

А. А. ГОЛОВАН, С. Н. МОРГУНОВА, И. В. СОЛОВЬЕВ, М.А. ШАТСКИЙ

ДЕКОМПОЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В РЕЖИМЕ АСТРОКОРРЕКЦИИ

В статье рассматривается задача оценки ориентации космического аппарата и ее решение путем комплексирования измерительной информации информационно-избыточного гиросприбора и астросистемы. Традиционные методы решения основаны на использовании фильтра Калмана порядка $n + 3$, где $n > 3$ – количество измерительных каналов (гироскопов или датчиков угловой скорости). Численная реализация соответствующего алгоритма на бортовом вычислителе требует значительных вычислительных затрат. Предлагается способ декомпозиции фильтра порядка $n + 3$ на три фильтра второго порядка и $n - 3$ фильтра 1 порядка, позволяющий существенно сократить вычислительную сложность алгоритма без потери точности.

Ключевые слова: ориентация, декомпозированный алгоритм, космический аппарат, астрокоррекция.

Введение

Задача определения ориентации космических аппаратов (КА) является одной из важнейших при обеспечении функционирования аппаратуры КА. В настоящее время для ее решения применяются интегрированные астроинерциальные системы [1–5], аппаратную основу которых составляют датчики угловой скорости (ДУС) или гироскопы, а также астровизирующий датчик. При этом, в силу практических требований к надежности решения навигационной задачи – ориентации КА, может использоваться избыточное число гироскопов. Так, решение задачи ориентации космических аппаратов серий «Арктика-М» и «Электро-Л» в режиме астрокоррекции осуществляется путем комплексной обработки информации информационно-избыточного гиросприбора, число n измерительных осей которого больше трех, и астродатчика, обеспечивающего измерение параметров ориентации (матрицы или кватерниона).

Существующие методы решения задачи астроинерциальной ориентации основаны на применении фильтра Калмана порядка $n+3$ для оценки трех параметров ори-

Голован Андрей Андреевич. Доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией управления и навигации, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва). Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID 0000-0001-5628-248X.

Моргунова Светлана Николаевна. Начальник группы, МОКБ «Марс» – филиал ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова» (Москва).

Соловьев Игорь Валерьевич. Кандидат технических наук, начальник отдела, МОКБ «Марс» – филиал ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова».

Шатский Михаил Александрович. Кандидат технических наук, доцент, заместитель генерального конструктора, МОКБ «Марс» – филиал ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова».

Статья по докладу на 15-й Мультиконференции по проблемам управления, 2022 г.

ентации и n систематических составляющих дрейфов гироскопов [6] при формализации возникающих задач оценивания. При этом фильтр Калмана применяется с использованием обратных связей по текущим оценкам компонент вектора состояния задачи фильтрации [3, 7–9].

Существенно, что реализация фильтра Калмана на аппаратных средствах требует как экономии вычислительных затрат, так и устойчивости вычислений. Были предложены различные подходы, чтобы снизить вычислительную нагрузку при реализации фильтра Калмана, среди которых можно отметить следующие [10, 11]: упрощение модели динамической системы, уменьшение размерности вектора состояния, декомпозиция вектора состояния на ряд подвекторов меньшей размерности, последовательную обработку измерений, использование субоптимальных фильтров.

В настоящее время для эффективной реализации фильтра Калмана применяется U-D-модификация метода квадратного корня [12], устойчивая по отношению к погрешностям машинного округления, в которой отсутствуют операции извлечения квадратного корня и матричного обращения, на каждой итерации алгоритма применяется последовательная по скалярной обработке измерений. Этот вариант U-D-фильтра был реализован в описываемых ниже алгоритмах оценки ориентации.

Следует отметить, что вычислительные затраты при реализации фильтра Калмана нелинейным образом зависят от его размерности. Так, требуемое число ячеек памяти пропорционально квадрату размерности вектора состояния, а число операций сложения и умножения – ее кубу. В связи с этим, если в конкретной задаче оценивания возможно использовать ряд фильтров меньшей размерности, позволяющих решить с требуемой точностью ту же задачу, то такое алгоритмическое решение будет оправдано с точки зрения уменьшения вычислительной нагрузки для бортового компьютера.

В настоящей работе предлагается способ декомпозиции фильтра порядка $n + 3$ на три поканальных фильтра второго порядка и $m = n - 3$ фильтров первого порядка для приборов с $n = 4$ и $n = 6$, применяемых на космическом аппарате «Арктика-М» №2. Декомпозиция исходного алгоритма ориентации на ряд алгоритмов меньшего порядка, как уже отмечалось, позволила существенно сократить вычислительные затраты практически без потери точности при решении задачи ориентации.

При построении декомпозированных алгоритмов оценивания ориентации были задействованы приемы декомпозиции задач оценивания по компонентам вектора измерений. Детали таких приемов описаны, в частности, в [8].

Статья структурирована следующим образом. Сначала приводятся опорные математические соотношения исследуемой задачи. Далее полностью моделируется задача оценки ориентации КА как оценка погрешностей углов ориентации приборного трехгранника при использовании измерений гироскопов и астродатчика. Далее на основе этой модели строятся декомпозированные поканальные алгоритмы оценивания. Описываются некоторые результаты ковариационного анализа точности предлагаемых алгоритмов, а также пример их практического применения. В конце приводятся выводы, а также приложение, где предложен способ построения псевдообратной матрицы и базиса левого нуль-пространства матрицы G .

