УДК 621.396.988.6:629.19
DOI 10.17285/0869-7035.0070

Н. Б. ВАВИЛОВА, А. А. ГОЛОВАН, А. В. КОЗЛОВ, И. А. ПАПУША, О. А. ЗОРИНА,
Е. А. ИЗМАЙЛОВ, С. Е. КУХТЕВИЧ, А. В. ФОМИЧЕВ

ИНТЕГРАЦИЯ СПУТНИКОВОЙ И ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ РАССИНХРОНИЗАЦИИ ДАННЫХ И СМЕЩЕНИЯ СПУТНИКОВОЙ АНТЕННЫ. ОПЫТ ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В статье рассматриваются два аспекта задачи интеграции бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) и глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) в условиях всегда присутствующего смещения фазового центра спутниковой антенны относительно приведенного центра блока акселерометров БИНС и возможной малой рассинхронизации информационных потоков этих систем. Первый связан с описанием модификаций коррекционных моделей задачи интеграции БИНС–ГНСС, вызванных указанными факторами. Второй – с описанием опыта применения модифицированных бортовых алгоритмов интеграции для БИНС авиационного применения, разработанных ПАО «МИЭА».

Ключевые слова: бесплатформенная инерциальная навигационная система, глобальная навигационная спутниковая система, комплексная обработка информации (КОИ), фильтр Калмана, точность оценивания.

I. Введение

Современные навигационные системы представляют собой комплексы разнородных средств навигации. Основой большинства из них является БИНС, а данные ГНСС, а также других возможных источников навигационной информации исполь-

Вавилова Нина Борисовна. Кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории управления и навигации, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва).
Голован Андрей Андреевич. Доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией управления и навигации, МГУ им. М.В. Ломоносова. Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID: 0000-0001-5628-248X.
Козлов Александр Владимирович. Кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории управления и навигации, МГУ им. М.В. Ломоносова.
Папуша Ирина Анатольевна. Кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории управления и навигации, МГУ им. М.В. Ломоносова.
Зорина Ольга Александровна. Кандидат физико-математических наук, заместитель начальника отдела, Московский институт электромеханики и автоматики (Москва).
Измайлов Евгений Аркадьевич. Доктор технических наук, главный научный сотрудник, Московский институт электромеханики и автоматики. Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».
Кухтевич Сергей Евгеньевич. Кандидат физико-математических наук, начальник отдела, Московский институт электромеханики и автоматики.
Фомичев Александр Владимирович. Кандидат физико-математических наук, заместитель начальника тематического направления – заместитель главного конструктора, Московский институт электромеханики и автоматики.

Статья по докладу на XXVII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, 2020.

зуются для ее коррекции. В авиационных приложениях от навигационного комплекса часто требуется предоставление выходной информации как от автономного канала БИНС, так и от ее так называемого гибридного (или комплексного, интегрированного) канала. Под данными автономного канала понимают результаты решения в БИНС задачи счисления, основанные только на показаниях инерциальных датчиков – акселерометров, датчиков угловой скорости (ДУС) (за исключением, возможно, выхода вертикального канала БИНС, корректируемого по показаниям системы воздушно-скоростных сигналов (СВС) летательного аппарата (ЛА)). Данные гибридного канала формируются на основе работы алгоритма КОИ.

Комплексная обработка информации БИНС–ГНСС, помимо построения собственно интегрированных навигационных решений, позволяет получить оценки параметров инструментальных погрешностей акселерометров и ДУС, включенных в фильтр Калмана, для текущего полета. Это, в свою очередь, потенциально дает возможнось повысить точность автономного канала при последующем функционировании БИНС за счет использования оценок инструментальных погрешностей, полученных в серии прошедших полетов и предполагаемых достаточно стабильными во время эксплуатации БИНС. Этот режим называется нами автокалибровкой [1, 2].

Эффективность автокалибровки зависит от точности, надежности оценок параметров инструментальных погрешностей инерциальных датчиков, включенных в интеграционный фильтр. Точность оценивания указанных параметров зависит от ряда факторов:

- свойств траектории ЛА, позволяющих или не позволяющих обеспечить хорошую наблюдаемость оцениваемых параметров;
- надежности, точности, непрерывности информации ГНСС;
- корректности обработки дополнительной информации.

Под корректностью обработки дополнительной информации мы понимаем не только использование хорошо известных моделей уравнений погрешностей БИНС и уравнений позиционных и скоростных измерений ГНСС, но и моделей, учитывающих:

- смещение фазового центра спутниковой антенны (далее – точка A) относительно приведенного центра блока акселерометров БИНС (далее – точка M);
- возможную остаточную рассинхронизацию данных БИНС и ГНСС, имеющую место даже при использовании механизма синхронизации на основе так называемой герцовой метки приемника сигналов ГНСС, или Pulse per Second (PPS).

Учет указанных факторов особенно важен для БИНС, устанавливаемых на маневренных объектах и имеющих достаточно высокий класс точности, например с приведенным дрейфом ДУС порядка 0,01 град/час, что в полной мере относится к БИНС авиационного применения, разработанных ПАО «МИЭА».

Публикации по учету смещения фазового центра антенны ГНСС относительно БИНС в алгоритмах интеграции БИНС–ГНСС появились сразу после полноценного развертывания системы GPS, среди последних из них на эту тему выделим [3, 9]. Заметим также, что в морской навигации схожая задача решается при передаче позиционной и скоростной информации базового навигационного комплекса корабля на место установки другой бортовой системы [10]. Кроме того, в известном высокоточном навигационном приложении – авиационной гравиметрии [11] компенсация и дооценивание параметров движения антенны ГНСС относительно центра БИНС просто необходима. Среди публикаций на тему учета возможной рассинхронизации данных БИНС и ГНСС отметим [4, 12, 13].

Настоящая статья посвящена проблеме идентификации и учета несинхронности данных и пространственных разнесений БИНС и антенны ГНСС в задаче комплексной обработки информации БИНС и ГНСС. Проведено моделирование для полной системы уравнений погрешностей БИНС и соответствующего ей фильтра Калмана, не изучавшихся ранее на предмет влияния вышеуказанных возмущений. Показана необходимость компенсации даже сравнительно малых разнесений антенны ГНСС от БИНС, установлены хорошая оцениваемость задержек ГНСС и БИНС при маневрировании ЛА и корректность элементарных моделей этих возмущений. Приводятся результаты натурных испытаний, демонстрирующие эффективность использованной динамической модели погрешностей БИНС и возмущений. Показаны:

- характерные возмущения, препятствующие использованию оценок фильтра, полученных без учета пространственного разнесения;
- хорошая оцениваемость остаточных задержек информации между БИНС и ГНСС при маневрировании;
- эффективность алгоритма автокалибровки, построенного на базе рассмотренных моделей погрешностей БИНС и измерений с учетом разнесений и оценок задержек.

II. О моделях учета смещения антенны приемника сигналов ГНСС

Обозначим через Ms систему координат, связанную с корпусом объекта так, что ось Ms_1 направлена по носу объекта, ось Ms_2 – вертикальная ось объекта, ось Ms_3 направлена в сторону правого крыла. Далее мы будем отождествлять трехгранник Ms с приборным трехгранником БИНС Mz, образованным осями чувствительности блока чувствительных элементов, полагая, что на объекте произведены соответствующие юстировочные работы при установке БИНС. Введем $l_z = (l_{z1}, l_{z2}, l_{z3})^T$ – постоянный вектор смещения фазового центра антенны спутникового приемника относительно приведенного центра БИНС (точки M), заданный своими проекциями на оси приборного трехгранника Mz.

