

Н. Н. ВАСИЛЮК

РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИЙ СМАЗОВ В ЦИФРОВОМ ИЗОБРАЖЕНИИ КАК СПЕЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

В статье анализируется траектория смаза, т.е. движения проекции точечного источника света по плоскости изображения, которая возникает при взаимном перемещении цифровой камеры и наблюдаемой сцены во время экспозиции. Расчет траектории смаза осуществляется путем решения системы дифференциальных уравнений кинематики плоского движения точки, записанной через измерения векторов угловой скорости и кажущегося ускорения. Формулируемая задача названа «специальной задачей» инерциальной навигации с целью подчеркнуть ее отличия от задачи бесплатформенной инерциальной навигации в общепринятом смысле. Система уравнений специальной задачи получена в координатах плоскости изображения. Приведены модельные примеры расчета траекторий смаза при наблюдении точечных целей движущейся камерой для двух предельных случаев – удаленной звезды и близкой неподвижной цели. В первом случае демонстрируется возможность повысить вероятность обнаружения смазанного изображения звезды в шуме и устранить непредсказуемую систематическую погрешность в определении ее координат.

Ключевые слова: смаз, ядро смаза, коррекция смаза, астродатчик, точечная цель, инерциальная навигация, согласованный фильтр.

Введение

Для современных систем цифрового видения характерно наличие искажений, которые возникают при движении оптического изображения в плоскости матричного фотоприемника (МФП) цифровой камеры в том случае, когда она фиксирует подвижные объекты в пространстве предметов или сама движется относительно этого пространства. Искажения в цифровом изображении делятся на два типа. Первый из них связан с движением оптического изображения на временном интервале между двумя последовательными кадрами, считываемыми из МФП, и чаще всего проявляется в виде «дрожания» цифрового изображения, затрудняющего его визуальное восприятие. «Дрожание» вносит случайную компоненту в последовательные определения координат отдельных элементов цифрового изображения [1].

Другой тип искажений, рассматриваемый в данной работе, называется «смазом» и проявляется при движении оптического изображения на интервале экспозиции одного кадра. Это движение раскладывается на две составляющие. Одна обусловлена движением камеры, другая – движением источника относительно пространства предметов. Смаз ухудшает разрешение цифрового изображения и затрудняет определение координат его характерных точек [2, 3].

Василюк Николай Николаевич. Кандидат физико-математических наук, заместитель главного конструктора, ООО «НПК Электрооптика». ORCID 0000-0003-2317-8066.

Универсальные методы борьбы с движением оптического изображения сводятся к применению электромеханических устройств, перемещающих оптическую ось камеры относительно пространства предметов. Это удорожает и усложняет конструкцию цифровой системы технического зрения, снижает ее эксплуатационную надежность. В связи с этим производители современных систем нередко отказываются от подвижных частей или стремятся существенно упростить их конструкцию. Возникающие вследствие этого искажения в цифровом изображении требуют алгоритмической коррекции в близком к реальному масштабе времени, что, в свою очередь, приводит к необходимости увеличивать мощность цифрового вычислителя [4, 5].

Аналогичные тенденции наблюдаются и в современных системах инерциальной навигации. Сложные электромеханические инерциальные навигационные системы с гироскопом заменяются на бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС). Переход к цифровым методам обработки инерциальных измерений уже привел к более широкому применению БИНС, а также к их проникновению в те области человеческой деятельности, в которых ранее они не могли использоваться.

Если смазанное изображение получено при низком уровне шумов и насыщено сложными структурными элементами, то параметры смаза, необходимые для алгоритмической коррекции, можно оценить непосредственно из этого изображения [6–11]. Никаких дополнительных измерений собственного движения камеры и наблюдаемого объекта в этом случае не требуется.

При наблюдении слабосветящегося объекта с бедным структурным наполнением на фоне сильных шумов получить параметры смаза непосредственно из цифрового изображения не удастся: их приходится вычислять с привлечением информации о движении камеры и объекта, получаемой от дополнительных датчиков [12, 13]. Текущий уровень развития технологий БИНС позволяет использовать в качестве дополнительного датчика инерциальный измерительный модуль (ИИМ), скрепленный с камерой [14, 15]. С помощью ИИМ можно вычислить траекторию движения геометрической проекции точечного источника света по фокальной плоскости объектива во время экспозиции МФП, т.е. траекторию смаза.

Реальный объектив строит изображение точечного источника света в фокальной плоскости не в виде точки, а в виде некоторого пятна рассеяния. Распределение освещенности внутри этого пятна называется функцией рассеяния точки (ФРТ) объектива. Форма и размеры ФРТ являются конструкционными параметрами объектива, которые задаются при его проектировании [16]. Во время экспозиции ФРТ «скользит» вдоль траектории смаза по поверхности МФП, превращая цифровое изображение точечного источника из пятна в вытянутую «полосу». Эта полоса называется «ядром смаза» и содержит всю необходимую информацию для его алгоритмической коррекции [17, 18].

Траектория движения камеры на интервале экспозиции определяется на основе измерений ИИМ в результате решения задачи бесплатформенной инерциальной навигации. В общепринятом случае она сводится к решению системы дифференциальных уравнений пространственной кинематики твердого тела, записанных через координаты векторов угловой скорости и ускорения, измеренных в неинерциальной системе отсчета. Далее будем называть ее обычной задачей инерциальной навигации. Результаты численного решения этой обычной задачи используются для расчета дискретных значений позиции, скорости и ориентации камеры относительно пространства

предметов. Из полученных дискретных значений выстраивается последовательность матричных операторов, выполняющих центральное проецирование одной плоскости изображения на другую. В зарубежной литературе эти операторы называются операторами гомографии [19]. В результате построения этой последовательности вычисляются значения плоских координат дискретной последовательности точек, взятых на траектории смаза, для выбранного начального пикселя траектории [20–27].

В развитие этого подхода предлагается учитывать общие свойства проективных преобразований и уравнений обычной задачи инерциальной навигации, что и является предметом рассмотрения настоящей статьи. Наличие таких свойств позволяет рассчитывать траекторию смаза в плоскости изображения непосредственно из измерений ИИМ, без промежуточного решения обычной задачи инерциальной навигации [28–32]. Иначе говоря, задачу определения траектории смаза можно свести к решению системы дифференциальных уравнений кинематики плоского движения точки, записанной через измерения ИИМ. В дальнейшем будем называть эту задачу «специальной», чтобы подчеркнуть ее отличие от обычной задачи. Уравнения погрешностей специальной задачи инерциальной навигации в работе не рассматриваются.

Статья структурирована следующим образом. В разделе 1 вводятся основные понятия и система обозначений, а также формулируется задача. В разделе 2 выводятся уравнения специальной задачи и описывается алгоритм ее численного решения. В разделе 3 приводятся примеры практического использования полученных теоретических результатов для расчета траекторий смазов и повышения вероятности обнаружения смазанных изображений звезд.

1. Постановка задачи нахождения траектории смаза как специальной задачи инерциальной навигации

1.1. Модель цифровой камеры

Цифровая камера сконструирована таким образом, что фоточувствительная поверхность МФП совпадает с фокальной плоскостью объектива с фокусным расстоянием F . Фоточувствительная поверхность представляет собой двумерную прямоугольную матрицу размером $H \times W$, составленную из одинаковых фоточувствительных ячеек квадратной формы размером $a \times a$, где H , W – высота столбца и длина строки матрицы, a – длина стороны квадратной ячейки. Ширина границ смежных ячеек считается равной нулю и в работе не учитывается.

На фоточувствительной поверхности МФП рассматриваются три типа изображения – геометрическое, оптическое и цифровое. Геометрическое изображение строится по правилам геометрической оптики в рамках модели камеры-обскуры, выполняющей центральное проецирование пространства предметов на фокальную плоскость объектива через центр проецирования S (рис. 1). Так, геометрическим изображением точечного источника света Z , наблюдаемого под углом θ к оптической оси, является точка Z' пересечения прямой SZ с фокальной плоскостью. Дисторсия реального объектива, проявляющаяся в отклонении хода лучей от центральной проекции, предполагается скомпенсированной и в данной работе не рассматривается. Геометрическое изображение относится к идеальным, недостижимо на практике.

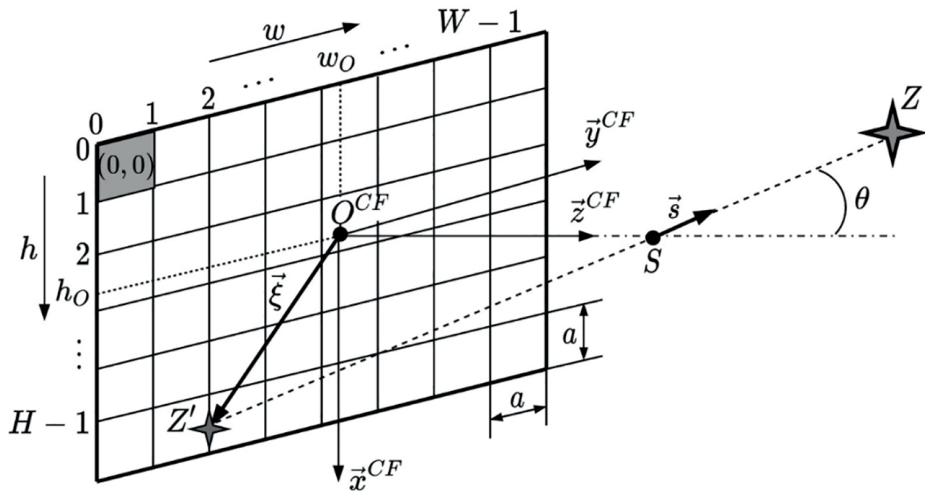


Рис. 1. Геометрическая модель цифровой камеры и системы координат. Штрихпунктирной линией обозначена оптическая ось камеры. Обозначения на рисунке расшифровываются далее по тексту

Оптическое изображение представляет собой двумерную свертку геометрического изображения и ФРТ. Так учитывается ограниченная разрешающая способность объектива. Цифровое изображение получается после пространственной дискретизации оптического на границах смежных ячеек и уровня квантования сигнала на выходе каждой ячейки.

