. 10, и векторов смещений нулей гироскопов и акселерометров на рис. 11. Прогноз ковариации погрешностей  $P(\delta w^b)$  имеет значение порядка  $1.0e^{-18}(\text{рад})^2$ , а ковариация вектора погрешностей определения скорости  $P(\delta v^a)$  – порядка  $1.0e^{-2}(\text{м})^2$ . Таким образом, становится очевидной важность U-D-фильтрации при использовании АФК в реальном времени. При возобновлении сигналов ГНСС на 3100-й секунде прогноз ковариации будет соответствовать номинальным ее значениям при U-D-фильтрации, как показано на рис. 9, 10 и 11.

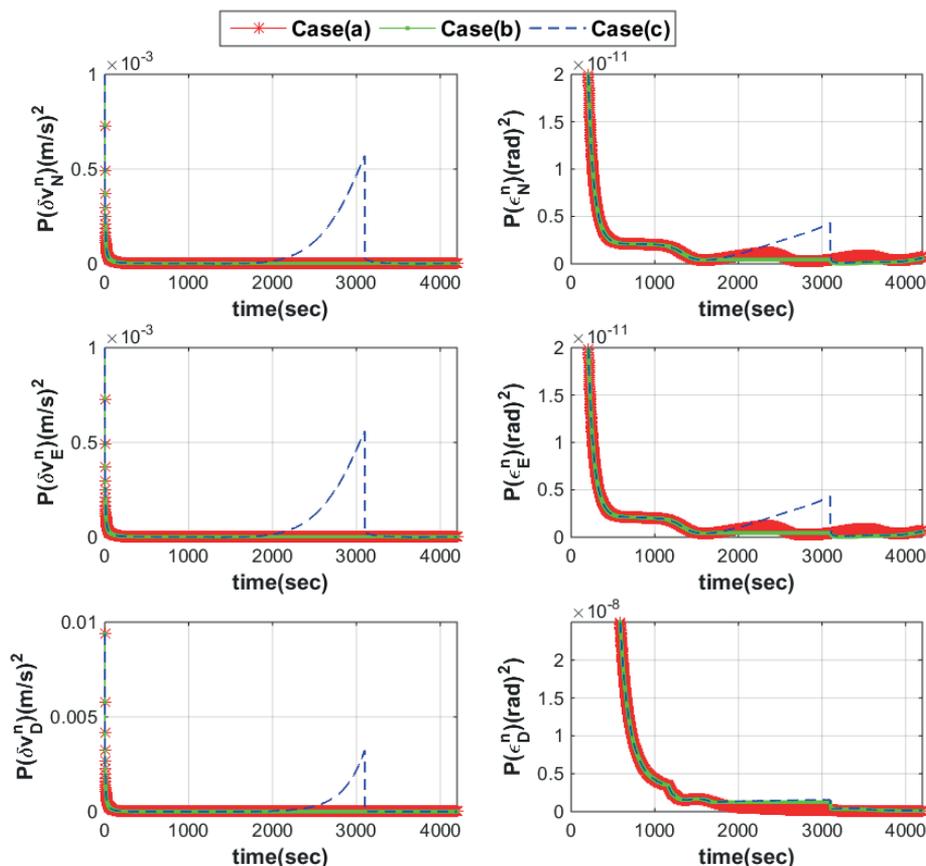


Рис. 10. Ковариация погрешностей определения скорости (слева) и углов ориентации (справа)

Ниже оценки АФК представлены в виде графиков на рис. 12, 13 и 14, они сравниваются друг с другом при следующих условиях:

- номинальная коррекция вектора состояния в случае (а);
- коррекция вектора состояния после возобновления сигналов ГНСС в случае (б);
- коррекция вектора состояния после возобновления сигналов ГНСС в случае (с).

В сценарии (с) коррекции векторов местоположения и скорости выполняются быстрее и характеризуются большей стабильностью, однако в случае (б) оценки их погрешностей запаздывают и опускаются до нуля за 200 с. Это вызвано низкими значениями прогноза матрицы ковариации с постоянной  $Q_k$  и слишком малым коэффициентом усиления фильтра. Аналогичный тренд наблюдается при коррекции углов ориентации (см. рис. 13).

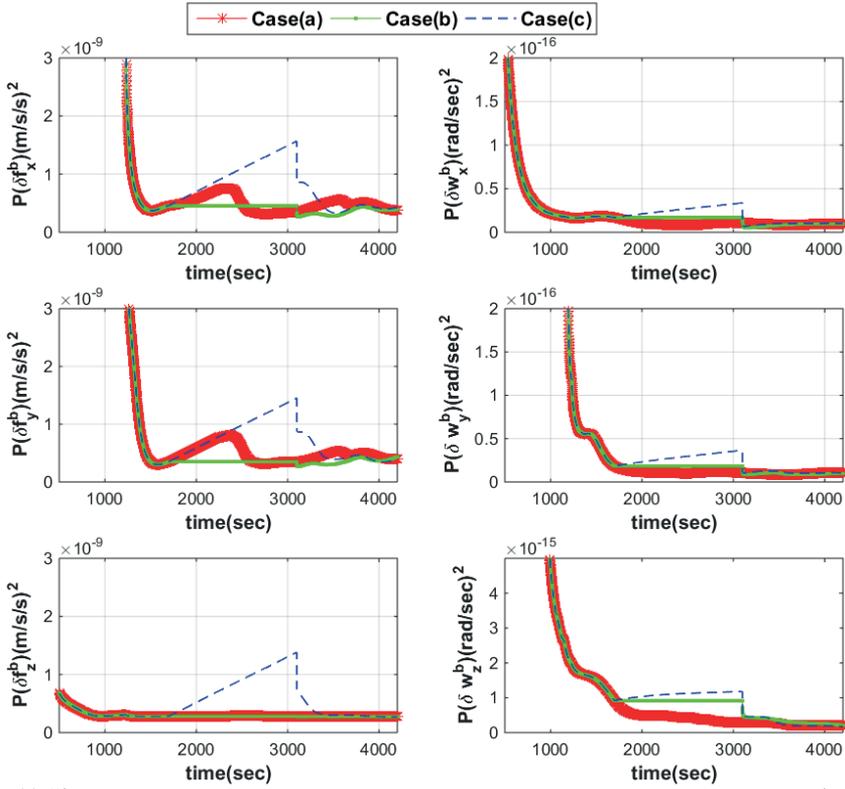


Рис. 11. Ковариация погрешностей определения смещений нулей акселерометров (слева) и гироскопов (справа)

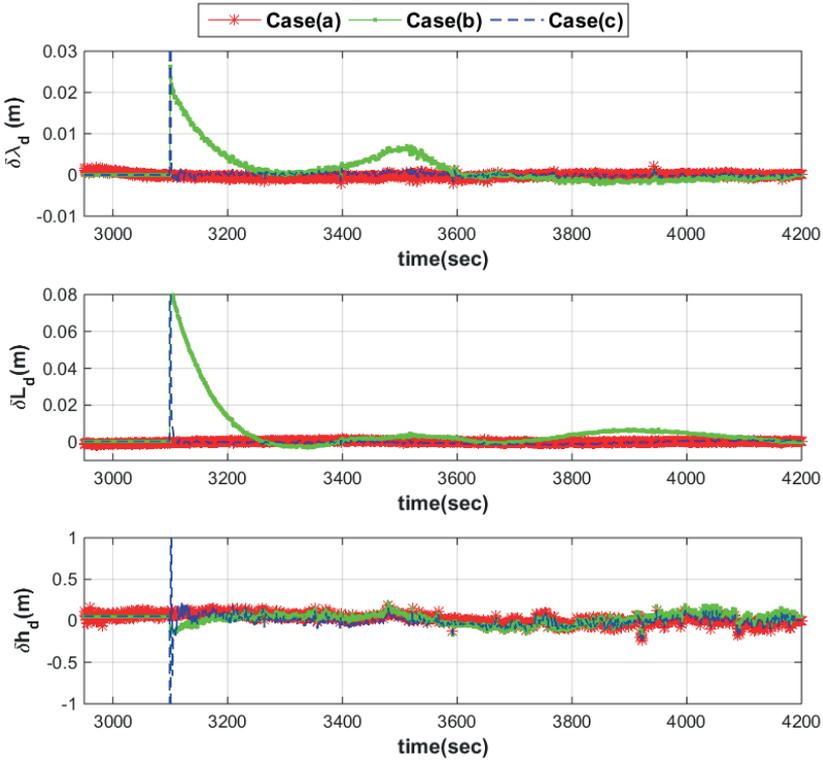


Рис. 12. Коррекции местоположения в сценариях (а), (b), (с)

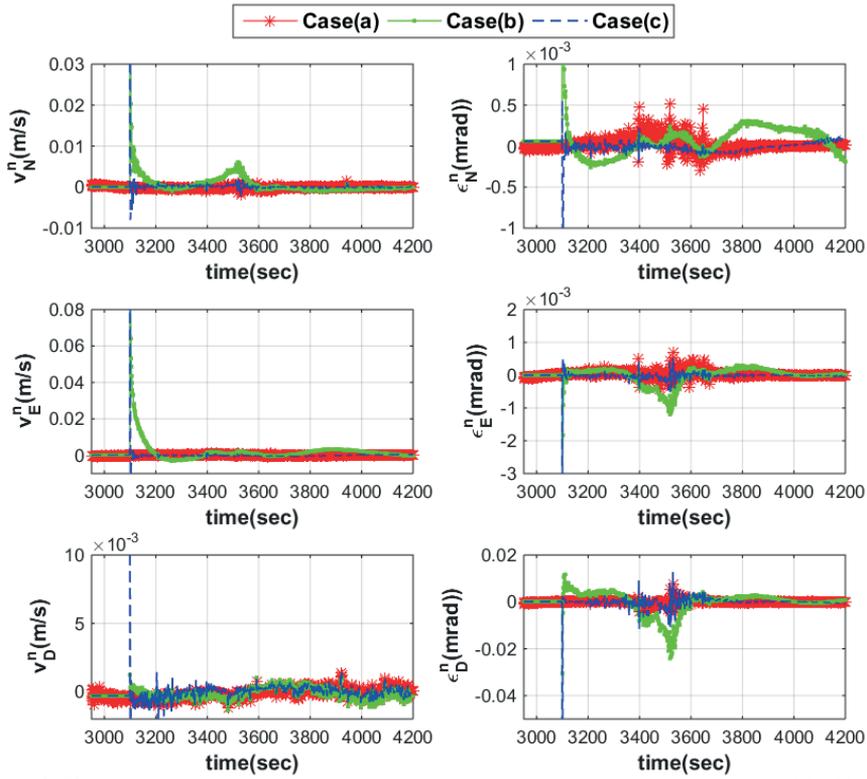


Рис. 13. Коррекции скорости (слева) и углов ориентации (справа) в сценариях (a), (b), (c)