Обозначим через λ^a, φ^a, h^a географические координаты антенны ГНСС, через λ, φ, h – географические координаты точки M. Тогда

$$\lambda = \lambda^a - \frac{l_E}{R_E \cos\varphi'}, \; \varphi = \varphi^a - \frac{l_N}{R_N}, \quad h = h^a - l_{UP}, \tag{1}$$

где вектор $l_{x^0} = (l_E, \; l_N, \; l_{UP})^T$ определяется перепроектировкой вектора l_z на оси сопровождающего географического трехгранника Mx^0 (ось Mx_1^0 направлена на восток, ось Mx_2^0 – на север, Mx_3^0 – вверх) с использованием матрицы ориентации $C^0 : l_{x^0} = C^0 l_z$,

$$C^0 = \begin{pmatrix} \sin\psi'\cos\vartheta' & \cos\psi'\sin\gamma' - \sin\psi'\sin\vartheta'\cos\gamma' & \cos\psi'\cos\gamma' + \sin\psi'\sin\vartheta'\sin\gamma' \\ \cos\psi'\cos\vartheta' & -\sin\psi'\sin\gamma' - \cos\psi'\sin\vartheta'\cos\gamma' & -\sin\psi'\cos\gamma' + \cos\psi'\sin\vartheta'\sin\gamma' \\ \sin\vartheta' & \cos\gamma'\cos\vartheta' & -\sin\gamma'\cos\vartheta' \end{pmatrix},$$

где ψ', ϑ', γ' – углы истинного курса, тангажа и крена, вычисленные БИНС, R_E, R_N – радиусы кривизны первого вертикала и меридионального сечения,

$$R_E = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi'}},\ R_N = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi'\right)^{3/2}},$$

которые ввиду относительной малости разнесений допустимо заменить на экваториальный радиус Земли a.

Кроме географического трехгранника Mx^0 ниже применяется трехгранник Mx, развернутый относительно вертикальной оси $Mx^0 x_3$ на угол χ и имеющий азимутально-полусвободную ориентацию (см. раздел об уравнениях погрешностей).

При реализации этих соотношений используются широта φ' и значения углов ориентации, вычисляемые БИНС, а координаты λ^a, φ^a, h^a поступают от приемника ГНСС.

Обозначим через $V_z^a = (V_{z1}^a,\quad V_{z2}^a,\quad V_{z3}^a)^T$ вектор относительной (т.е. относительно Земли) скорости точки A в осях Mz, через $V_z = (V_{z1},\quad V_{z2},\quad V_{z3})^T$ – вектор относительной скорости точки M. Тогда

$$V_z^a = V_z + \omega_z \times l_z\,, \tag{3}$$

где ω_z – вектор абсолютной угловой скорости трехгранника Mz. В точном выражении (3) должна использоваться относительная угловая скорость трехгранника Mz, но она отличается от абсолютной на пренебрежимо малую в данном контексте величину угловой скорости Земли.

Умножая соотношение (3) слева на матрицу c^0, получим

$$V_{x^0}^a = V_{x^0} + C^0(\omega_z \times l_z). \tag{4}$$

Здесь $V_{x^0}^a = (V_E^a,\quad V_N^a,\quad V_{UP}^a)$ – вектор относительной скорости точки A в осях сопровождающего географического трехгранника Mx^0, $V_{x^0} = (V_E,\quad V_N,\quad V_{UP})^T$ – аналогичный вектор скорости точки M. Соотношения (1), (2), (4) позволяют учесть смещение антенны в позиционной и скоростной корректирующей информации.

Заметим, что при реализации формулы (4) надо иметь в виду, что измерения ДУС, полезный сигнал которых – это вектор ω_z, содержат аддитивные шумовые составляющие возможно значительной амплитуды. В связи с этим, например, на практике усредняют несколько последних отсчетов ДУС и используют результат усреднения в качестве оценки значения ω_z.

Принципиально можно предложить два подхода к учету в алгоритмах интегрированной навигации смещения антенны ГНСС относительно БИНС:

a) первый предполагает компенсацию разнесений в позиционной, скоростной информации от приемника сигналов ГНСС;
b) второй предполагает включение компонент вектора l_z в вектор оцениваемых параметров соответствующей задачи коррекции БИНС.

Возможна также комбинация первого и второго вариантов, когда компенсируется основная часть смещения антенны и осуществляется дооценивание оставшейся малой части смещения.

III. О моделях рассинхронизации данных БИНС и ГНСС

Приемник сигналов ГНСС определяет координаты и вектор скорости точки A расположения антенны приемника сигналов ГНСС путем обработки первичных кодовых, доплеровских, возможно, фазовых измерений. Одновременно с определением этих параметров оцениваются погрешности часов приемника (собственно погрешность часов с микросекундной точностью и скорость ухода их погрешности). Это свойство позволяет использовать приемник как генератор высокоточной шкалы времени и как устройство высокоточной синхронизации информационных потоков от других источников навигационной информации, в том числе БИНС.

В приемнике организуется выходной электрический импульс на частоте 1 Гц, называемый секундной меткой и позволяющий синхронизировать информацию БИНС и ГНСС с высокой точностью.

Тем не менее наш опыт разработки алгоритмов комплексирования БИНС и ГНСС показывает необходимость учета потенциальных остаточных задержек, несмотря на наличие метки. Существенно, что кроме рассинхронизации Δt_1 инерциального и спутникового позиционных решений целесообразно ввести параметр рассинхронизации скоростного решения ГНСС Δt_2, обусловленного спецификой формирования скоростного решения внутри приемника ГНСС. Именно такая двухкомпонентная модель и подтвердила свою эффективность как при моделировании, так и экспериментально в летных испытаниях БИНС разработки ПАО «МИЭА».

Модель запаздываний определяется исходя из опыта применения конкретного приемника ГНСС. Наиболее распространены следующие варианты.

Первый вариант:

$$\Delta t_1 = const, \quad \Delta t_2 = const. \tag{5}$$

Второй вариант:

$$\Delta \dot{t}_1 = q_1, \quad \Delta \dot{t}_2 = q_2, \tag{6}$$

где q_1, q_2 – белые шумы некоторой подбираемой интенсивности.

Включение в модель (6) шумов призвано отразить возможную изменчивость значений параметров запаздывания.

Для БИНС разработки ПАО «МИЭА» оказалось достаточным использовать простейшую (первую) модель задержек. В следующем разделе описываются модели корректирующих измерений и динамической системы, лежащих в основе алгоритма комплексирования, с учетом обеих задержек Δt_1, Δt_2 и геометрических разнесений БИНС и антенны ГНСС.

IV. Математические модели алгоритма КОИ

При построении алгоритмов КОИ данные БИНС применяются в качестве основной информации, а данные ГНСС – в качестве дополнительной для оценки погрешностей БИНС. Для решения задачи оценки погрешностей БИНС используются алгоритмы калмановской фильтрации (см., например, [5–7]). Приведем составляющие алгоритма КОИ.