Для получения очередного кадра все ячейки синхронно начинают накапливать оптическую энергию в момент времени t_E начала экспозиции и завершают накопление в момент времени $t_E + T_E$ ее окончания, где T_E – время экспозиции. Энергия накапливается в виде электрических зарядов, собирающихся в зарядовых емкостях ячеек. По окончании экспозиции накопленные заряды преобразуются в цифровые коды, пропорциональные освещенностям ячеек. Коды считываются из МФП и выстраиваются в виде двумерной матрицы чисел размером $H \times W$, называемой цифровым изображением или растром. Цифровое изображение становится доступным для анализа только после завершения экспозиции.

Положение отдельных пикселей внутри раstra задается парой целочисленных индексов (\hat{h}, \hat{w}) , где $\hat{h} = 0 \dots H - 1$ – номер строки, $\hat{w} = 0 \dots W - 1$ – номер столбца. Пиксель с индексами (\hat{h}, \hat{w}) внутри раstra получает свое значение из фотоприемной ячейки с индексами (\hat{h}, \hat{w}) в матрице МФП. Значение $(0, 0)$ указывает на левый верхний пиксель, соответствующий левой верхней ячейке фоточувствительной поверхности МФП, если смотреть на нее из пространства предметов без объектива. Вертикальный индекс \hat{h} увеличивается сверху вниз, горизонтальный \hat{w} – слева направо.

1.2. Системы координат и преобразования между ними

В работе принята следующая система обозначений векторных величин. Вектор как геометрический объект из аффинного пространства обозначается строчной буквой со стрелкой сверху, например \vec{r} . Координаты этого вектора относительно некоторого трехмерного базиса $X1$, образованного некопланарными векторами

$\bar{x}^{X1}, \bar{y}^{X1}, \bar{z}^{X1}$, записываются в виде вектор-столбца $\mathbf{r}_{X1} = [r_{xX1} \ r_{yX1} \ r_{zX1}]^T$, у которого название базиса указывается в подстрочной подписи:

$$\vec{r} = r_{xX1}\bar{x}^{X1} + r_{yX1}\bar{y}^{X1} + r_{zX1}\bar{z}^{X1} = [\bar{x}^{X1} \ \bar{y}^{X1} \ \bar{z}^{X1}]\mathbf{r}_{X1}. \quad (1)$$

Преобразование координат вектора \vec{r} между различными базисами $X1$ и $X2$ описывается матрицей \mathbf{S}_{X2}^{X1} :

$$\mathbf{r}_{X2} = \mathbf{S}_{X2}^{X1}\mathbf{r}_{X1}, \quad \mathbf{r}_{X1} = (\mathbf{S}_{X2}^{X1})^{-1}\mathbf{r}_{X2} = \mathbf{S}_{X1}^{X2}\mathbf{r}_{X2}.$$

В работе рассматриваются только правые ортогональные базисы, поэтому для любых $X1, X2$ матрица \mathbf{S}_{X2}^{X1} ортогональна:

$$\mathbf{S}_{X1}^{X2} = (\mathbf{S}_{X2}^{X1})^{-1} = (\mathbf{S}_{X2}^{X1})^T.$$

Тройки базисных векторов при помощи этой матрицы преобразуются в обратном направлении:

$$[\bar{x}^{X1} \ \bar{y}^{X1} \ \bar{z}^{X1}] = [\bar{x}^{X2} \ \bar{y}^{X2} \ \bar{z}^{X2}]\mathbf{S}_{X2}^{X1}.$$

Сигнал в пикселе (\hat{h}, \hat{w}) собирается с поверхности фотоприемной ячейки (\hat{h}, \hat{w}) конечной площади: все точки внутри границ ячейки вносят вклад в цифровой код яркости пикселя. Для описания всех этих точек на сетку целочисленных индексов $\{\hat{h}, \hat{w}: \hat{h}=0\dots H-1, \hat{w}=0\dots W-1\} \subset \mathbb{Z}$ накладывается система действительных координат $\{h, w: 0 \leq h < H, 0 \leq w < W\} \subset \mathbb{R}$ (рис. 1). В настоящей работе принят способ наложения, при котором в формировании кода яркости пикселя с индексами (\hat{h}, \hat{w}) участвуют точки фокальной плоскости с действительными координатами из множества, задаваемого прямым произведением полуинтервалов $[\hat{h}, \hat{h} + 1) \times [\hat{w}, \hat{w} + 1)$. При выбранном способе наложения индексы (\hat{h}, \hat{w}) пикселя цифрового изображения указывают на точку в левом верхнем углу фотоприемной ячейки (\hat{h}, \hat{w}) . Введенные таким образом действительные координаты в плоскости МФП называются растровыми координатами. Начало растровых координат расположено в левом верхнем углу левой верхней ячейки $(0, 0)$.

С камерой связана правая ортогональная система координат CF (Camera Frame). Начало CF расположено в точке O^{CF} пересечения оптической оси объектива и фоточувствительной плоскости МФП (рис. 1). Эта точка с растровыми координатами (h_o, w_o) называется главной точкой изображения (не путать с главной точкой объектива). Ось \bar{z}^{CF} лежит на оптической оси объектива и направлена в пространство предметов. Ось \bar{x}^{CF} параллельна столбцам МФП и направлена сверху вниз, в сторону увеличения h . Ось \bar{y}^{CF} параллельна строкам МФП и направлена слева направо, в сторону увеличения w . Далее большая часть операций с координатами векторов будет выполняться в CF , поэтому подстрочный индекс « CF » в записи вектор-столбцов вида (1) явно указываться не будет: например, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_{CF}$.

Направление на точечный источник Z задается единичным направляющим вектором \vec{s} , лежащим на прямой SZ (рис. 1), со следующими координатами в CF : $\mathbf{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T$. Положение точки Z' (геометрического изображения точки Z) в фокальной плоскости задается вектором $\vec{\xi}$ с координатами $\xi = [\xi_x \ \xi_y]^T$ относительно осей \bar{x}^{CF} и \bar{y}^{CF} в фокальной плоскости, которые называются векторными координатами геометрического изображения. Координатные столбцы ξ и \mathbf{s} связаны следующим образом:

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix} = -\frac{F}{s_z} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \frac{1}{\xi_F} \begin{bmatrix} -\xi \\ F \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\xi_F = (|\xi|^2 + F^2)^{1/2} = (\xi_x^2 + \xi_y^2 + F^2)^{1/2}$ – длина отрезка $Z'S$. Векторные ξ и растровые (p, q) координаты точки Z' также взаимно однозначно связаны:

$$\xi = a \begin{bmatrix} p - h_O \\ q - w_O \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \frac{\xi}{a} + \begin{bmatrix} h_O \\ w_O \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Точка фокальной плоскости с векторными координатами ξ попадает в пиксель с индексами

$$\begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \text{floor} \left(\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \right) = \text{floor} \left(\frac{\xi}{a} + \begin{bmatrix} h_O \\ w_O \end{bmatrix} \right), \quad (4)$$

где $\text{floor}(x)$ – функция округления к $-\infty$.

С ИИМ связана его собственная правая ортогональная измерительная система координат MF (Measurement Frame) с началом в некоторой точке O^{MF} – измерительном центре ИИМ. ИИМ измеряет компоненты $\omega_{MF} = [\omega_{xMF} \ \omega_{yMF} \ \omega_{zMF}]^T$ вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ камеры и компоненты $\mathbf{n}_{MF} = [n_{xMF} \ n_{yMF} \ n_{zMF}]^T$ вектора кажущегося ускорения \vec{n} своего измерительного центра O^{MF} . Ортогональная матрица ориентации MF относительно CF постоянна: $\mathbf{S}_{CF}^{MF} = \text{const}$. Смещение проективного центра камеры S относительно измерительного центра O^{MF} задается вектором $\vec{l} = O^{MF}S$, жестко связанным с конструкцией камеры. Постоянные коэффициенты матрицы \mathbf{S}_{CF}^{MF} и постоянные компоненты вектора $\mathbf{l} = [l_x \ l_y \ l_z]^T$ относительно CF определяются при сборке камеры. Измерения ИИМ перепроецируются из базиса MF на базис CF :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{S}_{CF}^{MF} \boldsymbol{\omega}_{MF}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{S}_{CF}^{MF} \mathbf{n}_{MF}.$$

Далее операция перепроецирования явно записываться не будет (но всегда подразумевается), а измерения ИИМ будут учитываться сразу в осях CF .

В пространстве предметов задана правая ортогональная инерциальная система координат WF (World Frame). Для рассматриваемой задачи важны не конкретные направления осей WF , а то, что эти оси существуют и могут быть выбраны любым удобным способом.

1.3. Расчет траектории смаза исходя из обычной задачи инерциальной навигации

Рассмотрим точечный источник света (точечную цель), геометрическое изображение которого в момент времени t_E попадает в точку поверхности МФП с векторными координатами ξ_0 . Расстояние от центра проецирования $S(t_E)$ камеры до этого источника в момент времени t_E равно d_0 . Проекции на CF единичного направляющего вектора \vec{s}_0 и радиус-вектора \vec{d}_0 точечного источника, отложенного из $S(t_E)$, рассчитываются согласно (2):

$$\mathbf{s}_0 = \frac{1}{\xi_{0F}} \begin{bmatrix} -\xi_0 \\ F \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_0 = d_0 \mathbf{s}_0.$$

К моменту времени $t \in [t_E, t_E + T_E]$ центр проецирования камеры переместится на вектор \vec{r} , а точечный источник – на вектор \vec{m} (рис. 2). Радиус-вектор нового положения источника относительно нового положения центра проецирования камеры имеет вид:

$$\vec{d} = d\vec{s} = \vec{d}_0 + \vec{m} - \vec{r},$$

где $\vec{s} = \vec{d} / d$ – единичный направляющий вектор цели, $d = |\vec{d}|$ – дальность источника относительно центра проецирования камеры в момент времени t .