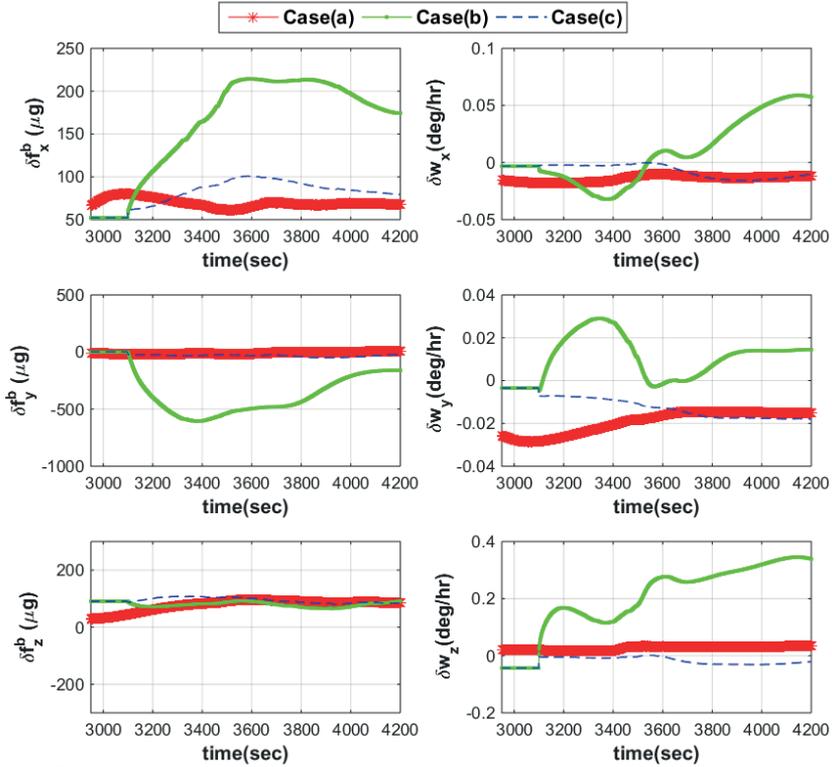


Рис. 14. Оценки вектора смещений нулей акселерометров (слева) и гироскопов (справа) в сценариях (a), (b), (c)

О корректности оценок вектора состояния, вычисленных на основе прогноза матрицы  $P_{k^2}$  можно судить по оценкам смещений нулей гироскопов и акселерометров. В качестве опорных значений смещений нулей принимаются оценки, полученные методом U-D-фильтрации при наличии сигнала ГНСС (см. рис. 14). При сопоставлении с результатами, соответствующими сценарию (а), видно, что оценки смещений нулей акселерометров и гироскопов находятся в пределах  $N(0; 50 \mu\text{g})$  и  $N(0; 0,01 \text{ }^\circ/\text{ч})$  ( $3\sigma$ ) соответственно. При пропадании сигнала ГНСС последними полученными оценками смещений нулей можно воспользоваться для расчета навигационных параметров в инерциальном режиме в сценарии (с). При возобновлении сигналов ГНСС на 3100-й секунде фильтр снова начинает вырабатывать поправки, и в случае (с) оценки смещений нулей находятся в допустимых пределах в течение оставшейся части полета до 4200-й секунды. Вместе с тем в сценарии (b) после возобновления сигналов ГНСС в оценках смещений нулей наблюдаются сильные расхождения (см. рис. 14). Погрешности этих оценок приведены в табл. 4 и 5.

Таблица 4

**Погрешности оценок смещений нулей акселерометров в сценариях (b) и (с) в сравнении с номинальными условиями в сценарии (а)**

Погрешность ( $\mu\text{g}$ )	Случай (b)			Случай (с)		
	$\delta f_x^b$	$\delta f_y^b$	$\delta f_z^b$	$\delta f_x^b$	$\delta f_y^b$	$\delta f_z^b$
Начальная погрешность на 3100-й секунде	-27	19	49	-27	19	49
Минимум	-27	-600	-21	-27	-41	-0,4
Максимум	147	20	41	38	-10	37
СКП	59	192	22	19	18	21
<b>Погрешность на 4200-й секунде</b>	<b>106</b>	<b>-170</b>	<b>5</b>	<b>11</b>	<b>-32</b>	<b>-0,4</b>

Таблица 5

**Погрешности оценок смещений нулей гироскопов в сценариях (b) и (с) в сравнении с номинальными условиями в сценарии (а)**

Погрешность ( $^\circ/\text{ч}$ )	Случай (b)			Случай (с)		
	$\delta w_x^b$	$\delta w_y^b$	$\delta w_z^b$	$\delta w_x^b$	$\delta w_y^b$	$\delta w_z^b$
Начальная погрешность на 3100-й секунде	0,01	0,03	-0,02	0,014	0,025	-0,02
Минимум	-0,01	0,01	-0,06	-0,01	-0,002	-0,06
Максимум	0,07	0,05	0,30	0,01	0,02	-0,02
СКП	0,03	0,011	0,11	0,01	0,010	0,01
<b>Погрешность на 4200-й секунде</b>	<b>0,07</b>	<b>0,03</b>	<b>0,30</b>	<b>0,001</b>	<b>-0,002</b>	<b>-0,05</b>

В сценарии (b) оценка  $\delta f_y^b$  смещения нуля для акселерометра по оси  $y$  составила  $-600 \mu\text{g}$ , в конце периода  $-170 \mu\text{g}$ , тогда как в сценарии (с) эта величина в конце периода равна  $-40 \mu\text{g}$ . Аналогичным образом в сценарии (b) оценка смещения нуля для гироскопа по оси  $z$  составила  $-0,35 \text{ }^\circ/\text{ч}$  и  $-0,35 \text{ }^\circ/\text{ч}$  в конце периода, а в сценарии (с)

$-0,03$  °/ч. СКП смещения нуля в сценарии (с) находится в допустимых пределах  $\pm 0,03$  °/ч в сравнении с расхождением, которое наблюдается в сценарии (b). В итоге прогнозирование матрицы  $P_k$  путем точного моделирования  $\Phi_k$  и  $Q_k$  при помощи U-D-фильтрации значительно улучшает работу БИНС после возобновления сигналов ГНСС за счет точного оценивания вектора состояния, включая калибровку инерциальных датчиков в процессе полета.

#### 4.5. Проверка работы АФК и описание летных сценариев

В предыдущем разделе описывались точное моделирование  $Q_k$  и  $\Phi_k$  и прогнозирование матрицы ковариации погрешностей  $P_k$  при помощи U-D-фильтра, а также представлены результаты летных испытаний. В этом разделе рассмотрим оценивание матрицы ковариации измерений  $R_k$ . В соответствии со стандартной практикой в качестве примера берется постоянная матрица  $Q_k$  с диагональными элементами (Const:QR). Диагональные элементы  $Q_k$  задаются следующим образом:

$$\text{diag}(Q_k) = [(2.45e^{-12} \text{ (рад)}^2, 2.45e^{-12} \text{ (рад)}^2, 25 \text{ м}^2), \\ (2.0e^{-2}, 2.0e^{-2}, 2.0e^{-2})(\text{м/с})^2, \\ 1.0e^{-6} \text{ (рад)}^2, 1.0e^{-6} \text{ (рад)}^2, 1.0e^{-6} \text{ (рад)}^2, \\ 1.0e^{-10}(\text{рад/с})^2, 1.0e^{-10}(\text{рад/с})^2, 1.0e^{-10}(\text{рад/с})^2, \\ 1.0e^{-7}(\text{м/с/с})^2, 1.0e^{-7}(\text{м/с/с})^2, 1.0e^{-7}(\text{м/с/с})^2].$$

Матрица  $Q_k$  непостоянна в процессе адаптивной калмановской фильтрации и вычисляется по формуле (26), в то время как матрица  $R_k$  оценивается в течение всей процедуры фильтрации. Для проверки работы АФК рассмотрены следующие схемы:

- 1) GNSS: наличие данных о местоположении и скорости, полученных от приемника ГНСС, для выбранных созвездий спутников;
- 2) Const:QR: оценка компонент вектора состояния при постоянных матрицах  $Q_k$  и  $R_k$  с диагональными элементами;
- 3) АКФ1: DynQ+SH: DynamicQk + SH-AK – оценка  $R_k$  при помощи АФК методом Сейджа–Хуса;
- 4) АКФ2: DynQ+MW: DynamicQk + MW-AKF – оценка  $R_k$  методом адаптивного оценивания на основе невязок со скользящим окном;
- 5) АКФ3: DynQ+(MW+SH): DynamicQk +(SH+MW)-AKF – оценка  $R_k$  комбинированным методом Сейджа–Хуса и адаптивного оценивания на основе невязок со скользящим окном.

Поскольку на измерения ГНСС оказывают влияние такие факторы, как наличие линии визирования, снижение точности позиционирования (PDOP) и многолучевость, предлагается проверить работу АФК при реализации следующих сценариев летных испытаний.

Сценарий 1: статические условия до взлета на интервале 1–600 с.

Сценарий 2: горизонтальный полет на интервале 1700– 2250 с.

Сценарий 3: маневрирование при полете на интервале 2250–2700 с.

Сценарий 4: проверка работы АФК с модифицированной матрицей  $Q_k$  в условиях маневрирования во время полета.

Экспериментальные данные были исследованы для оценки работы АФК при горизонтальном полете и при маневрировании. Оценка вектора состояния БИНС и адаптивная оценка матрицы  $R_k$  производились при помощи U-D-фильтрации.

#### 4.6. Проверка работы АФК с оцениванием $R_k$ в статических условиях

Для оценки эффективности различных методов, описанных в разделе 3, мы проанализировали измерения ГНСС в статических условиях испытаний. Продолжительность тестов составила 10 мин; погрешности АФК-оценок компонент вектора скорости приведены на рис. 15, а их увеличенный фрагмент на интервале 300–500 с – на рис. 16. Погрешности АФК-оценок компонент вектора местоположения и их увеличенные фрагменты на интервале 300–500 с представлены на рис. 17 и 18 соответственно, параметры их оценок представлены в табл. 6 и 7. Критерием для оценки эффективности различных моделей служит СКП. После анализа измерений ГНСС их параметры были занесены в таблицу; выяснилось, что СКП находятся в заданных пределах (10 м), а максимальная погрешность по вертикальному каналу составляет 21 м. Далее задействуется U-D-фильтр с постоянной диагональной матрицей  $Q_k$ , и оценки дисперсии немного снижаются. Затем при помощи метода Сейджа–Хуса (AKF1) [34] обеспечивается дальнейшее уменьшение СКП, хотя при этом возникают случайные пиковые значения оценок скорости.

Вслед за этим реализуется АФК на основе скользящего окна (MW-AKF), построенный на алгоритме Мейбека [35], который позволяет повысить эффективность схемы AKF2. Наконец, приводятся результаты применения двух схем (AKF3 на основе SH+MW), благодаря которым происходит дальнейшее повышение качества работы, особенно в каналах горизонтальной скорости. Сравнение схем SH-AKF (AKF1) и MW-AKF (AKF2) продемонстрировало, что вторая из них дает возможность более качественно оценить скорость при использовании U-D-фильтрации с точным вычислением матриц  $\Phi_{(s)k}$  и  $Q_k$ . При комбинированной схеме AKF3 на основе SH+MW наблюдалось незначительное улучшение по вертикальному каналу и значительное – по горизонтальным. Что касается оценок погрешностей позиционирования, схема AKF3 дала более высокие результаты в сравнении с AKF2 и AKF1. Кроме того, оказалось, что составляющие скорости в АФК лучше оцениваются, чем параметры местоположения. Следовательно, необходимо повысить эффективность АФК в части оценок местоположения. Оценки  $R_k(\delta v_e^n)$  используются в канале обратной связи АФК для последующего оценивания во время полета – как горизонтального, так и в условиях маневрирования.