Математическая модель инструментальных погрешностей БИНС

Для рассматриваемых БИНС на лазерных гироскопах (ЛГ) и кварцевых акселерометрах принимается следующая модель инструментальных погрешностей [5]:

$$\Delta f_z = \Delta f_z^0 + \Gamma f_z' + \Delta f_z^s, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & 0 & \Gamma_{33} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\nu_z = \nu_z^0 + \Theta\omega_z' + \nu_z^s, \qquad \Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь:

$f_z' = \left(f_{z1}', f_{z2}', f_{z3}'\right)^T$, f_{zi}', i=1,2,3 – вектор проекций удельной внешней силы, измеренных блоком акселерометров в приборных осях БИНС, T – символ транспонирования;

$\omega_z' = \left(\omega_{z1}', \omega_{z2}', \omega_{z3}'\right)^T$, ω_{zi}', $i = 1,2,3$ – вектор проекций абсолютной угловой скорости приборного трехгранника БИНС в собственных осях;

$\Delta f_z = \left(\Delta f_{z1}, \Delta f_{z2}, \Delta f_{z3}\right)^T, \nu_z = \left(\nu_{z1}, \nu_{z2}, \nu_{z3}\right)^T$ – векторы погрешностей акселерометров и гироскопов;

$\Delta f_z^0 = \left(\Delta f_{z1}^0, \Delta f_{z2}^0, \Delta f_{z3}^0\right)^T, \nu_z^0 = \left(\nu_{z1}^0, \nu_{z2}^0, \nu_{z3}^0\right)^T$ – векторы систематических погрешностей нулей акселерометров и гироскопов;

Γ_{ii}, Θ_{ii}, $i = 1,2,3$ – погрешности масштабных коэффициентов;

Γ_{ij}, Θ_{ij}, $i = 1,2,3, i \neq j$ – погрешности ортогональности осей чувствительности (перекосы);

$\Delta f_z^s = \left(\Delta f_{z1}^s, \Delta f_{z2}^s, \Delta f_{z3}^s\right)^T, \nu_z^s = \left(\nu_{z1}^s, \nu_{z2}^s, \nu_{z3}^s\right)^T$ – векторы погрешностей типа белого шума.

Заметим, что вид матрицы Г обусловлен способом построения ортогонального приборного трехгранника Mz: за первую ось приборного трехгранника Mz_1 принята ось чувствительности первого акселерометра, ось Mz_3 проходит в плоскости, содержащей оси чувствительности первого и третьего акселерометров, ортогонально Mz_1 и направлена в сторону оси чувствительности третьего акселерометра, ось Mz_2 дополняет Mz до правого ортогонального трехгранника. Параметры $\Delta f_z^0, \nu_z^0$, Γ_{ij}, Θ_{ij}, $i, j = 1,2,3$ предполагаются константами.

В приложениях в моделях инструментальных погрешностей часто ограничиваются только смещениями $\Delta f_z^0, \nu_z^0$ нулевых сигналов инерциальных датчиков. Нами учитываются погрешности масштабных коэффициентов и перекосы осей чувствительности.

Уравнения погрешностей БИНС

Используется модель, когда полные погрешности определения относительной линейной скорости разделяются на динамическую и кинематическую составляющие [5]. В качестве угловых погрешностей БИНС используются две угловые погрешности построения приборной вертикали и кинематическая азимутальная погрешность географического трехгранника. Такая модель давно получила распространение в авиационных приложениях [1, 2, 14]. Уравнения записываются в осях сопровождающего географического трехгранника (его третья ось направлена вверх вдоль вычисленного направления географической вертикали) с допущением относительно свободной ориентации в азимуте, когда третья, вертикальная компонента относительной угловой скорости равна нулю: $\Omega_3' = 0$. Упомянутый географический трехгранник является опорным навигационным трехгранником БИНС, в осях которого реализуются алгоритмы инерциального счисления.

Уравнения погрешностей БИНС для горизонтальных каналов, соответствующие принятой модели инструментальных погрешностей, в географическом трехграннике с относительно свободной ориентацией в азимуте имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\Delta\dot{r}_1 = \delta V_1 + \beta_3 V_2', \\
\Delta\dot{r}_2 = \delta V_2 - \beta_3 V_1',
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\dot{V}_1 = 2u_3'\delta V_2 - g\alpha_2 - V_2{}'\nu_{z1}^0 d_{31}' - V_2{}'\nu_{z2}^0 c_{32}' - V_2{}'\nu_{z3}^0 c_{33}' + \\
&+\Delta f_{z1}^0 c_{11}' + \Delta f_{z2}^0 c_{12}' + \Delta f_{z3}^0 c_{13}' + \\
&+\Gamma_{11} c_{11}' f_{z1}' + \Gamma_{21} c_{12}' f_{z1}' + \Gamma_{22} c_{12}' f_{z2}' + \\
&+\Gamma_{23} c_{12}' f_{z3}' + \Gamma_{31} c_{13}' f_{z1}' + \Gamma_{33} c_{13}' f_{z3}' - \\
&-\Theta_{11} V_2' c_{31}' \omega_{z1}' - \Theta_{12} V_2' c_{31}' \omega_{z2}' - \Theta_{13} V_2' c_{31}' \omega_{z3}' - \\
&-\Theta_{21} V_2' c_{32}' \omega_{z1}' - \Theta_{22} V_2' c_{32}' \omega_{z2}' - \Theta_{23} V_2' c_{32}' \omega_{z3}' - \\
&-\Theta_{31} V_2' c_{33}' \omega_{z1}' - \Theta_{32} V_2' c_{31}' \omega_{z2}' - \Theta_{33} V_2' c_{33}' \omega_{z3}' + \Delta f_1^s,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\dot{V}_2 = -2u_3'\delta V_1 + g\alpha_1 + V_1'\nu_{z1}^0 c_{31}' + V_1'\nu_{z2}^0 c_{32}' + V_1'\nu_{z3}^0 c_{33}' + \\
&+\Delta f_{z1}^0 c_{21}' + \Delta f_{z2}^0 c_{22}' + \Delta f_{z3}^0 c_{23}' + \\
&+\Gamma_{11} c_{21}' f_{z1}' + \Gamma_{21} c_{22}' f_{z1}' + \Gamma_{22} c_{22}' f_{z2}' + \\
&+\Gamma_{23} c_{22}' f_{z3}' + \Gamma_{31} c_{23}' f_{z1}' + \Gamma_{33} c_{23}' f_{z3}' + \\
&+\Theta_{11} V_1' c_{31}' \omega_{z1}' + \Theta_{12} V_1' c_{31}' \omega_{z2}' + \Theta_{13} V_1' c_{31}' \omega_{z3}' + \\
&+\Theta_{21} V_1' c_{32}' \omega_{z1}' + \Theta_{22} V_1' c_{32}' \omega_{z2}' + \Theta_{23} V_1' c_{32}' \omega_{z3}' + \\
&+\Theta_{31} V_1' c_{33}' \omega_{z1}' + \Theta_{32} V_1' c_{33}' \omega_{z2}' + \Theta_{33} V_1' c_{33}' \omega_{z3}' + \Delta f_2^s,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{\alpha}_1 = -u_3'\frac{\Delta r_1}{R_1} - \frac{\delta V_2}{R_2} + u_3'\alpha_2 - u_2'\beta_3 + \\
&+\nu_{z1}^0 c_{11}' + \nu_{z2}^0 c_{12}' + \nu_{z3}^0 c_{13}' + \\
&+\Theta_{11} c_{11}' \omega_{z1}' + \Theta_{12} c_{11}' \omega_{z2}' + \Theta_{13} c_{11}' \omega_{z3}' + \\
&+\Theta_{21} c_{12}' \omega_{z1}' + \Theta_{22} c_{12}' \omega_{z2}' + \Theta_{23} c_{12}' \omega_{z3}' + \\
&+\Theta_{31} c_{13}' \omega_{z1}' + \Theta_{32} c_{13}' \omega_{z2}' + \Theta_{33} c_{13}' \omega_{z3}' + \nu_1^s,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{\alpha}_2 = -u_3'\frac{\Delta r_2}{R_2} + \frac{\delta V_1}{R_1} - u_3'\alpha_1 + u_1'\beta_3 + \\
&+\nu_{z1}^0 c_{21}' + \nu_{z2}^0 c_{22}' + \nu_{z3}^0 c_{23}' + \\
&+\Theta_{11} c_{21}' \omega_{z1}' + \Theta_{12} c_{21}' \omega_{z2}' + \Theta_{13} c_{21}' \omega_{z3}' + \\
&+\Theta_{21} c_{22}' \omega_{z1}' + \Theta_{22} c_{22}' \omega_{z2}' + \Theta_{23} c_{22}' \omega_{z3}' + \\
&+\Theta_{31} c_{23}' \omega_{z1}' + \Theta_{32} c_{23}' \omega_{z2}' + \Theta_{33} c_{23}' \omega_{z3}' + \nu_2^s,
\end{aligned}
$$