Опорные математические соотношения задачи ориентации

Обозначим q кватернион ориентации приборной системы координат $Mx_1x_2x_3$ (ПСК) гироскопа относительно инерциальной системы координат, M – приведен-

ный центр гиросприбора, $\omega_{3 \times 1}$ – вектор абсолютной угловой скорости ПСК, $\omega'_{n \times 1}$ – вектор, составленный из показаний n гироскопов, $b_{n \times 1}$ – вектор дрейфов гироскопов, моделируемый как интеграл от белого шума $w_{n \times 1}$, $g_i, i = 1, \dots, n$ – единичные векторы, задающие направления измерительных осей гироскопов в ПСК, и $G_{n \times 3} = (g_1^T, \dots, g_n^T)^T$. Принимается следующая модель измерений гиросприбора:

$$\omega' = G\omega + b + v, \quad (1)$$

$$\dot{b} = w, \quad (2)$$

где $v = v(t)$, $w = w(t)$ – белые гауссовские шумы с заданными априорными характеристиками:

$$E\{v\} = 0_{n \times 1}, \quad E\{v(t+\tau)v^T(\tau)\} = \sigma_v^2 I_{n \times n} \delta(\tau),$$

$$E\{w\} = 0_{n \times 1}, \quad E\{w(t+\tau)w^T(\tau)\} = \sigma_w^2 I_{n \times n} \delta(\tau),$$

где $E\{\dots\}$ – символ математического ожидания, I – единичная матрица.

Из (1) в случае равноточных измерений ДУС (модель v) следует выражение для оценки угловой скорости $\tilde{\omega} = G^+ \omega'$, где $G^+ = (G^T G)^{-1} G^T$ – псевдообратная матрица для матрицы G .

Поскольку матрица G имеет размерность $n \times 3$, существуют линейные комбинации проекций вектора угловой скорости на измерительные оси $\omega_{(n \times 1)}^g = G\omega_{3 \times 1}$, тождественно равные нулю. Эти линейные комбинации находятся в правом нуль-пространстве матрицы G^+ (левом нуль-пространстве матрицы G), размерность которого равна $m = n - 3$. Линейные комбинации проекций вектора угловой скорости и соответствующие линейные комбинации инструментальных погрешностей не наблюдаемы по измерениям параметров ориентации. Для обеспечения наблюдаемости всех n дрейфов поступим следующим образом [6].

Введем ортонормированный базис $N_{n \times m} = (n_1, \dots, n_m)$ ($m = n - 3$) левого нуль-пространства матрицы G , определяемый соотношениями

$$N_{m \times n}^T G_{n \times 3} = 0_{m \times 3}, \quad N_{m \times n}^T N_{n \times m} = I_{m \times m}.$$

Существует m линейных комбинаций проекций угловой скорости ω на измерительные оси, тождественно равных нулю, которые определяются уравнениями

$$N_{m \times n}^T G_{n \times 3} \omega_{3 \times 1} = 0_{m \times 1}.$$

Способ нахождения базиса нуль-пространства N и псевдообратной матрицы G^+ приведен в приложении. Это уравнение будет служить основой для построения фильтров первого порядка.

Поведение кватерниона ориентации в непрерывном времени t определяется кинематическим уравнением

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega(t) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes q(t),$$

где знак \otimes обозначает композицию кватернионов, которая для двух произвольных нормированных кватернионов \mathbf{p} и \mathbf{q} вычисляется по следующему правилу:

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_4 & p_3 & -p_2 & p_1 \\ -p_3 & p_4 & p_1 & p_2 \\ p_2 & -p_1 & p_4 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}.$$

Введем вычисляемый при помощи показаний гиросприборов ω' кватернион q' . Имеем:

$$\dot{q}'(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes q'(t).$$

Кватернион q' характеризует вычисленную ориентацию ПСК – трехгранника $Mx'_1x'_2x'_3$ при помощи показаний гиросприбора.

Введем вектор малого поворота $\delta\theta(t) = (\delta\theta_1(t), \delta\theta_2(t), \delta\theta_3(t))^T$, характеризующий взаимную ориентацию трехгранников $Mx'_1x'_2x'_3$ и $Mx_1x_2x_3$, а также соответствующий ему кватернион малого поворота

$$\delta q(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\|\delta\theta(t)\|^2}{4}}} \begin{pmatrix} \delta\theta(t)/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поведение вектора малого поворота во времени описывается известной в инерциальной навигации [8] моделью поведения кинематической погрешности

$$\delta\dot{\theta}(t) = [\tilde{\omega}(t)]\delta\theta(t) - \varepsilon(t), \tag{3}$$

где в рассматриваемой задаче $\tilde{\omega}(t) = G^+ \omega'(t)$, $\varepsilon(t) = G^+(b(t)+v(t))$, $\dot{b}(t) = w(t)$, $v(t)$ – белый шум.

В (3) введено обозначение $[\tilde{\omega}]$ (которое будет использоваться и далее) для кососимметрической матрицы, соответствующей трехмерному вектору $\tilde{\omega}$:

$$[\tilde{\omega}] = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\omega}_3 & -\tilde{\omega}_2 \\ -\tilde{\omega}_3 & 0 & \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 & -\tilde{\omega}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кинематическое уравнение погрешностей (3) будет играть основную роль в построении декомпозированных фильтров второго порядка.

В моменты t_k , $k = 0, 1, \dots$, где $t_k - t_{k-1} = \Delta t$, производятся измерения астродатчика. Предполагается, что его приборная система координат совпадает с ПСК гиросприбора.

Для каждого момента времени астродатчик формирует кватернион q_k^a , который можно рассматривать как измерение z_k истинного кватерниона ориентации q (измерение «в большом»):

$$z_k = q_k^a + r_k^a,$$

где r_k^a – погрешности измерений астродатчика.