#### 4.7. Проверка работы АФК с оцениванием $R_k$ в условиях горизонтального полета

Во время горизонтального полета на интервале 1700–2250 с высота ЛА удерживалась на номинальном уровне 2500 м (рис. 19), соответствующие изменения углов Эйлера составили  $<5^\circ$  (рис. 20), PDOP был менее 1,75. Сравнивалась эффективность предлагаемых алгоритмов АФК и решения с использованием ГНСС и традиционной модели БИНС с постоянными матрицами  $Q$ ,  $R$ . Более высокие результаты были получены при использовании АФК: СКП значительно снизилась в сравнении с СКП входящих данных ГНСС о местоположении и скорости. Погрешности определения скорости и местоположения представлены на рис. 21 и 22. Диагональные элементы оцениваемой матрицы  $R_k$  для схем AKF1, AKF2 и AKF3 в части измерения скорости и местоположения демонстрируют высокую согласованность (рис. 23 и 24). Схема AKF3 обеспечивает более гладкие оценки  $R_k$  в сравнении со схемами AKF1 и AKF2. Следует также отметить, что схемы AKF1, AKF2 и AKF3 с предложенным динамическим вычислением  $Q_k$  и адаптивным оцениванием  $R_k$  работают одинаково как в условиях горизонтального полета, так и в статических условиях (см. рис. 15 и 17).

Таблица 6

Статический сценарий 1: погрешности определения местоположения (м) при использовании схем адаптивной фильтрации

Погрешность	GNSS			Const:QR			AKF1: ДунQ+SH			AKF2: ДунQ+MW			AKF3: ДунQ+(SH+MW)		
	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$
Средняя	-0,23	0,52	-2,07	-0,23	0,51	-2,07	-0,16	0,74	-2,02	-0,16	0,67	-2,17	-0,13	0,74	-1,06
Максимум	8,14	8,14	21,00	6,38	6,38	16,38	1,21	1,21	0,62	1,21	1,21	0,23	1,21	1,21	2,21
Минимум	-8,03	-6,49	-16,00	-5,72	-4,73	-15,05	-2,53	0,33	-4,14	-2,53	-0,44	-4,16	-2,53	-0,33	-3,46
СКП	<b>2,07</b>	<b>2,09</b>	<b>5,28</b>	<b>1,79</b>	<b>1,77</b>	<b>4,57</b>	<b>0,66</b>	<b>0,48</b>	<b>1,15</b>	<b>0,66</b>	<b>0,52</b>	<b>1,09</b>	<b>0,62</b>	<b>0,46</b>	<b>1,54</b>

Таблица 7

Статический сценарий 1: погрешности определения скорости (м/с) при использовании схем адаптивной фильтрации

Погрешность	GNSS			Const:QR			AKF1: ДунQ+SH			AKF2: ДунQ+MW			AKF3: ДунQ+(SH+MW)		
	$v_N$	$v_E$	$v_D$	$v_N$	$v_E$	$v_D$	$v_N$	$v_E$	$v_D$	$v_N$	$v_E$	$v_D$	$v_N$	$v_E$	$v_D$
Средняя	0,00	0,00	-0,06	-0,00	0,00	-0,05	-0,00	0,00	-0,03	0,00	0,00	-0,03	-0,00	0,00	-0,02
Максимум	0,21	0,10	0,20	0,12	0,06	0,14	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,03	0,01	0,01
Минимум	-0,14	-0,14	-0,33	-0,11	-0,07	-0,21	-0,06	-0,02	-0,05	-0,06	-0,02	-0,05	-0,06	-0,01	-0,04
СКП	<b>0,03</b>	<b>0,022</b>	<b>0,06</b>	<b>0,02</b>	<b>0,012</b>	<b>0,04</b>	<b>0,01</b>	<b>0,008</b>	<b>0,01</b>	<b>0,01</b>	<b>0,007</b>	<b>0,01</b>	<b>0,01</b>	<b>0,004</b>	<b>0,01</b>

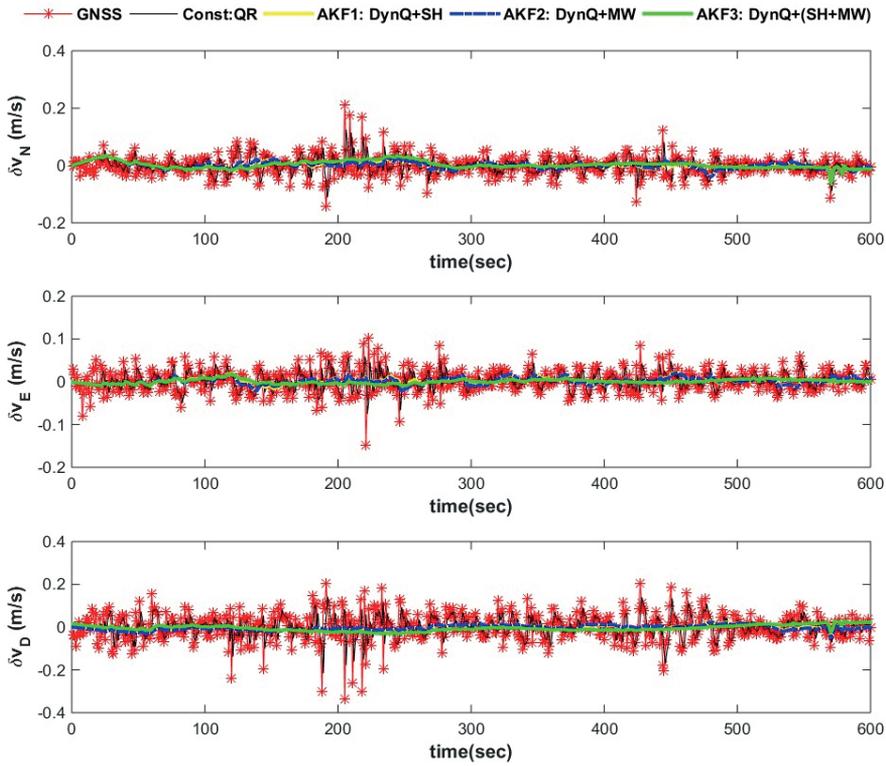


Рис. 15. Статический сценарий 1: погрешности определения компонент вектора скорости с использованием АФК

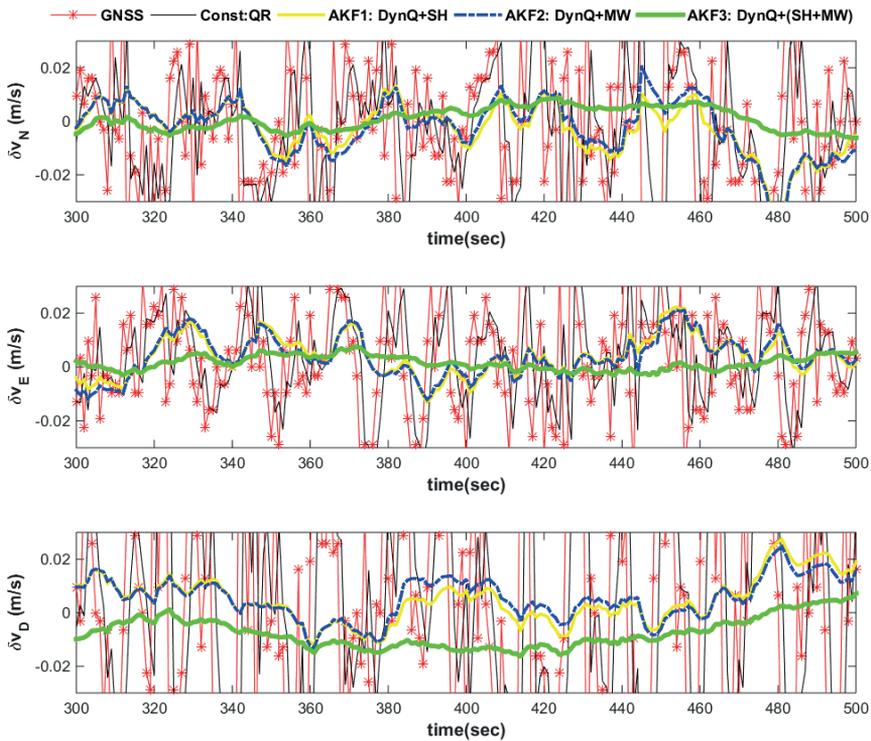


Рис. 16. Статический сценарий 1: погрешности определения компонент вектора скорости с использованием АФК. Увеличенный фрагмент на интервале 300–500 с

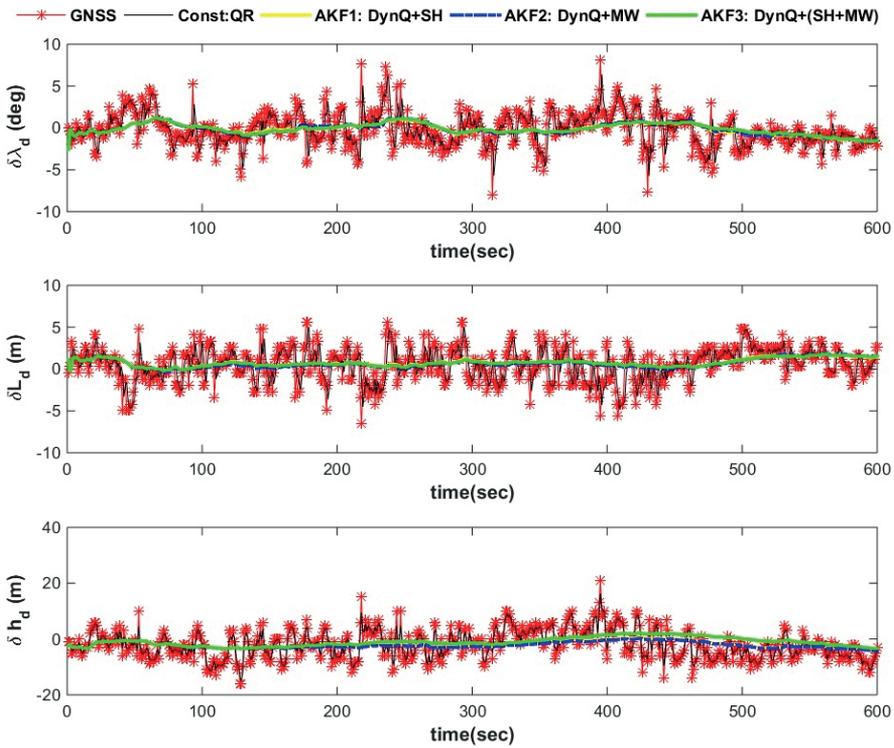


Рис. 17. Статический сценарий 1: погрешности определения компонент вектора местоположения с использованием АКФ