$$\dot{\beta}_3 = \omega'_{z1}\frac{\Delta r_1}{R_1} + \omega'_{z2}\frac{\Delta r_2}{R_2} + \omega'_{x2}\alpha_1 - \omega'_{x1}\alpha_2 +$$
$$+\nu^0_{z1}c'_{31} + \nu^0_{z2}c'_{32} + \nu^0_{z3}c'_{33} +$$
$$+\Theta_{11}c'_{31}\omega'_{z1} + \Theta_{12}c'_{31}\omega'_{z2} + \Theta_{13}c'_{31}\omega'_{z3} +$$
$$+\Theta_{21}c'_{32}\omega'_{z1} + \Theta_{22}c'_{32}\omega'_{z2} + \Theta_{23}c'_{32}\omega'_{z3} +$$
$$+\Theta_{31}c'_{33}\omega'_{z1} + \Theta_{32}c'_{33}\omega'_{z2} + \Theta_{33}c'_{33}\omega'_{z3} + \nu^s_3.$$

Здесь:
символ «′» служит для обозначения параметров, вычисленных БИНС;
V'_i – проекции скорости ЛА на оси модельного географического трехгранника $Mx^{0\prime}$, являющегося числовым образом географического трехгранника Mx^0;
u'_i – проекции угловой скорости Земли на оси этого трехгранника;
g – номинальное значение ускорения силы тяжести;
R_i – радиусы кривизны сечений поверхности земного эллипсоида;
ω'_{xi} – проекции абсолютной угловой скорости модельного географического трехгранника на собственные оси;
c'_{ij} – элементы вычисляемой матрицы ориентации C приборного трехгранника БИНС относительно модельного (т.е. вычисленного БИНС) географического:

$$C = \begin{pmatrix} \sin\psi'_g\cos\vartheta' & \cos\psi'_g\sin\gamma' - \sin\psi'_g\sin\vartheta'\cos\gamma' & \cos\psi'_g\cos\gamma' + \sin\psi'_g\sin\vartheta'\sin\gamma' \\ \cos\psi'_g\cos\vartheta' & -\sin\psi'_g\sin\gamma' - \cos\psi'_g\sin\vartheta'\cos\gamma' & -\sin\psi'_g\cos\gamma' + \cos\psi'_g\sin\vartheta'\sin\gamma' \\ \sin\vartheta' & \cos\gamma'\cos\vartheta' & -\sin\gamma'\cos\vartheta' \end{pmatrix},$$

где $\psi'_g, \vartheta', \gamma'$ – углы гироскопического курса, тангажа и крена, $\psi'_g = \psi' + \chi'$, χ' – угол, характеризующий азимутальную ориентацию модельного географического трехгранника с относительно свободной ориентацией в азимуте.

Вектор состояния уравнений погрешностей включает в себя переменные:
Δr_1, Δr_2 – погрешности определения местоположения в горизонтальной плоскости в осях модельного географического трехгранника с относительно свободной ориентацией в азимуте;
δV_1, δV_2 – динамические погрешности определения горизонтальных составляющих относительной скорости в этих же осях;
α_1, α_2 – угловые погрешности построения приборной вертикали в тех же осях, β_3 – азимутальная кинематическая погрешность.

Уравнения погрешностей замыкаются при помощи формирующих уравнений для параметров инструментальных погрешностей датчиков БИНС:

$$\begin{gathered} \Delta\dot{f}^0_{zi} = 0, \quad \dot{\nu}^0_{zi} = 0, \\ \dot{\Theta}_{ij} = 0, \quad \dot{\Gamma}_{ij} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь отметим, что модель (8) не учитывает перекрестное влияние погрешностей измерений высоты и вертикальной скорости на поведение погрешностей горизонтальных каналов БИНС. Это связано с тем, что в авиационных приложениях вертикальный канал всегда корректируется при помощи данных СВС и/или данных ГНСС и таким влиянием можно пренебречь.

Математические модели корректирующих измерений алгоритма КОИ

Векторы позиционных измерений $z^{pos} = \left(z_1^{pos}, z_2^{pos}\right)^T$ и скоростных измерений $z^{vel} = \left(z_1^{vel}, z_2^{vel}\right)^T$ для коррекции горизонтальных каналов формируются при помощи информации БИНС $\left(\lambda', \varphi', V_E', V_N'\right)$ и ГНСС $\left(\lambda^{CHC}, \varphi^{CHC}, V_E^{CHC}, V_N^{CHC}\right)$ о географической долготе, географической широте, восточной и северной составляющих относительной скорости.

Позиционные измерения формируются следующим образом:

$$z_1^{pos} = \Delta r_1 = \Delta r_\varphi \sin\chi' + \Delta r_\lambda \cos\chi',$$

$$z_2^{pos} = \Delta r_2 = \Delta r_\varphi \cos\chi' - \Delta r_\lambda \sin\chi',$$

где

$$\Delta r_\varphi = \left(\varphi' - \varphi^{CHC}\right) R_N,$$

$$\Delta r_\lambda = \left(\lambda' - \lambda^{CHC}\right) R_E \cos\varphi',$$

$$R_E = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}, \quad R_N = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi'\right)^{3/2}}.$$

Здесь:

R_E, R_N – радиусы кривизны меридионального сечения и первого вертикала,

a и e – большая полуось земного эллипсоида и его эксцентриситет.

Скоростные измерения:

$$z_1^{vel} = V_1' - V_1^{CHC},$$

$$z_2^{vel} = V_2' - V_2^{CHC},$$

$$V_1^{CHC} = V_N^{CHC} \sin\left(\chi' - \Delta\lambda \sin\varphi'\right) + V_E^{CHC} \cos\left(\chi' - \Delta\lambda \sin\varphi'\right),$$

$$V_2^{CHC} = V_N^{CHC} \cos\left(\chi' - \Delta\lambda \sin\varphi'\right) - V_E^{CHC} \sin\left(\chi' - \Delta\lambda \sin\varphi'\right),$$

$\Delta\lambda$ – оценка погрешности долготы, полученная в алгоритме КОИ. Отметим, что слагаемое $\Delta\lambda \sin\varphi'$ представляет собой погрешность, порождаемую сходимостью меридианов: вычисленного и идеального.

