

Ю. В. БОЛОТИН, А. В. БРАГИН, Д. В. ГУЛЕВСКИЙ

## ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ РАСШИРЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА В ЗАДАЧЕ НАВИГАЦИИ ПЕШЕХОДА С БИНС, ЗАКРЕПЛЕННЫМИ НА СТОПАХ

*Исследуется задача пешеходной навигации при помощи бескарданных инерциальных навигационных систем (БИНС), закрепленных на стопах человека. Для повышения точности навигации в таких случаях обычно используется коррекция по нулевой скорости стопы в фазе опоры (zero velocity update – ZUPT). Эта информация обрабатывается с помощью расширенного фильтра Калмана (РФК). Условие нулевой скорости записано в двух формах – в опорной и приборной системе координат, и показано, что применение общепринятой в навигации пешехода первой формы приводит к несостоятельности РФК. Применение второй формы позволяет получить корректный ZUPT-алгоритм, который записывается в так называемых динамических погрешностях. Проанализирован алгоритм комплексирования информации от двух БИНС, основанный на знании максимального расстояния между стопами. Показано, как здесь может проявиться несостоятельность РФК и как ее можно избежать, опять перейдя к динамическим погрешностям. Результаты получены аналитически посредством методов теории наблюдаемости и ковариационного анализа.*

**Ключевые слова:** БИНС, расширенный фильтр Калмана, стопа, пешеходная навигация, ковариации, состоятельность.

### Введение

Сегодня навигация пешехода – быстро развивающееся направление исследований, где для определения местоположения и скорости применяются различные средства: специализированные инерциальные датчики, смартфоны и их навигационные сенсоры, сигналы беспроводных сетей. В работах [1–4] и др. исследовалась задача пешеходной навигации с использованием БИНС, прикрепленных к стопам. Для увеличения точности в подобных системах применяется ZUPT-коррекция [1–4], идея которой состоит в использовании информации о нулевой скорости стопы в момент фазы опоры. Эта информация обрабатывается с помощью РФК [1–3] или сигма-точечного фильтра Калмана [4, 5]. Вектор состояния фильтра обычно включает координаты

---

**Болотин** Юрий Владимирович. Доктор физико-математических наук, профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва). Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

**Брагин** Александр Викторович. Аспирант, МГУ им. М.В. Ломоносова.

**Гулевский** Даниил Вячеславович. Аспирант, МГУ им. М.В. Ломоносова.

Статья по докладу на 27-й Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, 2020.

ты, скорости и параметры ориентации БИНС. Часто в вектор состояния добавляются параметры инструментальных погрешностей БИНС [1, 2], но это, как правило, не дает существенного прироста точности без использования дополнительных измерений или калибровочных экспериментов [6, 7].

Один из подходов к повышению точности заключается в использовании двух БИНС, закрепленных на разных стопах. Ключевая идея – знание того, что расстояние между стопами ограничено. Существуют различные алгоритмы, реализующие коррекцию с помощью этой информации [8, 9].

Стандартный способ протестировать и улучшить алгоритмы пешеходной навигации – проверить их работу на реальных данных. При этом теоретических исследований в этой области не так много. Сложность получения теоретических результатов объясняется тем, что уравнения нестационарны, так что формулы ковариационного анализа не дают аналитических решений.

Недавно были опубликованы некоторые теоретические результаты. Интересный результат, касающийся комплексирования показаний множества инерциальных блоков, представлен в [10]. В [6] ковариационный анализ пешеходной навигации проведен аналитически с некоторыми упрощающими предположениями, одно из которых заключалось в том, что БИНС достаточно точна, чтобы можно было пренебречь отличием вычисленной ею скорости от реальной скорости в фазе опоры. В [7] на основе экспериментальных данных проведен подробный и интересный анализ воздействия разного рода факторов на точность пешеходной навигации. Рассмотрено, в частности, влияние подвижности стопы в фазе опоры и перегрузок на дрейф датчика угловой скорости (ДУС). В экспериментах, проведенных авторами настоящей работы, отмеченное в [7] нарушение условия неподвижности стопы в фазе опоры при использовании РФК и записи этого условия в традиционной форме [2, 3] привело к парадоксам. Например, расчетная ковариация погрешности оценки угла курса не растет с увеличением времени, хотя эта переменная является ненаблюдаемой. Можно сказать, что с точки зрения РФК переменная является псевдонаблюдаемой. Согласно определению [11], алгоритм оценивания является несостоятельным, поскольку расчетная ковариация отличается от действительной. Таким образом, проведенные эксперименты показали, что реализованный РФК с ZUPT-коррекцией несостоятелен. Цель работы – изучить механизм этой несостоятельности.

Псевдонаблюдаемость некоторых переменных РФК – хорошо известное явление, к примеру, в теории одновременной навигации и картографирования (SLAM) [12]. Как и в пешеходной навигации, некоторые ненаблюдаемые переменные кажутся наблюдаемыми при анализе ковариаций, генерируемых РФК. В [12] предлагается модификация РФК, сохраняющая свойства наблюдаемости системы. Результат достигается за счет специального выбора точки линеаризации РФК. В [13, 14] используется так называемая инвариантная модификация РФК, основанная на теории групповой инвариантности уравнений задачи оценивания, разработанной в [15], и исследована состоятельность алгоритма при навигации робота по угловым измерениям.

В данной статье псевдонаблюдаемость и состоятельность РФК для задачи навигации пешехода исследована другими методами, за счет специального выбора системы координат.

Представленные результаты получены аналитически. Для аналитического подхода пришлось сделать некоторые допущения, например считать фазу опоры мгновен-

ной. Этого предположения не было высказано в [6], где фаза опоры имела конечную длительность. В работе приводятся аналитические формулы для матриц наблюдаемости и инвариантных ненаблюдаемых подпространств. Формулируется условие структурной состоятельности РФК: размерность ненаблюдаемого подпространства уравнений погрешностей должна совпадать с размерностью ненаблюдаемого подпространства исходной нелинейной задачи.

Важной особенностью предлагаемого подхода является преобразование координат – переход к так называемым динамическим погрешностям. Это преобразование было предложено В.Д. Андреевым и Н.А. Парусниковым в 1960-х годах [16,17] и используется в практике высокоточной инерциальной навигации [18], в том числе и в задаче коррекции по нулевой скорости. В данной работе динамические погрешности вводятся немного в другой форме, чем в [18], которая представляется предпочтительной в случае применения низкоточных датчиков. Показано, что при записи уравнений в динамических погрешностях переходная матрица РФК не зависит от оценки состояния, что упрощает исследование. Заметим, что использование динамических погрешностей во многом похоже на инвариантный РФК из [15].

Далее исследован вопрос комплексирования данных двух БИНС. Следуя [8, 9], мы воспользовались информацией об ограниченности расстояния между стопами. Анализ известных алгоритмов, где эти ограничения были применены на базе РФК [8, 9], показал, что они теоретически несостоятельны: глядя на ковариации, кажется, что курс является наблюдаемой переменной. В работе аналитически определена причина ложной наблюдаемости и предложен способ ее избежать. Для этого опять использовались динамические погрешности, на этот раз в системе меньшего порядка, вектор состояния которой содержал только координаты и курс [9].

Для проверки теоретических выводов проведено тестирование упомянутых алгоритмов на основе реальных данных и эти тесты показали справедливость полученных результатов.

### Уравнения инерциальной навигации

Пусть один или два инерциальных измерительных блока закреплены на стопах, каждый блок содержит трехкомпонентный микроэлектромеханический акселерометр и трехкомпонентный микроэлектромеханический ДУС. Вначале рассмотрим случай применения одной БИНС.

Модельные уравнения и уравнения погрешностей БИНС ниже приводятся в упрощающих предположениях, принятых в пешеходной навигации [1, 2]: не учитывается вращение Земли и изменение вектора силы тяжести от точки к точке. В частности, по этой причине навигационную систему координат, связанную с Землей, можно считать инерциальной.