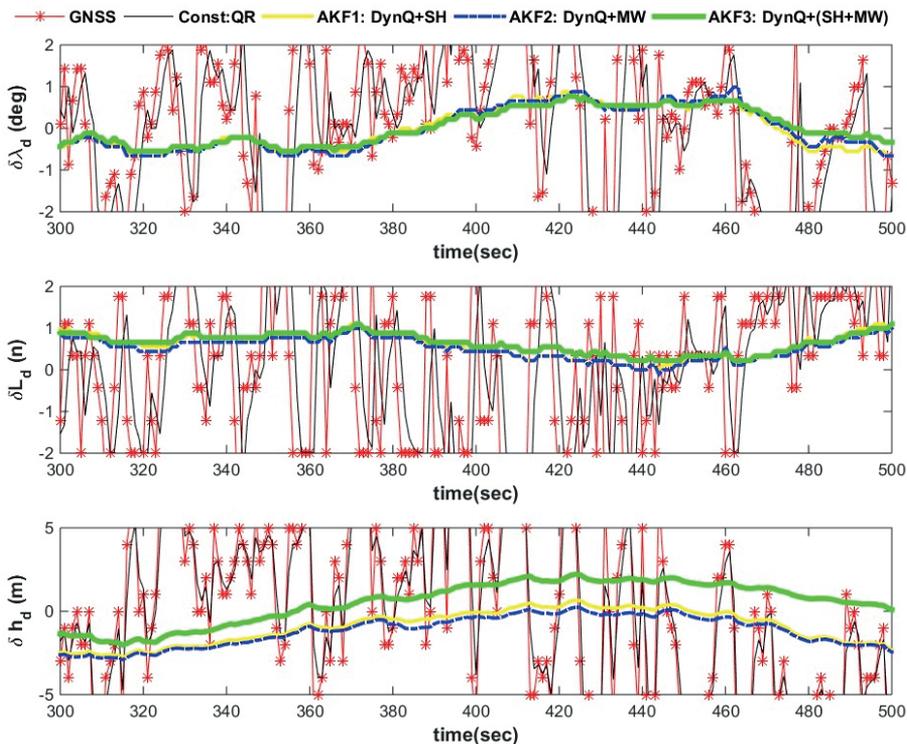


Рис. 18. Статический сценарий 1: погрешности определения компонент вектора местоположения с использованием АКФ. Увеличенный фрагмент на интервале 300–500 с

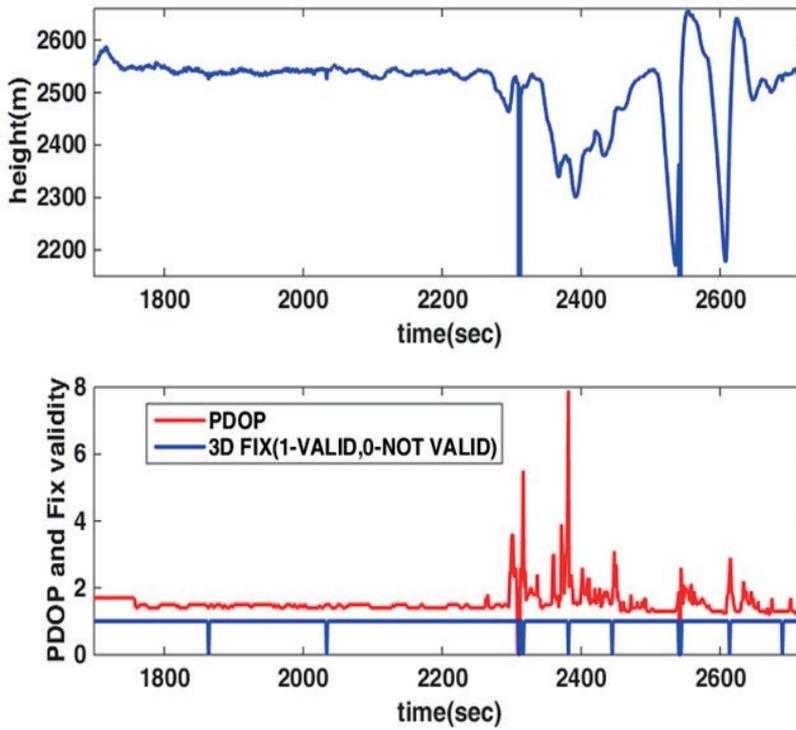


Рис. 19. Горизонтальный и маневрирующий полет. Высота ЛА (вверху), геометрический фактор PDOP и достоверность данных ГНСС: 1 – достоверно; 0 – недостоверно (внизу)

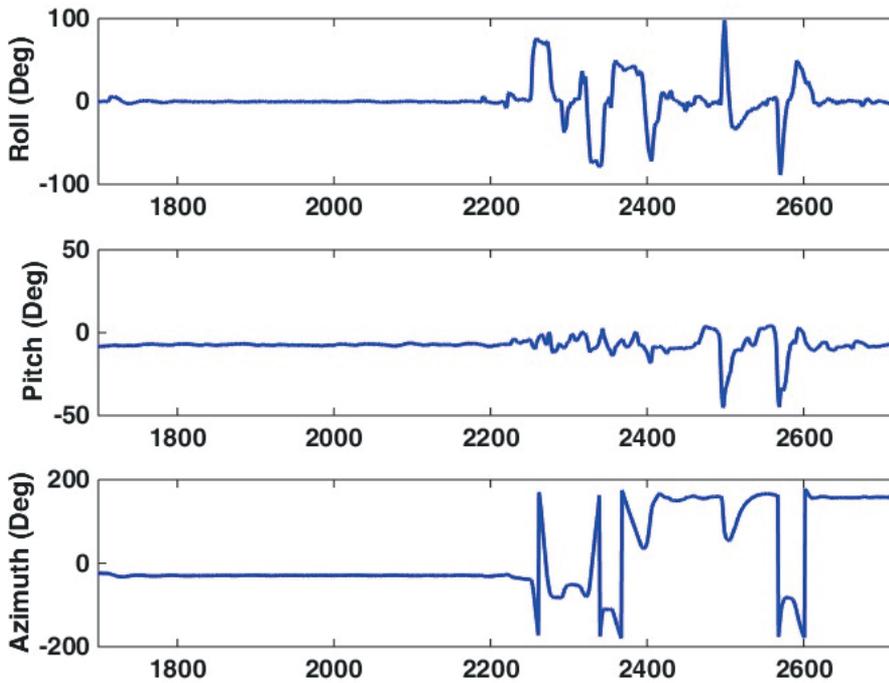


Рис. 20. Горизонтальный и маневрирующий полет: углы крена (вверху), тангажа (в середине), азимута (внизу)

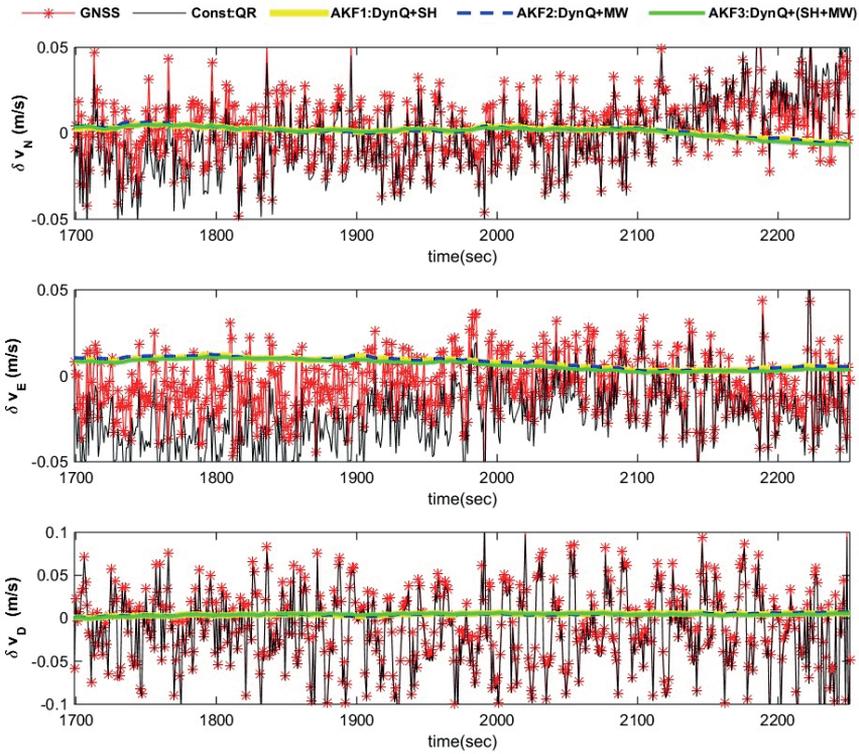


Рис. 21. Горизонтальный полет, сценарий 2: погрешности при АФК-оценке компонент вектора скорости на интервале 1700–2250 с

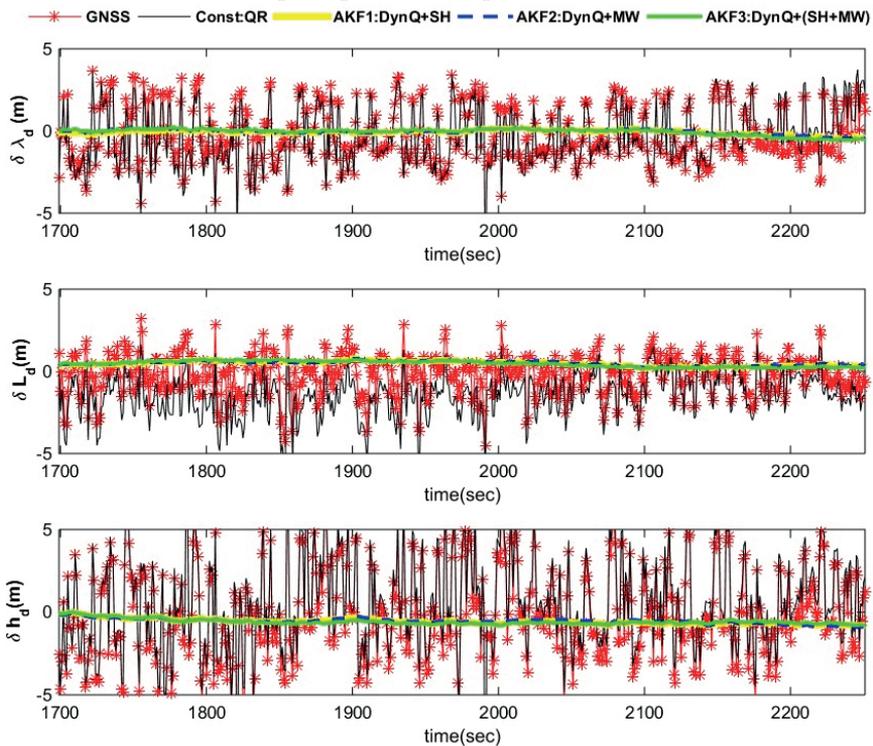


Рис. 22. Горизонтальный полет, сценарий 2: погрешности выработанных АФК оценок компонент вектора местоположения АФК на интервале 1700–2250 с