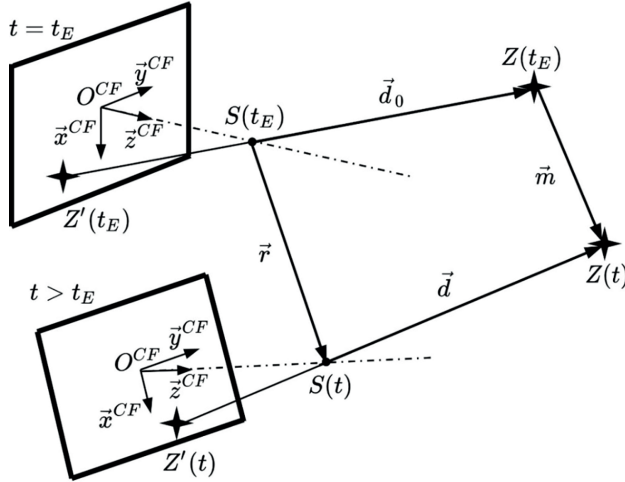


Рис. 2. Векторное представление относительного положения камеры и точечной цели в моменты времени $t = t_E$ и $t > t_E$. Жирной линией выделены границы МФП

Решение обычной задачи инерциальной навигации по измерениям ИИМ, скрепленного с камерой, дает матрицу \mathbf{S}_{MF}^{WF} ориентации MF относительно WF , а также координаты \mathbf{p}_{WF} и вектор скорости \mathbf{v}_{WF} измерительного центра ИИМ относительно WF в момент времени t :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{WF} &= \mathbf{p}_{WF}(t_E) + \Delta\mathbf{p}_{WF}, \\ \mathbf{v}_{WF} &= \mathbf{v}_{WF}(t_E) + \Delta\mathbf{v}_{WF}, \\ \mathbf{S}_{MF}^{WF} &= \Delta\mathbf{S}_{MF}^{MF0} \mathbf{S}_{MF0}^{WF}, \Delta\mathbf{S}_{MF}^{MF0}(t_E) \equiv \Delta\mathbf{S}_{MF0}^{MF0} = \mathbf{I}_3, \end{aligned}$$

где $MF0$ – положение измерительного базиса MF в момент времени t_E ; \mathbf{I}_3 – единичная матрица размера 3×3 ; $\Delta\mathbf{p}_{WF}$, $\Delta\mathbf{v}_{WF}$ – приращения координат и скорости измерительного центра ИИМ; $\Delta\mathbf{S}_{MF}^{MF0}(t)$ – приращение ориентации ИИМ, вычисляемое из измерений инерциальных датчиков ИИМ; $\mathbf{p}_{WF}(t_E)$, $\mathbf{v}_{WF}(t_E)$, \mathbf{S}_{MF0}^{WF} – начальные значения координат, скорости и матрицы ориентации MF в момент времени t_E , которые задаются с учетом данных от внешних источников.

На основе этих данных определяются матрица \mathbf{S}_{CF}^{WF} ориентации CF относительно WF и координаты $\mathbf{r}_{WF}(t)$ вектора \vec{r} перемещения центра проецирования камеры относительно WF :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{CF}^{WF} &= \mathbf{S}_{CF}^{MF} \Delta\mathbf{S}_{MF}^{MF0} \mathbf{S}_{MF0}^{WF}, \\ \mathbf{r}_{WF} &= \Delta\mathbf{p}_{WF} + (\mathbf{S}_{WF}^{CF} - \mathbf{S}_{WF}^{CF}(t_E))\mathbf{l}. \end{aligned}$$

Приращение ориентации камеры в момент времени t (то есть положение CF в момент времени t относительно положения CF в момент времени t_E , которое обозначается $CF0$) запишем как

$$\Delta \mathbf{S}_{CF}^{CF0} = \mathbf{S}_{CF}^{WF} (\mathbf{S}_{CF}^{WF}(t_E))^\top = \mathbf{S}_{CF}^{MF} \Delta \mathbf{S}_{MF}^{MF0} \mathbf{S}_{MF}^{CF}, \quad \Delta \mathbf{S}_{CF}^{CF0}(t_E) = \mathbf{I}_3.$$

Каждая точка траектории смаза рассчитывается как результат последовательных векторно-матричных преобразований. Сначала вычисляются координаты радиус-вектора \vec{d} цели в WF в момент t :

$$\mathbf{d}_{WF} = (\mathbf{S}_{CF}^{WF}(t_E))^\top \mathbf{d}_0 + \mathbf{m}_{WF} - \mathbf{r}_{WF},$$

где $(\mathbf{S}_{CF}^{WF}(t_E))^\top = \mathbf{S}_{WF}^{MF0} \mathbf{S}_{MF}^{CF}$. Как и в случае начальных значений для обычной задачи, компоненты \mathbf{m}_{WF} вектора перемещения цели и начальная дальность d_0 до цели должны быть получены от каких-то внешних (по отношению к камере) источников. Из \mathbf{d}_{WF} вычисляются координаты вектора \vec{s} в CF :

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{S}_{CF}^{WF} \mathbf{d}_{WF}}{|\mathbf{d}_{WF}|} = \frac{\Delta \mathbf{S}_{CF}^{CF0} \mathbf{d}_0 + \mathbf{S}_{CF}^{WF} (\mathbf{m}_{WF} - \mathbf{r}_{WF})}{|\mathbf{d}_{WF}|}, \quad (5)$$

а затем – векторные координаты точки на траектории смаза:

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_x(t) \\ \xi_y(t) \end{bmatrix} = -\frac{F}{s_z(t)} \begin{bmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \end{bmatrix}.$$

Полученная плоская кривая $\xi(t)$, $\xi(t_E) = \xi_0$, $t_E \leq t \leq t_E + T_E$ является искомой траекторией смаза, начинающейся в точке ξ_0 .

Отдельный интерес представляет частный случай $d_0 \rightarrow \infty$: например, камера входит в состав астроинерциального датчика ориентации, наблюдающего удаленные звезды. В этом случае (5) упрощается до

$$\mathbf{s} = \Delta \mathbf{S}_{CF}^{CF0} \mathbf{s}_0, \quad \mathbf{s}(t_E) = \mathbf{s}_0,$$

и вид траектории смаза для удаленного источника не зависит от поступательного перемещения камеры и цели, а определяется исключительно поворотами камеры во время экспозиции.

1.4. Постановка специальной задачи инерциальной навигации

Обычная задача инерциальной навигации сводится к решению системы дифференциальных уравнений кинематики твердого тела вида

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{S}}_{MF}^{WF} \\ \dot{\mathbf{v}}_{WF} \\ \dot{\mathbf{p}}_{WF} \end{bmatrix} = \mathbf{f}^{\text{ord}}(\mathbf{S}_{MF}^{WF}, \mathbf{v}_{WF}, \mathbf{p}_{WF}; \boldsymbol{\omega}_{MF}, \mathbf{n}_{MF}), \quad (6)$$

где $\mathbf{f}^{\text{ord}}(\dots)$ – некоторая вектор-функция, описывающая правые части системы уравнений. При $d_0 \rightarrow \infty$ вместо общей задачи (6) решается только ее часть, связанная с приращением ориентации:

$$\Delta \dot{\mathbf{S}}_{MF}^{MF0} = -[\boldsymbol{\omega}_{MF} \times] \Delta \mathbf{S}_{MF}^{MF0}, \quad \Delta \mathbf{S}_{MF}^{MF0}(t_E) = \mathbf{I}_3, \quad (7)$$

где $[\mathbf{a} \times]$ – кососимметричная матрица векторного произведения $[\mathbf{a} \times] \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Здесь для расчета траектории смаза $\xi(t)$ используется система дифференциальных уравнений, аналогичная по форме (6), но связывающая траекторию смаза с измерениями ИИМ только через геометрические параметры \mathbf{S}_{CF}^{MF} и \mathbf{l} конструкции, объединяющей камеру и ИИМ. Эти уравнения могут содержать дополнительные параметры, возникающие в тех случаях, когда нельзя пренебречь поступательными перемещениями камеры и цели. Все неизвестные векторы в искомой системе уравнений должны определяться в CF :

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{d} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathbf{f}^{\text{spc}}(\xi, d, \mathbf{v}; \boldsymbol{\omega}_{MF}, \mathbf{n}_{MF} | \mathbf{S}_{CF}^{MF}, \mathbf{l}), \quad \xi(t_E) = \xi_0, \quad (8)$$

где $\mathbf{f}^{\text{spc}}(\dots)$ – искомая вектор-функция, описывающая правые части уравнений траектории смаза в CF ; \mathbf{v} – координаты вектора скорости измерительного центра ИИМ относительно CF .

При $|\bar{d}_0| \rightarrow \infty$ по аналогии с (7) из системы уравнений (8) должны исключаться параметры, связанные с поступательными перемещениями:

$$\dot{\xi} = \mathbf{f}^{\text{spc}}(\xi; \boldsymbol{\omega}_{MF} | \mathbf{S}_{CF}^{MF}), \quad \xi(t_E) = \xi_0.$$

Между задачами определения траектории ИИМ с опорой на систему (6) и траектории изображения цели с использованием (8) имеется определенное сходство. Эти задачи ставятся в виде систем дифференциальных уравнений первого порядка на одном и том же интервале времени и для одного и того же набора инерциальных измерений. Если рассматривать (8) как задачу инерциальной навигации точки на плоскости в специфических ограничениях проективной геометрии, то к ней можно применить весь арсенал методов, накопленных для анализа и численного решения обычной задачи. Чтобы подчеркнуть специфику (8) по сравнению с (6), первая названа специальной задачей инерциальной навигации.