Представим выражения для корректирующих измерений через компоненты вектора состояния с учетом параметров запаздывания и смещения антенны.

Рассмотрим случай, когда информация БИНС

$$\left(\lambda', \varphi', V_E', V_N'\right)$$

относится к моменту времени t, а данные ГНСС

$$\left(\lambda^{CHC}, \varphi^{CHC}, V_E^{CHC}, V_N^{CHC}\right) -$$

к моментам $t - \Delta t_1$ и $t - \Delta t_1 - \Delta t_2$ соответственно. Введенные ранее параметры Δt_1 и Δt_2 предполагаются малыми и отражают запаздывание позиционной спутниковой информации относительно инерциальной и запаздывание между скоростной и позиционной информацией ГНСС. Антенна ГНСС отстоит от приведенного центра БИНС на постоянный вектор $l_z = (l_{z1}, l_{z2}, l_{z3})^T$, заданный в осях приборного трехгранника БИНС.

С учетом соотношений (1)–(4), наличия шумовых погрешностей замеров и разложений спутниковых замеров в ряды по параметрам задержек получим:

$$\begin{aligned} z_1^{pos} &= \Delta r_1 + \underline{V_1'\Delta t_1} + \underline{\underline{c_{11}'l_{z1} + c_{12}'l_{z2} + c_{12}'l_{z3}}} + \zeta_1, \\ z_2^{pos} &= \Delta r_2 + \underline{V_2'\Delta t_1} + \underline{\underline{c_{21}'l_{z1} + c_{22}'l_{z2} + c_{23}'l_{z3}}} + \zeta_2, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} z_1^{vel} &= \delta V_1 + V_2'\beta_3 + \underline{f_1'\Delta t_1 + f_1'\Delta t_2} + \underline{\underline{\left(-c_{12}'\omega_{z3}' + c_{13}'\omega_{z2}'\right)l_{z1}}} + \\ &\quad \underline{\underline{\left(c_{11}'\omega_{z3}' - c_{13}'\omega_{z1}'\right)l_{z2} + \left(-c_{11}'\omega_{z2}' + c_{12}'\omega_{z1}'\right)l_{z3}}} + \zeta_3, \\ z_2^{vel} &= \delta V_2 - V_1'\beta_3 + \underline{f_2'\Delta t_1 + f_2'\Delta t_2} + \underline{\underline{\left(-c_{22}'\omega_{z3}' + c_{23}'\omega_{z2}'\right)l_{z1}}} + \\ &\quad \underline{\underline{\left(c_{21}'\omega_{z3}' - c_{23}'\omega_{z1}'\right)l_{z2} + \left(-c_{21}'\omega_{z2}' + c_{22}'\omega_{z1}'\right)l_{z3}}} + \zeta_4 , \end{aligned} \tag{11}$$

где ζ_i, ς_i, $i = 1,2$ – шумовые погрешности измерений, f_i', $i = 1,2$ – перегрузки в проекциях на оси модельного географического трехгранника

$$f_i' = c_{i1}f_{z1}' + c_{i2}f_{z2}' + c_{i3}f_{z3}', \quad i = 1,2 ,$$

f_{zi}', $i = 1,2,3$ – перегрузки в проекциях на оси приборного трехгранника.

Подчеркнутые одной чертой члены отвечают запаздываниям Δt_1, Δt_2 информации ГНСС относительно данных БИНС, члены с двумя чертами отражают влияние вектора смещения антенны ГНСС.

Полученные линейные зависимости корректирующих измерений от параметров смещения антенны и запаздывания спутниковой информации (10), (11), как отмечалось выше, позволяют учесть эти возмущающие факторы следующими способами:

a) путем компенсации в информации ГНСС, содержащей параметры сдвига в том случае, когда они точно известны;
b) при помощи включения этих параметров в вектор оцениваемых параметров.

Координаты вектора смещения антенны ГНСС относительно приведенного центра БИНС для объектов, на которые устанавливаются системы МИЭА, измеряются при юстировочных работах на борту ЛА. Ввиду этого смещения антенны обрабатываются по первому способу и в вектор оцениваемых параметров не включаются.

Напротив, прямое измерение запаздывания спутниковых данных затруднительно, в связи с чем оно включается в вектор состояния фильтра и подлежит оцениванию. Таким образом, в алгоритме КОИ решается задача оценки вектора состояния

$$\begin{aligned} x = (&\Delta r_1,\ \Delta r_2,\ \delta V_1,\ \delta V_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_3, \nu_{z1}^0,\ \nu_{z2}^0,\ \nu_{z3}^0,\ \Delta f_{z1}^0, \Delta f_{z2}^0, \Delta f_{z3}^0, \\ &\Theta_{11},\ \Theta_{12},\ \Theta_{13},\ \Theta_{21},\ \Theta_{22},\ \Theta_{23},\ \Theta_{31},\ \Theta_{32},\ \Theta_{33},\ \Gamma_{11},\ \Gamma_{21},\ \Gamma_{22},\ \Gamma_{23},\ \Gamma_{31},\ \Gamma_{33}, \\ &\Delta t_1,\ \Delta t_2)^T. \end{aligned}$$

В этот вектор наряду с переменными систем (2), (3) входят параметры задержек Δt_1 и Δt_2. Относительно них принимается допущение, что они постоянны, что соответствует оценкам по результатам летных испытаний, которые будут приведены в следующем разделе. Модели постоянных задержек соответствуют формирующие уравнения

$$\Delta\dot{t}_1 = 0,$$
$$\Delta\dot{t}_2 = 0, \tag{13}$$

добавляемые к системе уравнений погрешностей (2), (3).

V. Моделирование влияния смещения антенны и запаздывания

Модификации бортовых алгоритмов КОИ предшествовало соответствующее математическое моделирование. Были исследованы:

- необходимость компенсации смещения антенны;
- необходимость учета запаздывания;
- принципиальная возможность оценивания параметров запаздывания.

Необходимость компенсации смещения антенны и учета запаздывания информации была показана путем моделирования алгоритма КОИ, при котором в сигналы коррекции включались поправки, вызванные разнесением антенны ГНСС и БИНС, а также запаздыванием информации ГНСС относительно данных БИНС, либо эти поправки отбрасывались.

При моделировании соответствующего фильтра Калмана использовались вышеприведенные линейные модели уравнений погрешностей и измерений. Инструментальные погрешности БИНС задавались постоянными. Траекторные параметры формировались при помощи информации, зарегистрированной в летных испытаниях. Параметры смещения антенны задавались на уровне одного метра, параметры инструментальных погрешностей – на уровне среднестатистических погрешностей авиационных БИНС, запаздывание информации ГНСС – 5 мс, запаздывание скоростной информации ГНСС относительно позиционной – 10 мс.

Моделирование продемонстрировало, что наиболее существенное влияние рассматриваемые возмущения оказывают на оценки перекосов ДУС.