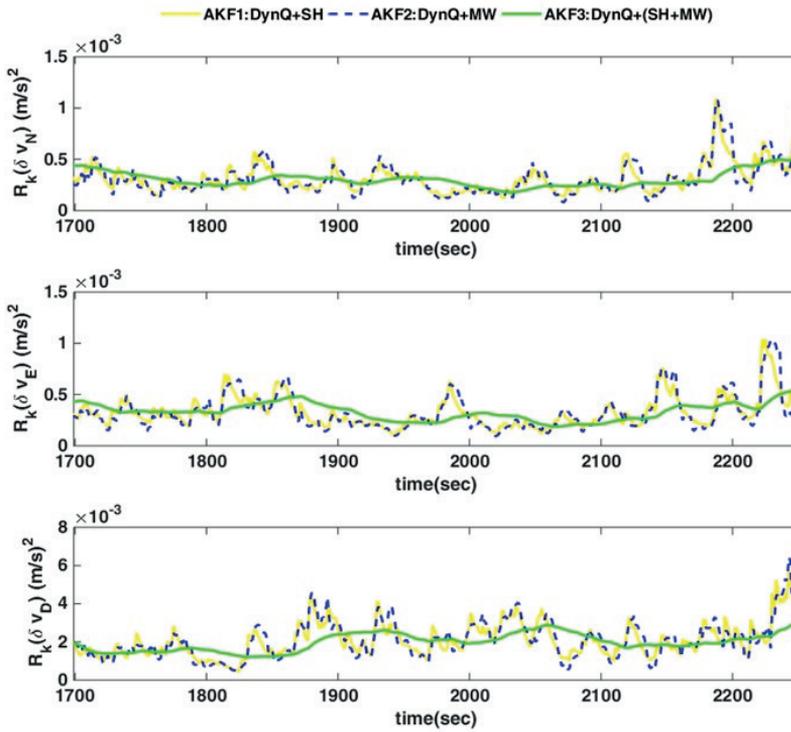


Рис. 23. Горизонтальный полет, сценарий 2: выработанные АФК оценки скоростных элементов матрицы  $R_k$  вектора скорости на интервале 1700–2250 с

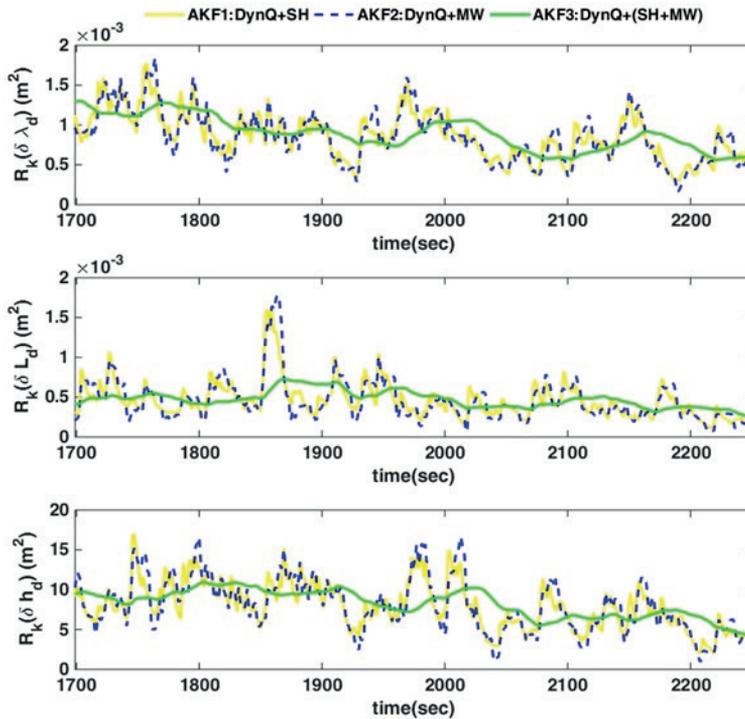


Рис. 24. Горизонтальный полет, сценарий 2: выработанные АФК оценки позиционных элементов матрицы  $R_k$  вектора местоположения на интервале 1700–2250 с

#### 4.8. Проверка работы АФК с оцениванием $R_k$ при полете в условиях маневрирования

ЛА выполнял маневр на интервале 2250–2700 с; полученные значения углов крена, тангажа и азимута представлены на рис. 20. На рис. 19 показан статус достоверности 3D-данных ГНСС и значения фактора PDOP. Очевидно, что на виражах ЛА наблюдается пропадание 3D-данных, а увеличение фактора PDOP оказывает непосредственное влияние на точность позиционирования. Видно, что предлагаемые варианты АФК более эффективны, чем традиционный метод Const:QR. На интервале 2250–2700 с схема АКФ3 работает лучше, чем АКФ1 и АКФ2 (рис. 25 и 26). Оценки диагональных элементов матрицы  $R_k$  представлены на рис. 27 и 28.

Оценки  $R_k(\delta v_N)$ ,  $R_k(\delta v_E)$ ,  $R_k(\delta v_D)$  учитываются в контуре обратной связи, а оценки  $R_k(\delta \lambda_d)$ ,  $R_k(\delta L_d)$ ,  $R_k(\delta h_d)$  используются для мониторинга. После тщательного наблюдения за оценками составляющих  $R_k(\delta v_N)$ ,  $R_k(\delta v_E)$  погрешности определения скорости  $R_k$  становится очевидно, что оценки  $R_k(\delta \lambda_d)$ ,  $R_k(\delta L_d)$ ,  $R_k(\delta h_d)$  согласованы. Тем не менее дисперсия  $R_k(\delta v_D)$  больше дисперсии горизонтальных составляющих  $R_k(\delta v_N)$ ,  $R_k(\delta v_E)$ . Точно так же дисперсия  $R_k(\delta h_d)$  превышает дисперсию горизонтальных составляющих  $R_k(\delta \lambda_d)$ ,  $R_k(\delta L_d)$ . Разница между составляющими горизонтального и вертикального каналов обусловлена слабым взаимодействием между ними. Погрешности в горизонтальном канале растут медленнее, чем в вертикальном. Поскольку дисперсии оценок  $R_k(\delta v_N)$ ,  $R_k(\delta v_E)$  ниже, соответствующие дисперсии  $R_k(\delta \lambda_d)$ ,  $R_k(\delta L_d)$  тоже имеют более низкие значения – порядка 0,01 м<sup>2</sup>. Следует отметить, что при использовании схемы АКФ3 оценки дисперсий меняются постепенно, а в случае схем АКФ1 и АКФ2 – резко увеличиваются или уменьшаются.

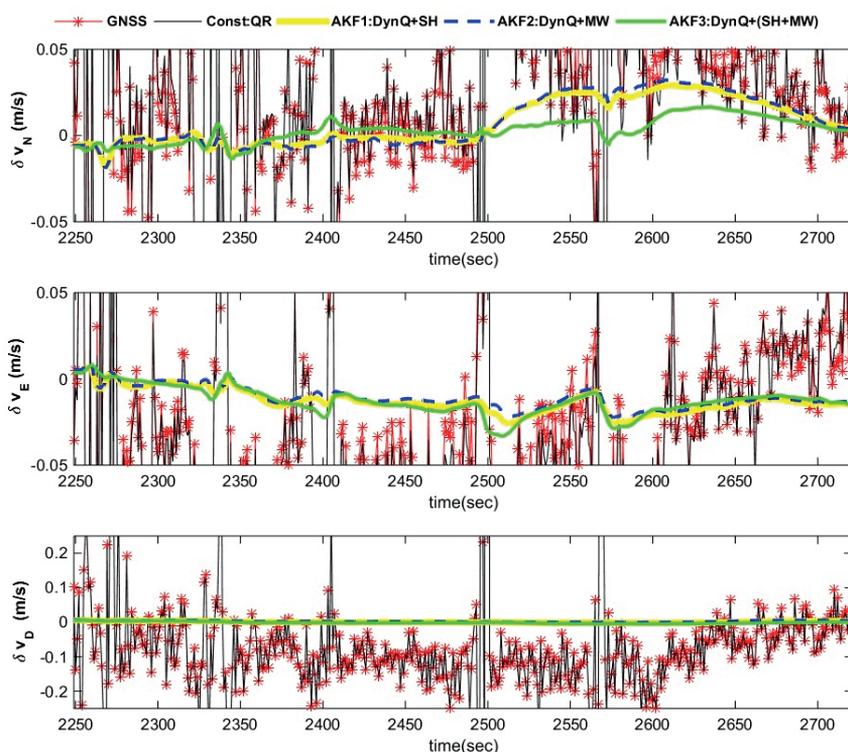


Рис. 25. Полет в условиях маневрирования, сценарий 3: погрешности определения компонент вектора скорости с применением АФК на интервале 2250–2700 с

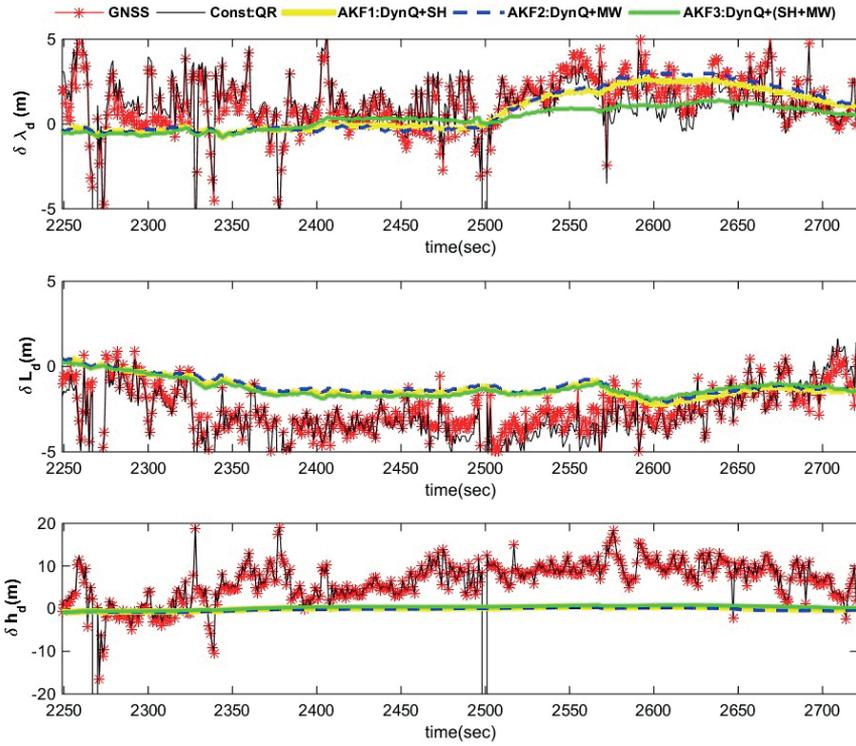


Рис. 26. Полет в условиях маневрирования, сценарий 3: погрешности определения компонент вектора местоположения с применением АФК на интервале 2250–2700 с

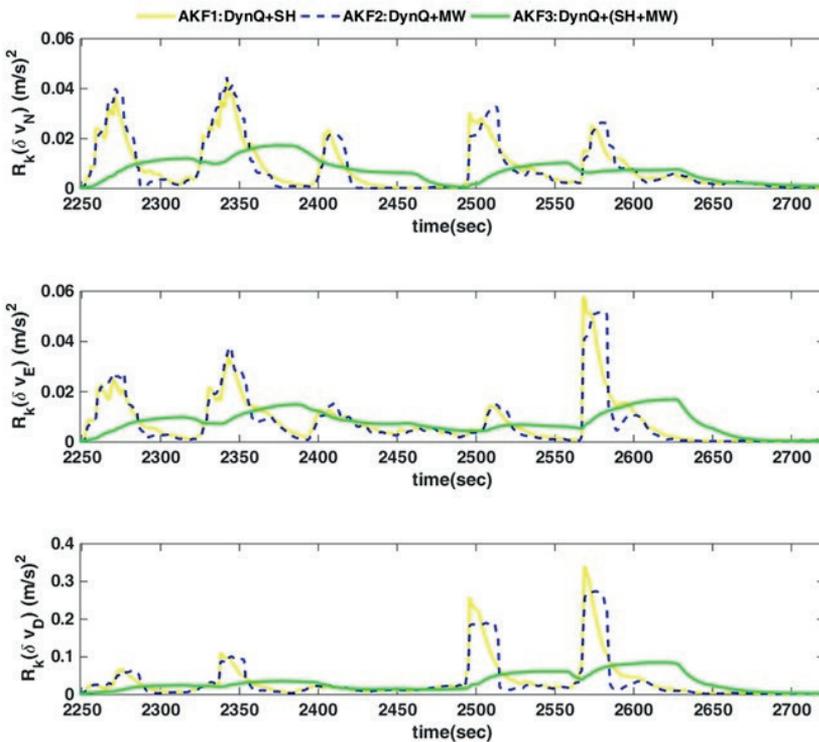


Рис. 27. Полет в условиях маневрирования, сценарий 3: выработанные АФК оценки скоростных элементов матрицы  $R_k$  на интервале 2250–2700 с