2. Вывод системы дифференциальных уравнений, описывающих специальную задачу инерциальной навигации

2.1. Дифференциальное уравнение для направляющего вектора цели

Производная по времени от направляющего вектора цели имеет вид:

$$\dot{\mathbf{s}} = (\bar{\mathbf{d}} / d)' = \frac{\dot{\bar{\mathbf{d}}} - \bar{\mathbf{d}}\dot{d}}{d^2}.$$

Модуль радиус-вектора цели можно записать через скалярное произведение вектора на себя $d = |\bar{\mathbf{d}}| = (\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{d}})^{1/2}$. Отсюда

$$\dot{d} = \left((\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{d}})^{1/2} \right)' = \frac{(\dot{\bar{\mathbf{d}}}, \bar{\mathbf{d}})}{d} = (\dot{\bar{\mathbf{d}}}, \bar{\mathbf{s}}) \quad (9)$$

и производная направляющего вектора

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\dot{\bar{\mathbf{d}}} - \bar{\mathbf{d}}(\dot{\bar{\mathbf{d}}}, \bar{\mathbf{s}})}{d^2} = \frac{\dot{\bar{\mathbf{d}}}(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}}) - \bar{\mathbf{s}}(\dot{\bar{\mathbf{d}}}, \bar{\mathbf{s}})}{d} = \frac{\bar{\mathbf{s}} \times [\dot{\bar{\mathbf{d}}} \times \bar{\mathbf{s}}]}{d}.$$

С другой стороны, $\dot{\vec{s}} = \frac{d\vec{s}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{s}$,

где $d\vec{s}/dt$ – локальная производная вектора \vec{s} во вращающейся CF :

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{s}} - \vec{\omega} \times \vec{s} = \frac{\vec{s} \times [d \times \vec{s}]}{d} - \vec{\omega} \times \vec{s}.$$

Производная радиус-вектора источника состоит из двух слагаемых $\dot{\vec{d}} = \vec{f} - \dot{\vec{r}}$, где $\dot{\vec{r}}$, $\vec{f} \equiv \dot{\vec{m}}$ – векторы скорости проективного центра камеры S и цели Z относительно WF :

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{l}, \quad \vec{f} = \frac{d\vec{m}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{m},$$

здесь \vec{v} – вектор скорости измерительного центра ИММ относительно WF . Если параметры движения цели определяются только по ее изображению (пассивный способ), то ее дальность и скорость одновременно не наблюдаемы, и требуется использование априорной информации о характере ее движения [33]. При активном сопровождении цели с измерением дальности (например, лазерным дальномером) пространственная траектория цели восстанавливается известными методами вторичной обработки траекторных измерений в полярных координатах [34]. В обоих случаях координаты вектора скорости цели определяются в CF :

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{m}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m},$$

где $\mathbf{m} = [m_x \ m_y \ m_z]^T$ – вектор \vec{m} , спроецированный на CF ; $\dot{\mathbf{m}} = [\dot{m}_x \ \dot{m}_y \ \dot{m}_z]^T$ – вектор $d\vec{m}/dt$ локальной производной, взятой в CF , причем $\dot{\mathbf{m}} \neq [\dot{x}^{CF} \ \dot{y}^{CF} \ \dot{z}^{CF}] \dot{\mathbf{m}}$.

В новых обозначениях локальную производную $d\vec{s}/dt$ запишем в виде

$$\dot{\mathbf{s}} = -\frac{\mathbf{s} \times [\mathbf{s} \times (\mathbf{f} - \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l})]}{d} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{d} [\mathbf{s} \times] [\mathbf{s} \times] (\mathbf{f} - \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}) + [\mathbf{s} \times] \boldsymbol{\omega}.$$

За счет непосредственной проверки легко убедиться, что $[\mathbf{s} \times] [\mathbf{s} \times] = \mathbf{ss}^T - \mathbf{I}_3$. Отсюда получается система дифференциальных уравнений для координат направляющего вектора цели:

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{1}{d} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{ss}^T) (\mathbf{f} - \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}) + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (10)$$

Условие $\mathbf{f} = [0 \ 0 \ 0]^T$ соответствует наблюдению неподвижной цели движущейся камерой. Для этого случая $d = |\dot{\vec{d}}_0 - \dot{\vec{r}}| = |\mathbf{d}_0 - \mathbf{r}|$ и

$$\dot{\mathbf{s}} = -\frac{(\mathbf{I}_3 - \mathbf{ss}^T) (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l})}{|\mathbf{d}_0 - \mathbf{r}|} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Если наблюдаемая цель достаточно далеко и $|\mathbf{d}_0| \rightarrow \infty$ (при наблюдении звезды камерой астродатчика), то

$$\dot{\mathbf{s}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}.$$

2.2. Уравнение для векторных координат изображения цели

Векторные координаты ξ геометрического изображения цели и координаты \mathbf{s} ее направляющего вектора связаны равенствами (2) и (10). Производная $\dot{\xi}$ от векторных координат может быть записана в форме

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_x \\ \dot{\xi}_y \end{bmatrix} = -\frac{F}{s_z} \begin{bmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} \frac{F(s_x \dot{s}_x + s_y \dot{s}_y)}{s_z^2} = -\frac{F}{s_z} \left(\mathbf{I}_3 + \frac{1}{1-s_x^2-s_y^2} \begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y \\ s_x s_y & s_y^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y \end{bmatrix}.$$

В полученное выражение подставим из (2)

$$s_x = -\frac{\xi_x}{\xi_F}, \quad s_y = -\frac{\xi_y}{\xi_F}, \quad s_z = \frac{F}{\xi_F}$$

и получим выражение для производных векторных координат через компоненты локальной производной направляющего вектора в CF:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_x \\ \dot{\xi}_y \end{bmatrix} = -\frac{\xi_F}{F^2} \begin{bmatrix} F^2 + \xi_x^2 & \xi_x \xi_y \\ \xi_x \xi_y & F^2 + \xi_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Выразим отдельные множители (9) через векторные координаты изображения:

$$\mathbf{I}_3 - \mathbf{ss}^T = \frac{1}{\xi_F} \begin{bmatrix} \xi_y^2 + F^2 & -\xi_x \xi_y & \xi_x F \\ -\xi_x \xi_y & \xi_x^2 + F^2 & \xi_y F \\ \xi_x F & \xi_y F & \xi_x^2 + \xi_y^2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{s} \times] = \frac{1}{\xi_F} \begin{bmatrix} 0 & -F & -\xi_y \\ F & 0 & \xi_x \\ \xi_y & -\xi_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Подставим полученные выражения сначала в (10), а затем в (11) – производные координат направляющего вектора, выраженные через векторные координаты изображения цели:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_x \\ \dot{\xi}_y \end{bmatrix} = -\frac{\xi_F}{F^2} \begin{bmatrix} F^2 + \xi_x^2 & \xi_x \xi_y \\ \xi_x \xi_y & F^2 + \xi_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_y^2 + F^2 & -\xi_x \xi_y & \xi_x F \\ -\xi_x \xi_y & \xi_x^2 + F^2 & \xi_y F \end{bmatrix} \frac{\mathbf{f} - \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}}{d} - \frac{1}{F^2} \begin{bmatrix} F^2 + \xi_x^2 & \xi_x \xi_y \\ \xi_x \xi_y & F^2 + \xi_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -F & -\xi_y \\ F & 0 & \xi_x \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}.$$

После перемножения матриц и приведения подобных членов получается система дифференциальных уравнений для траектории смаза, записанная через векторы поступательной скорости \mathbf{v} измерительного центра ИИМ, угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ камеры и скорости \mathbf{f} цели, спроецированные на CF:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_x \\ \dot{\xi}_y \end{bmatrix} = -\frac{\xi_F}{F} \begin{bmatrix} F & 0 & \xi_x \\ 0 & F & \xi_y \end{bmatrix} \frac{\mathbf{f} - \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}}{d} - \frac{1}{F} \begin{bmatrix} \xi_x \xi_y & -(F^2 + \xi_x^2) & -\xi_y F \\ F^2 + \xi_y^2 & -\xi_x \xi_y & \xi_x F \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}.$$

2.3. Система уравнений специальной задачи инерциальной навигации

Запишем производную дальности (9) сначала в проекциях на CF, а затем преобразуем к векторным координатам:

$$\dot{d} = \mathbf{s}^T (\mathbf{f} - \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}) = [-\xi_x \quad -\xi_y \quad F] \frac{\mathbf{f} - \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}}{\xi_F}.$$

Компоненты вектора скорости цели \mathbf{f} в CF рассчитываются из компонент $\dot{\mathbf{m}}$ локальной производной $\tilde{d}\mathbf{m} / dt$ с учетом вектора начальной дальности \mathbf{d}_0 :

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{m}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{d}_0 + \mathbf{m}).$$

Компоненты векторов $\dot{\mathbf{m}}$, \mathbf{m} , \mathbf{d}_0 определяются по результатам траекторного анализа движения цели и используются при расчете траектории смаза как внешние параметры. Уравнения для скорости \mathbf{v} измерительного центра ИИМ и вектора \mathbf{g} ускорения свободного падения в CF могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{n} + \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{g}} &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Объединяя все записанные уравнения, получаем систему дифференциальных уравнений для траектории смаза, записанных через измерения ИИМ, скрепленного с камерой:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \mathbf{D}(\xi) \frac{\mathbf{f} - \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}}{d} + \mathbf{M}(\xi) \frac{\boldsymbol{\omega}}{F}, \\ \dot{d} = [-\xi^T \quad F] \frac{\mathbf{f} - \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}}{\xi_F}, \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{n} + \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{g}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}, \end{cases} \quad (12)$$

где $\mathbf{M}(\xi) = \begin{bmatrix} -\xi_x \xi_y & F^2 + \xi_x^2 & \xi_y F \\ -(F^2 + \xi_y^2) & \xi_x \xi_y & -\xi_x F \end{bmatrix}$, $\mathbf{D}(\xi) = -\frac{\xi_F}{F} \begin{bmatrix} F & 0 & \xi_x \\ 0 & F & \xi_y \end{bmatrix}$.

Система (12) решается индивидуально для каждой точки с векторными координатами $\xi_0 = \xi(t_E)$ на поверхности МФП, в которой в момент времени t_E ожидается присутствие геометрического изображения цели.