На рис. 1, 2 в качестве примеров приведены сымитированные значения параметров Θ_{12}, Θ_{21}, а также оценки этих параметров при компенсации смещения антенны – $\tilde{\Theta}_{12}, \tilde{\Theta}_{21}$ и без таковой – $\tilde{\Theta}'_{12}, \tilde{\Theta}'_{21}$. Графики показывают, что с компенсаций разнесения параметры оцениваются хорошо: примерно за две трети интервала времени полета оценки сходятся к имитируемым значениям, тогда как без компенсации смещения антенны точность оценок существенно снижается.

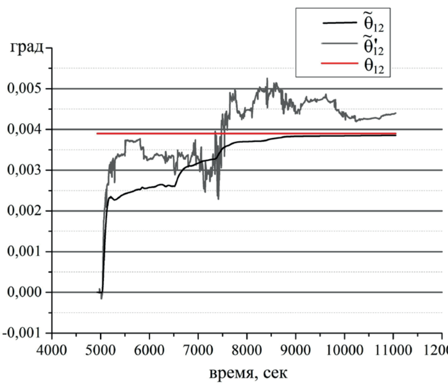

Рис. 1 Оценки параметра Θ_{12} в вариантах с компенсацией смещения антенны и без нее

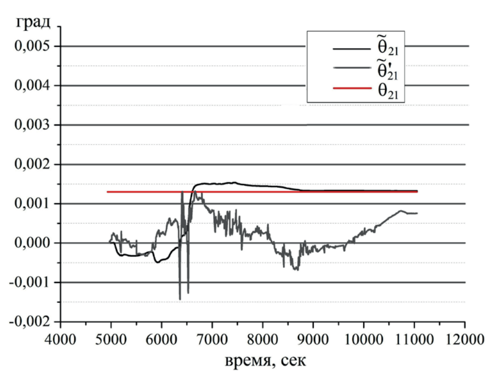

Рис. 2 Оценки параметра Θ_{21} в вариантах с компенсацией смещения антенны и без нее

На рис. 3, 4 показаны, как и прежде, сымитированные значения параметров Θ_{12}, Θ_{21}, оценки этих параметров при учете запаздывания – $\tilde{\Theta}_{12}, \tilde{\Theta}_{21}$ и оценки без учета запаздывания – $\tilde{\Theta}'_{12}, \tilde{\Theta}'_{21}$. Графики показывают, что с учетом параметров запаздывания в векторе состояния перекосы оцениваются хорошо, а без учета – погрешности оценок становятся весьма значительными.

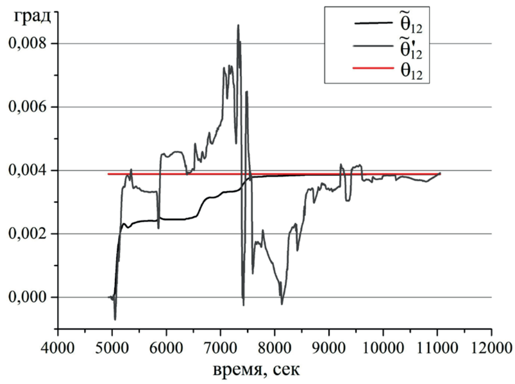

Рис. 3 Оценки параметра Θ_{12} в вариантах с учетом запаздывания и без него

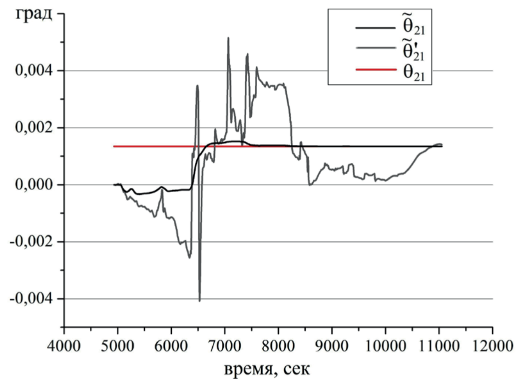

Рис. 4 Оценки параметра Θ_{21} в вариантах с учетом запаздывания и без него

Приведем пример с результатами моделирования погрешностей определения гибридных координат. Рассмотрен случай, когда присутствует запаздывание спутниковой информации с теми же параметрами, что и в предыдущем примере. Кроме того, смоделирован интервал прогноза (отсутствия достоверной информации ГНСС) длительностью 10 мин. Рис. 5, 6 с графиками погрешностей определения гибридных широты и долготы демонстрируют, что учет параметров запаздывания в алгоритмах КОИ приводит к значительному повышению точности прогноза.

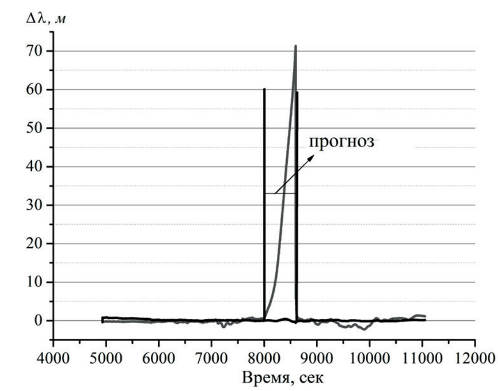

Рис. 5. Погрешности определения гибридной долготы с учетом (черная кривая) и без учета запаздывания (серая кривая)

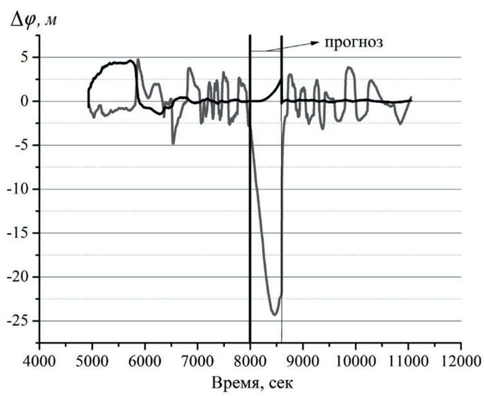

Рис. 6. Погрешности определения гибридной широты с учетом (черная кривая) и без учета запаздывания (серая кривая)

Таким образом, игнорирование пространственного разнесения антенны ГНСС и приведенного центра БИНС и запаздывания приводит к довольно грубому искажению оценок и практической невозможности их использования для формирования прогноза навигационного решения при отключении ГНСС и, тем более, автокалибровки инструментальных погрешностей. Отметим, что разнесения могут значительно превышать 1 м, что влечет за собой еще более грубые искажения оценок. Из этого следует важный практический вывод о необходимости компенсации смещения антенны ГНСС и запаздывания информации при обработке позиционных и скоростных измерений ГНСС даже при сравнительно небольших разнесениях и запаздывании.

Оцениваемость параметров запаздывания связана со свойством наблюдаемости этих переменных вектора состояния (12) при помощи измерений (10), (11). Наблюдаемость параметров запаздывания существенно зависит от маневров ЛА, что можно показать качественно, не привлекая теорию наблюдаемости.

Действительно, множителями при параметрах Δt_1, Δt_2 в измерениях (10), (11) являются скорости V_1', V_2' и горизонтальные проекции внешней удельной силы f_1', f_2'. Изменение этих множителей сразу проявляется в замерах и ведет к наблюдаемости Δt_1, Δt_2. Напротив, при почти прямолинейном движении ЛА параметр запаздывания Δt_1 неотличим от позиционной ошибки БИНС, а члены скоростных измерений, отвечающие запаздыванию, практически обнуляются.