На основе сравнения значений кватернионов q_k^a , $q'_k = q'(t_k)$ формируется непосредственное измерение δz_k (3×1) (измерение «в малом») всех трех компонент вектора малого поворота $\delta\theta_k = (\delta\theta_{1,k}, \delta\theta_{2,k}, \delta\theta_{3,k})^T = \delta\theta(t_k)$:

$$q_k^a \otimes q'_k = \delta q_k \approx \left(\delta\theta_{1,k} / 2 \quad \delta\theta_{2,k} / 2 \quad \delta\theta_{3,k} / 2 \quad 1 \right)^T, \quad (4)$$

$$\delta z_k = \delta\theta_k + \delta r_k^a.$$

Будем полагать, что погрешности δr_k^a измерения δz_k являются независимыми дискретными белыми шумами заданной интенсивности:

$$E \left\{ \delta r_{j,k}^a \left(\delta r_{j,k}^a \right)^T \right\} = R_a \delta_{ij}, \quad R_a = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a^2 \end{pmatrix},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Требуется построить алгоритм оценивания параметров $\delta\theta_k$, $b_k = b(t_k)$ и, как следствие, оценку \tilde{q}_k кватерниона ориентации q_k при помощи измерений δz_k .

Вернемся к моделям (2), (3), (4) задачи оценивания погрешностей ориентации и дрейфов гироскопов. Выделим два обстоятельства.

1. Подобная задача может решаться в так называемом разомкнутом варианте, когда только строятся оценки $\delta\tilde{\theta}$, \tilde{b} ее параметров. Второй вариант основан на применении обобщенного фильтра Калмана с замыканием оценок в обратной связи на каждом шаге поступления измерительной информации, как это делается, например, в морской навигации в автономном или обсервационном режиме функционирования навигационного комплекса [7]. Нами используется именно этот известный подход. В соответствии с ним в замкнутом варианте реализации уже дискретного алгоритма оценивания вместо оценок $\delta\tilde{\theta}$, \tilde{b} (индекс времени k пока опускаем) будут фигурировать оценка кватерниона \tilde{q} , остаточная погрешность оценки $\delta\tilde{\theta}$ ориентации, интегральная оценка дрейфов \tilde{b} и остаточная погрешность $\delta\tilde{b}$ оценок дрейфов \tilde{b} .

2. Если рассмотреть скалярную форму записи соотношений (3), (4), то их можно сгруппировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta}_1 &= \varepsilon_1 + \underline{\omega_3\delta\theta_2 - \omega_2\delta\theta_3}, \quad \delta z_1(t_k) = \delta\theta_1(t_k) + r_{1,k}, \\ \delta\dot{\theta}_2 &= \varepsilon_2 - \underline{\omega_3\delta\theta_1 + \omega_1\delta\theta_3}, \quad \delta z_2(t_k) = \delta\theta_2(t_k) + r_{2,k}, \\ \delta\dot{\theta}_3 &= \varepsilon_3 + \underline{\omega_2\delta\theta_1 - \omega_1\delta\theta_2}, \quad \delta z_3(t_k) = \delta\theta_3(t_k) + r_{3,k}. \end{aligned}$$

Подчеркнутые члены указывают на перекрестные связи в динамике с другими компонентами вектора малого поворота. Тогда декомпозированный, поканальный алгоритм оценивания, например, параметра $\delta\theta_1$, выглядит таким образом:

$$\delta\ddot{\theta}_1 = \ddot{\mu}_1 + \underline{\omega_3\delta\ddot{\theta}_2 - \omega_2\delta\ddot{\theta}_3} + K_{\delta\theta_1} \left(\delta z_1 - \delta\tilde{\theta}_1 \right), \quad \mu_1 = \gamma_1^T b,$$

где γ_1^T – первая строка матрицы G^+ , а подчеркнутые члены играют роль известного управления, вычисляемого по оценкам $\delta\tilde{\theta}_2$, $\delta\tilde{\theta}_3$, полученным аналогичными поканальными фильтрами.

Следовательно, показана потенциальная возможность применения декомпозированных по компонентам вектора измерения $\delta z = (\delta z_1, \delta z_2, \delta z_3)^T$ алгоритмов оценивания, решающих исходную задачу. Это прием и был использован в статье.

Полная модель задачи оценивания

Сформулируем сначала решаемую задачу фильтрации для непрерывного времени. Введем $(n+4)$ -компонентный вектор $x(t) = (q^T(t) \ b^T(t))^T$. Оценки этих параметров будем обозначать $\tilde{x}(t) = (\tilde{q}^T(t) \ \tilde{b}^T(t))^T$.

Уравнения динамической системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega(t) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes q(t), \\ \dot{b}(t) &= w(t). \end{aligned}$$

Уравнение дискретных измерений – $z_k = q_k^a + r_k^a$.

Уравнения поведения во времени параметров $\tilde{x}(t)$, $\omega_c(t)$ следующие:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}}(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \tilde{q}(t), \\ \dot{\tilde{b}}(t) &= 0, \\ \omega_c(t) &= G^+ (\omega'(t) - \tilde{b}(t)), \end{aligned}$$

где $\omega_c(t)$ – расчетная угловая скорость.

Здесь и далее полагается, что для формирования оценок параметров $q(t)$ и $b(t)$ используется фильтр Калмана с обратными связями по текущим оценкам погрешностей ориентации приборной системы координат и оценкам \tilde{b} дрейфов гироскопов.