Начальная дальность до цели $d_0 = d(t_E)$ инерциальными методами не измеряется и назначается из внешних источников. Начальные условия для \mathbf{v} и \mathbf{g} не зависят от начального положения геометрического изображения цели:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_E) = \mathbf{S}_{CF}^{WF}(t_E) \mathbf{v}_{WF}(t_E),$$

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}(t_E) = \mathbf{S}_{CF}^{WF}(t_E) \mathbf{g}_{WF}(t_E),$$

$\mathbf{S}_{CF}^{WF}(t_E)$, $\mathbf{v}_{WF}(t_E)$, $\mathbf{g}_{WF}(t_E)$ – матрица ориентации камеры, скорость камеры и вектор ускорения свободного падения в момент времени t_E в проекциях на WF . Эти параметры в рамках специальной задачи инерциальной навигации не определяются и вычисляются из внешних (по отношению к камере) источников.

Если в качестве точечных целей рассматриваются звезды, то $d_0 \rightarrow \infty$ и траектория смаза определяется только вращением камеры:

$$\dot{\xi} = \mathbf{M}(\xi) \frac{\boldsymbol{\omega}}{F}. \quad (13)$$

В этом случае не требуется никакой дополнительной информации от внешних источников о движении камеры и цели.

2.4. Численное решение специальной задачи инерциальной навигации

За время экспозиции в памяти вычислительного устройства накапливаются измерения ИИМ в виде $K+1$ измеренных значений векторов угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_k \equiv \boldsymbol{\omega}(t_k)$ и векторов кажущегося ускорения $\mathbf{n}_k \equiv \mathbf{n}(t_k)$, где $k = 0, \dots, K$; $t_k = t_S + kT_{IMU}$ – момент времени измерения ИИМ; t_S – начало и $t_F = t_S + KT_{IMU}$ – окончание интервала накопления; T_{IMU} – период измерений ИИМ. Моменты времени t_S и t_F могут быть не синхронизированы с моментами t_E и $t_E + T_E$, поэтому границы $[t_S, t_F]$ промежутка времени накопления инерциальных измерений следует выбирать из условий $t_S \leq t_E, t_F \geq t_E + T_E$. Период T_{IMU} выбирается так, чтобы по крайней мере два измерения ИИМ попадали внутрь открытого интервала $(t_E, t_E + T_E)$, то есть $T_{IMU} < T_E / 2$.

Длительность T_E относительно невелика (например, $T_E \leq 0,1$ с соответствует частоте кадров 10 Гц), поэтому восстановление непрерывных зависимостей $\mathbf{n}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ может быть выполнено на замкнутом интервале $[t_E, t_E + T_E]$ посредством интерполяции нулевого

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}^{\text{int}}(t) = \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} = \text{const} \\ \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} = \frac{1}{K+1} \sum_{i=0}^K \boldsymbol{\omega}_{K-i} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{n}^{\text{int}}(t) = \mathbf{b}_{\mathbf{n}}^{(0)} = \text{const} \\ \mathbf{b}_{\mathbf{n}}^{(0)} = \frac{1}{K+1} \sum_{i=0}^K \mathbf{n}_{K-i} \end{cases}$$

или первого порядка

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}^{\text{int}}(t) = \mathbf{a}_{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}(t - t_F) + \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}, \\ \mathbf{a}_{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} = \frac{6}{KCT_{IMU}} \sum_{i=0}^K (K - 2i) \boldsymbol{\omega}_{K-i}, \\ \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} = \frac{2}{C} \sum_{i=0}^K (2K + 1 - 3i) \boldsymbol{\omega}_{K-i}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{n}^{\text{int}}(t) = \mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{(1)}(t - t_F) + \mathbf{b}_{\mathbf{n}}^{(1)}, \\ \mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{(1)} = \frac{6}{KCT_{IMU}} \sum_{i=0}^K (K - 2i) \mathbf{n}_{K-i}, \\ \mathbf{b}_{\mathbf{n}}^{(1)} = \frac{2}{C} \sum_{i=0}^K (2K + 1 - 3i) \mathbf{n}_{K-i}, \end{cases}$$

где $C = K^2 + 3K + 2$, $\boldsymbol{\omega}^{\text{int}}(t)$, $\mathbf{n}^{\text{int}}(t)$ – интерполированные на момент $t \in [t_E, t_E + T_E]$ значения векторов угловой скорости и кажущегося ускорения.

Численное решение специальной задачи состоит в нахождении $N_E + 1$ дискретных точек $\{\boldsymbol{\xi}_u = \boldsymbol{\xi}(t_u)\}_{u=0}^{N_E}$ траектории смаза в моменты времени $t_u = t_{u-1} + \Delta t_u = t_E + \sum_{i=1}^u \Delta t_i$, где $t_0 = t_E$, $\Delta t_u = t_u - t_{u-1}$ – переменный шаг интегрирования. Переменный шаг Δt_u выбирается так, чтобы геометрическое изображение цели переместилось не более чем на половину размера фотоприемной ячейки:

$$\Delta t_u \leq \frac{a}{2|\dot{\boldsymbol{\xi}}_{u-1}|},$$

где $\dot{\boldsymbol{\xi}}_{u-1} = \dot{\boldsymbol{\xi}}(t_{u-1}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}_{u-1}) \frac{\mathbf{f}_{u-1} - \mathbf{v}_{u-1} - \boldsymbol{\omega}_{u-1}^{\text{int}} \times \mathbf{l}}{d_{u-1}} + \mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}_{u-1}) \frac{\boldsymbol{\omega}_{u-1}^{\text{int}}}{F}$, $\boldsymbol{\omega}_{u-1}^{\text{int}} = \boldsymbol{\omega}^{\text{int}}(t_{u-1})$, $\mathbf{n}_{u-1}^{\text{int}} = \mathbf{n}^{\text{int}}(t_{u-1})$.

Система (12) решается методом Эйлера:

$$\begin{bmatrix} \xi_u \\ d_u \\ \mathbf{v}_u \\ \mathbf{g}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{u-1} \\ d_{u-1} \\ \mathbf{v}_{u-1} \\ \mathbf{g}_{u-1} \end{bmatrix} + \Delta t_u \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{u-1} \\ [-\xi_{u-1}^\top \quad F] \frac{\mathbf{f}_{u-1} - \mathbf{v}_{u-1} - \boldsymbol{\omega}_{u-1}^{\text{int}} \times \mathbf{l}}{(\xi_{u-1}^\top \xi_{u-1} + F)^{1/2}} \\ \mathbf{n}_{u-1}^{\text{int}} + \mathbf{g}_{u-1} - \boldsymbol{\omega}_{u-1}^{\text{int}} \times \mathbf{v}_{u-1} \\ -\boldsymbol{\omega}_{u-1}^{\text{int}} \times \mathbf{g}_{u-1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Для удаленных звезд $\dot{\xi}_{u-1} = \mathbf{M}(\xi_{u-1}) \frac{\boldsymbol{\omega}_{u-1}^{\text{int}}}{F}$ и

$$\xi_u = \xi_{u-1} + \Delta t_u \dot{\xi}_{u-1}. \quad (15)$$

3. Пример использования специальной задачи для системы технического зрения

3.1. Решение специальной задачи для модельных условий

Расчетные траектории смаза продемонстрируем на модельной камере с фокусным расстоянием $F = 0,1$ см, размером пикселя $a = 4$ мкм и разрешением $N_A = 3$ пикселя. То есть объектив изображает неподвижную светящуюся точку в виде пятна диаметром $d_A = a\sqrt{N_A} \approx 7$ мкм, полностью покрывающего квадрат 3×3 пикселя. Все траектории смаза рассматриваются в квадрате 1024×1024 пикселя, в геометрическом центре которого размещается точка O^{CF} . Угловой размер этого квадрата при выбранных параметрах камеры – $2,35^\circ \times 2,35^\circ$. Одноименные оси системы координат ИИМ и системы координат камеры считаются сонаправленными, то есть $\mathbf{S}_{CF}^{MF} = \mathbf{I}_3$.

Модельная камера в момент времени $t_E = t_S$ ориентирована вертикально вверх, движется с постоянной вертикальной поступательной скоростью $v = 1000$ км/ч. Для таких начальных данных $\mathbf{v}_0 = [0 \ 0 \ v]^\top$ и $\mathbf{g}_0 = [0 \ 0 \ -g_F]^\top$ м/с², где $g_F = 9,81$ м/с² – модуль ускорения свободного падения. Камера поворачивается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = [-0,08 \ 0,08 \ 10]^\top$ °/с.

В поле зрения камеры присутствует множество неподвижных светящихся точек с $\mathbf{f} = [0 \ 0 \ 0]^\top$, которые наблюдаются со временем экспозиции $T_E = 0,2$ с. Светящиеся точки расставлены таким образом, чтобы в момент времени t_E геометрическое изображение каждой точки попадало в центр отдельной фотоприемной ячейки МФП. Если изображение точки попало в центр ячейки (\hat{p}, \hat{w}) , то начальные условия для траектории смаза рассчитываются из (3):

$$\xi_0 = a[\hat{p} - h_O + 0,5 \quad \hat{q} - w_O + 0,5]^\top.$$

Время экспозиции выбрано очень большим исключительно для получения наглядных графических изображений траекторий смаза. Вектор смещения $\mathbf{l} = [0 \ 0 \ 0]^\top$, то есть в модельном примере измерительный центр ИИМ и центр проецирования камеры совпадают. Измеряемый вектор кажущегося ускорения $\mathbf{n}(t) = \mathbf{S}_{CF}^{WF}(t)[0 \ 0 \ g_F]^\top$, $t \geq t_E$,

$$\mathbf{S}_{CF}^{WF}(t) = \left(\mathbf{I}_3 + \frac{\sin |\boldsymbol{\omega}|(t-t_E)}{|\boldsymbol{\omega}|} [\boldsymbol{\omega} \times] + \frac{1 - \cos |\boldsymbol{\omega}|(t-t_E)}{|\boldsymbol{\omega}|^2} [\boldsymbol{\omega} \times][\boldsymbol{\omega} \times] \right)^\top.$$

На рис. 3, а показано семейство траекторий смаза, возникающих в различных пикселях рассматриваемого квадрата при наблюдении за звездами (т.е. $d_0 \rightarrow \infty$). Маленькими черными кружками выделены начальные точки траекторий. При наблюдении звезд траектории смазов описываются сокращенной системой уравнений (13), а расчет траекторий выполняется согласно (15).