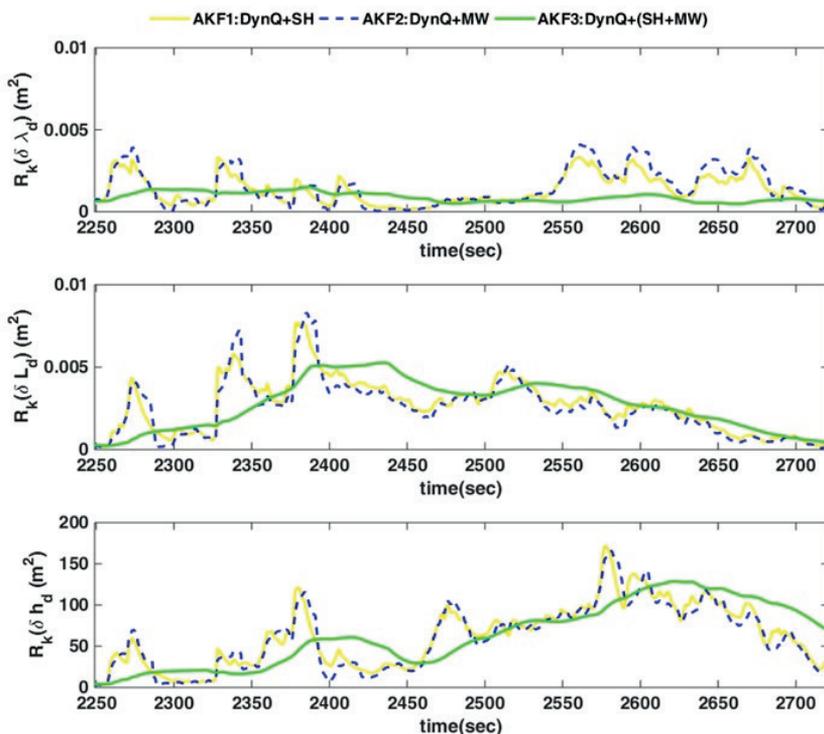


Рис. 28. Полет в условиях маневрирования, сценарий 3: выработанные АФК оценки позиционных элементов матрицы  $R_k$  вектора местоположения на интервале 2250–2700 с

#### 4.9. Проверка АФК с модифицированной матрицей $Q_k$ при полете в условиях маневрирования

Опираясь на исследование [4], положим, что при заходе на посадку значения СПМ вырастут до предельного уровня за счет активного функционирования всех систем управления. В связи с этим проверим эффективность применения предложенных вариантов АФК при полете в условиях маневрирования на интервале 2250–2700 с и при использовании модифицированной матрицы  $Q_k$ . Чтобы смоделировать большие значения СПМ, ранее полученные значения удваиваются. На рис. 29 и 30 представлены погрешности определения компонент скорости и местоположения соответственно, полученные с помощью различных модификаций АФК и традиционного метода с постоянными  $Q, R$ . Параметры оценок компонент векторов местоположения и скорости приведены в табл. 8 и 9. Видно, что традиционный метод Const:QR при маневрировании воздушного судна работает хуже, чем АФК. СКП вариантов АФК с модифицированными СПМ больше, чем у АФК с откалиброванными СПМ.

Модификации АФК с динамической матрицей  $Q_k$  продемонстрировали более высокую точность и робастность при определении местоположения и скорости, чем традиционные методы вычисления  $Q_k$  на основе адаптивных масштабных коэффициентов. Таким образом, на практике требуется стабильное решение, при этом метод АКФ3, предусматривающий динамическое вычисление матрицы  $Q_k$ , характеризуется большей робастностью при оценивании вектора местоположения, чем АКФ1 и АКФ2.

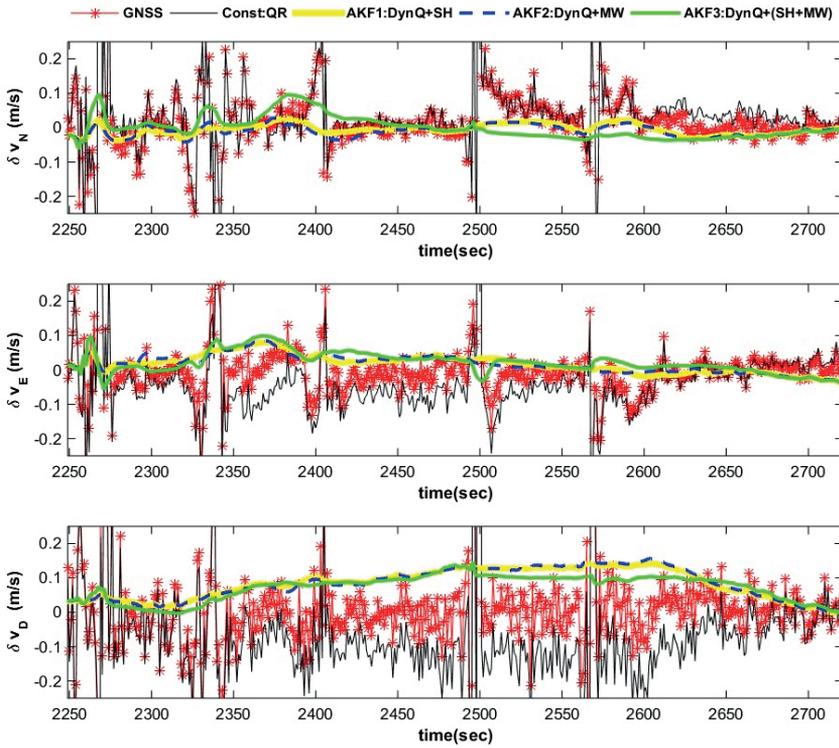


Рис. 29. Полет в условиях маневрирования, сценарий 4: погрешности АФК-оценок компонент вектора скорости на интервале 2250–2700 с

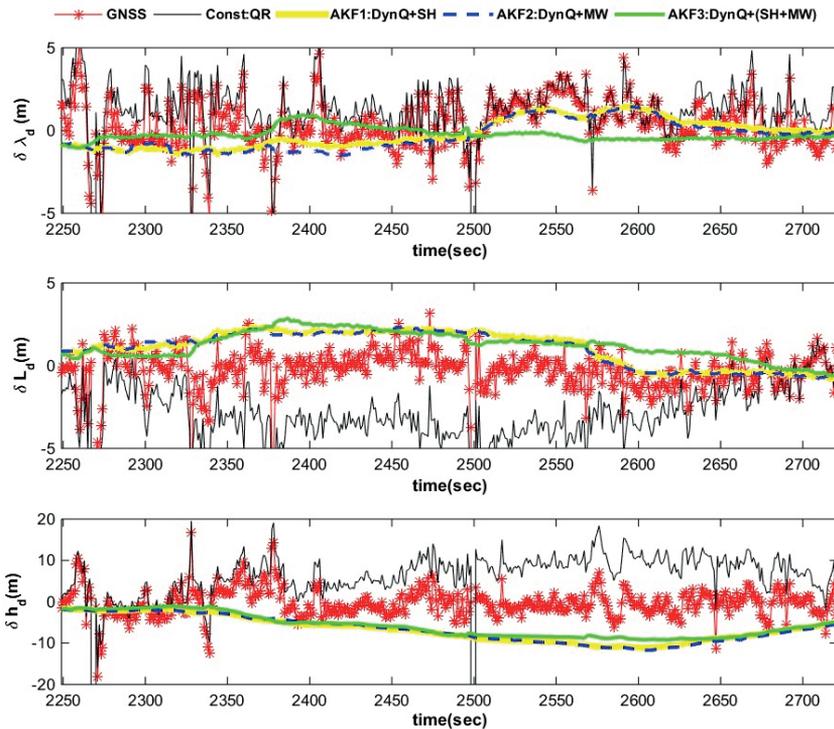


Рис. 30. Полет в условиях маневрирования, сценарий 4: погрешности АФК при оценке вектора местоположения на интервале 2250–2700 с

Таблица 8

Полет в условиях маневрирования, сценарий 4: погрешности определения местоположения (м) при использовании схем адаптивной фильтрации

Погрешность	GNSS			Const:QR			AKF1: DynQ+SH			AKF2: DynQ+MW			AKF3: DynQ+(SH+MW)		
	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$	$\lambda_d$	$L_d$	$h_d$
Средняя	0,34	-0,28	-0,28	1,291	-2,85	6,611	-0,176	1,070	-6,623	-0,326	1,022	-6,710	-0,235	1,235	-5,890
Максимум	5,39	3,19	16,79	7,04	1,65	19,54	1,43	2,31	-1,694	1,43	2,31	-1,872	0,990	2,860	-1,013
Минимум	-9,79	-9,35	-18,01	-8,47	-11,88	-15,63	-1,43	-0,77	-11,14	-1,54	-0,88	-11,74	-1,10	-0,66	-9,219
СКП	<b>1,618</b>	<b>1,254</b>	<b>3,522</b>	<b>1,557</b>	<b>1,645</b>	<b>4,608</b>	<b>0,861</b>	<b>1,057</b>	<b>3,039</b>	<b>0,905</b>	<b>1,044</b>	<b>3,136</b>	<b>0,396</b>	<b>0,829</b>	<b>2,775</b>

Таблица 9

Полет в условиях маневрирования, сценарий 4: погрешности определения скорости (м/с) при использовании схем адаптивной фильтрации

Погрешность	GNSS			Const:QR			AKF1: DynQ+SH			AKF2: DynQ+MW			AKF3: DynQ+(SH+MW)		
	$v_N$	$v_E$	$v_D$	$v_N$	$v_E$	$v_D$	$v_N$	$v_E$	$v_D$	$v_N$	$v_E$	$v_D$	$v_N$	$v_E$	$v_D$
Средняя	-0,01	-0,01	-0,01	0,028	-0,045	0,075	-0,006	0,018	0,083	-0,009	0,018	0,083	-0,006	0,022	0,072
Максимум	0,64	0,39	1,54	0,675	0,333	1,408	0,026	0,081	0,143	0,028	0,088	0,156	0,095	0,099	0,147
Минимум	-0,43	-0,73	-0,54	-0,393	-0,752	-0,671	-0,037	-0,035	-0,005	-0,042	-0,034	-0,007	-0,062	-0,057	-0,003
СКП	<b>0,09</b>	<b>0,08</b>	<b>0,16</b>	<b>0,092</b>	<b>0,084</b>	<b>0,163</b>	<b>0,015</b>	<b>0,025</b>	<b>0,043</b>	<b>0,016</b>	<b>0,026</b>	<b>0,045</b>	<b>0,032</b>	<b>0,031</b>	<b>0,037</b>

В то же время несколько более точную оценку вектора скорости можно получить методом АКФ1. Меньшая точность АКФ2 и АКФ3 может быть связана с эффектом последовательного осреднения невязок на рассмотренной длине окна и с несоответствием входящих измерений гауссовскому распределению на коротком временном интервале. Делается вывод, что с помощью адаптивной фильтрации можно оценивать векторы либо скорости, либо местоположения в зависимости от требований приложения (приведение в действие боезаряда или навигация ЛА).