Заметим, что ковариационная матрица погрешностей оценок

$$D_{(4+n) \times (4+n)} = E \{ \Delta x(t) \Delta x^T(t) \},$$

где $\Delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t) = (\Delta q(t) \ \Delta b(t))^T$, является вырожденной. Причина этого состоит в том, что четыре компоненты кватерниона q связаны соотношением нормировки $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$, варьируя которое, можем получить (с точностью до членов второго порядка малости относительно Δq – погрешности оценки кватерниона q)

$$\Delta q^T q = 0. \tag{5}$$

В самом деле, ненулевой вектор $a = (q_{1 \times 4}^T \ 0_{1 \times n})^T \neq 0$ является нуль-вектором матрицы D :

$$Da = E \{ \Delta x \Delta x^T \} a = E \{ \Delta x \Delta x^T a \} = E \{ \Delta x (\Delta q^T q + \Delta b^T 0_{n \times 1}) \} = 0_{(4+n) \times 1}$$

в силу соотношения (5). Вследствие накопления вычислительных ошибок вырожденная ковариационная матрица может стать отрицательно определенной. Наиболее простой способ избежать вырожденности ковариационной матрицы – представить ее как матрицу меньшей размерности.

Для этого введем $(n+3)$ -компонентный вектор $\delta x(t)$ погрешностей оценок ориентации и дрейфов:

$$\delta x(t) = (\delta \theta^T(t) \ \delta b^T(t))^T,$$

где вектор $\delta\theta(t) = (\delta\theta_1(t), \delta\theta_2(t), \delta\theta_3(t))^T$ угловых погрешностей ориентации приборного трехгранника определяется через кватернион погрешности $\delta q(t)$ как

$$q(t) = \delta q(t) \otimes \tilde{q}(t),$$

$$\delta q(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta\theta(t)^2}{4}}} \begin{pmatrix} \delta\theta(t)/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

с точностью до членов второго порядка малости по δq :

$$\delta\theta_1(t) = 2\delta q_1(t), \quad \delta\theta_2(t) = 2\delta q_2(t), \quad \delta\theta_3(t) = 2\delta q_3(t).$$

Вектор погрешности оценки дрейфов гироскопов имеет вид:

$$\delta b(t) = b(t) - \tilde{b}(t).$$

С учетом (3) компоненты вектора погрешностей $\delta\theta(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\delta\dot{\theta}(t) = [\omega(t)]\delta\theta(t) - G^+ (\delta b(t) + v(t)), \quad (6)$$

$$\delta\dot{b}(t) = w(t). \quad (7)$$

Уравнения (6)–(7) можно записать в виде

$$\delta\dot{x}(t) = F\delta x(t) + C\xi(t),$$

где $\xi(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} [\omega(t)] & -G^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -G^+ & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

Ковариационная матрица $P(t)$ погрешностей оценок определяется следующим образом:

$$P(t) = E\{\delta x(t)\delta x^T(t)\}.$$

Будем использовать дискретный фильтр Калмана в упомянутом выше замкнутом варианте решения задачи оценивания с замыканием оценок в обратной связи на каждом шаге поступления измерительной информации.

Введем обозначения:

$x_{k|k-1} = (q_{k|k-1}^T, b_{k|k-1}^T)^T$, $x_{k|k} = (q_{k|k}^T, b_{k|k}^T)^T$ – априорная и апостериорная оценки кватерниона ориентации и вектора дрейфов;

$\omega_{k|k-1} = G^+ (\omega'_k - b_{k|k-1})$, $\omega_{k|k} = G^+ (\omega'_k - b_{k|k})$ – априорная и апостериорная оценки угловой скорости;

$P_{k|k-1}$, $P_{k|k}$ – априорная и апостериорная оценки ковариационной матрицы.

Кватернион погрешности и вектор погрешностей оценок дрейфов в силу сделанного замечания о применении обратных связей по оценкам фильтра Калмана удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\delta q_{k|k-1} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta b_{k|k-1} = 0_{n \times 1},$$

$$x_{k|k} = \begin{pmatrix} q_{k|k} \\ b_{k|k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta q_{k|k} \otimes q_{k|k-1} \\ b_{k|k-1} + \delta b_{k|k} \end{pmatrix}.$$

Поскольку дрейфы гироскопов полагаются постоянными на интервале $[t_{k-1}, t_k]$ в силу уравнений (6), можно выполнить интегрирование уравнения (6) как линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и получить его точное решение в виде

$$q_{k|k-1} = \left(\cos \frac{\varphi}{2} I_{4 \times 4} + \sin \frac{\varphi}{2} \Omega_{4 \times 4}(l) \right) q_{k-1},$$

где $\varphi = \|G^+(\omega'_{k-1} - b_{k-1|k-1})\| \Delta t$ – угол поворота,

$l = \frac{G^+(\omega'_{k-1} - b_{k-1|k-1})}{\|G^+(\omega'_{k-1} - b_{k-1|k-1})\|}$ – единичный вектор оси поворота,

$$\Omega(l) = \begin{pmatrix} 0 & l_3 & -l_2 & l_1 \\ -l_3 & 0 & l_1 & l_2 \\ l_2 & -l_1 & 0 & l_3 \\ -l_1 & -l_2 & -l_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение прогноза вектора дрейфов гироскопов имеет вид:

$$b_{k|k-1} = b_{k-1|k-1}.$$

Прогнозируемые на момент t_k компоненты вектора погрешностей по определению равны нулю:

$$\delta x_{k|k-1} = \begin{pmatrix} \delta \theta_{k|k-1} \\ \delta b_{k|k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ 0_{n \times 1} \end{pmatrix}.$$

Переходная матрица дискретного фильтра Калмана $\Phi_{k|k-1}$ определяется следующим образом:

$$\Phi_{k|k-1} = \exp(F(t_{k-1})\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (F(t_{k-1})\Delta t)^n.$$