Пусть  $M$  – приведенная чувствительная масса акселерометров, а  $O$  – некоторая точка, фиксированная на Земле. Для определенности будем считать  $O$  стартовой точкой траектории пешехода.

Пусть  $On_1n_2n_3$  – навигационная система координат (н.с.к.), связанная с Землей (ось  $On_3$  направлена вертикально вверх),  $p_n, v_n$  – соответственно координаты и скорости  $M$  в н.с.к. Здесь и далее нижние индексы у векторов обозначают принадлежность к соответствующей системе координат.

Пусть  $Ms_1s_2s_3$  – приборная система координат (п.с.к.), связанная с корпусом БИНС. Оси  $Ms_1s_2s_3$  совпадают с осями чувствительности акселерометров. Ориентация п.с.к. относительно н.с.к. определяется кватернионом  $q_{ns}$ . Вектор угловой скорости п.с.к. относительно н.с.к. в осях п.с.к. обозначим  $\omega_s$ , а матрицу поворота, соответствующую кватерниону  $q_{ns}$ , –  $R(q_{ns})$ . Преобразование координат из п.с.к. в н.с.к. может быть записано как  $p_n = R(q_{ns})p_s$ .

Пусть  $M's' = M's'_1s'_2s'_3$  – модель приборной с.к. (м.с.к.), реализованная в вычислителе. Координаты  $p'_n$  точки  $M'$  – расчетные значения координат точки  $M$ . Ориентация м.с.к. относительно п.с.к. определяется вектором малого поворота  $\beta_s$ . Ориентация м.с.к. относительно н.с.к. определяется кватернионом  $q_{ns'}$ . Угловую скорость м.с.к. относительно н.с.к. в осях м.с.к. обозначим  $\omega'_s$ .

Наконец, пусть  $Mp = Mp_1p_2p_3$  – так называемая квазиприборная с.к. [18], которую будем называть виртуальной с.к. (в.с.к.), а  $Mn' = Mn'_1n'_2n'_3$  – так называемая квазимодельная с.к. [18] (к.с.к.). Ориентация п.с.к. относительно в.с.к. определяется кватернионом  $q_{ns'}$ , а ориентация м.с.к. относительно к.с.к. определяется кватернионом  $q_{ns}$ , как показано на диаграммах (удобно поместить начала всех систем координат в точку  $O$ ):



Ориентация в.с.к. относительно н.с.к., как и ориентация н.с.к. относительно к.с.к., на диаграммах определяется вектором малого поворота  $\beta_n$ . Этот вектор получается из вектора  $\beta_s$  умножением на  $R(q_{ns'})$  или, с точностью до малых второго порядка малости, умножением на  $R(q_{ns})$ . Важно отметить, что приведенные диаграммы коммутативны только в предположении, что м.с.к. близка к п.с.к., то есть векторы  $\beta_s, \beta_n$  малы.

Пусть  $f_s, \omega_s$  – соответственно удельная сила, действующая на чувствительную массу, и абсолютная угловая скорость корпуса БИНС в п.с.к. Измерения акселерометров и датчиков угловой скорости (ДУС) можно записать так:

$$f'_s = f_s + r_s, \quad \omega'_s = \omega_s + \varepsilon_s.$$

Здесь  $r_s, \varepsilon_s$  – погрешности акселерометров и ДУС в п.с.к., в данной работе принимаются белыми шумами. Заметим, что на практике ДУС измеряет абсолютную угловую скорость, но в рамках введенных упрощающих предположений она совпадает с угловой скоростью относительно Земли.

Пусть  $X$  – вектор состояния и  $X'$  – модельный вектор состояния ИНС:

$$X = \begin{bmatrix} p_n \\ v_n \\ q_{ns} \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} p'_n \\ v'_n \\ q_{ns'} \end{bmatrix}.$$

Опорные и модельные уравнения имеют вид [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_n &= v_n, & \dot{p}'_n &= v'_n, \\
 \dot{v}_n &= R(q_{ns})f_s + g_n, & \dot{v}'_n &= R(q_{ns'})f'_s + g_n, \\
 \dot{q}_{ns} &= -\frac{1}{2}\tilde{\omega}_s \circ q_{ns}, & \dot{q}_{ns'} &= -\frac{1}{2}\tilde{\omega}'_s \circ q_{ns'}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $g_n = [0, 0, -g]^T$  – вектор силы тяжести,  $\tilde{\omega}$  – кватернион вида  $[0, \omega_1, \omega_2, \omega_3]$ ,  $^\circ$  – операция умножения кватернионов.

Для коррекции навигационных решений и исследования их точности необходимо ввести векторы погрешностей БИНС и уравнения погрешностей [18]. В литературе [1, 2] часто используется вектор погрешностей  $x = [\Delta p_n, \Delta v_n, \beta_n]^T$ , где  $\Delta p_n = p'_n - p_n$ ,  $\Delta v_n = v'_n - v_n$  – так называемые полные погрешности, а  $\beta_n$  – вектор малого поворота между н.с.к. и в.с.к. Заметим, что размерности  $X, x$  – разные.

Уравнения погрешностей можно написать так:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{p}_n &= \Delta v_n, & r_n &= R(q_{ns'})r_s, \\ \Delta \dot{v}_n &= f'_n \times \beta_n + r_n, & f'_n &= R(q_{ns'})f'_s, \\ \dot{\beta}_n &= \varepsilon_n, & \varepsilon_n &= R(q_{ns'})\varepsilon_s. \end{aligned} \quad (2)$$

Стоит отметить, что при использовании грубых МЕМС-датчиков предположение о малости  $\beta_n$  некорректно и линейные уравнения (2) неточно описывают поведение погрешностей.

Следуя [18, 19], сделаем замену переменных в (2), перейдя к так называемым динамическим погрешностям  $\delta p_n, \delta v_n$ , которые можно ввести двумя способами – в навигационной и в приборной системе координат:

$$\begin{cases} \delta p_n = p'_n - p_p \\ \delta v_n = v'_n - v_p \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta p_s = p'_s - p_s \\ \delta v_s = v'_s - v_s \end{cases}.$$

Динамические погрешности выражаются через полные по формулам:

$$\begin{cases} \delta p_n = \Delta p_n - p_n \times \beta_n \\ \delta v_n = \Delta v_n - v_n \times \beta_n \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta p_s = \Delta p_s - p'_s \times \beta_s \\ \delta v_s = \Delta v_s - v'_s \times \beta_s \end{cases}.$$

Спроектировав вторую группу соотношений на оси н.с.к, получим:

$$\begin{cases} \delta p_n = \Delta p_n - p_n \times \beta_n \\ \delta v_n = \Delta v_n - v_n \times \beta_n \end{cases}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} \delta p_n = \Delta p_n - p'_n \times \beta_n \\ \delta v_n = \Delta v_n - v'_n \times \beta_n \end{cases}. \quad (4)$$

Полученные группы формул (3), (4) отличаются заменой истинных значений координат и скоростей на вычисленные значения. В отличие от [18] ниже используется форма (4), поскольку только она может быть реализована в вычислителе. В динамических погрешностях (4) уравнения (2) примут вид:

$$\begin{aligned} \delta \dot{p}_n &= \delta v_n - p'_n \times \varepsilon_n, \\ \delta \dot{v}_n &= -g_n \times \beta_n - v'_n \times \varepsilon_n + r_n, \\ \dot{\beta}_n &= \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (5)$$

### Условие нулевой скорости

В фазе опоры скорость стопы  $v$  близка к нулю, что можно использовать как псевдоизмерение. Соответствующая процедура называется ZUPT-коррекцией. Рассмотрим два ее варианта.

Если записать условие нулевой скорости в н.с.к., получим  $Z_n = v_n - \zeta_n = 0$ , где  $\zeta_n = v_n$  – отличие скорости от нуля, обусловленное подвижностью стопы в фазе опоры. Измерение нулевой скорости в терминах вектора погрешностей примет вид  $z_n = v'_n - Z_n = v'_n - v_n + \zeta_n = \Delta v_n + \zeta_n$  (см., например, [2]).