#### 4.10. Обсуждение

Поскольку на измерения ГНСС влияют внешние факторы, авторы настоящей статьи изучили эффективность различных методов оценивания, ниже представлены полученные результаты. В частности, было продемонстрировано, что метод АКФ3 работает лучше, чем метод Сейджа–Хуса (АКФ2), особенно в части оценивания вектора местоположения. Кроме того, методы, предусматривающие динамическое оценивание  $R_k$ , дают более высокие результаты, чем использование постоянной матрицы  $R_k$ , однако требуют дополнительных вычислений. Как показано в [7], не рекомендуется одновременно оценивать  $Q_k$  и  $R_k$ , поскольку это приводит к нестабильности процесса фильтрации в навигационных приложениях, работающих в течение длительного времени [36]. По этой причине было отдано предпочтение вычислению  $Q_k$  за счет улучшенного моделирования  $\Phi_{(s)k}$  на основе спектральных параметров инерциальных датчиков. Эффективность этого подхода подтверждается путем прогнозирования матрицы  $P_k$  при пропадании сигнала ГНСС. Оценки векторов смещений нулей гироскопов и акселерометров служат основой для оценки дрейфа погрешностей определения местоположения и скорости.

Основная задача статьи – изучить варианты АФК, наиболее подходящие для навигации автономных объектов в реальном времени, когда результаты измерений зависят от ряда внешних факторов. Производится оценка матрицы  $R_k$  в статическом режиме, а также в условиях горизонтального полета и маневрирования. Кроме того, система должна обладать достаточно высоким уровнем помехозащищенности, чтобы заранее обнаруживать присутствие внешних помех. В таких ситуациях оценивание матрицы  $R_k$  рассматривается как дополнение к текущей работе и является предметом дальнейших исследований.

Синхронизация по времени – другой важный аспект, который следует учитывать при реализации ОФК, так как временная задержка между поступлением данных ИНС и ГНСС в процессе фильтрации может приводить к нежелательному шуму измерений, что влечет за собой расхождение или ухудшение работы фильтра в кратковременные периоды совершаемых ЛА виражей. Тактовый импульс приемника на частоте 1 Гц используется для синхронизации данных ГНСС и ИНС при выработке невязок измерений ОФК. Погрешности синхронизации компенсируются с помощью тактового импульса с точностью не менее 2,5 мс, который подробно здесь не рассматривается. В пользовательских приемниках возможности такой аппаратной синхронизации ограничены, поэтому требуются дополнительные действия: расширение вектора состояния и оценка погрешности синхронизации [37].

Что касается влияния смещения фазового центра антенны ГНСС относительно блока акселерометров БИНС на измерения скорости, то полагаем, что в этом случае

составляющие скорости корректируются с помощью отфильтрованных данных об угловой скорости, выработанных гироскопами. С этой целью построен низкочастотный фильтр Баттерворта с бесконечной импульсной характеристикой с минимальным количеством групповых задержек и  $f_{3db} = 1,91$  Гц. Тем не менее с учетом специфики динамики платформы и резервного времени вычислений можно найти более подходящий метод фильтрации. При пропадании сигналов ГНСС навигационная система начинает работать в инерциальном режиме, и появляется дрейф на уровне 1 мор. мили в час для горизонтальных каналов. При этом вертикальный канал нестабилен, при высокой скорости дрейфа в нем накапливается погрешность. Эту проблему можно решить путем демпфирования вертикального канала с использованием баровысотомера. Подробнее об этом см. в [38] и [39].

Помимо адаптивного вычисления  $R_k$  рассматривается точное вычисление  $Q_k$ , которое предлагается задействовать вместо адаптивного оценивания на основе адаптивных масштабных коэффициентов. Прогнозирование  $P_k$  имеет такое же большое значение, как и влияние матриц  $\Phi_k$  и  $Q_k$ . Прогноз  $P_k$ , выполненный при пропадании сигналов ГНСС, повторно применяется после их возобновления, так что коэффициент усиления фильтра при соответствующих невязках автоматически рассчитывается для коррекции сигналов обратной связи. Исследуется эффективность АФК на основе невязок для оценивания скоростных и позиционных компонент матрицы  $R_k$ . В ходе экспериментальной проверки в статическом режиме выяснилось, что с помощью вектора скорости на основе невязок можно вычислить  $R_k$ . Дальнейшие исследования позволят выяснить, насколько эффективно адаптивное оценивание  $R_k$  на основе невязок местоположения и какова его взаимосвязь с оцениванием на основе невязок скорости.

В настоящей статье ставится задача выбрать наиболее подходящий адаптивный метод фильтрации с учетом прогнозирования матрицы  $P_k$ , точной оценки векторов смещений нулей датчиков, которыми обусловлен дрейф БИНС при пропадании сигнала ГНСС, и адаптивного оценивания векторов местоположения и скорости. Рассматривается последовательная адаптивная калмановская фильтрация для применения в высокоточной навигационной системе в ходе летных испытаний. Ниже приводятся полученные результаты.

1. Путем сравнения проверена эффективность прогноза для постоянной и динамически вычисляемой матрицы  $Q_k$  по времени стабилизации оценок компонент векторов состояния после возобновления доступа к 3D-данным ГНСС. Проанализированы оценки векторов смещений нулей датчиков, погрешности которых непосредственно влияют на инерциальный дрейф при пропадании сигналов ГНСС.

2. Продемонстрирована результативность расчета  $Q_k$ ,  $\Phi_k$  и соответствующего прогноза  $P_k$ , вычисленная матрица  $Q_k$  используется для предлагаемого адаптивного оценивания по входящим измерениям ГНСС. Вычисление матриц  $Q_k$  и  $\Phi_k$  выполняется путем определения всех элементов матрицы размерностью 15, однако можно задействовать и матрицы более высокого порядка.

3. Анализ различных модификаций АФК показал, что метод АКФЗ оптимален в статическом режиме и в условиях горизонтального полета благодаря накопительному эффекту осреднения и коэффициенту забывания при адаптивном оценивании на основе невязок. Выбрать подходящий вариант АФК можно на основе компромисса между требованием к длине окна, вычислительной нагрузкой и объемом оперативной памяти и/или размером буфера.

4. При полете в условиях маневрирования методы АКФ1 и АКФ3 работали лучше, чем АКФ2. Это связано с неэффективностью процесса осреднения АКФ2 на коротком интервале невязки при выражах ЛА.

5. Изучение адаптивного масштабирования  $Q_k$  в процессе маневрирования показало, что методы АКФ1 и АКФ3 обеспечивают относительно стабильную СКП в сравнении с АКФ2. Результаты сведены в табл. 10, где также предлагаются варианты АФК, наиболее подходящие для различных статических и летных сценариев. В статическом режиме и при горизонтальном полете рекомендуются АКФ1 и АКФ3, а в условиях маневрирования – АКФ3 с откалиброванными СПМ. Метод АКФ3 характеризуется робастностью при незначительной неопределенности СПМ во время захода ЛА на посадку. Требования к вычислительной нагрузке и эффективности дополняют друг друга, поэтому в ходе дальнейших исследований может возникнуть необходимость бесшовного переключения между вариантами АФК при полетах. В последующем можно задействовать различные методы машинного обучения в качестве вспомогательных инструментов, позволяющих принять решение о динамическом переключении между вариантами фильтрации в летных сценариях.

Таблица 10

**Применимость предлагаемых методик АФК для оценивания вектора местоположения при различных сценариях**

№	Сценарий	Const:QR	АКФ1	АКФ2	АКФ3
1	Статические условия	Применимо в малой степени	Применимо в большой степени	Применимо в средней степени	Применимо в большой степени
2	Горизонтальный полет	Применимо в малой степени	Применимо в большой степени	Применимо в средней степени	Применимо в большой степени
3	Маневрирующий полет	Неприменимо	Применимо в средней степени	Применимо в малой степени	Применимо в большой степени
4	Маневрирующий полет (адаптивный масштабный коэффициент, вычисляемый по СПМ)	Неприменимо	Применимо в средней степени	Применимо в малой степени	Применимо в большой степени

## 5. Выводы

В статье рассматриваются прогнозирование матрицы  $P_k$  и точное моделирование матриц  $\Phi_k$  и  $Q_k$ . Для проверки работы БИНС во время длительных полетов используется адаптивная U-D-фильтрация. На основе откалиброванных значений СПМ производится вычисление  $Q_k$ , а затем моделируется  $\Phi_k$  с целью калибровки векторов смещений нулей датчиков по измерениям ГНСС. Оценки векторов смещений нулей применяются для определения контролируемой скорости инерциального дрейфа при пропадании сигналов ГНСС и прогнозирования  $P_k$ . Корректность прогнозирования матрицы ковариации измерений проверяется по времени стабилизации оценок компонент вектора состояния непосредственно после возобновления сигналов ГНСС.

Исследуется эффективность применения различных АФК и моделей прогноза ковариации. Для применения в БИНС рекомендуется выполнять прогнозирование

матрицы  $Q_k$  на основе СПМ инерциальных датчиков в реальном времени, а не динамически оценивать матрицу в процессе адаптивной фильтрации.

В условиях маневрирования на дисперсию измерений влияют внешние факторы, и метод АКФ2 работает хуже из-за эффекта слабого осреднения на малой длине окна, а АКФ1 и АКФ3 продемонстрировали более высокие результаты. Тем не менее метод АКФ3 позволяет определить вектор местоположения с меньшей погрешностью, если матрица  $Q_k$  вычисляется с использованием адаптивных масштабных коэффициентов при заходе ЛА на посадку или в других сложных ситуациях. В дальнейшем предлагается выбирать методику АФК динамическим способом с учетом летных условий и задействовать для этого технологии искусственного интеллекта.

Было также выявлено, что невязки скорости оказывают непосредственное воздействие на минимизацию СКП вектора скорости, а следовательно, и вектора местоположения. В будущем можно исследовать все диагональные элементы матрицы  $R_k$  и их взаимосвязи в процессе адаптивного оценивания.

### Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность директору Исследовательского центра «Имарат» (Research Center Imarat, г. Хайдарабад, Индия) Аниндье Бишвасу за его ценные указания.