Можно показать, что суммирование бесконечного ряда с учетом свойств кососимметрической матрицы $[\omega]$ приводит к следующему результату:

$$\Phi_{k|k-1, (3+n) \times (3+n)} = \begin{pmatrix} \Phi_{11, 3 \times 3} & \Phi_{12, 3 \times n} \\ 0_{n \times 3} & I_{n \times n} \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{11, 3 \times 3} = I_{3 \times 3} + \frac{\sin \| \omega_{k-1} \| \Delta t}{\| \omega_{k-1} \|} [\omega_{k-1}] + \frac{1 - \cos \| \omega_{k-1} \| \Delta t}{\| \omega_{k-1} \|^2} [\omega_{k-1}]^2,$$

$$\Phi_{12, 3 \times n} = - \left(I_{3 \times 3} \Delta t + \frac{1 - \cos \| \omega_{k-1} \| \Delta t}{\| \omega_{k-1} \|^2} [\omega_{k-1}] + \frac{\| \omega_{k-1} \| \Delta t - \sin \| \omega_{k-1} \| \Delta t}{\| \omega_{k-1} \|^3} [\omega_{k-1}]^2 \right) G_{3 \times n}^+.$$

Эту же модель можно получить путем рассмотрения уравнения (6) в качестве линейного неоднородного дифференциального с постоянными коэффициентами.

Матрицу шума системы запишем как

$$Q_{k,(3+n)\times(3+n)} = M \left\{ (C\xi_k)(C\xi_k)^T \right\} = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 G^+ (G^+)^T & 0_{3\times n} \\ 0_{n\times 3} & \sigma_w^2 I_{n\times n} \end{pmatrix} \Delta t.$$

Кватернион малого поворота

$$\delta q_k^a = q_k^a \otimes q_{k|k-1}^{-1} \approx \begin{pmatrix} \delta\theta_k^a / 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

представляет собой невязку между прогнозируемым кватернионом и кватернионом астродатчика, $\delta\theta_k^a$ – угол малого поворота, соответствующий кватерниону δq_k^a .

Определим измерение δz следующим образом:

$$\delta z_{k,n\times 1} = \begin{pmatrix} \delta\theta_{k,3\times 1}^a \\ \delta z_{k,m\times 1}^{(0)} \end{pmatrix} + r_{n\times 1}^*, \quad (8)$$

где $\delta z_{k,m\times 1}^{(0)} = N_{m\times n}^T (\omega'_k - b_{k|k-1}) = 0_{m\times 1}$.

Уравнение измерений:

$$\delta z_{k,n\times 1} = H_{n\times(3+n)} \delta x_{k,(3+n)\times 1} + r_{n\times 1}^*.$$

Таким образом, матрица измерений имеет вид:

$$H_{(3+n)\times(3+n)} = \begin{pmatrix} I_{3\times 3} & 0_{3\times n} \\ 0_{m\times 3} & N_{m\times n}^T \end{pmatrix}.$$

Случайной погрешности измерения r^* соответствует матрица интенсивности $R_{n\times n}^*$:

$$R_{n\times n}^* = \begin{pmatrix} R_{a,3\times 3} & 0_{3\times m} \\ 0_{m\times 3} & \sigma_v^2 I_{m\times m} \end{pmatrix}.$$

Вычислим оценки:

$$\delta x_{k|k} = K_k \delta z_k, \quad (9)$$

$$\delta q_{k|k} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\delta\theta_{k|k}\|^2 / 4}} \begin{pmatrix} \delta\theta_{k|k} / 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$b_{k|k} = b_{k|k-1} + \delta b_{k|k}, \quad (11)$$

$$\omega_{c,k} = G^+ (\omega'_k - b_{k|k}), \quad (12)$$

где K_k – соответствующий моделям задачи оценивания калмановский коэффициент усиления.

Таким образом, размерность вектора состояния полной задачи оценивания равна $n+3$, а размерность вектора измерений – n .

Декомпозированный алгоритм

Воспользуемся декомпозированным представлением исходной задачи оценивания, основанном на структурной декомпозиции модели динамической системы (6)–(7) и измерений (8).

Обозначим $\gamma_1^T, \gamma_2^T, \gamma_3^T$ строки матрицы G^+ . Введем новые переменные

$$\mu_1 = \gamma_1^T b, \mu_2 = \gamma_2^T b, \mu_3 = \gamma_3^T b, v_i = n_i^T b, i = 1, \dots, m = n - 3$$

и составим из них вектор $\beta_{n \times 1} = (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad v_1 \quad \dots \quad v_m)^T$ и соответствующий вектор погрешностей $\delta\beta_{n \times 1}$. Тогда

$$\beta = Bb, \tag{13}$$

где матрица

$$B_{n \times n} = (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad n_1 \quad \dots \quad n_m)^T$$

не вырождена в силу конфигурации измерительных осей.

Переход от новых переменных β к физическим дрейфам измерительных каналов b осуществляется по формуле $b = B^{-1}\beta$.

Матрица B^{-1} для конкретного прибора вычисляется на Земле и включается в состав его паспортных параметров. Таким образом, решение системы линейных алгебраических уравнений (13) на борту не производится.

Поскольку в полной модели задачи угловые погрешности $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3$ взаимосвязаны в соответствии с кинематическим уравнением (6), то при декомпозированном представлении в каждом канале мы будем использовать оценки переменных других каналов как управления.

Введем три вектора состояния фильтров второго порядка для оценки векторов состояния $\delta x_1 = (\delta\theta_1 \quad \delta\mu_1)^T, \delta x_2 = (\delta\theta_2 \quad \delta\mu_2)^T, \delta x_3 = (\delta\theta_3 \quad \delta\mu_3)^T$ по измерениям

$$\delta z_1 = \delta\theta_{1,k}^a = 2\delta q_{1,k}, \quad \delta z_2 = \delta\theta_{2,k}^a = 2\delta q_{2,k}, \quad \delta z_3 = \delta\theta_{3,k}^a = 2\delta q_{3,k}$$

соответственно и m фильтров первого порядка для оценки величин δv_j по измерениям $\delta z_j^{(0)} = n_j^T \omega' - v_j = 0, j = 1, \dots, m$.