Эти же траектории можно получить из решения (14) полной системы уравнений (12), если задать начальную дальность до цели $d_0 \geq 4,2 \times 10^{16}$ м (расстояние до α Центавра, ближайшей к Земле звезды после Солнца). Желтым цветом выделена траектория, начинающаяся в центре пикселя $(\hat{p}, \hat{w}) = (500, 600)$, далее она будет детально рассмотрена. В представленном семействе траекторий присутствует стационарная точка типа «центр» (по классификации типов положений равновесия автономных систем дифференциальных уравнений) вблизи пикселя (700, 300), она выделена фиолетовым цветом. В этой точке $\dot{\xi} = 0$ и смаз не возникает.

Если в тех же самых условиях движения камера наблюдает за близкими целями, картина смазов существенно меняется. На рис. 3, б показано семейство траекторий смаза для неподвижных точечных целей начальной дальностью $d_0 = 1$ км. Здесь стационарная точка сместилась в район пикселя (500, 400), кроме того, изменился ее классификационный тип: теперь это «неустойчивый фокус».

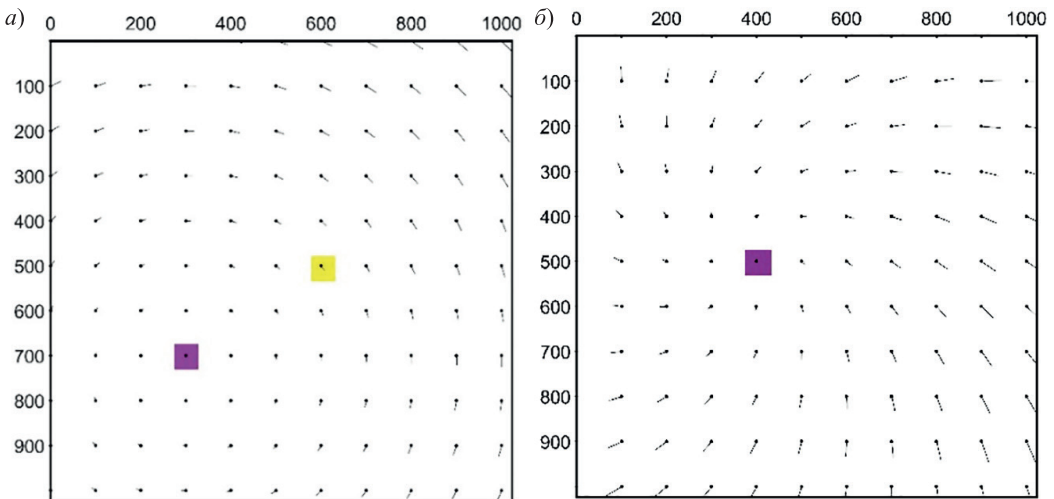


Рис. 3. Траектории смазов, начинающиеся в различных пикселях МФП, при различных дальностях до цели: а – семейство траекторий при $d_0 \geq 4,2 \times 10^{16}$ м (наблюдение за звездами); б – семейство траекторий при $d_0 = 1000$ м (сближение с близкой неподвижной целью). Желтым цветом выделена траектория смаза для детального анализа, фиолетовым – стационарная точка

3.2. Расчет ядра смаза из его траектории

Ядро смаза представляет собой цифровое смазанное изображение точечного источника света, нормированное к единице. Расчет ядра смаза для его траектории $\xi(t)$, начинающейся в центре некоторого пикселя (\hat{p}, \hat{q}) , сводится к нахождению значения $H(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q})$ яркости каждого пикселя (\hat{h}, \hat{w}) , $\hat{h} = 0 \dots H - 1$, $\hat{w} = 0 \dots W - 1$ нормированного цифрового изображения. Ядро смаза неоднородно в фокальной плоскости, т.е. для различных значений (\hat{p}, \hat{q}) получаются в общем случае различные функции $H(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q})$.

Объективы стараются проектировать так, чтобы размеры пятна ФРТ мало менялись в зависимости от угла θ между оптической осью камеры и направлением на цель (рис. 1). Форма пятна ФРТ при $\theta \approx 0$ близка к круговой, но с увеличением θ заметно от нее отклоняется [16]. Для энергетических расчетов изображения реальная ФРТ аппроксимируется однородной осесимметричной функцией Гаусса [35] от векторных координат:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_A^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_A^2}\right),$$

где σ_A – размер кружка рассеяния, который выбирается исходя из условия попадания в кружок диаметром d_A заданной доли $0 < A < 1$ потока излучения. Если $A = 83,8\%$, что соответствует доле потока излучения в центральном максимуме кружка Эйри [36], то для принятых в работе параметров разрешения объектива $\sigma_A = 0,5aN_A / \sqrt{-1n0,16} \approx 4,4$ мкм [28].

Как уже указывалось ранее, ядро смаза образуется за счет «скольжения» функции $\Phi(x, y)$ вдоль $\xi(t)$ по поверхности МФП. В результате цифровое изображение точечного источника из пятна превращается в вытянутую полосу, в середине которой находится кривая $\xi(t)$. Можно сказать, что ядро смаза образуется вокруг его траектории. Значение $H(\boldsymbol{\eta}; \hat{p}, \hat{q})$ непрерывного ядра смаза (т.е. до пространственной дискретизации на ячейках МФП) пропорционально оптической энергии, прошедшей через малую площадку вокруг точки $\boldsymbol{\eta}$ с векторными координатами $\boldsymbol{\eta} = [\eta_x, \eta_y]^T$ за время T_E :

$$H(\boldsymbol{\eta}; \hat{p}, \hat{q}) \sim \int_{t_E}^{t_E+T_E} \Phi(\eta_x - \xi_x(t), \eta_y - \xi_y(t)) dt. \quad (16)$$

Значение пикселя (\hat{h}, \hat{w}) в цифровом изображении непрерывного ядра $H(\boldsymbol{\eta}; \hat{p}, \hat{q})$ пропорционально количеству оптической энергии, собранной со всей поверхности фоточувствительной ячейки этого пикселя. Площадь ячейки a^2 мала, поэтому для модельных расчетов, в пределах каждой ячейки, функция $H(\boldsymbol{\eta}; \hat{p}, \hat{q})$ приближается постоянным значением, равным значению $H(\boldsymbol{\eta}; \hat{p}, \hat{q})$ в центре ячейки. Интеграл (16) рассчитывается с точностью до коэффициента пропорциональности, поэтому умножение на постоянный множитель a^2 в дальнейших выкладках опущено:

$$\tilde{H}(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q}) \sim \int_{a\Delta h}^{a(\Delta h+1)} d\eta_x \int_{a\Delta w}^{a(\Delta w+1)} d\eta_y H(\boldsymbol{\eta}; \hat{p}, \hat{q}) \approx a^2 H(\boldsymbol{\zeta}; \hat{p}, \hat{q}), \quad (17)$$

где $\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_x, \zeta_y]^T = a[\Delta h + 0,5, \Delta w + 0,5]^T$ – векторные координаты центра ячейки (\hat{h}, \hat{w}) ; $\Delta h = \hat{h} - h_O, \Delta w = \hat{w} - w_O$.

В специальной задаче траектория смаза получается в виде последовательности из N_E+1 дискретных точек $\{\boldsymbol{\xi}_u = \boldsymbol{\xi}(t_u)\}_{u=0}^{N_E}$. Значение интеграла (16) на этой последовательности точек с учетом (17) рассчитывается методом трапеций:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q}) \sim & \Delta t_1 \frac{\Phi(\zeta_x - \xi_{x0}, \zeta_y - \xi_{y0})}{2} + \Delta t_{N_E} \frac{\Phi(\zeta_x - \xi_{xN_E}, \zeta_y - \xi_{yN_E})}{2} + \\ & + \sum_{u=2}^{N_E-1} \Phi(\zeta_x - \xi_{xu}, \zeta_y - \xi_{yu}) \frac{\Delta t_u + \Delta t_{u-1}}{2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\boldsymbol{\xi}_u = [\xi_{xu}, \xi_{yu}]^T$.

В модельном примере можно рассматривать траекторию смаза с точностью до пикселя, то есть считать, что в каждый момент времени t_u она проходит через центр той фотоприемной ячейки (\hat{p}_u, \hat{q}_u) , внутрь которой попала точка ξ_u . В этом приближении каждое значение ξ_u в расчетной формуле (18) заменяется на $\xi_u \mapsto a[\Delta p_u + 0,5 \Delta q_u + 0,5]^T$, где $\Delta p_u = \hat{p}_u - h_O$, $\Delta q_u = \hat{q}_u - w_O$. Индексы (\hat{p}_u, \hat{q}_u) рассчитываются согласно (4):

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_u \\ \hat{q}_u \end{bmatrix} = \text{floor} \left(\frac{\xi_u}{a} + \begin{bmatrix} h_O \\ w_O \end{bmatrix} \right), u = 0 \dots N_E.$$

После такой замены (18) приобретает вид

$$\tilde{H}(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q}) = \frac{\Phi(0)\Delta t_1}{2} + \sum_{u=1}^{N_E-1} \Phi(u) \frac{\Delta t_u + \Delta t_{u+1}}{2} + \frac{\Phi(N_E)\Delta t_{N_E}}{2}, \quad (19)$$

где $\Phi(u) = \Phi(a(\hat{h} - \hat{p}_u), a(\hat{w} - \hat{q}_u))$. Окончательное выражение для ядра смаза в цифровом изображении получается после нормировки (19) к единице:

$$H(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q}) = \frac{\tilde{H}(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q})}{\sum_{\hat{h}=0}^{H-1} \sum_{\hat{w}=0}^{W-1} \tilde{H}(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q})}.$$

3.3. Обнаружение смазанных изображений звезд

Смазанное изображение звезды, соответствующее выделенной траектории смаза на рис. 3, а, показано на рис. 4. Черная линия – траектория смаза, начало траектории в центре начального пикселя выделено черным кружком. Красный квадрат обозначает ярчайший пиксель в цифровом изображении. Положение ярчайшего пикселя заранее не определено и зависит от движения камеры. В данном случае ярчайший пиксель отстоит от начального пикселя (в котором находилось изображение звезды в момент начала экспозиции) примерно на 8 пикселей. Если изображение звезды обнаруживается путем сравнения яркостей отдельных пикселей с адаптивным порогом (так называемый пороговый алгоритм), то, скорее всего, будет найден ярчайший пиксел [37]. Координаты изображения звезды вычисляются по области вокруг ярчайшего пикселя с систематической погрешностью порядка $8a / F \approx 66''$ [35, 38]. Ее величина – переменная и зависит от движения камеры во время экспозиции.