Если записать условие нулевой скорости в п.с.к., получим  $Z_s = v_s - \zeta_s = 0$ , где  $\zeta_s = v_s$  – отличие скорости от нуля. Измерение нулевой скорости в терминах вектора погрешностей примет вид  $z_s = v'_s - Z_s = v'_s - v_s + \zeta_s = \delta v_s + \zeta_s$ . Спроектировав последнее уравнение в н.с.к., получим  $z_n = \delta v_n + \zeta_{ns}$ , где  $\zeta_{ns}$  – проекция  $\zeta_s$  в н.с.к.

**Следствие 1.** При записи условия нулевой скорости в н.с.к. получим корректирующее измерение в форме F, а при записи условия нулевой скорости в п.с.к. – корректирующее измерение в форме D:

$$\text{форма D: } z = \delta v_n + \zeta_{ns}, \quad (6)$$

$$\text{форма F: } z = \delta v_n + v'_n \times \beta_n + \zeta_n. \quad (7)$$

Ниже показано, что форма D (6) предпочтительна.

### Необходимые условия состоятельности РФК

Рассмотрим общую задачу оценивания в нелинейной системе с вектором состояния  $X(t)$ , где измерения  $Z_k$  поступают в дискретные моменты времени  $t_k$ :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f(X_k, w_k), & X_k &= X(t_k), \\ Z_k &= h(X_k) + r_k, & k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $w_k$  – возмущения,  $r_k$  – погрешности измерений, причем  $w_k, r_k$  – некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями.

Алгоритм РФК включает этап прогноза  $X_{k+1|k} = f(X_{k|k}, 0)$  – интегрирование модельных уравнений на отрезках  $t_k < t < t_{k+1}$  и этап коррекции – уточнение модельных значений  $X_{k|k-1}$  в моменты  $t_k$  с использованием измерения  $Z_k$ :  $X_{k|k} \leftarrow X_{k|k-1}$ . При прогнозе и коррекции применяются линеаризованные уравнения относительно векторов погрешностей  $x_k = X_k - X_{k|k-1}$ .

**Замечание 1.** В инерциальной навигации, в частности в уравнениях (1), вектор  $X_k$  обычно содержит избыточные переменные [18] (например, ориентация БИНС задается четырехмерным кватернионом, удовлетворяющим условиям нормировки), а вектор погрешностей избыточных переменных содержать не должен. В связи с этим приведенная формула  $x_k = X_k - X_{k|k-1}$  для вектора погрешностей не вполне корректна. Чтобы сделать ее корректной, предположим, что параметризация  $X_k$  не избыточна, т.е. зададим, например, ориентацию БИНС трехмерным вектором конечного поворота. От конкретного выбора параметризации результат не зависит.

Уравнения погрешностей РФК относительно вектора  $x_k = X_k - X_{k|k-1}$  получаются за счет линеаризации уравнений (8) и имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_{k+1,k}x_k + G_k w_k, \\ z_k &= H_k x_k + r_k, \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Будем различать два случая – идеальный РФК (ИРФК), где матрицы в (9) вычисляются в истинном состоянии системы (здесь и ниже верхний индекс 0 обозначает ИРФК):

$$H_k^0 = \frac{\partial h(X_k)}{\partial X_k}, \quad F_{k+1,k}^0 = \frac{\partial f(X_k, w_k)}{\partial X_k}, \quad F_{k+2,k}^0 = \frac{\partial}{\partial X_k} f(f(X_k, w_k), w_{k+1}),$$

и стандартный РФК, где матрицы в (9) вычисляются в модельных состояниях:

$$H_k = \frac{\partial h(X_{k|k-1})}{\partial X_{k|k-1}}, \quad F_{k+1,k} = \frac{\partial f(X_{k|k}, 0)}{\partial X_{k|k}}, \quad F_{k+2,k} = \frac{\partial}{\partial X_{k|k}} f(f(X_{k|k}, 0), 0).$$

Матрицы  $G_k, G_k^0$  – частные производные  $f(X_k, w_k)$  по  $w_k$ . Прогноз оценок погрешностей и дисперсий погрешностей оценок для РФК выражается формулами:

$$x_{k+1|k} = F_{k+1,k}x_{k|k}, \quad P_{k+1|k} = F_{k+1,k}P_{k|k}F_{k+1,k}^T + G_k Q_k G_k^T, \quad Q_k = E[w_k w_k^T]. \quad (10)$$

Коррекция оценок погрешностей и их ковариационных матриц выражается формулами:

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k(z_k - H_k x_{k|k-1}), \quad P_{k|k} = (I - K_k H_k)P_{k|k-1}, \quad (11)$$

где  $K_k = P_{k|k-1}H_k^T R_k^{-1}$ ,  $R_k = E[r_k r_k^T]$ . Инициализация РФК при  $k = 0$  задается ковариационной матрицей  $P_{0|0}$  и начальной оценкой  $x_{0|0}$ .

После оценки погрешностей (11) оценки состояния (модельные переменные) обновляются по формуле  $X_{k|k} = X_{k|k-1} + x_{k|k}$ . Погрешности  $x_{k|k}$  при этом обнуляются и остаются равными нулю до следующего этапа коррекции. Случай ИРФК отличается от РФК тем, что в (10), (11) добавлен верхний индекс 0 и отсутствует обновление вектора состояния.

Определение 1. Задача оценивания (8) называется ненаблюдаемой относительно однопараметрической группы преобразований  $X \rightarrow \Omega_\tau(X)$ , если уравнения (8) переходят в себя под действием этой группы:  $\Omega_\tau(f(X, w)) = f(\Omega_\tau(X), w)$ ,  $h(\Omega_\tau(X)) = h(X)$ .

Матрица наблюдаемости  $O_k$  и инвариантное ненаблюдаемое подпространство  $N_k$  – ядро  $O_k$  – на  $k$ -м шаге определены формулами:

$$O_k = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 F_{1,0} \\ \dots \\ H_k F_{k,0} \end{bmatrix}, \quad N_k = \text{Ker } O_k.$$

Ниже для краткости будем отождествлять пространство  $N_k$  с матрицей, состоящей из порождающих его столбцов. Для ИРФК построенным матрицам присвоим индекс 0:  $N_k^0, O_k^0$ . Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Если задача (8) ненаблюдаема относительно однопараметрической группы преобразований  $X \rightarrow \Omega_\tau(X)$ , то ненаблюдаемое подпространство ИРФК не пусто:  $N_k^0 \neq 0$  для всех  $k$ .

Действительно, приняв  $x_k^* = \partial / \partial \tau \Omega_\tau(X_k)$  при  $\tau = 0$ , получим  $x_k^* \in N_k^0$ :

$$x_{k+1}^* = \frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_\tau(f(X_k, w_k)) = \frac{\partial}{\partial \tau} f(\Omega_\tau(X_k), w_k) = \frac{\partial}{\partial X} f(X_k, w_k) \frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_\tau(X_k) = F_{k+1, k} x_k^*,$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tau} h(X_k) = \frac{\partial}{\partial \tau} h(\Omega_\tau(X_k)) = \frac{\partial}{\partial X} h(X_k) \frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_\tau(X_k) = H_k x_k^*.$$

**Замечание 2.** В задаче навигации пешехода четыре такие группы преобразований  $\Omega_s$ : поступательные перемещения системы как твердого тела вдоль трех осей и вращение вокруг вертикальной оси [15]. Ввиду этого размерность ненаблюдаемого подпространства  $N_k^0$  равна четырем.

С учетом последнего замечания ниже ограничимся случаем  $N_k^0 \neq 0$ .

**Утверждение 2.** Если задача (8) ненаблюдаема относительно некоторой группы  $\Omega_s: X \rightarrow X$ , то ненаблюдаемые переменные ИРФК в (9) не оцениваются, дисперсия их погрешностей оценок не стремится к нулю при  $Q_k \rightarrow 0, R_k \rightarrow 0$ .