Эти фильтры на каждом шаге по времени реализуются последовательно, один за другим. Уравнения динамической системы для фильтров второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta}_i &= u_i - \delta\mu_i + v_i, \\ \delta\dot{\mu}_i &= w_i, \end{aligned} \tag{14}$$

$i = 1, 2, 3$, где параметры

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_3 \delta\theta_2 - \omega_2 \delta\theta_3, \\ u_2 &= -\omega_3 \delta\theta_1 + \omega_1 \delta\theta_3, \\ u_3 &= \omega_2 \delta\theta_1 - \omega_1 \delta\theta_2 \end{aligned}$$

рассматриваются как известные управления в (14). При реализации фильтров в дискретной форме их значения на каждом шаге по времени формируются по оценкам угловых погрешностей и угловой скорости (9)–(12), полученным на предыдущем шаге.

Переходные матрицы фильтров второго порядка имеют вид

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

матрицы измерений – $H_i = (1 \ 0)$, $i = 1, 2, 3$, параметры интенсивностей шумов измерений – $r_i = \sigma_a^2$.

Переходные матрицы и матрицы измерений фильтров первого порядка равны 1, параметры интенсивностей шумов измерений – $r_j = \sigma_v^2$, $j = 1, \dots, m$.

В бортовом алгоритме для повышения численной устойчивости фильтры реализованы методом UDU^T -разложения [12].

Размерность векторов состояния декомпозированных фильтров второго порядка равна 2, размерность векторов измерений – 1.

Ковариационная оценка точности декомпозированного алгоритма

Проведем ковариационный анализ относительных погрешностей оценок ориентации при использовании полного и редуцированного алгоритмов. Введем относительные погрешности Δx_k как разности между погрешностями полного δx_k и декомпозированного $\delta \tilde{x}_k$ алгоритмов: $\Delta x_k = \delta x_k - \delta \tilde{x}_k$.

Тогда

$$\Delta x_{k|k} = \delta x_{k|k} - \delta \tilde{x}_{k|k} = K_k z_k - \tilde{K}_k z_k = \Delta K_k z_k,$$

где \tilde{K}_k – матрица коэффициентов усиления декомпозированного алгоритма. Поскольку нас интересуют прежде всего погрешности оценок ориентации, которые входят в состав векторов состояния фильтров второго порядка, сформируем матрицу \tilde{K}_k следующим образом:

$$\tilde{K}_k = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_1^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{K}_1^{(3)} \\ \tilde{K}_2^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{K}_2^{(3)} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{K}^{(i)} = (\tilde{K}_1^{(i)} \ \tilde{K}_2^{(i)})^T$, $i = 1, 2, 3$ – коэффициенты усиления фильтров второго порядка. Тогда

$$\Delta K_k = \begin{pmatrix} K_{11} - \tilde{K}_1^{(1)} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} - \tilde{K}_1^{(2)} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} - \tilde{K}_1^{(3)} \\ K_{41} - \tilde{K}_2^{(1)} & K_{42} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} - \tilde{K}_2^{(2)} & K_{53} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} - \tilde{K}_2^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Введем ковариационную матрицу \mathbf{P}_{Δ} для вектора $\Delta\mathbf{x}$:

$$\mathbf{P}_{\Delta,k} = M \left\{ \Delta\mathbf{x}_{k|k} \Delta\mathbf{x}_{k|k}^T \right\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}_{\Delta,k} = \Delta\mathbf{K}_k \mathbf{R}_a \Delta\mathbf{K}_k^T. \quad (15)$$

Пример практического применения

В состав бортового комплекса управления (БКУ) космических аппаратов «Арктика-М» №2 и «Электро-Л» №5 входят гироскопические измерители вектора угловой скорости (ГИВУС) КИНД34-040-01 и КИНД34-081 (НИИ прикладной механики им. академика В.И. Кузнецова), а также астродатчики SED26 (Sodern, ArianGroup, Франция) и ПЗВ 348К (НПП «Геофизика-Космос»). Логика функционирования БКУ предусматривает одновременную работу в контуре управления ГИВУС КИНД34-040-01 и астродатчика SED26, которые являются основными приборами ориентации. Приборы КИНД34-081 и ПЗВ 348К – резервные.

КИНД34-040-01 и КИНД34-081 информационно-избыточны: в первом из них имеется шесть независимых гироскопических каналов измерения угловой скорости, а во втором – четыре (см. рис. 1, 2). Каждый канал обеспечивает измерение проекции вектора угловой скорости КА на его ось чувствительности.

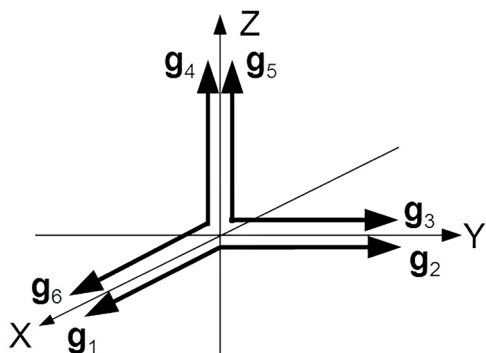


Рис. 1. Конфигурация осей чувствительности прибора КИНД34-040-01

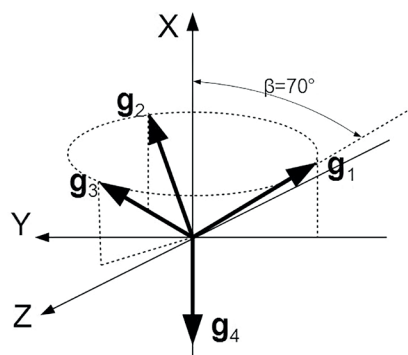


Рис. 2. Конфигурация осей чувствительности прибора КИНД34-081

Номинальные матрицы G имеют вид:

$$G_{(40)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{(81)} = \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \frac{1}{2} \cos \alpha & -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \\ \sin \alpha & \frac{1}{2} \cos \alpha & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где угол $\alpha = 20^\circ$.