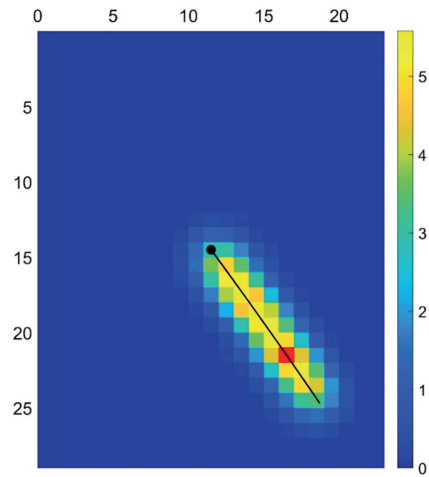


Рис. 4. Пример смазанного изображения звезды без фонового шума. Черная линия – траектория смаза, черный кружок – начало траектории. Красным квадратом обозначен ярчайший пиксель в растре

На рис. 5, а показано то же самое смазанное изображение звезды, к которому добавлен аддитивный шум с отношением «сигнал–шум» (С/Ш) в ярчайшем пикселе незашумленного смазанного изображения:

$$C/Ш = \frac{\text{Величина полезного сигнала в пикселе}}{\text{СКО аддитивного шума}} = 2,25.$$

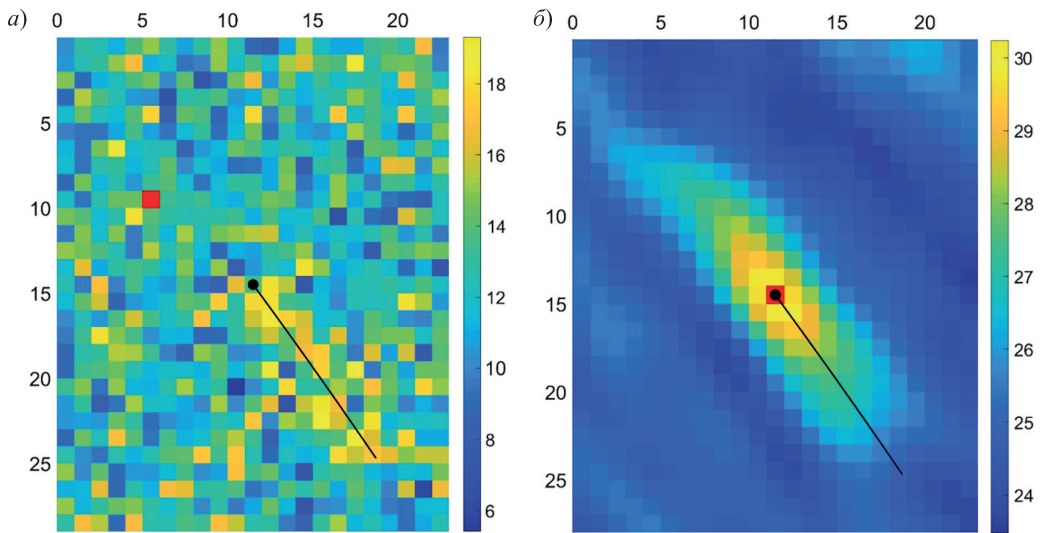


Рис. 5. Согласованная фильтрация смазанного изображения звезды: *a* – исходное изображение звезды с аддитивным шумом; *b* – изображение после согласованной фильтрации

Такое отношение «сигнал–шум», где СКО – среднеквадратическое отклонение, характерно при наблюдении яркой звезды на фоне дневного неба. Смазанное изображение звезды перестает быть визуально различимым, а ярчайший пиксель раstra вообще ему не принадлежит. В таких условиях либо пороговые алгоритмы не найдут изображение звезды, либо произойдет ложное обнаружение звезды с недостоверным определением ее координат.

Для улучшения обнаруживаемости изображения звезды в шумах может применяться цифровая фильтрация, согласованная со смазом [28, 39]. Под согласованной фильтрацией здесь понимается пропускание зашумленного изображения через цифровой фильтр, вычисляющий корреляцию зашумленного изображения с ядром смаза. Согласованный фильтр неоднороден в плоскости изображения, так как ядро смаза изменяется при переходе от одного пикселя к другому. Если $I^{\text{blur}}(\hat{h}, \hat{w})$ – значение пикселя (\hat{h}, \hat{w}) в зашумленном цифровом изображении, содержащем смазанные изображения звезд, то результат $I^{\text{filt}}(\hat{p}, \hat{q})$ согласованной фильтрации в пикселе (\hat{p}, \hat{q}) запишется в виде корреляционной суммы:

$$I^{\text{filt}}(\hat{p}, \hat{q}) = \sum_{\hat{h}=0}^{H-1} \sum_{\hat{w}=0}^{W-1} H(\hat{h}, \hat{w}; \hat{p}, \hat{q}) I^{\text{blur}}(\hat{h}, \hat{w}).$$

После цифровой фильтрации изображения на рис. 5, *a* в профильтрованном изображении появляется локальный максимум, обозначенный красным квадратом (рис. 5, *b*). Этот максимум расположен в начальной точке траектории смаза и соответствует точному наложению смазанного изображения и ядра смаза. Положение локального максимума фиксировано и не зависит от движения камеры во время экспозиции. Теперь изображение звезды может быть обнаружено с помощью пороговых алгоритмов и однозначно локализовано в месте его расположения в момент начала экспозиции.

Заключение

В статье предложена новая форма постановки задачи нахождения траектории смаза в цифровом изображении, сводящаяся к системе дифференциальных уравнений, которые явным образом связывают координаты геометрического изображения точечного источника света и измерения инерциальных датчиков. Такая форма постановки задачи названа в статье специальной задачей инерциальной навигации. Если расстояние до источника велико, то специальная задача содержит только уравнение для траектории смаза. При конечном расстоянии до источника в систему уравнений дополнительно включаются уравнения для дальности источника и векторов ускорения свободного падения и скорости движения камеры, записанные в системе координат камеры.

Предлагаемый подход отличается от распространенной постановки задачи нахождения траектории смаза для его последующей коррекции. В известной постановке требуется найти значения перемещения и приращения ориентации камеры в дискретные моменты времени внутри интервала экспозиции. Эти значения вычисляются в результате решения обычной задачи инерциальной навигации, то есть бесплатформенной инерциальной навигации в общепринятом смысле. Из полученного набора значений вычисляется последовательность операторов проективного преобразования, которая применяется для расчета дискретных точек на траектории смаза.

Теоретическая значимость специальной задачи состоит в том, что она связывает координаты точки в плоскости изображения с измерениями инерциальных датчиков в пространстве предметов непосредственно, без использования промежуточных параметров ориентации камеры. Эта связь позволяет рассматривать траекторию смаза как плоскую фазовую траекторию системы из двух дифференциальных уравнений. Хорошо разработанные методы анализа систем дифференциальных уравнений в фазовом пространстве позволяют единообразно описывать структуры смазов в различных областях изображения и легко находить стационарные точки, где смаз отсутствует.

Практически специальная задача представляет интерес для систем технического зрения, которые не требуют восстановления художественного качества смазанного изображения. Под художественным качеством здесь понимается субъективное соответствие между сценой из пространства предметов, которую видит наблюдатель, и изображением этой сцены, полученным цифровой камерой. Численное решение системы дифференциальных уравнений смаза позволяет гибко выбирать шаг интегрирования и порядок приближения искомой траектории по сравнению с единообразным применением предвычисленной последовательности проективных преобразований. Кроме того, специальная задача дает возможность несколько экономить аппаратные ресурсы вычислителя: для ее решения не требуется хранить в памяти набора проективные коэффициенты, вычисленные для всех шагов интегрирования внутри интервала экспозиции.

Специальная задача решается после завершения экспозиции очередного кадра, во время которой в памяти вычислителя накапливаются инерциальные измерения. Начальной точкой решения является момент начала экспозиции, конечной – момент ее завершения. Специальная задача решается на коротком промежутке времени экспозиции для каждого кадра в отдельности, а не в течение всего периода движения камеры.

Назначение начальных условий для специальной задачи в случае удаленного источника света не требует никакой дополнительной информации от внешних

источников. Необходимы только координаты ожидаемого изображения источника света в момент начала экспозиции. Если расстояние до источника света конечно, то нужно знать начальные значения для ориентации камеры, дальности источника света и вектора скорости камеры в момент начала экспозиции. Эти параметры в самой инерциально-оптической системе не определяются и должны предоставляться внешними источниками информации.

Траектории смазов, начинающиеся в различных точках плоскости МФП, в общем случае не совпадают между собой. В связи с этим специальная задача инерциальной навигации решается для каждого ожидаемого геометрического изображения источника света в отдельности. Из траектории смаза для выбранной точки МФП синтезируется его ядро, которое начинается в этой точке и содержит все необходимые данные для алгоритмической коррекции смаза.