Для доказательства сначала примем в формулах ИРФК  $Q_k = 0$ . Поскольку в доказываемом утверждении предполагается  $R_k \rightarrow 0$ , представим  $R_k$  как  $R_k = \varepsilon R^0$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Сделав разложение Холецкого  $R^0 = SS^T$  и умножив уравнение  $Z_k = h(X_k) + r_k$  слева на  $S^{-1}$ , без ограничения общности получим, что  $R_k = \varepsilon I$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а  $I$  – единичная матрица. Тогда ИРФК сводится к методу наименьших квадратов (МНК) относительно состояния  $x_0$  в момент времени  $k = 0$  по измерениям в моменты  $j = 0, \dots, k$ . Матрицу, обратную матрице дисперсий погрешностей оценок МНК (в предположении нормальности распределений она совпадает с матрицей Фишера), можно записать как  $\Phi_0 = P_{0|0}^{-1} + \varepsilon^{-1} O_k^{0T} O_k^0$ , где  $O_k^{0T} O_k^0$  – грамиан наблюдаемости [11]. Матрица дисперсии погрешности оценки  $x_0$  по измерениям  $z_1, \dots, z_k$  выражается как  $P_{0|k} = \Phi_0^{-1}$ . Поскольку  $N_k^0 \neq 0$ , матрица  $O_k^{0T} O_k^0$  вырождена, тогда существует собственное направление  $P_{0|k}$  с ограниченным снизу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  собственным значением. Матрица дисперсии погрешности оценки  $x_k - P_{k|k} = F_{k,0} P_{0|k} F_{k,0}^T$ , для нее также существует собственное направление с ограниченным снизу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  собственным значением. Соответствующая этому направлению координата не оценивается. Вернувшись к случаю  $Q_k \neq 0$ , мы только увеличим дисперсию погрешности оценки указанной координаты. Утверждение доказано.

**Утверждение 3.** Наблюдаемые переменные ИРФК оцениваются, причем их оценки состоятельны в том смысле, что вычисляемые дисперсии погрешностей оценок стремятся к нулю при  $Q_k \rightarrow 0, R_k \rightarrow 0$ .

Доказательство проводится по той же схеме, что и выше. Сделав декомпозицию уравнений ИРФК по наблюдению, можем ограничиться рассмотрением наблюдаемой



подсистемы в (9). Положим  $Q_k = 0$ , тогда задача ИРФК сводится к МНК. Пусть  $R_k \rightarrow 0$ . Сделав замену переменных, как и при доказательстве утверждения 2, полагаем, что  $R_k = \varepsilon I$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В силу наблюдаемости системы матрица Фишера  $\Phi_0 = \varepsilon^{-1} O_k^{0T} O_k^0$  положительно определена, причем  $\Phi_0 \rightarrow \infty$  при  $R_k \rightarrow 0$ . Поэтому  $P_{0|k} \rightarrow 0$ ,  $P_{k|k} \rightarrow 0$  при  $R_k \rightarrow 0$ . По непрерывности этот результат сохраняется и при ненулевых  $Q_k \rightarrow 0$ .

**Определение 2.** РФК структурно несостоятелен, если размерность ненаблюдаемого подпространства РФК  $N_k$  отлична от размерности ненаблюдаемого подпространства ИРФК  $N_k^0$ . Данное определение отличается от общепринятого определения состоятельности, которое, в свою очередь, имеет несколько вариантов [11]. Воспользуемся следующим определением.

**Определение 3.** РФК состоятелен, если при  $Q_k \rightarrow 0$ ,  $R_k \rightarrow 0$  как вычисляемые РФК, так и истинные дисперсии погрешности оценки наблюдаемых координат стремятся к нулю, а дисперсии погрешности оценки ненаблюдаемых координат ограничены снизу. Подчеркнем, что согласно данному определению состоятельности расчетные погрешности могут существенно отличаться от действительных. Следующее утверждение строго не доказано и формулируется в виде правдоподобной гипотезы.

**Утверждение 4.** Если РФК не удовлетворяет условиям структурной состоятельности определения 2, то есть размерность ненаблюдаемого подпространства РФК отлична от размерности ненаблюдаемого подпространства ИРФК, то РФК не состоятелен в смысле определения 3.

### Применение условий состоятельности РФК к задаче навигации пешехода

В задаче навигации пешехода было обнаружено странное поведение ковариаций погрешностей оценок угла курса [20], вычисляемых РФК в форме F. Можно предположить, что проблема вызвана несостоятельностью РФК в смысле определения 3. Для выяснения природы этой несостоятельности проанализированы свойства РФК с точки зрения выполнения условий определения 2.

Чтобы применить критерий структурной несостоятельности определения 2, найдем матрицы  $H_k, F_{k+1,k}$ . Ниже все величины записываются в н.с.к., поэтому опускаем нижний индекс  $(\cdot)_n$ . Пусть  $t_k$  – время окончания  $k$ -й фазы опоры. Нижний индекс  $(\cdot)_k$  будет использоваться для обозначения величин в момент  $t_k$ . Пусть длительность шага  $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ .

Переходная матрица и матрица измерений системы в дискретном времени  $k$  в форме D (уравнения (5),(6)) могут быть записаны в виде

$$\begin{bmatrix} F_{k+1,k} \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_k & -\frac{\tau_k^2}{2} g \times \\ 0_3 & I_3 & -\tau_k g \times \\ \hline 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $(\cdot)^\times$  – кососимметрическая матрица векторного произведения.  
 Матрица наблюдаемости и ее ядро имеют вид:

$$O_k = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 F_{1,0} \\ H_2 F_{2,0} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 & -\tau_1 g^\times \\ 0_3 & I_3 & -(\tau_1 + \tau_2) g^\times \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad N_k = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & g \end{bmatrix}.$$

Из вида матриц вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 5.** В форме D уравнения в отклонениях и уравнения ZУРТ-измерений не зависят от состояния и не отличаются от уравнений ФК в линейных задачах. Матрицы наблюдаемости и ненаблюдаемые подпространства ИРФК и РФК совпадают. В связи с этим РФК структурно состоятелен в смысле определения 2 и состоятелен в смысле определения 3.

Обратимся к форме F. Уравнения погрешностей запишем в динамических погрешностях, то есть в виде (5), (7). В дискретном времени  $k$  переходная матрица и матрица измерений системы будут иметь вид:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1,k} \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_k & -\frac{\tau_k^2}{2} g^\times \\ 0_3 & I_3 & -\tau_k g^\times \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ 0_3 & I_3 & v_{k|k-1}^\times \end{bmatrix}.$$

Здесь  $v_{k|k-1}$  – модельная в случае РФК и истинная в случае ИРФК скорость в конце  $k$ -й фазы опоры. Матрица наблюдаемости и ее ядро (в случае когда  $g, v_{k|k-1}$  не коллинеарны хотя бы в один момент времени  $k$ ) имеют вид:

$$O_k = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 F_{1,0} \\ H_2 F_{2,0} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & v_{1|0}^\times \\ 0_3 & I_3 & -\tau_1 g^\times + v_{1|0}^\times \\ 0_3 & I_3 & -(\tau_1 + \tau_2) g^\times + v_{2|1}^\times \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad N_k = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_3 \\ 0_3 \end{bmatrix}.$$

Из вида матриц вытекает следующее.

**Следствие 2.** Если  $g, v_{k|k-1}$  не коллинеарны хотя бы в один момент времени  $k$ , то в форме F размерность ненаблюдаемого подпространства РФК равна трем, поэтому РФК структурно несостоятелен в смысле определения 2.

Получается, что в форме F угол курса кажется наблюдаемой переменной, что противоречит инвариантности системы относительно группы вращений вокруг вертикальной оси. Этот результат имеет простое объяснение: когда модельная горизонтальная скорость не равна нулю, угол курса попадает в измерения (7).