Соответствующие псевдообратные матрицы:

$$G_{(40)}^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_{(81)}^+ = \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha}{1 + 3\sin^2 \alpha} & \frac{\sin \alpha}{1 + 3\sin^2 \alpha} & \frac{\sin \alpha}{1 + 3\sin^2 \alpha} & \frac{-1}{1 + 3\sin^2 \alpha} \\ \frac{-2}{3 \cos \alpha} & \frac{1}{3 \cos \alpha} & \frac{1}{3 \cos \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3} \cos \alpha} & \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha} & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.253 & 0.253 & 0.253 & -0.740 \\ -0.709 & 0.355 & 0.355 & 0 \\ 0 & -0.614 & 0.614 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы N , содержащие «нулевые» линейные комбинации дрейфов, имеют следующий вид:

$$N_{(40)}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_{(81)}^T = \frac{1}{\sqrt{3 + 9\sin^2 \alpha}} (1 \ 1 \ 1 \ 3\sin \alpha) \approx \frac{1}{2.013157\dots} (1 \ 1 \ 1 \ 1.0260604\dots)^T.$$

В бортовом алгоритме численные значения элементов матриц G , G^+ и N несколько отличаются от номинальных, поскольку учитывают определяемые в процессе калибровки прибора отклонения направлений измерительных осей относительно идеальных направлений.

Астродатчик SED26 представляет собой моноблок и обеспечивает определение направления оси визирования со среднеквадратической погрешностью (СКП) около 5". Как и у всех приборов с узким полем зрения, точность определения угла поворота вокруг оси визирования значительно ниже (СКП около 40").

Прибор ПЗВ 348К содержит два оптических блока, оси визирования которых направлены под углом около 50° друг относительно друга, и один блок электроники, где производится обработка информации, поступающей от оптических блоков. Наличие двух оптических блоков позволяет обеспечить равноточное определение ориентации относительно трех осей с СКП около 6".

На рис. 3 приведены некоторые результаты моделирования декомпозированного алгоритма на стенде математического моделирования КА «Арктика-М» №2 в режиме комплексования КИНД34-040-01 и ПЗВ 348К, на рис. 4 – разность погрешностей полной и декомпозированной моделей, вычисленная по ковариационной матрице P_{Δ} (15).

Как отмечено во введении, количество операций сложения и умножения пропорционально кубу размерности фильтра. Однако при оценке производительности алгоритма вне зависимости от результата подсчета арифметических операций, требующихся для его выполнения, всегда производится таймирование алгоритма на испытательном стенде с реальным бортовым вычислителем. Оно показало следующие результаты: время реализации полного алгоритма составило 167 мс, декомпозированного – 9,3 мс, т.е. примерно в 18 раз меньше.

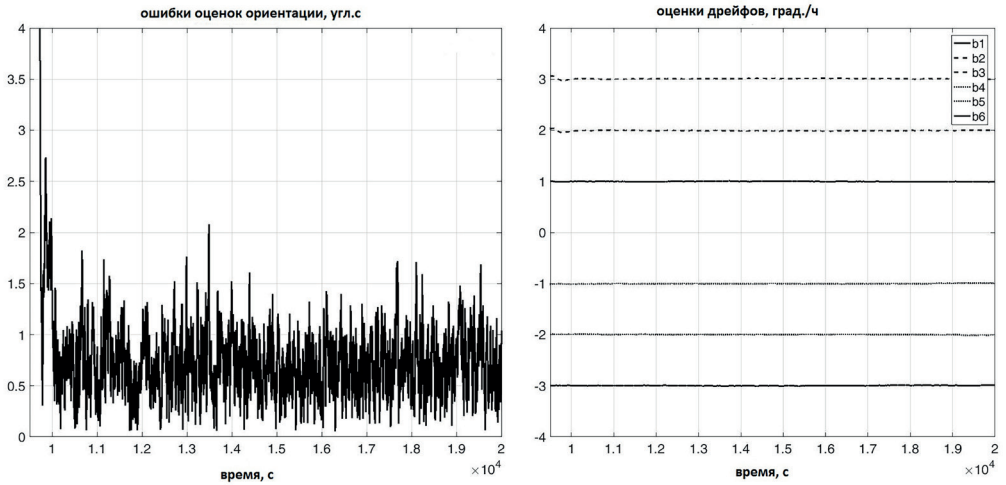


Рис. 3. Погрешность оценки ориентации (слева) и оценки дрейфов шести измерительных каналов (справа)

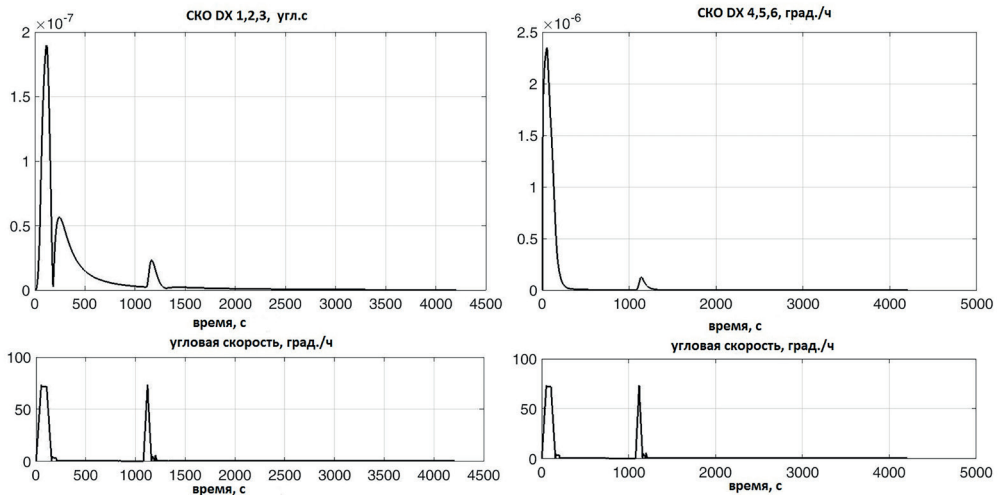


Рис. 4. На верхних графиках: разности СКП полной и декомпозированной моделей по оценкам ориентации (слева) и дрейфов (справа), вычисленные по ковариационной матрице (14).
На нижних графиках: модуль вектора угловой скорости