Порядок погрешностей оценивания можно получить на основе ковариационного анализа, связанного с исследованием поведения матрицы ковариации P. Для такого анализа применительно к задачам калмановской фильтрации и сглаживания мы давно используем стохастическую меру оцениваемости [8]. Приведем ее формальное определение. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – случайный вектор с априорным математическим ожиданием μ_x и ковариацией P_x, $\{Z\}$ – совокупность измерений, коррелированных с x, $\tilde{x}$ – оценка вектора состояния, доставляемая алгоритмом L: $\tilde{x} = L\left[\{Z\}\right]$.

Стохастическая мера оцениваемости μ_l скалярной величины $l = c^T x$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, являющейся линейной комбинацией компонент вектора состояния, определяется следующим соотношением [8]:

$$\mu_l = \frac{\sigma_l - \sigma_{\Delta l}}{\sigma_l} = 1 - \frac{\sigma_{\Delta l}}{\sigma_l} = 1 - \sqrt{\frac{c^{\mathrm{T}} P_{\Delta x} c}{c^{\mathrm{T}} P_x c}}, \quad 0 < \mu_l \le 1,$$

где σ_l, $\sigma_{\Delta l}$ – среднеквадратические отклонения величины l и погрешности ее оценки, P_x, $P_{\Delta x}$ – матрицы ковариаций x и погрешности оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$. Мера оцениваемости характеризует относительное изменение среднеквадратичного отклонения $\sigma_{\Delta l}$ погрешности оценки Δl переменной l при ее оценивании посредством алгоритма L.

Мера оцениваемости определяется для произвольной линейной комбинации компонент вектора состояния и, в частности, для каждой его компоненты x_i (при $c_j = 0$, если $j \neq i$, $c = 1$).

Информационный смысл меры оцениваемости таков:

- если величина μ_l близка к нулю, то это означает, что обработка измерений не оказала существенного влияния на значения апостериорных ковариационных характеристик переменной $l = c^T x$, которые слабо отличаются от их априорных значений σ_l, и, соответственно, переменная l является плохо наблюдаемой переменной;
- если величина μ_l близка к единице, то это означает, что для оценивания линейной комбинации $l = c^T x$ эффективно используется измерительная информация и переменная l является хорошо наблюдаемой переменной.

Результаты моделирования стохастической меры оцениваемости на серии полетов представлены на рис. 7. При моделировании приняты следующие начальные значения стандартных отклонений погрешностей: $\sigma_{\Delta t1} = 0{,}3$ с, $\sigma_{\Delta t2} = 0{,}05$ с, выбранные исходя из анализа экспериментальных данных. Графики поведения меры оцениваемости для запаздывания позиционной информации ГНСС относительно информации БИНС (Δt_1) показывают, что переменная оценивается с хорошей точностью, мера ее оцениваемости близка к единице. Для переменной Δt_2 мера оцениваемости несколько ниже – около 0,9, но это также характеризует хороший уровень точности оценки.

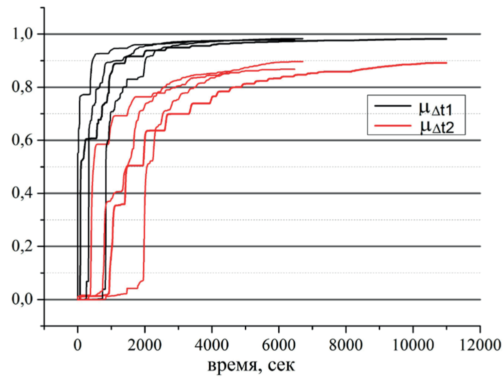

Рис. 7. Меры оцениваемости параметров запаздывания Δt_1, Δt_2 в серии полетов

VI. Результаты практического применения моделей по материалам летных испытаний

Алгоритмы КОИ с описанными модификациями были внедрены в бортовое программное обеспечение серии БИНС, разработанных в ПАО «МИЭА», и эксплуатируются на многих объектах. Опыт испытаний подтверждает эффективность внедренных алгоритмов [1, 2].

Ниже приводятся некоторые результаты работы бортового алгоритма КОИ, полученные в летных испытаниях и связанные с оценкой параметров запаздывания данных ГНСС относительно данных БИНС.

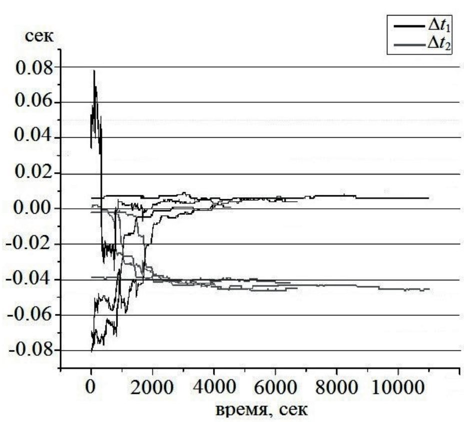

Рис. 8. Оценки интервалов запаздывания для серии полетов

На рис. 8. представлены оценки параметров запаздывания, зарегистрированные в летных испытаниях в серии полетов. Графики оценок показывают стабильность оценок запаздывания от полета к полету, т.е. подтверждают предположение (7) об их постоянстве. Установившееся значение параметра Δt_1 близко к нулю, что демонстрирует хорошую точность привязки информации БИНС и ГНСС при помощи механизма секундной метки. Значение Δt_2 на уровне 0,04 с является характерным, по нашему мнению, для рассинхронизации позиционного и скоростного решений ГНСС.

Приведем экспериментальные результаты, демонстрирующие эффективность модифицированных моделей алгоритма КОИ по итогам работы режима автокалибровки БИНС. Алгоритм КОИ в каждом полете предоставляет оценки параметров инструментальных погрешностей инерциальных датчиков и параметров запаздывания спутниковой информации. Модель динамической системы, позиционных и скоростных замеров от ГНСС приведена выше. Накопленные по серии предшествующих полетов оценки инструментальных погрешностей датчиков проходят некоторую процедуру взвешивания с учетом условий оцениваемости в том или ином полете. Далее взвешенные оценки используются для вычисления поправок к автономному инерциальному режиму, формируемых путем численного интегрирования уравнений погрешностей БИНС (8). Компенсация поправок осуществляется только в выходной информации инерциального канала БИНС без вмешательства в его работу [1, 2].

На рис. 9, 10 отражены результаты летных испытаний БИНС СП-2 разработки ПАО «МИЭА» в части накопления позиционных погрешностей. На рис. 9 показаны погрешности автономного режима БИНС-СП-2 в зависимости от времени по серии полетов и границы допусков без автокалибровки, на рис. 10 – с учетом автокалибровочных поправок. Оценка по критерию $|M| + 2\sigma$ подтверждает эффективность применения алгоритма автокалибровки, заметную на приведенных графиках визуально.

Более подробно результаты внедрения автокалибровки в алгоритм КОИ для различных классов БИНС изложены в публикации [1].