Доказательство несостоятельности РФК в форме F в смысле определения 3 приведено в [20]. Для этого аналитически вычислены ковариации погрешностей оценок

переменных в формах F и D и показано, что в форме F их поведение противоречит свойствам наблюдаемости задачи. Теоретические результаты подтверждаются расчетами (см. рис. 1 и 2).

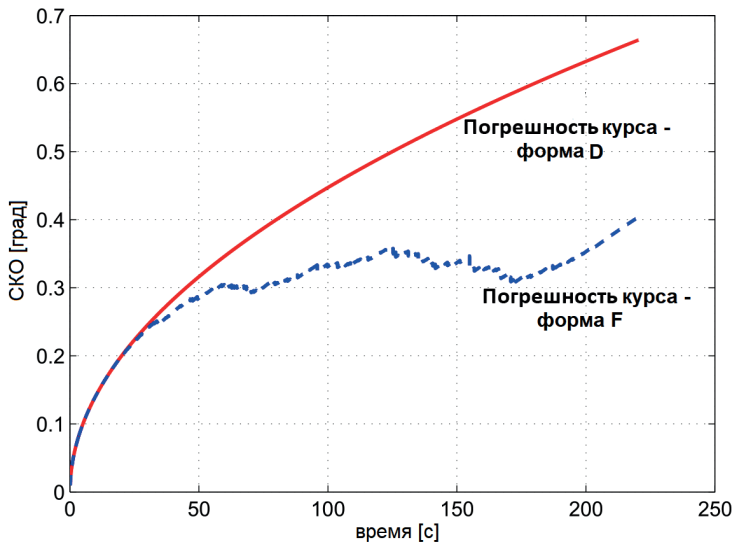


Рис. 1. На графиках приведены расчетные СКО азимутальной погрешности для РФК в формах F и D для трехминутного трека. Для формы D СКО – как у случайного блуждания, что подтверждает ненаблюдаемость азимутального угла. Для формы F СКО ограничено примерно до 200 с, после этого пешеход стоит неподвижно и ложная наблюдаемость курса исчезает

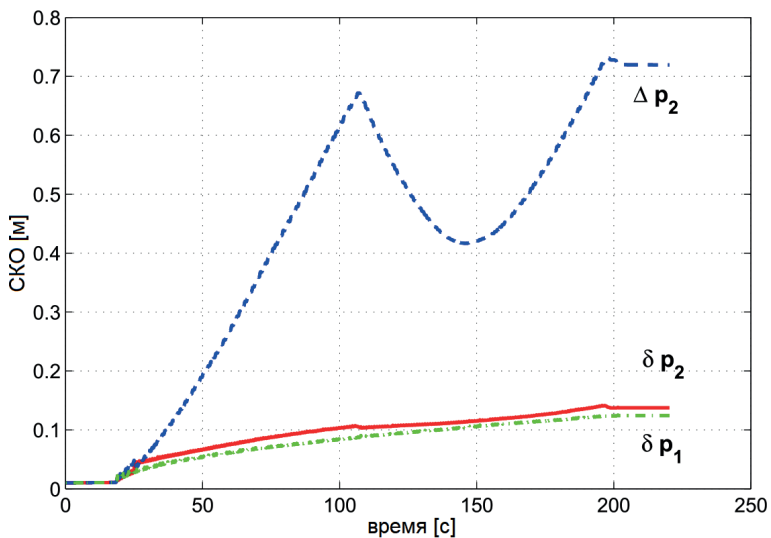


Рис. 2. На графиках приведены расчетные СКО полной и динамической погрешностей координат ( $p_1$  – вдоль направления движения,  $p_2$  – поперек) для трехминутного трека. В полной погрешности  $p_2$  (форма F) есть вклад погрешности ориентации, модулированной позицией. В динамической погрешности этого вклада нет. Подробнее см. в [20]

**Замечание 3.** Таким образом, если условие нулевой скорости записать в навигационной системе координат, РФК структурно несостоятелен. Если же это условие записать в приборной системе координат, РФК структурно состоятелен.

Посмотрим на вопрос записи условий нулевой скорости с механической точки зрения. Если скорость измеряется каким-то внешним датчиком типа ГНСС, измерения следует относить к н.с.к.; если скорость измеряется каким-то внутренним сенсором, например одометром, измерения следует относить к п.с.к. Из сказанного выше вытекает, что измерения ZUPT следует трактовать как измерения одометра (см. [21]<sup>1</sup>).

Отметим некоторые преимущества использования динамических погрешностей. Во-первых, в (5) отсутствуют измерения акселерометров, являющиеся быстро меняющейся функцией времени [18]. Во-вторых, матрица перехода стационарна. В-третьих, проблемы с наблюдаемостью возникают не в динамических уравнениях, а в уравнениях измерений. В-четвертых, ковариации динамических погрешностей координат и скоростей не зависят явно от погрешностей ДУС [18].

### Редуцированная DUMP-модель

В данном разделе вводится понятие редуцированной модели задачи пешеходной навигации, удобной как для систем, работающих в режиме реального времени, так и для качественного анализа наблюдаемости при дополнительных измерениях.

Редуцированная модель (в работе ей присвоена аббревиатура DUMP) была предложена и протестирована многими авторами (см., например, [8, 9]). Идея состоит в исключении из рассмотрения хорошо наблюдаемых и точно оцениваемых в результате ZUPT-коррекции переменных. DUMP-модель содержит только координаты и угол курса.

Основания для уменьшения размерности вектора состояния таковы:

- крен, тангаж и скорости наблюдаемы по измерениям ZUPT;
- погрешности координат и курса ненаблюдаемы по измерениям ZUPT.

DUMP-модель функционирует в дискретном времени  $k$ , где  $t_k$  – последний момент  $k$ -й фазы опоры. Вектор состояния  $Y_k$  DUMP-модели состоит из координат  $p_k$  и угла курса  $\psi_k$  в последний момент  $k$ -й фазы опоры.

Для вывода уравнений DUMP-модели введем систему координат шага (с.к.ш.) с началом в точке с модельными координатами БИНС в конце  $k$ -й фазы опоры, повернутую относительно н.с.к. на модельный курс  $\psi_k$ .

Пусть  $\hat{p}(t)$ ,  $\hat{v}(t)$ ,  $\hat{q}(t)$  – координаты, скорость и кватернион в с.к.ш. в момент  $t_{k-1} < t < t_k$ . Эти переменные получены решением модельных уравнений с нулевыми начальными условиями по координатам  $\hat{p}(t_{k-1}) = 0$ , скоростям  $\hat{v}(t_{k-1}) = 0$  и углу курса  $\hat{\psi}(t_{k-1}) = 0$ . Начальные условия по крену и тангажу  $\hat{\theta}(t_{k-1})$ ,  $\hat{\gamma}(t_{k-1})$  совпадают с конечными значениями предыдущего шага. Обозначим  $\hat{p}_k = \hat{p}(t_k)$ ,  $\hat{v}_k = \hat{v}(t_k)$ ,  $\hat{q}_k = \hat{q}(t_k)$ ,  $\hat{\psi}_k = \hat{\psi}(t_k)$  определенные выше переменные в конце  $k$ -го шага после ZUPT-коррекции в форме D. Вектор состояния DUMP-системы в конце  $k+1$ -й фазы опоры вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k + \check{p}_{k+1}, & \check{p}_{k+1} &= R(\psi_k) \hat{p}_{k+1}, \\ \psi_{k+1} &= \psi_k + \check{\psi}_{k+1}, & \check{\psi}_{k+1} &= \hat{\psi}_{k+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $p_k$  – координаты БИНС в момент  $t_k$  в системе координат  $On_1n_2n_3$ ;  $R(\psi_k)$  – матрица перехода от с.к.ш. к н.с.к.;  $\check{p}_{k+1}$  – приращение координат, спроектированное из с.к.ш. в н.с.к.