Выводы

Рассмотрена задача комплексной обработки информации информационно-избыточного гиросприбора и астросистемы с целью оценки ориентации космического аппарата и дрейфов измерительных каналов гиросприбора. Предложен метод декомпозиции фильтра Калмана порядка $n + 3$ на три фильтра второго порядка и $n - 3$ фильтра первого порядка, что позволяет существенно (на порядок) снизить вычислительную сложность алгоритма. Ковариационный анализ точности декомпозированного алгоритма показывает, что при его использовании потери точности оценок ориентации прене-

брежимо малы, это доказывает состоятельность предложенного подхода. Алгоритм отработан на испытательных стендах и внедрен в состав бортового программного обеспечения космических аппаратов «Арктика-М» №2, куда входят два гиросприбора ($n = 4$ и $n = 6$), и «Электро-Л» №5.

Приложение

Ниже предлагается способ построения псевдообратной матрицы и базиса левого нуль-пространства матрицы G [6].

Псевдообратную матрицу и базис левого нуль-пространства матрицы G можно получить, используя ее QR -разложение [13]:

$$G = QR = (Q_1 \quad Q_2) \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} = Q_1 R_1.$$

Так как матрица Q ортогональна, $Q_1^T Q_2 = 0$, $Q_2^T Q_2 = I$.

Определим $N = Q_2$. Тогда $N^T G = 0$, $N^T N = I$, $G^+ = R_1^{-1} Q_1$, $G^+ G = I$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lefferts, E.J., Markley, F.L., Shuster, M.D.**, Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1982, vol. 5, no. 5, pp. 417–429.
2. **Аванесов Г.А., Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Людомирский М.Б., Каюгин И.С., Ямщиков Н.Е.** Автономные бесплатформенные астроинерциальные навигационные системы: принципы построения, режимы работы и опыт эксплуатации // Гироскопия и навигация. 2013. № 3. С. 92–93.
3. **Ивоинин А.Н., Камальдинова Р.А., Моргунова С.Н., Соколов В.Н., Соловьев И.В., Шатский М.А.** Алгоритм оценки ориентации космического аппарата «Спектр-УФ» для режима прецизионного наведения оси телескопа // Авиакосмическое приборостроение. 2020. №12. С. 13–25.
4. **Черенков С.А., Худяков А.А.** О перспективных астрокорректорах астроинерциальных навигационных систем // Труды Московского института электромеханики и автоматики (МИЭА). 2017. Вып. 18. С. 35–42.
5. **LN-120G Stellar-Inertial-GPS Navigation** (электронный ресурс). URL: [https:// www.northropgrumman.com/Capabilities/LN120GStellarInertialNavigationSystem/ Documents/Ln120g.pdf](https://www.northropgrumman.com/Capabilities/LN120GStellarInertialNavigationSystem/Documents/Ln120g.pdf)
6. **Pittelkau, M.E.**, Calibration and Attitude Determination with Redundant Inertial Measurements Units, *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, vol. 28, no. 4, pp. 743–752.
7. **Емельянцеv Г.И., А.П. Степанов.** Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / под общей ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. 394 с.
8. **Голован А.А., Парусников Н.А.** Математические основы навигационных систем. Часть II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации / 2-е издание, исправленное и дополненное. М.: МАКС Пресс, 2012. 172 с.
9. **Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А.** Лекции по механике управляемых систем. М.: КУРС. 2018. 288 с.
10. **Gelb, A.**, *Applied Optimal Estimation*, The M.I.T. PRESS, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 2001.
11. **Grewal, M.S., Andrews, A.P.**, *Kalman Filter: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
12. **Kailath, T., Sayed A.H., Hassibi, B.**, *Linear Estimation. Upper Saddle River*, New Jersey: Prentice Hall, 2000.
13. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления / пер. с англ. М.: Мир, 1999.

Golovan, A.A. (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia), **Morgunova, S.N., Solov'ev, I.V., and Shatskii, M.A.** (Moscow Experimental Design Bureau MOKB Mars – Branch of Dukhov Russian National Research Institute of Automation, Moscow, Russia)

Decomposed Algorithm for Spacecraft Attitude Estimation in Stellar Correction Mode, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2022, vol. 30, no. 4 (119), pp. 71–86.

Abstract. The paper discusses the problem of a spacecraft attitude estimation and its solution by integrating the measurement data from an information-redundant gyro device and a stellar navigation system. The traditional solution methods are based on the use of Kalman filter of $n+3$ order, where $n > 3$ is the number of measurement channels (gyroscopes or angular rate sensors). The numerical implementation of the corresponding algorithm on an onboard computer requires significant computational efforts. To considerably reduce the computational complexity of the algorithm without losing the accuracy, it is proposed to use a method of decomposing the filter of $n+3$ order into three filters of the second order and $n-3$ filters of the first order.

Key words: attitude, decomposed algorithm, spacecraft, stellar correction.

Материал поступил 13.11.2022