### Конфликт интересов

Авторы статьи заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Mohamed, A., Schwarz, K.**, Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS, *Journal of Geodesy*, 1999, vol.73, pp. 193203, <https://doi.org/10.1007/s001900050236>.
2. **Wang, D., Dong, Y., Li, Q. et al.**, Using Allan variance to improve stochastic modeling for accurate GNSS/INS integrated navigation, *GPS Solut.*, 2018, vol.22, no.53, <https://doi.org/10.1007/s10291-018-0718-x>.
3. **Zhong, M., Guo, J. and Cao, Q.**, On designing PMI Kalman Filter for INS/GPS Integrated Systems with unknown Sensor Errors, *IEEE Sensors Journal*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 535-544, <https://doi.org/10.1109/JSEN.2014.2334698>.
4. **Zhang, L., Wang S., Selezneva, MS. and Neusypin, KA.**, A new Adaptive Kalman filter for navigation systems of carrier-based aircraft, *Chinese Journal of Aeronautics*, 2022, vol.35, no.1, pp. 416-425.
5. **Han, S. and Wang, J.**, Quantization and Colored Noises Error Modeling for Inertial Sensors for GPS/INS Integration, *IEEE Sensors Journal*, 2011, vol. 11, no. 6, pp. 1493-1503, <https://doi.org/10.1109/JSEN.2010.2093878>.
6. **Muralikrishna, G. et al.**, Autonomous Integrity Monitoring of INS/GPS Integrated Navigation System under Multipath Environment, *IEEE 6th International Conference on Electronics, Communication & Aerospace Technology*, 2022, Coimbatore, India, pp. 55–62.
7. **Mehra, R.**, Approaches to adaptive filtering, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, vol. 17, no. 5, pp. 693–698, <https://doi.org/10.1109/TAC.1972.1100100>.
8. **Zhang, L., Sidoti, D., Bienkowski, A., Pattipati, K.R., Bar-Shalom, Y. and Kleinman, D.L.**, On the Identification of Noise Covariances and Adaptive Kalman Filtering: A New Look at a 50 Year-Old Problem, *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 59362–59388, <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2982407>.
9. **Nassar, S., El-Sheimy, N.**, A combined algorithm of improving INS error modeling and sensor measurements for accurate INS/GPS navigation, *GPS Solut.*, 2016, vol. 10, pp.2939, <https://doi.org/10.1007/s10291-005-0149-3>.
10. **Niu, X., Wu, J. and Zhang, Q.**, Research on Measurement Error Model of GNSS/INS Integration Based on Consistency Analysis, *Gyroscopy Navig.*, 2018, vol. 9, pp. 243–254, <https://doi.org/10.1134/S2075108718040053>.

11. **Zhong, M., Guo, J. and Yang, Z.**, On Real Time Performance Evaluation of the Inertial Sensors for INS/GPS Integrated Systems, *IEEE Sensors Journal*, 2016, vol. 16, no. 17, pp. 6652–6661, <https://doi.org/10.1109/JSEN.2016.2588140>.
12. **Bhatti, U.I., Ochieng, W.Y. and Feng, S.**, Integrity of an integrated GPS/INS system in the presence of slowly growing errors. Part I: A critical review, *GPS Solut.*, 2007, vol. 11, pp. 173–181, <https://doi.org/10.1007/s10291-006-0048-2>.
13. **Wu, Y., Chen, S. and Yin, T.**, GNSS/INS Tightly Coupled Navigation with Robust Adaptive Extended Kalman Filter, *Int. J. Automat. Technol.*, 2022, vol. 23, 16391649, <https://doi.org/10.1007/s12239-022-0142-7>.
14. **Kim, K.H., Lee, J.G., and Park, C.G.**, Adaptive Two-Stage Extended Kalman Filter for a Fault-Tolerant INS-GPS Loosely Coupled System, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 125–137, <https://doi.org/10.1109/TAES.2009.4805268>.
15. **Narasimhappa, M., Mahindrakar, A.D., Guizilini, V.C., Terra, M.H., and Sabat, S.L.**, MEMS-Based IMU Drift Minimization: Sage Husa Adaptive Robust Kalman Filtering, *IEEE Sensors Journal*, 2020, vol. 20, no. 1, pp. 250–260, <https://doi.org/10.1109/JSEN.2019.2941273>.
16. **Jiang, C., Zhang, S., Li, H. et al.**, Performance evaluation of the filters with adaptive factor and fading factor for GNSS/INS integrated systems, *GPS Solut.*, 2021, vol. 25, pp. 130, <https://doi.org/10.1007/s10291-021-01165-4>.
17. **Zhou, Y., Zhang, C., Zhang, Y. and Zhang, J.**, A New Adaptive Square-Root Unscented Kalman Filter for Nonlinear Systems with Additive Noise, *International Journal of Aerospace Engineering*, 2015, vol. 2015, p. 9, <https://doi.org/10.1155/2015/381478>.
18. **Khalaf, W., Chouaib, I. and Wainakh, M.**, Novel adaptive UKF for tightly-coupled INS/GPS integration with experimental validation on an UAV, *Gyroscopy Navig.*, 2017, vol. 8, pp. 259–269, <https://doi.org/10.1134/S2075108717040083>.
19. **Neusypin, K., Kupriyanov, A., Maslennikov, A. et al.**, Investigation into the nonlinear Kalman filter to correct the INS/GNSS integrated navigation system, *GPS Solut.*, 2023, vol. 27, p. 91, <https://doi.org/10.1007/s10291-023-01433-5>.
20. **Yang, C., Shi, W. and Chen, W.**, Comparison of Unscented and Extended Kalman Filters with Application in Vehicle Navigation, *Journal of Navigation*, 2017, vol. 70, no. 2, pp. 411–431, <https://doi.org/10.1017/S0373463316000655>.
21. **Titterton, D., and Weston, J.**, *Strapdown Inertial Navigation Technology*, 2nd ed. London, U.K.: IET, 2004, doi: 10.1049/PBRA017E.
22. **Ismail, M., Abdelkawy, E.**, A hybrid error modeling for MEMS IMU in integrated GPS/INS navigation system, *J. Glob. Position. Syst.*, 2018, vol. 16, no. 6, <https://doi.org/10.1186/s41445-018-0016-5>.
23. **Hong, S., Lee, M.H., Chun, H., Kwon, S. and Speyer, J.L.**, Experimental study on the estimation of lever arm in GPS/INS, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2006, vol. 55, no. 2, pp. 431–448, doi: 10.1109/TVT.2005.863411.
24. **Gelb, A.**, *Applied Optimal Estimation*, Cambridge, MA: MIT Press, 1974.
25. **Grewal, M.S.**, *Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration*, A John Wiley & Sons, Inc, Publications, Second Edition, 2007.
26. **Wang, S., Wang, J., Yu, H. et al.**, A MIMU/GPS/magnetometer integrated alignment method based on sequential robust estimation, *J. Glob. Position. Syst.*, 2018, vol. 16, no. 10, <https://doi.org/10.1186/s41445-018-0019-2>.
27. **Bierman, G.J. and Thornton, C.L.**, Numerical comparison of Kalman filter algorithms: Orbit determination case study, *Automatica*, 1977, vol. 13, no. 1, pp. 23–35.
28. **Zhang, Y., Zhang, C., Zhang, Y., and Juzhong**, A New Adaptive Square-Root Unscented Kalman Filter for Nonlinear Systems with Additive Noise, *International Journal of Aerospace Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, 2015, 381478, pp. 1687–5966, <https://doi.org/10.1155/2015/381478>.
29. **Bierman, G.J.**, Measurement updating using the U-D factorization, *Automatica*, 1979, vol. 12, no. 4, pp. 375–382.
30. **D'Souza, C. and Zanetti, R.**, Information Formulation of the UDU Kalman Filter, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 493–498, <https://doi.org/10.1109/TAES.2018.2850379>.
31. **Yu, M.J.**, INS/GPS Integration System using Adaptive Filter for Estimating Measurement Noise Variance, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, vol. 48, no. 2, pp. 1786–1792, doi: 10.1109/TAES.2012.6178100.
32. **Simon, D.**, *Optimal State Estimation: Kalman, H1, and Nonlinear Approaches*, A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2006.

33. Rogers, R.M., Applied Mathematics in Integrated Navigation System, *AIAA Education Series*, vol. 1, 2003.
34. Yang, Y., Xu, T., An Adaptive Kalman Filter Based on Sage Windowing Weights and Variance Components, *Journal of Navigation*, 2003, vol. 56, no. 2, pp. 231–240, <https://doi.org/10.1017/S0373463303002248>.
35. Hongwei, B., Zhihua, J. and Weifeng, T., IAE-adaptive Kalman filter for INS/GPS integrated navigation system, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2006, vol. 17, no. 3, pp. 502–508, [https://doi.org/10.1016/S1004-4132\(06\)60086-8](https://doi.org/10.1016/S1004-4132(06)60086-8).
36. Sun, B., Zhang, Z., Qiao, D., Mu, X., and Hu, X., An Improved Innovation Adaptive Kalman Filter for Integrated INS/GPS Navigation, *Sustainability*, 2022, 14, 11230, <https://doi.org/10.3390/su141811230>.
37. Skog, I., and Handel, P., Time Synchronization Errors in Loosely Coupled GPS-Aided Inertial Navigation Systems, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2011, vol. 12, no. 4, pp. 1014–1023, doi: 10.1109/TITS.2011.2126569.
38. Brown, R.G. and Hwang P.Y.C., *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with Matlab Exercises*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc, 1997.
39. Dadu, V., Reddy, B.V., Sitara, B., Chandrasekhar, R. and Reddy, G.S., Baro-INS Integration with Kalman Filter, *Proceedings of Sensor Research Society*, 2007, <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:38543734>.

---

**Muralikrishna, G.** (Research Centre Imarat, DRDO, Hyderabad, India), **Mallesham, G.** (Osmania University, Hyderabad, India), **Kannan, M.** (Research Centre Imarat, DRDO)  
An Experimental Study on Adaptive Sequential U-D Filtering and Propagation of SINS Errors during GNSS Outage, *Girokopiya i Navigatsiya*, 2024, vol. 32, no. 4 (127), pp. 28–73.

**Abstract.** Strapdown inertial navigation system (SINS) is used as a primary navigation information source on-board an aircraft and is expected to provide high accuracy navigation solution. Often, the pure-inertial navigation solution is blended with global navigation satellite system (GNSS) data through optimal filtering to provide bounded and accurate navigation information. Several adaptive Kalman filtering (AKF) algorithms published earlier have considered either the modelling or estimation of measurement error covariance matrix  $R_k$  and process covariance matrix  $Q_k$ . The simultaneous estimation of both  $R_k$  and  $Q_k$  is limited in their performance due to instability for long endurance high accuracy navigation applications. The measurement noise covariance matrix  $R_k$  under all practical conditions is influenced by external factors. In this manuscript, the adaptive estimation of  $R_k$  has been explored along with the accurate computation of  $Q_k$ . Further, an attempt has been made to propagate the error state covariance during GNSS outage with an accurate modeling of system matrix and corresponding  $Q_k$  matrix computations. The sequential U-D filtering approach is explored to handle the ill-conditioning of  $P_k$ . The effect of propagation of  $P_k$  is judged through the quantification of pure-inertial navigation drift rate under GNSS outage conditions which is further decided by the quality of estimation of sensor biases. The effectiveness of these estimated sensor biases along with adaptive estimation of  $R_k$  and computation of  $Q_k$ , is demonstrated through aircraft flight testing. Finally, various AKF algorithms are validated along with the propagation studies and conclusions are drawn for practical use.

**Key words:** U-D filter, extended Kalman filter, inertial navigation, gyroscopes, accelerometers, hybrid navigation, GNSS, GPS, aircraft navigation.

Материал поступил 20.06.2024