<sup>1</sup> В [21] измерения одометра вводятся точно так же, как и в данной статье. Авторы благодарны рецензенту, обратившему наше внимание на эту книгу.

Уравнения погрешностей DUMP-модели в н.с.к. можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta p_{k+1|k} &= \Delta p_{k|k} + \check{p}_{k+1|k} \times \Delta \psi_{k|k} + \Delta \check{p}_{k+1}, \\ \Delta \psi_{k+1|k} &= \Delta \psi_{k|k} + \Delta \check{\psi}_{k+1}.\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь  $\Delta \check{p}_{k+1} = R(\psi_{k|k}) \Delta \hat{p}_{k+1}$ ,  $\Delta \check{\psi}_{k+1}$  – погрешности оценок приращений координат и курса за  $k+1$ -й шаг, где  $\Delta \hat{p}_{k+1}$  – погрешность оценки приращения координат в с.к.ш.;  $\Delta \psi_{k|k} = [0, 0, \Delta \psi_{k|k}]^T$ . Из (12)  $p_{k+1|k} - p_{k|k} = \check{p}_{k+1|k}$ , поэтому уравнения погрешностей можно переписать так:

$$\begin{aligned}\Delta p_{k+1|k} &= \Delta p_{k|k} + (p_{k+1|k} - p_{k|k}) \times \Delta \psi_{k|k} + \Delta \check{p}_{k+1}, \\ \Delta \psi_{k+1|k} &= \Delta \psi_{k|k} + \Delta \check{\psi}_{k+1}.\end{aligned}\quad (14)$$

### Редуцированная DUMP-модель двух БИНС

Запишем DUMP-модель для двух IMU, установленных на левой и правой стопах. Пусть  $p^l, p^r$  – координаты БИНС, закрепленных на левой и правой стопах соответственно, а  $\psi^l, \psi^r$  – углы курса. В DUMP-модели рассматриваются состояния в дискретные моменты времени, соответствующие концу фазы опоры левой и правой стоп. Векторы состояния левой и правой БИНС соотносятся с разными моментами времени  $t_i^l, t_i^r$ . Объединим их и получим множество  $\{t_k\}$ , где каждый его элемент может соответствовать фазе опоры левой или правой ноги. Обозначим  $\mathfrak{L}, \mathfrak{R}$  множества  $k$ , соотносящиеся с  $t_i^l, t_i^r$ . Пусть

$$\check{p}_k^l = \begin{cases} \check{p}_k^l & \text{как в (12), } k \in \mathfrak{L} \\ 0, & k \in \mathfrak{R} \end{cases}, \quad \check{\psi}_k^l = \begin{cases} \check{\psi}_k^l & \text{как в (12), } k \in \mathfrak{L} \\ 0, & k \in \mathfrak{R} \end{cases}.\quad (15)$$

Опорные уравнения БИНС могут быть записаны так:

$$\begin{aligned}p_{k+1|k}^l &= p_{k|k}^l + \check{p}_{k+1}^l, & p_{k+1|k}^r &= p_{k|k}^r + \check{p}_{k+1}^r, \\ \psi_{k+1|k}^l &= \psi_{k|k}^l + \check{\psi}_{k+1}^l, & \psi_{k+1|k}^r &= \psi_{k|k}^r + \check{\psi}_{k+1}^r.\end{aligned}\quad (16)$$

Обозначим векторы состояния двух БИНС в DUMP-модели:

$$Y_k^l = \begin{bmatrix} p_k^l \\ \psi_k^l \end{bmatrix}, \quad Y_k^r = \begin{bmatrix} p_k^r \\ \psi_k^r \end{bmatrix}, \quad Y_k^{lr} = \begin{bmatrix} Y_k^l \\ Y_k^r \end{bmatrix}.$$

Введем погрешности двух БИНС  $\Delta \check{p}_k^l, \Delta \check{p}_k^r, \Delta \check{\psi}_k^l, \Delta \check{\psi}_k^r$  аналогично (15) (как и ранее, будем называть  $\Delta \check{p}_k^l, \Delta \check{p}_k^r$  полными погрешностями):

$$\Delta \check{p}_k^l = \begin{cases} \Delta \check{p}_k^l & \text{как в (13), } k \in \mathfrak{L} \\ 0, & k \in \mathfrak{R} \end{cases}, \quad \Delta \check{\psi}_k^l = \begin{cases} \Delta \check{\psi}_k^l & \text{как в (13), } k \in \mathfrak{L} \\ 0, & k \in \mathfrak{R} \end{cases}.$$

Уравнения погрешностей левой и правой БИНС имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta p_{k+1|k}^l &= \Delta p_{k|k}^l + (p_{k+1|k}^l - p_{k|k}^l) \times \Delta \Psi_{k|k}^l + \Delta \tilde{p}_{k+1}^l, \\ \Delta \Psi_{k+1|k}^l &= \Delta \Psi_{k|k}^l + \Delta \tilde{\Psi}_{k+1}^l, \\ \Delta p_{k+1|k}^r &= \Delta p_{k|k}^r + (p_{k+1|k}^r - p_{k|k}^r) \times \Delta \Psi_{k|k}^r + \Delta \tilde{p}_{k+1}^r, \\ \Delta \Psi_{k+1|k}^r &= \Delta \Psi_{k|k}^r + \Delta \tilde{\Psi}_{k+1}^r. \end{aligned}$$

Введем векторы погрешностей двух БИНС в DUMP-форме:

$$y_k^l = \begin{bmatrix} \Delta p_k^l \\ \Delta \Psi_k^l \end{bmatrix}, \quad y_k^r = \begin{bmatrix} \Delta p_k^r \\ \Delta \Psi_k^r \end{bmatrix}, \quad y_k^{lr} = \begin{bmatrix} y_k^l \\ y_k^r \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода  $F_{k+1,k}$  для уравнений погрешностей  $y_k^{lr}$  имеет вид:

$$F_{k+1,k} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & (p_{k+1|k}^l - p_{k|k}^l) \times_3 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0_{1 \times 3} & 0 \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & I_{3 \times 3} & (p_{k+1|k}^r - p_{k|k}^r) \times_3 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Здесь  $(\cdot) \times_3$  – третий столбец матрицы векторного произведения.

### Коррекция по расстоянию между стопами

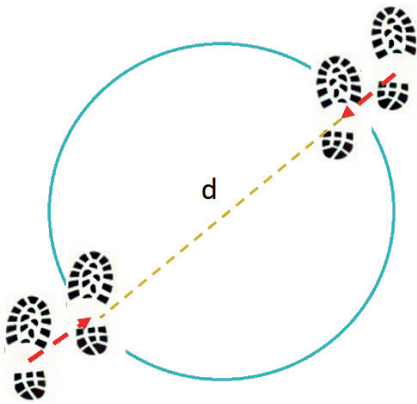


Рис. 3. Принцип DUPT: когда оценка расстояния между стопами превышает  $d$ , проводится коррекция по псевдоизмерению  $\|p^l - p^r\| = d$

Рассмотрим случай, когда БИНС закреплены на обеих стопах пешехода. Идея заключается в использовании информации о том, что расстояние между стопами не может превышать максимальной длины шага  $d$  [8, 9]. Этот подход проиллюстрирован на рис. 3. Назовем алгоритм коррекции DUPT (distance update – коррекция по расстоянию).

Ограничение на расстояние между стопами (DUPT) в момент  $k$ -й фазы опоры имеет вид  $\|p_k^l - p_k^r\| \leq d$ . Существует несколько подходов к использованию этой информации. Одни базируются на квадратичном программировании [9], другие – на байесовском методе [8, 22] и т.д. Следуя основной цели работы, проанализируем подход, основанный на РФК. Рассмотрим нетривиальный случай:  $\|p_k^l - p_k^r\| > d$ . Запишем DUPT-измерение в виде

$$Z_k = \|p_{k|k}^l - p_{k|k}^r\| - d + \eta_k. \quad (18)$$

Здесь  $\eta_k$  – шум, введенный искусственно.