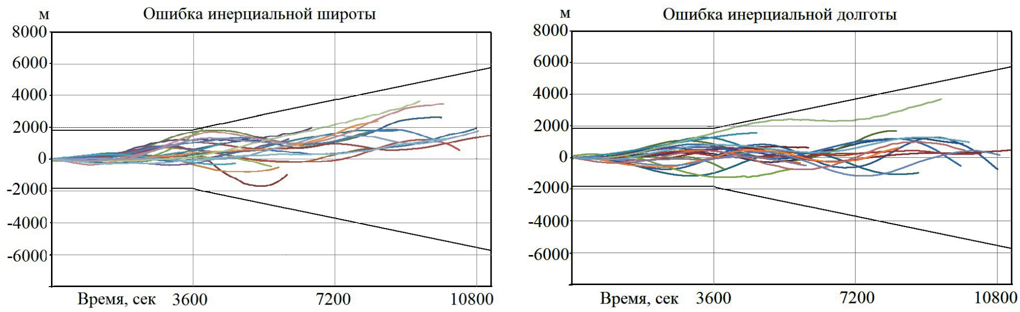

Рис. 9. БИНС-СП-2. Погрешности координат в автономном режиме для серии полетов и границы допусков в 1,85 км за час полета

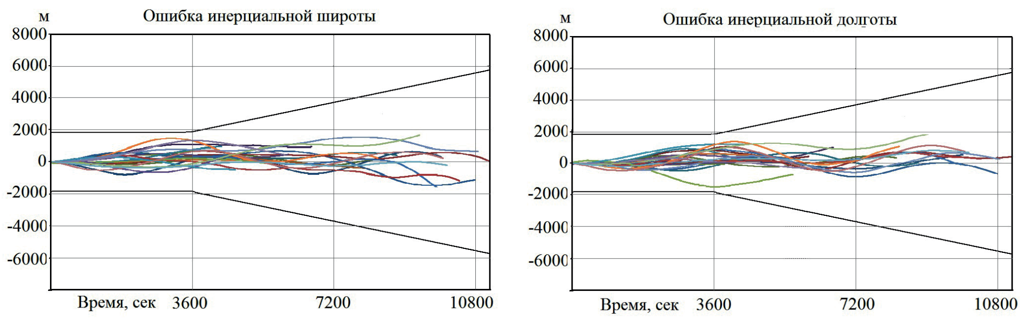

Рис. 10. БИНС-СП-2. Погрешности координат в автономном режиме с учетом автокалибровочных поправок для серии полетов и границы допусков в 1,85 км за час полета

Заключение

В статье рассмотрены вопросы комплексной обработки информации БИНС и ГНСС при наличии пространственных разнесений и малой рассинхронизации скоростных и позиционных данных этих двух систем. В рамках принятой и выверенной модели погрешностей БИНС с полусвободной азимутальной ориентаций опорного навигационного трехгранника и соответствующего ей фильтра Калмана показана существенность учета указанных факторов. Допустимость использования элементарных моделей разнесений и задержек подтверждается результатами моделирования и оценками, полученными в полетах бортовым алгоритмом КОИ. Эффективность алгоритма КОИ, в котором учтены рассматриваемые возмущающие факторы, подтверждена моделированием, внедрением в бортовое программное обеспечение БИНС разработки ПАО «МИЭА» и летными испытаниями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зорина О.А., Измайлов Е.А., Кухтевич С.Е., Портнов Б.И., Фомичев А.В., Вавилова Н.Б., Голован А.А., Папуша И.А., Парусников Н.А.** О расширении возможностей интеграции инерциальных и спутниковых навигационных систем для авиационных приложений // Гироскопия и навигация. 2017. №2 (97). С. 18–34. DOI 10.17285/0869-7035.2017.25.2.018-034
2. **Вавилова Н.Б., Голован А.А., Измайлов Е.А., Кухтевич С.Е., Парусников Н.А., Фомичев А.В.** Способ повышения точности бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Патент РФ на изобретение № 25934325.
3. **Qiangwen Fu, Sihai Li, Yang Liu, Qi Zhou, and Feng Wu,** Automatic Estimation of Dynamic Lever Arms for a Position and Orientation System, MDPI, *Sensors*, 2018, 18(12), 4230, doi:10.3390/s18124230.
4. **Lee, H.K., Lee, J.G., Jee, G.-I.,** Calibration of Measurement Delay in Global Positioning System/ Strapdown Inertial Navigation System, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2002, vol. 25, no. 2, pp. 240–247, doi:10.2514/2.4904.
5. **Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А.** Математические основы навигационных систем. Математические модели инерциальной навигации. М.: Издательство Московского университета, 2020. 162 с.
6. **Maybeck, P.S.,** *Stochastic Models, Estimation and Control*, N.Y.: Acad. Press, 1979.
7. **Farrell, J.A.,** Aided Navigation Systems: GPS and High Rate Sensors, New York, NY, McGraw-Hill, 2008, 552 p.
8. **Варрава В.Г., Голован А.А., Парусников Н.А.** О стохастической мере оцениваемости // Коррекция в навигационных системах и системах ориентации искусственных спутников Земли. М.: Изд. МГУ, 1987.
9. **Lu Zhaoxing, Fang Jiancheng, Gong Xiaolin, Li Jianli, Wang Shicheng, Wang Yun,** Dynamic Lever Arm Error Compensation of POS Used for Airborne Earth Observation, *International Journal of Aerospace Engineering*, 2018, vol. 2018, 13 p., Article ID 9464568.
10. **Емельянцев Г.И., Степанов А.П.** Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / под общей ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова. СПб: ГНЦ РФ «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. 394 с.
11. **Современные методы и средства измерения** параметров гравитационного поля Земли / под общей ред. В.Г. Пешехонова. Санкт-Петербург: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 389 с.
12. **Tao Yang and Wei Wang,** On-line estimation and compensation of measurement delay in GPS/SINS integration, *Proc. SPIE 7128, Seventh International Symposium on Instrumentation and Control Technology: Measurement Theory and Systems and Aeronautical Equipment*, 71282D (13 October 2008).
13. **Skog, I., Handel, P.,** Time Synchronization Errors in Loosely Coupled GPS-Aided Inertial Navigation Systems, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2011, 12(4):1014–1023.
14. **Vavilova, N.B., Golovan, A.A. & Parusnikov, N.A.,** Problem of information equivalent functional schemes in aided inertial navigation systems, *Mech. Solids*, 2008, 43, 391–399, https://doi.org/10.3103/S0025654408030114.

15. **Матасов А.И.** Основы теории фильтра Калмана. М.: Издательство Московского университета, 2021.
16. **Grewall, M.S., Andrews, A.P.,** *Kalman Filtering*, Hoboken, New Jersey, John Wiley &Sons, 2008.

Vavilova, N.B., Golovan, A.A., Kozlov, A.V., Papusha, I.A. (Moscow State University, Russia), **Zorina, O.A., Izmailov, E.A., Kukhtevich, S.E., and Fomichev, A.V.** (Moscow Institute of Electromechanics and Automatics, JSC, Russia)
INS/GNSS Integration with Account for Timing Skew and Displacement of GNSS Antenna. Experience of Practical Realization, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2021, vol. 29, no. 3 (114), pp. 52–68.

Abstract. We examine two aspects specific to complex data fusion algorithms in integrated strapdown inertial navigation systems aided by global positioning systems, with their inherent spatial separation between the GNSS antenna phase center and the inertial measurement unit, as well as with the timing skew between their measurements. The first aspect refers to modifications of mathematical models used in INS/GNSS integration. The second one relates to our experience in their application in onboard airborne navigation algorithms developed by Moscow Institute of Electromechanics and Automatics.

Key words: strapdown inertial navigation system (SINS), global satellite navigation system (GNSS), complex data fusion (CDF), Kalman filter, estimation accuracy.

Материал поступил 02.10.2020