Ядро смаза можно использовать для согласованной с ним цифровой фильтрации зашумленного изображения. Если в каком-то из пикселей начинается траектория смаза для точечного источника, то благодаря согласованной фильтрации в этом пикселе возникает корреляционный максимум. Наличие выделенного максимума облегчает его обнаружение и позволяет однозначно определить координаты изображения точечного источника в момент начала экспозиции независимо от движения камеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Званцев С.П., Иванов П.И., Мерзлютин Е.Ю.** Цифровая стабилизация изображений в условиях запланированного движения // Оптический журнал. 2012. Т. 79. № 11. С. 59–66.
2. **Пашков В.С.** Влияние «смаза» изображения на точность оценки его координат // Механика, управление и информатика (см. в книгах). 2009. №1. С. 225–230.
3. **Пономарёв А.В., Богословский А.В., Жигулина И.В.** Обработка детекторным полем изображений, искаженных смазом // Радиотехника. 2019. Т. 83. №6 (8). С. 216–222. DOI: 10.18127/j00338486-201906(8)-21.
4. **Kornilova, A.V., Kirilenko, I.A., Zabelina, N.I.,** Real-time digital video stabilization using MEMS-sensors, Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS, 2017, vol. 29, no 4, pp. 73–86, doi: 10.15514/ISPRAS-2017-29(4)-5.
5. **Кулакович А.Ю., Баранов Е.Ю.** Оценка зависимостей времени работы алгоритма восстановления и расфокусировки изображений, выполняемого на CPU и GPU // Инженерный вестник Дона. 2019. №1(52). С. 41.
6. **Козак А.В., Штейнберг О.Б., Штейнберг Б.Я.** Алгоритм восстановления смазанного изображения, полученного вращающейся под углом к горизонту камерой // Компьютерная оптика. 2020. Т. 44. №2. С. 229–235. DOI: 10.18287/2412-6179-СО-598.
7. **Смирнов П.В., Ташлинский А.Г.** Алгоритм компенсации смаза изображения движущегося объекта по последовательности кадров // Радиоэлектронная техника. 2013. № 1. С. 141–145.
8. **Смирнов П.В., Ташлинский А.Г.** Алгоритм выделения по последовательности изображений движущегося объекта с компенсацией эффекта «смаза» // Радиоэлектронная техника. 2015. №1 (7). С. 121–130.
9. **Смирнов П.В., Воронов И.В.** Использование оценок поля диспаратности для компенсации эффекта смаза быстро движущихся объектов // Радиоэлектронная техника. 2017. №1(10). С. 106–110.
10. **Кокочкин А.В., Коротков В.А., Новичихин Е.П.** Эффекты полузатенения при восстановлении изображений, искажённых смазом // Журнал радиоэлектроники. 2014. №9. С. 1.
11. **Кокочкин А.В., Коротков В.А., Коротков К.В., Новичихин Е.П.** Восстановление изображений, искаженных дефокусировкой и смазом, без определения вида и параметров аппаратной функции // Радиотехника и электроника. 2019. Т.64. № 6. С. 563–574. DOI: 10.1134/S0033849419060044.
12. **Акименко Т.А., Ларкин Е.В., Лучанский О.А.** Оценка «смаза» изображения в системе технического зрения мобильного колесного робота // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2008. №23. С. 84–87.

13. **Октябрьский В.В., Островский А.С., Саламан Р.С.** Методика компенсации неравномерно распределенного смаза аэрофотоснимков многоматричных цифровых аэрофотоаппаратов планово-перспективной съемки в условиях недостаточной освещенности местности // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2021. №677. С. 107–117.
14. **Иванов П. И.** Использование микроэлектромеханических систем при решении задач цифровой стабилизации видеоизображений // Оптический журнал. 2015. Т. 82. № 8. С. 84–91.
15. **Солдатенков В.А., Грузевич Ю.К., Ачильдиев В.М., Левкович А.Д.** Использование микромеханических гироскопов для электронной стабилизации видеоизображения // XVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. СПб: ЦНИИ «Электроприбор», 2011. С. 92–94.
16. **Гегарт А.Я., Колосов М.П.** Особенности проектирования линзовых объективов звездных приборов ориентации космических аппаратов // Оптический журнал. 2015. Т. 82. №6. С. 36–41.
17. **Кобер В.И., Карнаухов В.Н.** Восстановление мультиспектральных изображений, искаженных пространственно-неоднородным движением камеры // Информационные процессы. 2015. Т. 15. №2. С. 269–277.
18. **Карнаухов В.Н., Кобер В.И.** Анализ характеристик линейных искажений в задачах восстановления мультиспектральных изображений // Информационные процессы. 2017. Т. 17. №2. С. 114–122.
19. **Hartley, R., Zisserman, A.,** Multiple view geometry in computer vision (2nd ed), Cambridge: Cambridge University Press, 2004, 655 p., doi: 10.1017/CBO9780511811685.
20. **Hu, Z., Yuan, L., Lin, S., Yang, M.H.,** Image Deblurring using Smartphone Inertial Sensors, IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Las Vegas, NV, USA, 2016, pp. 1855–1864, doi: 10.1109/CVPR.2016.205.
21. **Joshi, N., Kang, S.B., Zitnick, C.L., Szeliski, R.,** Image Deblurring using Inertial Measurement Sensors, ACM Transactions on Graphics, 2010, vol. 29, no. 4, pp. 1–9, doi: 10.1145/1778765.1778767.
22. **Soros, G., Munger, S., Beltrame, C., Humair, L.,** Multiframe Visual-Inertial Blur Estimation and Removal for Unmodified Smartphones, Journal of WSCG, 2015, vol. 22, no. 2, pp. 101–109.
23. **Lee, K., Ban, Y., Kim, C.,** Motion Blur Kernel Rendering Using an Inertial Sensor: Interpreting the Mechanism of a Thermal Detector, Sensors, 2022, vol. 22, no. 5, 1893, doi: 10.3390/s22051893.
24. **Ji, S., Hong, J.P., Lee, J., Baek, S.J., Ko, S.J.,** Robust Single Image Deblurring Using Gyroscope Sensor, IEEE Access., 2021, vol. 9, pp. 80835–80846, doi: 10.1109/ACCESS.2021.3084968.
25. **Mustaniemi, J., Kannala, J., Sarkk, S., Matas, J., Heikkila, J.,** Gyroscope-Aided Motion Deblurring with Deep Networks, 2019 IEEE winter conference on applications of computer vision (WACV), 7–11 January 2019, pp. 1914–1922, doi: 10.1109/WACV.2019.00208.
26. **Park, S.H., Levoy, M.,** Gyro-Based Multi-Image Deconvolution for Removing Handshake Blur, IEEE Conference on computer vision and pattern recognition, 23–28 June 2014, pp. 3366–3373, doi: 10.1109/CVPR.2014.430.
27. **Zhang, Y., Hirakawa, K.,** Combining Inertial Measurements With Blind Image Deblurring Using Distance Transform, IEEE Transactions on computer Imaging, 2016, vol. 2, no. 3, pp. 281–293, doi: 10.1109/TCL.2016.2561701.
28. **Василюк Н.Н.** Синтез ядра вращательного смаза в цифровом изображении с использованием измерений трехосного гироскопа // Компьютерная оптика. 2022. Т. 46. №5. С. 763–773. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1081.
29. **Василюк Н.Н.** Коррекция вращательного смаза в изображениях звезд, наблюдаемых астроинерциальным датчиком ориентации на фоне дневного неба // Компьютерная оптика. 2023. Т. 47. №1. С. 79–91. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1141.
30. **Mutlu, M., Saranlı, A., Saranlı, U.,** A Real-Time Inertial Motion Blur Metric: Application to Frame Triggering Based Motion Blur Minimization, 2014 IEEE International conference on robotics and automation (ICRA), 31 May – 7 June 2014, Hong Kong, China, pp. 671–676, doi: 10.1109/ICRA.2014.6906926.
31. **Mutlu, M.,** A novel real-time inertial motion blur metric with applications to motion blur compensation, Master thesis, 2014, Middle East Technical University, p. 90.
32. **Mutlu, M., Melo, V., Vespignani, M., Bernardino, A., Ijspeert, A.J.,** Where to place cameras on a Snake robot: Focus on camera trajectory and motion blur, 2015 IEEE international symposium on safety, security and rescue robotics (SSRR), 18–20 October 2015, West Lafayette, IN, USA. DOI: 10.1109/SSRR.2015.7442948.
33. **Меркулов В.И., Садовский П.А.** Оценивание дальности и ее производных в двухпозиционной пассивной радиолокационной системе // Труды СПИИРАН. 2018. №1 (56). С. 122–143. DOI: 10.15622/sp.56.6.

34. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. М.: Советское радио, 1974. 432 с.
35. Баранов П.С., Манцетов А.А. Оптимизация отношения радиуса кружка рассеяния объектива к размеру пиксела для повышения точности оценки координат изображений малоразмерных объектов // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2016. №2. С. 49–53.
36. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том IV. Оптика. М.: Физматлит, 2005. 792 с.
37. Ежов О.М. Сравнительный анализ алгоритмов обнаружения звезд для приборов ориентации с матрицами ПЗС // Оптический журнал. 1998. №8. С. 56–60.
38. Аванесов Г.А., Кондратьева Т.В., Никитин А.В. Исследование смещения энергетического центра изображений звезд относительно геометрического центра на ПЗС-матрице и коррекция методической ошибки // Механика, управление и информатика (см. в книгах). 2009. №1. С. 421–446.
39. Василюк Н.Н. Электронная коррекция смаза в сканирующей оптико-электронной системе // Электромагнитные волны и электронные системы. 2009. Т. 14. № 12. С. 41–48.

Vasilyuk, N.N. (SPC Elektrooptika, LLC, Moscow, 107076 Russia)

Calculation of Motion Blur Trajectories in a Digital Image as a Special Problem of Inertial Navigation, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2023, vol. 31, no. 1 (120), pp. 120–141.

Abstract. The paper studies the blur trajectory, i.e. the motion of a point light source projection along the image plane. It occurs when the digital camera and the observed scene move relative to each other during exposure. The blur trajectory is calculated by solving a set of differential equations of the point plane motion kinematics, written in terms of the measurements of velocity and specific force vectors. The formulated problem is called the special problem of inertial navigation in order to emphasize its differences from the problem of strapdown inertial navigation in the conventional sense. The set of equations of the special problem is obtained in the image plane coordinates. Model examples of blur trajectories calculation are presented for two limiting cases: a distant star and a close motionless target. In the first case, the possibility of increasing the probability of the star blurry image detection in noise is shown. Also, it is discussed how to eliminate the unpredictable systematic error in measuring the star's coordinates.

Key words: blur, blur kernel, blur correction, star tracker, point target, inertial navigation, matched filter.

Материал поступил 07.10.2022