**Утверждение 6.** Уравнения (16), как и (18), инвариантны относительно однопараметрических групп параллельных переносов и поворотов системы как твердого тела. Ввиду этого сумма углов курса, как и сумма координат, – ненаблюдаемые переменные.

В погрешностях измерение (18) имеет вид  $z_k = H_k y_{k|k-1}^{lr} + \eta_k$ , где

$$H_k = \frac{(p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r)^T}{\|p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r\|} \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Из несложного анализа матриц наблюдаемости, соответствующих паре  $(F_{k+1,k}, H_k)$ , определенной (17), (19) (в силу громоздкости они здесь не приводятся), видно, что если существуют хотя бы два значения  $k = k_1, k_2$ , для которых направления векторов  $p_{k|k}^l - p_{k|k}^r$  различны, то размерность ненаблюдаемого подпространства меньше четырех. Отсюда вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 7.** Размерность ненаблюдаемого подпространства РФК, соответствующего паре  $(F_{k+1,k}, H_k)$ , определенной (17), (19), меньше числа ненаблюдаемых переменных. РФК задачи коррекции по расстоянию между стопами, записанный в полных погрешностях, структурно несостоятелен в смысле определения 2.

Перепишем уравнения погрешностей (14) каждой из стоп в другой форме, заменив  $p_{k|k}$  на  $p_{k|k-1}$  (идея взята из [12]):

$$\begin{aligned} \Delta p_{k+1|k} &= \Delta p_{k|k} + (p_{k+1|k} - p_{k|k-1}) \times \Delta \Psi_{k|k} + \Delta \tilde{p}_{k+1}, \\ \Delta \Psi_{k+1|k} &= \Delta \Psi_{k|k} + \Delta \tilde{\Psi}_{k+1}. \end{aligned}$$

Введем динамические погрешности координат:

$$\begin{aligned} \delta p_{k|k} &= \Delta p_{k|k} - p_{k|k-1} \times \Delta \Psi_{k|k}, \\ \delta p_{k+1|k} &= \Delta p_{k+1|k} - p_{k+1|k} \times \Delta \Psi_{k+1|k}. \end{aligned}$$

Уравнения погрешностей каждой из стоп примут вид:

$$\begin{aligned} \delta p_{k+1|k} &= \delta p_{k|k} + \Delta \tilde{p}_{k+1} - p_{k+1|k} \times \Delta \tilde{\Psi}_{k+1}, \\ \Delta \Psi_{k+1|k} &= \Delta \Psi_{k|k} + \Delta \tilde{\Psi}_{k+1}. \end{aligned}$$

Матрица перехода  $F_{k+1,k}$  в новых переменных  $\bar{y}_k^{lr}$  является единичной:

$$F_{k+1,k} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0_{1 \times 3} & 0 \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_k^{lr} = \begin{bmatrix} \delta p_k^l \\ \Delta \Psi_k^l \\ \delta p_k^r \\ \Delta \Psi_k^r \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Запишем в динамических погрешностях DUPT-измерение  $z_k = H_k \bar{y}_{k|k-1}^{lr} + \eta_k$ :

$$H_k = \begin{bmatrix} \frac{(p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r)^T}{\|p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r\|} & \frac{(p_{k|k-1}^l \times p_{k|k-1}^r)_3}{\|p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r\|} & -\frac{(p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r)}{\|p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r\|} & -\frac{(p_{k|k-1}^l \times p_{k|k-1}^r)_3}{\|p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r\|} \end{bmatrix},$$

где индекс  $(\cdot)_3$  обозначает третью компоненту вектора. Ненаблюдаемое инвариантное подпространство включает столбцы матрицы:

$$N_k = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \\ -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $N_k$  не зависит от состояния системы, поэтому справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 8.** При записи задачи коррекции по расстоянию между стопами в динамических погрешностях разность координат  $p^l - p^r$  и разность курсов  $\psi^l - \psi^r$  наблюдаемы, а остальные координаты ненаблюдаемы. Размерность ненаблюдаемого подпространства равна четырем. РФК структурно состоятелен в смысле определения 2.

**Замечание 4.** Состоятельность алгоритма в смысле определения 3 не очевидна. Но расчеты, основанные на экспериментальных данных, показывают, что теоретическая дисперсия погрешности полусуммы углов курса растет почти линейно со временем и близка к половине дисперсии азимутального угла при отсутствии DUPТ-коррекции (рис. 4). Соответствующая траектория показана на рис. 5. Дисперсия разности азимутальных углов, напротив, ограничена во времени. Примерно такого поведения дисперсий следует ожидать от состоятельной оценки.

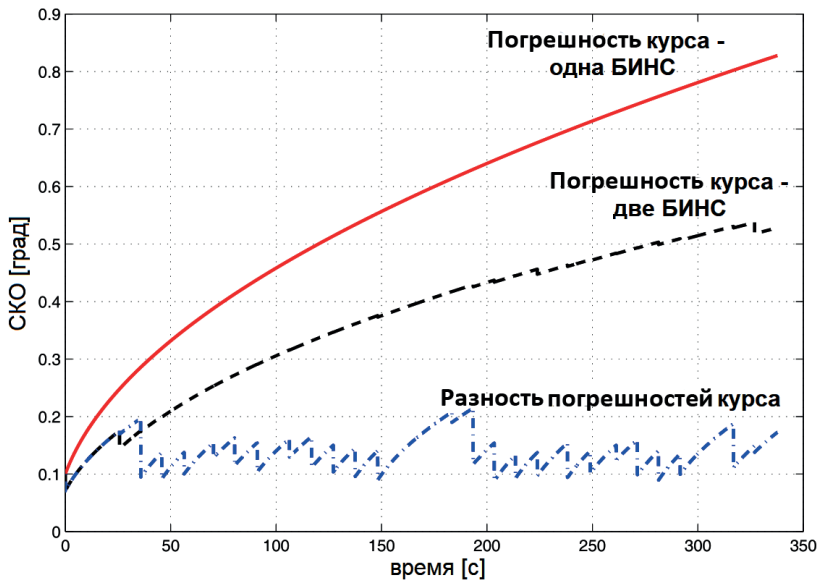


Рис. 4. Расчетные СКО погрешности курса в режиме использования одной БИНС и комплексирования двух БИНС

Если  $p^l, p^r$  меняются во времени, ненаблюдаемое подпространство порождается столбцами матрицы  $N_k$ . При этом  $N_k$  – постоянная матрица.



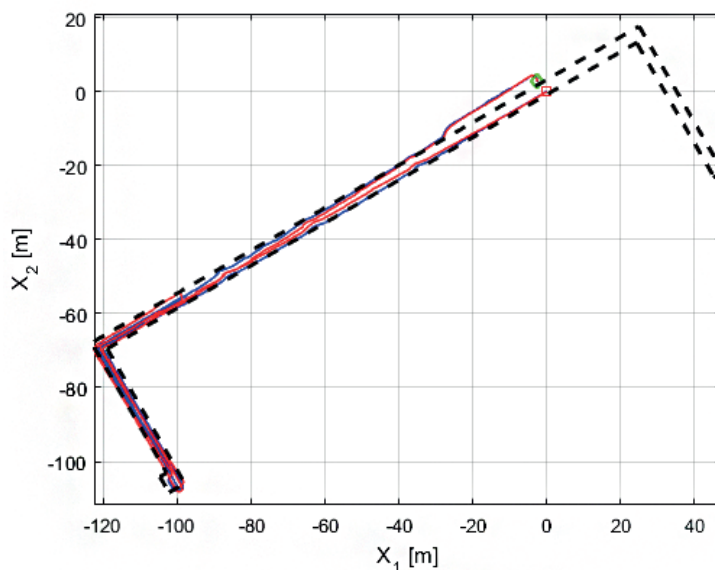


Рис. 5. Траектория для пятиминутного трека. Пунктиром обозначен коридор внутри здания

### Эксперименты

Эксперименты проводились в МГУ им. Ломоносова в рамках проекта RuDaCoP Российского исследовательского института компании Huawei. Использовались инерциальные измерительные блоки MPU9250. Частота записи – 125 Гц. Погрешность навигации определялась как разница между начальной и конечной точкой замкнутой траектории. В таблице ниже представлены средние радиальные погрешности координат в конечной точке для пятнадцати пятиминутных и пятнадцати десятиминутных треков (рис. 5). Эксперименты показали небольшое, но стабильное улучшение точности при использовании формы D. Вместе с тем нужно отметить, что многое зависит от выбора интенсивностей шума датчиков, используемых в РФК.

Т а б л и ц а

Точность навигации

Радиальная погрешность для пяти- и десятиминутных треков [м]		
Длительность трека	Форма D	Форма F
5 мин	13,2	14,6
10 мин	12,5	13,6

### Заключение

Проведено аналитическое исследование состоятельности алгоритмов пешеходной навигации с применением БИНС, закрепленных на стопах, в рамках определенных гипотез. Основной результат – необходимо корректно записывать условие

нулевой скорости (ZUPT) и соответствующее измерение для РФК в случае использования грубых датчиков. А именно: при записи в навигационной системе координат (как делается обычно) эти уравнения приводят к несостоятельности РФК. Предложена форма РФК для ZUPT, в которой необходимые условия состоятельности выполнены. Условие нулевой скорости следует записывать в приборной системе координат в динамических погрешностях аналогично тому, как это делается для систем с одомером [18, 21]. Заметим, что подход, основанный на динамических погрешностях, переключается с инвариантным РФК из [14, 15].

Следуя другим авторам, после ZUPT-коррекции уменьшен порядок модельных уравнений и уравнений погрешностей, в векторе состояния оставлены только координаты и угол курса. В таком режиме рассмотрено комплексирование данных двух БИНС, прикрепленных к разным стопам, на основе биомеханического ограничения длины шага. Ограничение расстояния между стопами записано в форме измерения, пригодной для РФК. Далее РФК был аналитически проверен на выполнение необходимых условий состоятельности. Как и в случае с ZUPT-коррекцией, оказалось, что в стандартной форме РФК несостоятелен, а при записи уравнений в отклонениях в динамических погрешностях можно избежать его несостоятельности.

Эксперименты подтвердили теоретические результаты. При этом на практике предложенная форма РФК не всегда позволяет увеличить точность навигации. Данное явление требует дальнейшего анализа: возможно, разброс результатов связан с низкой частотой опроса датчиков и с их пониженной точностью при больших перегрузках, возникающих при постановке стопы на опору.

### Благодарность

Благодарим Российский исследовательский институт компании Huawei за техническую и финансовую поддержку, а также рецензентов за конструктивную критику и полезные советы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bancroft, J., Lachapelle, G., Cannon, M., Petovello, M., Twin IMU-HSGPS Integration for Pedestrian Navigation, *Proceedings of ION GNSS*, 2008, pp. 1377–1387.
2. Nilsson, J.-O., et al., Foot-mounted INS for everybody – An open-source embedded implementation, *Proceedings of IEEE/ION PLANS*, 2012, pp. 140–145.
3. Skog, I. et al., Zero-velocity detection – an algorithm evaluation, *IEEE Trans. Bio-Med. Eng.*, 2010, vol. 57, no. 11, pp. 2657–2666.
4. Bolotin, Yu., Fatehrad, M., Pedestrian inertial navigation with foot zero velocity update, *22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*, 2015, pp. 68–72.
5. Yuan, X., Yu, S., Zhang, S., Wang, G., Liu, S., Quaternion-based unscented Kalman filter for accurate indoor heading estimation using wearable multi-sensor system, *Sensors*, 2015, 15(5), pp.10872–10890.
6. Wang, Y., Chernyshoff, A., Skel, A., Error analysis of ZUPT-aided pedestrian inertial navigation, *Proceedings of IPIN*, 2018, pp. 24–27.
7. Ван Ю., Цзю Ч., Шкель А. Пешеходная инерциальная навигация с коррекцией по нулевой скорости и комплексированием датчиков // Гироскопия и навигация, 2021. Том 29. № 1 (112). С. 3–31.
8. Zachariah, D., Skog, I., Jansson, M., Handel, P., Bayesian estimation with distance bounds, *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, vol. 19, no. 12, pp. 880–883.
9. Skog, I., Nilsson, J., Zachariah, D., Handel, P., Fusing the information from two navigation systems using an upper bound on their maximum spatial separation, *Proceedings of IPIN*, 2012, pp. 1–5.
10. Skog, I., Nilsson, J.O., Handel, P., Nehorai, A., Inertial Sensor Arrays, Maximum Likelihood, and Cramer–Rao Bound, *IEEE Trans. Signal Processing*, 2016, vol. 64, no. 16, pp. 4218–4227.

11. Bar–Shalom, Y., Li, X., Kirubarajan, T., *Estimation with applications to tracking and navigation*, New York, Wiley–Interscience, 2001, 581 p.
12. Huang, G., Kaess, M., Leonard, J., Towards consistent visual-inertial navigation, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2014, pp. 4926–4933.
13. Hartley, R., Ghaffari, M., Eystice, I., Grizzle, J., Kontakt-aided invariant extended Kalman filtering for robot state estimation, *The international Journal of Robotics Research*, 2020, vol. 39, no.4, pp. 402–430.
14. Zhang, T., Wu, K., Song, J., Huang, S., Dissanayake, G., Convergence and Consistency Analysis for a 3-D Invariant-EKF SLAM, *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2017, vol. 2, no. 2, pp. 733–740.
15. Barrau, A., Bonnabel, S., Invariant Kalman Filtering, *Annu. Rev. Control Robot. Auton. Syst.*, 2018, 1:5.1–5.21
16. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. Москва: Наука, 1967. 647 с.
17. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. М: Издательство Московского университета, 1982. 176 с.
18. Голован А.А., Вавилова Н.Б., Парусников Н.А. Математические основы инерциальных навигационных систем. М: Издательство Московского университета, 2020. 164 с.
19. Scherzinger, B., Reid, D., Modified strapdown inertial navigator error models, *Proceedings of IEEE PLANS*, 1994, pp. 426–430.
20. Bolotin, Yu.V., Bragin, A.V., Gartzev, I.B., Covariance error analysis for pedestrian dead reckoning with foot mounted IMU, *Proceedings of IPIN*, 2019, pp. 243–250.
21. Емельянец Г.И., Степанов А.П. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. Санкт-Петербург: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. 394 с.
22. Nilsson, J., Zahariah, D., Skog, I., Handel, P., Cooperative localization by dual foot mounted inertial sensors and inter-agent ranging, *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2013, vol. 2013, no.164, pp. 1–17.

---

**Bolotin, Yu.V., Bragin, A.V., and Gulevskii, D.V.** (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia) Studying the Consistency of Extended Kalman Filter in Pedestrian Navigation with Foot-Mounted SINS, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2021, vol. 29, no. 2 (113), pp. 59–77.

**Abstract.** The paper focuses on pedestrian navigation with foot-mounted strapdown inertial navigation systems (SINS). Zero velocity updates (ZUPT) during the stance phase are commonly applied in such systems to improve the accuracy. Zero velocity data are processed by the extended Kalman filter (EKF). Zero velocity condition is written in two forms: in reference and body frames. The first form traditional for pedestrian navigation is shown to provide an inconsistent EKF. The second form provides a correct ZUPT algorithm, which is naturally written in so-called dynamic errors. The analyzed algorithm for data fusion from two SINS is based on the bound on foot-to-foot distance. It is shown how EKF inconsistency can be manifested, and how it can be avoided by proceeding back to dynamic errors. The results are obtained analytically using observability theory and covariance analysis.

**Key words:** SINS, extended Kalman filter, foot, pedestrian navigation, covariance, consistency.

Материал поступил 08.09.2020